université de bretagne occidentale

IREM de Brest

COPIRELEM

ACTES

XXV ème Colloque Inter-IREM
des formateurs et professeurs de mathématiques chargés
de la formation des maîtres

"Evolution de l'enseignement des Mathématiques et de la Formation des maîtres"

Loctudy : 11, 12, 13 Mai 1998

Nous tenons à remercier :

la Direction des Ecoles,
le Conseil Général du Finistère,
l'Université de Bretagne Occidentale et l'IREM de Brest,
l'I.U.F.M de Bretagne et le Site de Quimper,
l'Inspection Académique du Finistère,
les I.U.F.M de toutes les région de France,
la M.G.E.N du Finistère,
le Crédit Agricole du Finistère,

pour l'aide financière et le soutien qui a permis le bon déroulement du Colloque et la publication de ces actes,

Madame Laurans de l'IREM de Brest pour la mise en page.

Passer la main ou passer le témoin

Merci à la COPIRELEM pour ce gage de confiance et d'amitié : « organiser un tel Colloque »
Merci à l'IREM de Brest et à l'Université de Bretagne Occidentale, à l'IUFM de Bretagne et à tous les collègues bretons qui nous ont apporté leur aide précieuse à l'organisation, perpétuant ainsi la tradition de collaboration qui a toujours existé en Bretagne.
Merci au Conseil général du Finistère et à tous les sponsors.
Merci aussi à tous les IUFM qui ont accepté de prendre en charge une partie des participants de leur Académie.
Merci enfin à tous les collègues venus de tous les coins de France avec leurs compétences et leur bonne humeur pour travailler, bien sûr, mais aussi pour découvrir notre beau pays du Bout du Monde « Penn ar Bed ».

A l'heure de « passer la main », comme plusieurs d'entre nous, je voudrais rendre un hommage particulier à Guy.
Même en dehors de la Confrérie des « Didacticiens », Guy Brousseau ne laisse personne indifférent. Il a eu, à mes yeux, le très grand mérite de nous inciter à pousser toujours plus loin notre réflexion, à remettre en cause certaines de nos convictions et surtout à chercher à dépasser les interprétations simplistes des phénomènes d'enseignement. Après certaines de ses interventions percutantes, combien de fois n'ai-je entendu des réflexions dans l'auditoire du type : « *Et dire que dans sa théorie des situations je pensais avoir tout compris !* ».
Il n'est cependant ni « Dieu le Père » ni le « Pape de la Didactique » mais un véritable chercheur, au noble sens du terme, qui passe le témoin en nous confiant une foules d'idées et de pistes à approfondir. Puisse, par exemple, son Ecole Michelet à Talence continuer à être un tel laboratoire riche d'expériences pédagogiques à exploiter.
De la part de nous tous, un grand merci des plus chaleureux à toi Guy.

Ce XXV^{ème} Colloque de Loctudy a été aussi l'occasion d'accueillir un public plus diversifié : des collègues de la Commission 1er Cycle, des enseignants chercheurs, des inspecteurs primaires et des conseillers pédagogiques, des nouveaux et des plus anciens professeurs d'IUFM.
Les attentes sont parfois un peu différentes. Il me paraît important de préciser que ce Colloque n'est pas une université d'été ni un séminaire de didactique. En conséquence, il me semble fortement souhaitable de garder lors des discussions l'écoute et le respect des opinions de tous. Par exemple, les jeunes tenants de la « didactique pure et dure » ne peuvent ignorer l'expérience des anciens. De même les tenants de la « pédagogie pratique » ne peuvent ignorer l'apport des recherches en didactique. L'harmonisation des différents points de vue ne peut se réaliser sans esprit d'amitié et de collaboration entre tous. C'est, à mon avis, un des grands mérites de la COPIRELEM de continuer à développer et organiser de telles rencontres dans un tel esprit.

Ce Colloque a été également l'occasion de retrouvailles et je voudrais témoigner du grand plaisir que nous avons eu par exemple à retrouver André.
André Myx est un ami complice de longue date, un peu fâché avec l'institution, mais à l'esprit toujours en ébullition avec une culture et une expérience inestimable.
C'est donc en pensant à André et surtout à Guy que je pose la question du passage de témoin !

François Huguet

Sommaire

SOMMAIRE

Conférences

Communications

Ateliers

Conférences

Questions de sens. Quelques réflexions à propos de l'usage de théories psychologiques dans l'enseignement des mathématiques

Bernard Sarrazy Université de Bordeaux II

Ce texte comporte deux grandes parties. La première partie correspond à la totalité de la conférence prononcée à Locmdy (le 11/05/1998), à laquelle nous avons rajouté quelques éléments abordés lors la discussion qui suivit l'exposé (certains seront plus développés dans les deux annexes en fin de document) ; dans la seconde partie, nous présentons les principaux résultats de notre recherche directement liés aux analyses de la première partie à propos de la question du sens dans la résolution de problèmes à l'école élémentaire.

oOo

- PARTIE 1 -

" L'élève a intériorisé la règle (interprétée de cette façon) quand il y a réagi de telle et telle façon. Mais ce qui est important, c'est que cette réaction qui nous garantit la compréhension, présuppose certaines circonstances, certaines formes de vie et de langage comme contexte. (Tout comme il n'existe pas d'expression du visage sans visage.) "

Ludwig WITTGENSTEIN

Si la question du sens n'est pas toujours directement l'une des préoccupations centrale ou prioritaire des professeurs dans leur pratique même de l'enseignement, elle constitue en revanche l'une des visées privilégiée, pour ne pas dire *le* mobile même de la plupart des recherches en didactique des mathématiques " Mobile " et non " objet " car étudier les conditions de maintien du sens lors de la diffusion d'une connaissance d'une institution vers une autre ne saurait être entendu comme l'étude du sens même de cette connaissance[1]. Si " mobile " évoque l'idée d'une visée dynamique, d'un mouvement, d'un possible, " objet ", quant à lui, suggère l'idée d'une autonomie, d'une certaine indépendance de la connaissance que les sujets peuvent en avoir. Ainsi " objet " s'oppose-t-il à " sujet " et renvoie l'idée d'une fermeture, d'une clôture[2]. Autrement dit, la question du sens ne saurait directement constituer un objet mais bien un mobile au sens de la visée, celle-ci suppose le détour par l'étude des conditions de constitution ou de maintien du sens. La théorie des situations est à considérer comme ce détour épistémologiquement nécessaire en tant qu'elle passe sous silence ce même qui est visé par l'enseignement, à savoir : la constitution d'un sujet pensant. On doit voir là une raison pour laquelle la didactique ne saurait être conçue comme un modèle praxéologique — entendu ici au sens d'un modèle *pour* (vs de) l'action aussi formalisé et finalisé puisse-t-il être. Pour byzantine que puisse paraître la distinction que nous venons d'introduire, elle n'en est pas moins importante pour alimenter une réflexion à propos de l'usage social (et donc du sens) des productions de la didactique fondamentale — dans la formation des professeurs par exemple. En effet, si le didacticien peut affirmer le caractère nécessaire des conditions d'appropriation et de diffusion, il ne saurait garantir sérieusement au professeur le caractère nécessaire de cette appropriation par l'élève. Cette idée n'est pas nouvelle ; elle apparaît quasiment à la naissance de la didactique avec la critique que G. Brousseau (1986) fit du processus psychodynamique proposé par Z.P. Dienes (1967). Or, c'est précisément cette idée-là qui semble être remise en question depuis *grosso modo* les années 80, date à laquelle l'influence du cognitivisme se manifesta dans les systèmes d'enseignement.

---

1 Est-il même possible d'étudier le sens d'une connaissance indépendamment des usages qu'elle semble rendre possible et par lesquels elle se donne à voir ?

2 La distinction que nous introduisons ici entre " mobile " et " objet " pourrait, d'une certaine manière, rejoindre celle, plus classique, entre savoir et connaissance en tant que le projet didactique s'intéresse ni vraiment à l'un ou l'autre en tant que tels mais aux conditions de possibilités du double processus de conversion de savoir en connaissance (processus de contextualisation et de personnalisation) et de connaissance en savoir (processus de décontextualisation, dépersonnalisation qui intervient entre autres lors des institutionnalisations)

Nous nous attacherons ici à présenter puis à discuter les fondements et les effets sur le système d'enseignement des propositions d'action directement liés à ce mouvement noosphérien qui, bien que se prétendant aussi porteur d'un idéal démocratique et d'équité, souvent associé à l'efficacité de l'enseignement, dissimule les présupposés des moyens d'action qu'il sollicite par les confusions qu'il diffuse et entretient.
Si ce mouvement est identifiable par les effets spécifiques qu'il produit dans le champ de l'enseignement des mathématiques il n'en pas pour autant caractéristique ; avant d'en décrire les manifestations dans le domaine qui nous intéresse il convient de le situer dans la perspective plus globale à laquelle il participe afin d'en saisir pleinement sa portée et sa signification. Pour ce faire, nous introduirons notre réflexion par deux petits récits anecdotiques (que nous empruntons à D.-R. Dufour, 1996) qui, pour éloignés qu'ils puissent paraître *a priori* des questions de l'enseignement des mathématiques, ne sont pas, comme nous le verrons, dépourvus d'intérêt pour caractériser l'idéologie que nous souhaitons discuter ici et spécifier, ensuite, dans le champ de l'enseignement des mathématiques.

> La première est l'histoire d'une jeune femme américaine d'une trentaine d'année. Elle est enceinte. Un soir, une forte déprime se saisit d'elle. Ne parvenant pas à se réconforter en utilisant les moyens classiques (téléphone, télévision...) et se tourne alors vers la bouteille de whisky. Elle prend donc un verre, puis un deuxième suivi d'un troisième... bref toute la bouteille y passe. Le lendemain, la jeune femme avorte. Furieuse elle téléphone à son avocat (c'est rappelons-le aux Etats-Unis que se déroule la scène) et porte plainte contre le fabriquant de whisky qui, dit-elle, avait omis d'indiquer sur la bouteille que la consommation d'alcool pouvait être fortement dangereuse pour les femmes enceintes. Résultat du procès : le fabriquant fut condamné à verser une somme énorme à la plaignante pour homicide involontaire.

La seconde anecdote rapporte une interaction entre un garçonnet de huit ans et son oncle :

> - " J'ai un jeu " lance le gamin à son oncle : " quand je dit " non ", ça veut dire " oui " et quand je dis " oui ", ça veut dire " non ", d'accord ? "
> - " Non " répondit l'oncle.
>
> Le petit garçon a alors demandé si ce " non " voulait dire " oui ". L'oncle a alors répété " non " et plus l'enfant insistait plus son oncle répétait " non ". Le neveu est alors rentré dans une méchante colère : il ne savait plus ce que ce " non " signifiait. Si le jeu avait commencé, cela voulait dire " oui " et l'oncle jouait déjà, mais si le jeu n'avait pas commencé, ce " non " voulait simplement dire qu'il ne voulait pas jouer.

Qu'ont-elles en commun et quels rapports entretiennent-elles avec la question de l'enseignement des mathématiques ?

Commentaire de la première anecdote : l'idéologie de la transparence

Par la première, " la femme et le whisky ", nous voulons exemplifier ce que nous appellerons par la suite " l'idéologie de la transparence " qui s'est imposée dans le champ social depuis une vingtaine d'années. Tout se passe comme si nos sociétés démocratiques étaient à la recherche d'un langage idéal c'est-à-dire un langage dépourvu de toute sorte d'ambiguïté qui permettrait de régler les comportements sociaux en vue d'optimiser la communication, y compris, bien sûr la " communication didactique "[1]. L'idée peut *a priori* être séduisante, mais si l'on considère, comme ce fut effectivement le cas, qu'un fabriquant de whisky *devait* indiquer que cette boisson présentait un réel danger pour les femmes enceintes, alors cette injonction n'a de sens que si l'on pose que les individus ne savent plus, ou ne sont plus capables de savoir, ce que chacun jadis était censé savoir sans qu'il fut nécessaire de le leur enseigner (Cf. Dufour, *id.*). Devrait-on aussi exiger, selon cette logique, de préciser que le whisky est *aussi* dangereux pour les jeunes enfants, pour les personnes malades du foie, pour les perruches ou les caniches ... ? Qu'il est souhaitable que les étudiants s'abstiennent d'en boire avant un examen ? Que les effets de l'alcool peuvent être variables en fonction des conditions : selon qu'on soit ou non à jeun par exemple ? Ne devrait-on pas aussi définir plus précisément la signification du mot " danger " ? Mais alors, les termes de sa définition ne seraient-ils pas *eux aussi* soumis à la même incertitude, aux mêmes ambiguïtés ? " La chaîne des raisons a une fin " disait Wittgenstein (1961). N'y a-t-il pas un moment où l'on devra *nécessairement* faire confiance à l'autre, à l'élève, en supposant ou en croyant qu'il pourra comprendre par lui-même (P. Clanché, 1994) ? A vouloir rationaliser les pratiques sociales (y compris, bien sûr, les pratiques

[1] Bien entendu, cette expression (qui d'ailleurs est utilisée dans les publications — Cf. par exemple, O. Galatanu, 1996) est employée ici ironiquement car c'est précisément du fait de la " non-communicabilité " des savoirs (même si la plupart des phénomènes d'enseignement peuvent, du point de vue de l'observateur " naïf ", être interprétés comme relevant effectivement d'une communication) que la didactique trouve sa raison d'être en identifiant, non les processus en jeu mais les conditions de leur émergence et de possibilité qui rendent ainsi possible la diffusion des connaissances. Le contrat didactique est certainement un des concepts qui permet au mieux de rendre visible les phénomènes liés à cette non-communicabilité.

d'enseignement) en les fondant sur un (ou des) savoir(s) théorique(s) ne prend-on pas du même coup le risque de faire taire ce même qui les nourrit ? C'est précisément parce qu'on ne croit plus en l'Homme, en sa capacité à participer librement à une culture, à une démocratie, parce qu'on ne le croit plus capable de penser par lui-même que l'on cherche aujourd'hui à enseigner, à contrôler ce qui précisément *ne peut pas* s'enseigner et à tenter de dire ce qui ne peut pas se dire à savoir le sens.

* Songeons par exemple à la manière dont sont aujourd'hui présentés les débats politiques télévisés : ils sont toujours suivis par l'intervention d'un " expert " dont la mission est d'expliquer aux téléspectateurs le sens des discours auxquels ils viennent pourtant d'assister. Au-delà de cette volonté didactique, on leur signifie aussi, mais implicitement cette fois, que le discours politique (et dont le débat politique qui est au fondement même de l'idée de démocratie) ne leur est pas directement accessible.
* Dans le champ culturel cette fois, peut-on considérer que celui qui ne produit pas un discours critique sur une pièce de théâtre, une sculpture ou une sonate de Schubert n'est pas sensible, et donc n'a pas accès, à la quintessence d'une œuvre d'art ? Toute volonté d'enseignement ne va-t-elle pas contribuer à les exclure davantage du champ artistique en leur laissant croire que le sens de l'œuvre nécessite une médiation langagière alors que précisément l'art cherche à montrer ce qui ne peut se dire — pour reprendre ici une pensée de Wittgenstein à propos de la musique.

Dans le champ didactique, nous devons voir dans cette impossibilité le fondement épistémologique de la dévolution et du contrat didactique qui lui est étroitement associé dans la théorie des situations. La sensibilité au contrat didactique[1] n'est rien d'autre que la conséquence perceptible, toujours en situation, de cet inexprimable toujours associé à nos productions langagières — le maître, par les mots et les règles, veut toujours dire plus qu'il ne le peut en fait le faire avec ces mots et ces règles. Ainsi, comme nous le verrons dans la seconde partie, la sensibilité n'est pas à considérer comme un trait psychologique de l'élève eu égard à l'instabilité de ces manifestations d'une situation à l'autre. C'est d'ailleurs du fait même cette variabilité inter-situationnelle que la sensibilité est à considérer comme un phénomène didactique et dont le sens n'est pas à rechercher, dans une théorie psychologique ou d'une théorie de la communication, mais bien dans la théorie des situations. C'est ce à quoi nous nous sommes attaché

Ne nous méprenons pas, il ne s'agit pas ici de contester ni l'utilité ni la pertinence des recherches en psychologie cognitive — nous n'en avons d'ailleurs ni les compétences, ni l'ambition — il s'agit seulement de récuser leurs usages prescriptifs à des fins didactiques. En effet, s'il est possible (et même souhaitable) de décrire comment l'élève construit ou utilise une connaissance, on ne peut pas *sérieusement* affirmer qu'il est possible de contrôler le sens qu'il lui accordera dans une situation nouvelle — autrement dit la manière dont il se saisira d'un enseignement. Nous considérons avec Wittgenstein que ce point aveugle de l'enseignement, constitutif du contrat didactique, est une illusion nécessaire à la pratique des professeurs[2]

> Il nous semble [...] que le maître fasse comprendre la signification à l'élève — sans la lui dire directement ; mais que l'élève soit amené finalement à se donner lui-même la juste explication démonstrative. Et c'est en quoi réside notre illusion (1961).

Cette volonté non feinte de contrôler la réception (certains parlent même de " gestion ") du sens qui s'exprime dans l'idéologie de la transparence est selon nous une négation du projet didactique dont la visée n'est pas d'apprendre à l'élève à penser mais d'étudier les situations et les conditions de possibilité de cet apprentissage. Est-il utile de rappeler ici le célèbre paradoxe de la dévolution, maintes fois souligné par G. Brousseau :

> " Plus le professeur [...] dévoile ce qu'il désire, plus il dit précisément à l'élève ce que celui-ci doit faire, plus il risque de perdre ses chances d'obtenir et de constater objectivement l'apprentissage qu'il doit viser [...] [c'est pourquoi] le savoir et le projet d'enseigner vont devoir s'avancer sous un masque " (1987 b, 34)

[1] La sensibilité au contrat didactique est un concept que nous avons introduit (Sarrazy, 1995) pour désigner la variabilité interindividuelle des idiosyncrasies des élèves à l'égard du contrat au sein d'une même situation dans le cas de la résolution de problèmes. Pour construire le sens des énoncés que le maître lui soumet (et donc pour y répondre), l'élève doit réaliser, pas nécessairement de façon consciente, un certain nombre d'assomptions d'Arrière-plan (Searle, 1982) pour " combler " le hiatus qui nous semble exister entre une règle enseignée (et donc formalisée) et son usage dans diverses situations. Notons enfin, que le terme même de " sensibilité ", dérivé du latin *sensibilitas*, réunit à la fois l'idée de " signification " (principe communautaire) et celle de " sentiment " (principe de singularité) toutes deux contenues dans son origine mais aussi dans le concept de contrat didactique (en tant qu'il souligne à la fois la nécessité de leur articulation mais aussi et en même temps l'impossibilité de la régler formellement et explicitement)

[2] L'enfant (étymologiquement : celui qui n'a pas accès à la parole) est d'abord posé par la mère (ou/et le père) comme un être parlant et c'est précisément du fait même de cette croyance qu'un jour il accèdera au langage

C'est, à mon sens, une des dimensions fondamentale du contrat didactique dont les clauses, on le comprendra aisément, ne peuvent être qu'implicites, silencieuses.
Or, cette idéologie de la transparence est aujourd'hui fort en vogue dans le champ scolaire : songeons par exemple aux propositions qui sont aujourd'hui largement diffusées quant aux questions de l'éducation aux valeurs, à la citoyenneté, à la démocratie où l'on cherche à dire ce même qui nous permet de dire, d'être. L'enseignement des mathématiques, nous le verrons, n'échappe pas à cette idéologie comme en témoigne l'usage, dans le champ scolaire, des productions de la psychologie des apprentissages et notamment celles issues, directement ou non, du courant du traitement de l'information. Cette idéologie apparaît explicitement chez certains auteurs comme F. Cerquetti-Aberkane (1992) ou, comme nous verrons, à travers les productions de l'équipe de recherche en didactique des mathématiques de l'INRP (Colomb, 1991) : ne proposent-ils pas de " définir clairement le contrat didactique entre le maître et l'élève " (sic) et ne suggèrent-ils pas aux enseignants de " mettre en place le contrat " (re-sic !) (*id.*), " d'amener les élèves à prendre conscience que, dans les activités de résolution de problèmes, les attentes sont spécifiques " (*ibid.*) ? Non seulement ces assertions témoignent d'une confusion (fort dommageable) entre " contrat didactique " et " consigne ", mais surtout sont didactiquement vides de sens ou du moins en ont tout autant que de vouloir mettre le pied sur l'ombre de sa tête — ainsi qu'aimait à le dire B. Russell. En effet, si " l'explication du contrat " consiste à indiquer à l'élève les " attentes spécifiques ", cette explicitation évacue, du même coup, toute possibilité d'apprentissage pour l'élève. En conséquence, la situation-problème n'est plus problématique puisque ces " attentes spécifiques " correspondant précisément aux conduites non explicitées par le professeur et par lesquelles devrait se manifester l'appropriation de la connaissance visée !
Nous reviendrons plus loin sur ces questions.

Commentaire de la seconde anecdote : les apories du méta

Par la seconde anecdote nous avons voulu figurer l'instrument de cette idéologie : le méta ; et mettre en évidence les apories auxquelles son usage peut conduire. Le pauvre enfant s'est lui-même laissé enfermer dans un jeu dont il se croyait pourtant le maître , et toutes ses tentatives " méta " pour échapper à la fuite du sens, qu'il avait, sans le savoir, organisée, non seulement ne résolvaient rien mais ne faisaient que renforcer et amplifier ce même à quoi il voulait échapper.
Or, depuis les années 80 nombreux sont ceux qui proposent aussi bien dans le système d'enseignement que dans celui de la formation des adultes[1] des modèles d'action didactique, fort proches dans leur esprit de ce jeu-là. Il s'agit d'" apprendre à apprendre ", d'apprendre à lire des consignes ou des énoncés de problèmes... quand il ne s'agit pas d'apprendre à être ou à aimer comme on le trouve parfois sous la plume de certains. Bref, depuis plus de vingt ans s'est développé tout un ensemble de méthodes[2] qui relèvent de ce qu'on appelle plus largement : " La métacognition "[3]. Pour différentes qu'elles soient en apparence ou par leur origine théorique, elles partagent toutes l'idée selon laquelle il est possible de développer des connaissances et des habiletés métacognitives — *i.e.* une " cognition sur la cognition ", pour reprendre les termes mêmes de Flavell (1985) — qui, appliquées au champ scolaire, permettraient de favoriser les apprentissages :

> " Si les habiletés métacognitives sont utiles pour l'apprentissage scolaire et si certaines font défaut aux élèves, particulièrement aux plus jeunes, peut-être pourraient-elles et devraient-elles être enseignées aux enfants comme partie intégrante du programme scolaire. " (Flavell, *id.*).

On l'aura compris " le méta " est à considérer, selon nous, comme l'instrument de l'idéologie de la transparence en tant qu'il vise à enseigner des règles qui permettraient de contrôler, d'appliquer... sans ambiguïté les règles enseignées ou pour reprendre l'expression même utilisée par A. Robert et J. Robinet (1996, 170) l'usage des leviers " méta " viserait " rendre opérationnelles les connaissances enseignées ".
Rappelons-le, il ne s'agit pas ici de contester l'idée même de la " métacognition " et des phénomènes dont l'analyse relève de ce concept, ni de récuser les travaux la concernant dans le champ psychologique, ni enfin de remettre en cause directement la conception, la mise en œuvre ou " l'efficacité " de ces diverses méthodes mais de critiquer le principe de leur usage dans l'enseignement, à la fois d'un point de vue didactique et épistémologique, par l'examen des postulats implicites qu'elles partagent et sur lesquels cet usage repose.
Nous emprunterons à Wittgenstein un des arguments principaux sur lequel s'étayera cette analyse critique ; Wittgenstein le formule ainsi :

---

[1] Nous faisons ici allusion à l'ensemble des méthodes issues du courant de l'éducabilité cognitive.
[2] En voici quelques-unes : " P.E.I. " de FEUERSTEIN : programme d'enrichissement instrumental (Cf. DEBRAY, 1989) ; " PADéCA " (BERBAUM, 1991). Enfin, citons à titre d'exemple B. NOËL (1995) le type de prosélytisme qui se manifeste en faveur du méta qui titrait dans un numéro *Sciences humaines* (déc. 1995, 56, 23-25) : " La métacognition : Réfléchir sur ses processus mentaux améliore l'apprentissage. Les travaux sur la métacognition conduisent à remettre en question certaines formes traditionnelles d'enseignement. " (C'est nous qui soulignons.)
[3] NGUYEN-XUAN, RICHARD et HOC (1990, 212) en donne la définition suivante : " La métacognition désigne la connaissance que le sujet a de ses propres connaissances, et le contrôle qu'il exerce sur son propre système cognitif. "

" Peut-on lire dans une règle les circonstances qui excluent logiquement une erreur dans l'utilisation des règles de calculs ? A quoi bon une telle règle ? ne pourrions-nous pas (derechef) nous tromper dans son application ? " (1976).

Autrement dit, une règle ne saurait se régler elle-même et c'est, en conséquence, toujours à l'élève que revient *in fine* la responsabilité de l'usage des règles qui lui auront été enseignées. Ainsi l'enseignement " méta " ne risque-t-il pas de déporter à un méta-niveau les difficultés que Chevallard (1991) appelle " proto-mathématiques " correspondantes aux attentes mobilisées au sein du contrat didactique ? Si tel est le cas ne prend-on pas le risque de redoubler l'échec des plus faibles ? (Cette question est abordée dans Sarrazy, 1994).
Mais n'anticipons pas, limitons-nous pour l'instant à poser et à considérer ces questions, nous examinerons leur validité empirique un peu plus tard.

Les origines

Comment a émergé cette idéologie psycho-pédagogique dans le champ de l'enseignement des mathématiques et comment s'y est-elle manifestée ?

Il faut remonter à la fin des années 70 ; c'est a cette période que se multiplient les travaux sur la métacognition dans le champ psychologique (Nguyen-Xuan et al., 1990). Mais pour expliquer le développement de l'usage du méta dans l'enseignement, il convient aussi de rappeler la convergence de deux mouvements de pensée.

- D'une part, dans ces années, l'idée, directement héritée du structuralisme, selon laquelle l'enseignement de structures très générales permettrait aux élèves de mieux apprendre apparaît avec force.
- D'autre part, c'est au début des années 80 que se développe fortement la psychologie cognitive fonctionnaliste ; le sujet psychologique a supplanté le sujet épistémique cher à Piaget. On peut penser que ce renversement et l'extension importante du cognitivisme (au sens moderne du mot) sont probablement liés aux progrès quasi exponentiels des recherches dans le domaine de l'intelligence artificielle.

Ces mouvements noosphériens ne resteront pas sans effet sur les systèmes d'enseignement puisque l'idéologie méta, directement associée aux théories du traitement de l'information, sera officialisée, pour la première fois, dans les instructions ministérielles de 1980 par l'introduction dans le curriculum d'un enseignement méthodologique :

> " Il ne suffit pas de demander aux élèves de résoudre des problèmes (même en multipliant les exemples) pour qu'ils progressent dans leur capacité à le faire. *Un apprentissage spécifique, d'ordre méthodologique, est nécessaire.* " (Ministère de l'éducation nationale, 1981, 41.)

Les modèles de résolution issus de la théorie du traitement de l'information, fort en vogue à l'époque, sont alors l'objet d'un travail transpositif. Les séquences d'enseignement, précise le texte officiel, doivent être organisées de façon modulaire (*id.*) de manière à rendre possible le développement de trois types de processus cognitifs .

1. Savoir rechercher et sélectionner l'information pertinente : les informations données sont-elles toutes nécessaires ? Sont-elles suffisantes ? etc. ;
2. Savoir organiser l'information ;
3. Savoir exploiter l'information pertinente.

Voici énoncée rapidement le contexte dans lequel est apparue ce que nous proposons d'appeler la " catastrophe du capitaine ", bien connue des didacticiens des mathématiques.

La catastrophe du " capitaine "
De prime abord, elle pourrait être considérée comme une anecdote amusante mais les effets qu'elle engendra sur le système d'enseignement furent pour le moins démesurés.
Rappelons brièvement cet épisode :
En 1979, une équipe de l'IREM de Grenoble propose à des élèves de cours élémentaire l'énoncé suivant :

" *Sur un bateau il y a 26 moutons et 10 chèvres. Quel est l'âge du capitaine ?* "

76 élèves sur 97 fournissent l'âge du capitaine en combinant les données numériques de l'énoncé.
Avaient-ils raison ? Des raisons, probablement.
Plusieurs explications furent proposées , nous nous limiterons ici à la présentation de celle de la didactique fondamentale (Brousseau, Chevallard, 1988) - nous avons reporté en annexe une analyse critique du point de vue de R. Brissiaud [N.B. Cette question avait été rapidement évoquée lors de la discussion qui suivit la conférence]

Dans la situation proposée par les chercheurs de Grenoble nous soutenons que la réponse fournie par la plupart des élèves (" Le capitaine a 36 ans ") ne doit pas être considérée comme absurde, dénuée de sens. En effet, la plupart de nos énoncés quotidiens fonctionnent quasiment selon le même schéma de l'énoncé du capitaine. Imaginons, par exemple, qu'un individu veuille s'acquitter d'un achat par un chèque. Au moment de remplir celui-ci, il constate l'oubli ou la perte de son stylo et déclare quelque chose du genre : " Veuillez m'excuser mais j'ai égaré mon stylo ". Généralement, le commerçant, à qui cette assertion s'adresse, sans rire et sans raisonner explicitement, lui en tend un. Comment peut-on alors expliquer la réussite de cette interaction alors même que le client ne lui demande pas *explicitement* un stylo mais se limite, par son énonciation, à informer le commerçant de la perte de son stylo. Le hiatus entre l'énoncé littéral (/j'ai égaré mon stylo/) et sa visée pragmatique (/prêtez-moi un stylo/) est en fait réduit par tout un ensemble de conditions, nécessaires à la réussite de cet acte de langage, que Searle (1982) appelle d'Arrière-plan qui bien que non-dites dans l'énoncé littéral y étaient en quelque sorte contenues. Il en va de même avec la plupart des énoncés proposés à la sagacité de nos écoliers.

Nous l'avons dit la didactique théorique permettait déjà de produire une explication à ce phénomène. J'en veux pour preuve une lettre non-publiée[1] que G. Brousseau[2] adressa le 7 janvier 1980 aux chercheurs de l'IREM de Grenoble en réponse à un courrier où ceux-ci l'informaient de ce phénomène. L'extrait qui suit témoigne à la fois de sa clairvoyance théorique et de la puissance conceptuelle du contrat didactique alors même que son cadre théorique, bien que déjà posé depuis 77-78 avec le célèbre Cas de Gaël, était encore en chantier :

> Merci pour l'envoi de " l'âge du capitaine " [...] J'étudie avec [les enfants en échec électif] les dysfonctionnements et donc le fonctionnement de ce que j'appelle " le contrat didactique " et son résultat : " la pensée mathématique scolaire ". Ce que vous avez relevé s'explique très bien me semble-t-il dans le cadre de cette théorie. Le fait important n'est pas le pourcentage élevé de réponses aux problèmes absurdes, il est dans l'écart entre les prévisions du maître [..] et les résultats.
>
> Il s'agit donc, moins de dire comment on peut corriger ce qui nous apparaît comme un échec au moins provisoire de l'enseignement que de comprendre comment il a pu se produire sans que les maîtres s'en aperçoivent et le corrigent [..].
>
> A votre place, je ne répandrais pas trop dès maintenant mes observations de crainte que les maîtres avec qui je pourrais avoir à faire ne "camouflent" le phénomène en croyant le corriger, ce qui, de toute manière rendrait son étude plus difficile. D'ailleurs, on n'est même pas sûr que ces comportements que nous jugeons aberrants ne soient pas nécessaires ou soient la cause d'échecs ultérieurs puisqu'ils semblent se résorber assez vite.

Intuition géniale mais (faut-il le regretter ?) on ne peut que constater que les pistes de recherche qu'alors il proposait furent ignorées. En revanche, celles qu'il suggérait d'écarter, du moins provisoirement, furent retenues puisque ce phénomène fut largement exploité et invoqué par les prosélytes de l'enseignement méta-cognitif naissant afin de justifier l'usage du méta comme un candidat possible pour réguler ce qui avait été admis (à tort) comme un dysfonctionnement de l'enseignement.
Le phénomène " méta " s'amplifiera dans les années suivantes. Les recommandations officielles sont reconduites par les textes 1990 sous le nom de *compétences transversales* dans la rubrique " traitement de l'information " (Ministère de l'éducation nationale, 1991, 36 et 52). **" L'apprentissage <u>à</u> la résolution de problèmes "**[3] est alors désigné comme un nouvel objet d'enseignement comme en témoigne le titre de la publication de D. Gilis, J.-C. Guillaume : " Résolution de problèmes . un nouveau savoir scolaire ? " (1995).

---

[1] Je tiens à remercier vivement ici Madeleine EBERHARD (Laboratoire Leibniz IMAG de Grenoble) qui m'a aimablement communiqué ce document (courant 98) et G. BROUSSEAU qui m'a autorisé à l'utiliser ici.

[2] On peut aussi se reporter aux travaux ultérieurs de Y. CHEVALLARD (1988) qui, en référence à la pragmatique et à la didactique, en proposera l'analyse en 1983 en recadrant " les comportements incriminés (plutôt qu'étudiés) [...] dans le système générateur de sens que constitue le contrat didactique ".

[3] L'expression " apprentissage à la résolution de problèmes " apparaît pour la première fois en 1987 dans le titre d'un compte rendu d'un groupe de recherche de l'INRP dirigé par J. Colomb (1987). Que recouvre-t-elle ? Il s'agit " faire des activités de résolution de problèmes un domaine d'enseignement à part entière [...] [d']instaurer une véritable didactique de la résolution de problèmes " (D. Gilis et J.-C. Guillaume, 1995) ; on reconnaîtra sans mal la forte influence du cognitivisme puisqu'il s'agit de permettre " l'acquisition de méthodes générales, d'heuristiques, de connaissances métacognitives, telle que la planification, le contrôle des procédures, l'évaluation de l'écart au but " (id.). Enfin, nous remarquerons la confusion que cette expression entretient entre " enseignement " et " apprentissage ". En effet, il est clair qu'il s'agit ici d'un " enseignement <u>de</u> la résolution de problèmes " or, confondre " enseigner " et " apprendre " conduit inévitablement à ignorer les conditions de leur articulation autrement dit à passer sous silence toutes les questions afférentes au contrat didactique puisque précisément sa zone d'action se situe dans l'association / opposition entre " enseignement " et " apprentissage ".

Une didactique psychologique [1]
Ces orientations didactiques correspondent à celles qu'avaient définies par le groupe INRP " résolution de problèmes " dirigé par J.-F. Richard (1987) — qui, faut-il le rappeler, est professeur de psychologie cognitive.
Trois axes avaient été avancés et sont suffisamment représentatifs de ce courant pour devoir être rappelés et commentés ici :

> **Axe 1**- *Instancier un schéma* : comprendre un problème suppose une lecture de l'énoncé au cours de laquelle l'élève construit une représentation du problème grâce aux informations qu'il aura sélectionnées et interprétées dans un schéma conceptuel. Il devra faire appel à des connaissances qui lui permettront d'instancier le schéma de résolution correspondant au problème particulier qu'il doit résoudre. (Cf. les travaux de M.-Cl. Escarabajal, 1984, 1988).

Commentaire
Cette proposition entretient une confusion qui procède, selon nous, de deux erreurs :

1. La première vient de ce que Wittgenstein appelait " l'ensorcellement des mots ". Ici, est-il correct de dire " *comprendre un problème suppose une lecture de l'énoncé* " ?
D'une part comment sait-on ou plus simplement à quoi voit-on, qu'un élève a lu ? Que dirait-on de celui qui reste *a quia* si on lui demandait ce qu'il vient de lire et qui en même temps continuerait d'affirmer qu'il a effectivement lu ? Aussi, cette proposition " comprendre un problème suppose une lecture... " est à considérer comme une tautologie analogue à celle qui affirmerait " comprendre un problème suppose qu'il soit typographié correctement ". Dans ce dernier cas personne n'oserait pourtant affirmer que l'étude de la typographie permettrait d'expliquer ce qu'est que *comprendre*. C'est dans l'usage du mot " lecture " que réside ici l'ensorcellement. Mais on pourrait me rétorquer que l'affirmation initiale de J.-F. Richard ne se référait pas à la matérialité du texte mais à une activité mentale qui consisterait à sélectionner des informations, à les organiser, à instancier un schéma de résolution... ce qui reviendrait à dire que " comprendre un énoncé suppose une sélection des informations, etc. ". Mais est-il possible de sélectionner des informations, de les organiser sans les comprendre. Si on admet que c'est possible alors on devrait aussi logiquement admettre qu'il est correct de dire, avec Turing, qu'un programme informatique en train de s'exécuter réalise une " activité mentale " ou avec Wittgenstein qu'une machine peut avoir mal aux dents.
Enfin, peut-on admettre que " lire " à le même sens lorsqu'il s'applique à un énoncé de problème, à un texte de Wittgenstein, un roman de Flaubert, ou lorsqu'il est employé à propos du marc de café voire encore (et pourquoi pas ?) aux yeux de sa bien-aimée ? Certes, il y a bien quelque chose qui se conserve à travers ces multiples jeux de langages mais qui oserait affirmer (sérieusement) qu'un loup et un peigne ont en commun le fait d'avoir l'un et l'autre des *dents* pointues ?

2. La seconde erreur selon nous consiste à réifier les concepts, à penser à tort que les catégories qui nous permettent de penser ont effectivement une existence empirique, on va dans ce cas du mot à la chose. Affirmer que " l'élève construit une représentation du problème " a autant de consistance empirique que d'affirmer que " ma lampe *comprend* qu'elle doit s'allumer lorsque j'appuie sur l'interrupteur ". Gardons-nous de confondre les " tout se passe comme si " avec " ça se passe réellement comme ça ".

> **Axe 2** - Deuxième axe : *développer des heuristiques*
> Comprendre un problème suppose que le sujet soit en mesure de juger, de contrôler la validité de son interprétation. Pour rechercher la solution le sujet devra développer des heuristiques : choix d'une opération, puis contrôle de la pertinence du résultat, par exemple ; " transfert analogique " d'une procédure de résolution déjà connue et efficace pour un problème que le sujet sait résoudre au problème qu'il a à résoudre ; etc.

Commentaire
Nous retrouvons ici l'erreur qui consiste à confondre la carte et le territoire, le modèle à la réalité dont il rend compte. En effet, les auteurs nous laissent penser que la représentation est effectivement celle du sujet et aurait, de ce fait, un statut causal dans son comportement. Or la représentation est toujours celle qui est inférée par celui qui cherche à expliquer le comportement d'un sujet — tout le courant favorable à l'usage du méta procède de cette confusion. C'est la raison pour laquelle nous lui préférerons la notion brousseauiste de " **modèle implicite** " (introduite à propos de la dialectique de l'action) car elle ne suggère pas que l'action résulte d'un

[1] Nous reprenons ici le titre d'un disciple de J. Piaget, H. AEBLI (1966), qui cherchait déduire des travaux piagétiens un ensemble de stratégies didactiques. Nous avons ici un bel exemple de ce qu G. BROUSSEAU appellera plus tard (1988) une didactique à légitimité exogène qu'il oppose à la didactique fondamentale.

modèle préalable dont l'action serait l'accomplissement mais bien le fait d'une *causalité intentionnelle* (au sens searlien du terme, 1985) qu'il s'agit ensuite de réfléchir, de représenter dans un milieu spécifique permettant de donner du sens à cette " représentation " — on peut se reporter à la présentation par G. BROUSSEAU (1986) lui-même de la dialectique de la formulation de la théorie des situations.

Axe 3- *Faire prendre conscience à l'élève des procédures utilisées*
L'enseignant devra faire acquérir à l'élève " une bonne maîtrise de ces procédures et la prise de conscience des opérations de contrôle impliquées dans leur mise en œuvre, sur la transposition de ces procédures à d'autres domaines de problèmes. " (Richard, *ibid.*, 1987 ; Cf. aussi Fayol, Monteil, 1994).

Commentaire
On retrouve ici, bien que non formulée, l'idée d'un processus causal entre la règle et son application (dont l'origine et le mécanisme reste d'ailleurs purement hypothétique) mais cette fois à un " méta-méta-niveau ".
En effet, proposer de faire acquérir à l'élève des procédures visant à lui faire prendre conscience des opérations de contrôle impliquées dans l'action suppose nécessairement que ces méta-méta-procédures lui permettraient d'apprendre, autrement dit de décontextualiser ses connaissances. Or, il n'y a pas lieu de dissocier une règle de son usage, une procédure de sa réalisation même si, après coup, il est toujours possible, pour un observateur extérieur (un psychologue, un didacticien, voire même l'enseignant lui-même) d'en faire une reconstruction *ad hoc* ; c'est précisément la possibilité de cette reconstruction qui conduit à l'illusion de l'existence et de l'intervention effective d'un processus de contrôle
A ceux qui auraient quelques doutes quand à la pertinence de ce point de vue peuvent toujours tenter de réaliser les expériences suivantes :

- Consulter un manuel de lecture rapide afin d'accélérer sa vitesse de lecture et lire un texte " difficile " ;
- Marcher à quatre pattes tout en contrôlant *on line* la correction de l'action en la comparant à l'algorithme du " marcher à quatre pattes " .
- Enfin, essayer de penser que vous pensez à rien.

Paradoxalement, la question du sens des connaissances — bien que centrale pour les didacticiens — est nécessairement occultée dès lors que l'on suggère l'usage du " méta " à des fins didactiques ; certains, comme E. Cauzinille-Marmèche et A. Weil-Barais n'hésitent pas à affirmer :

> " L'élève doit apprendre à patienter, à accepter de faire fonctionner ses connaissances même s'il n'en voit pas immédiatement toute la pertinence, le sens ou la finalité, voire même à être moins efficace à court terme. " (1989).

En ce qui concerne l'apprentissage *à* la résolutions de problèmes, la conception des scénarios didactiques pourrait se décrire en trois étapes :

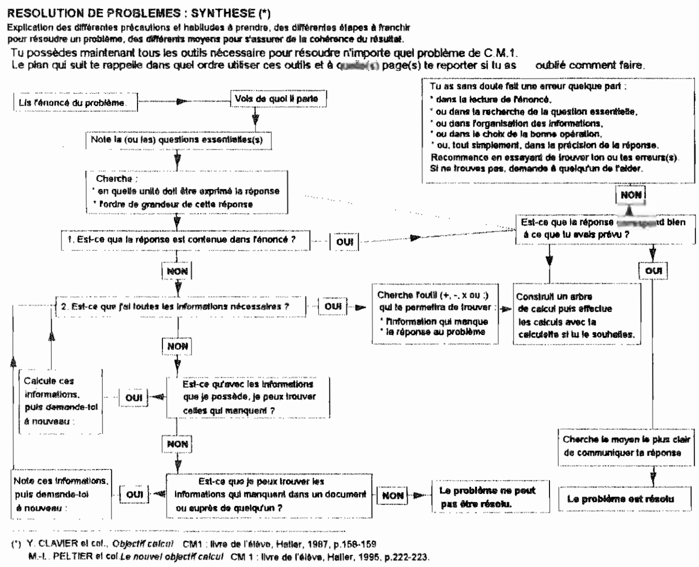
1. Décomposition d'une activité complexe - en l'occurrence la résolution d'un problème - en modules indépendants. Cette décomposition devant être analogue aux modèles validés par simulation — ce qui constitue la légitimité informatique ;
2. Comparer, sur ces différents modules, les processus de raisonnements entre les novices et les experts dans une même tâche (Caillot, 1984) — ce qui constitue la légitimité psychologique ;
3. Enfin, il s'agit d'en déduire des stratégies d'intervention didactiques afin de combler l'écart déterminé à l'étape précédente. Ainsi, R. Glaser (1986) s'appuyant sur les comparaisons novices / experts, estime qu'il " est crucial d'enseigner aux enfants des procédures d'organisation de l'information " stockée " en mémoire ".)

Aujourd'hui, la plupart des manuels de mathématiques pour l'école élémentaire présentent plusieurs modules d'enseignement concernant des types de traitements spécifiques de type métacognitifs : " organiser des données ", " identifier un contexte ", " repérage de la question essentielle ou des données utiles à la résolution ", sans même, parfois, demander aux élèves de résoudre le problème ! L'extrait d'un manuel scolaire pour le CM1 (document destiné aux professeurs), rapporté ci-après, témoigne très nettement de cette influence " cognitiviste " ; les auteurs y affirment sans nuance aucune que l'élève doit :

> " savoir combiner de très nombreuses compétences. La démarche suivie consiste à développer séparément et progressivement ces différentes compétences pour à terme les faire jouer simultanément. " (Clavier et al., 1987).

La figure suivante, extraite du même manuel (pour l'élève cette fois), représente un algorithme synthétisant et organisant l'ensemble de ces modules d'enseignement .

FIGURE 1 — Un algorithme de résolution enseigné au CM1



Conformément au postulat de Turing[1], l'élève est ici réduit, à un système de traitement de l'information et le contrat didactique à un simple moteur d'inférence (système constitué de méta-règles chargé de l'application les règles).
Après avoir mis jour l'idéologie de la transparence, ses sources et ses manifestations dans le système d'enseignement, nous nous proposons maintenant d'examiner la pertinence et la validité empirique d'un tel point de vue.

- PARTIE 2 -

Dans cette partie, après avoir présenté quelques éléments de notre problématique, nous nous rapporterons les principales résultats de nos travaux (Sarrazy, 1996) qui ont été obtenus à partir des analyses théoriques présentées dans la première partie.

Quelques éléments de problématique

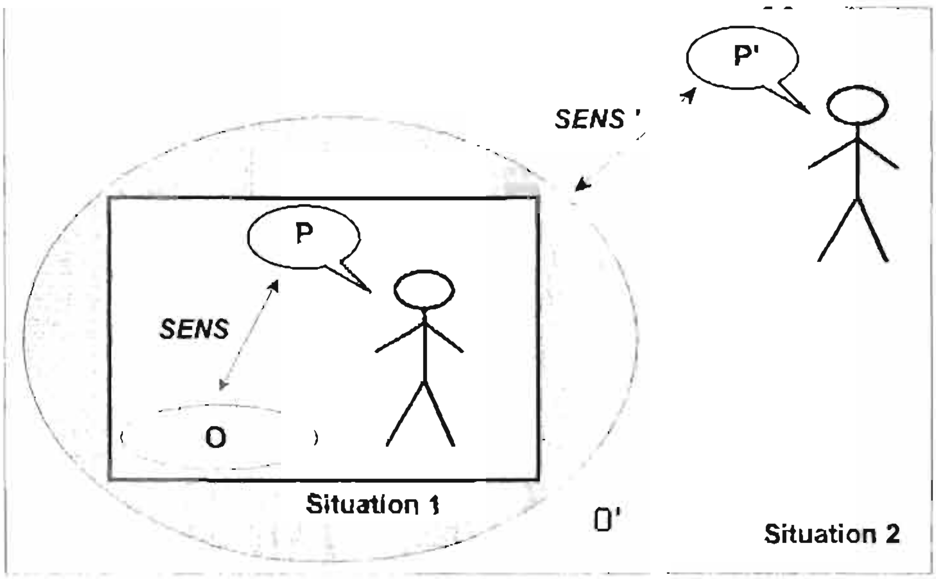
Nous l'aurons compris ce que nous remettons en cause c'est l'idée d'une transcendance quelconque (des processus méta-cognitifs par exemple) pour expliquer, et *a fortiori* réguler, le processus d'enseignement / apprentissage ; nous y opposons une conception " situationnelle " que l'on pourrait illustrer par cette remarque de Wittgenstein :

> " Avec les pièces d'un jeu d'échec, je peux jouer selon certaines règles. Mais je pourrais aussi inventer un jeu dans lequel je joue avec les règles mêmes. Les pièces de mon jeu sont maintenant les règles du jeu d'échecs et les règles du jeu sont disons les lois logiques. Ce que j'ai alors, c'est à nouveau un jeu et non un méta-jeu." (1975).

Aussi s'agira-t-il d'examiner et de mettre à l'épreuve la validité de l'hypothèse centrale (non formulée) de l'usage didactique du " méta ", selon laquelle l'actualisation des procédures de résolution est indépendante des situations. En effet, l'enseignement de stratégies métacognitives n'aurait aucun sens, aucun intérêt, si celles-ci restaient seulement attachées à une situation particulière étant donné que leur enseignement vise précisément à permettre aux élèves de les utiliser dans des situations nouvelles. Plus généralement, l'usage de leviers " méta " entretient l'illusion qu'il est possible d'améliorer le processus de décontextualisation / recontextualisation des connaissances enseignées et conduit à sous-estimer du même coup l'importance des ruptures du contrat didactique et de la dévolution qui leur est étroitement liée. En d'autres termes, cette hypothèse, désormais

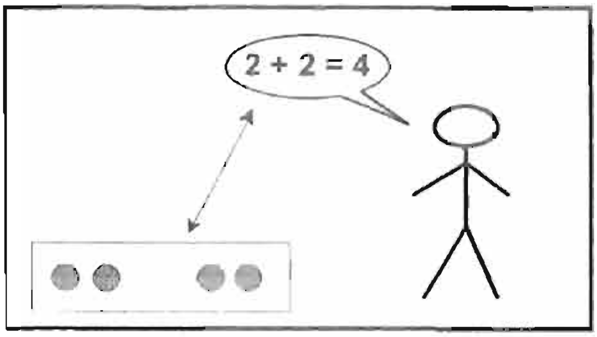
[1] Les chercheurs en intelligence artificielle pensent qu'il est matériellement possible de reproduire la pensée. Un des pères de l'intelligence artificielle, A. Turing proposa un test pour déterminer si effectivement l'ordinateur possède cette faculté : on pourra l'affirmer, nous dit-il, si un expert d'un domaine donné (mathématiques, psychiatrie...) ne distingue pas les réactions de l'ordinateur de celles d'un être humain lorsqu'il exécute une opération intellectuelle " faire une addition " ou " comprendre le chinois " pour reprendre ici l'exemple d'un des chefs de file du courant anti-cognitiviste J. SEARLE (1990). Les tenants de ce que J. SEARLE, appelle " I.A. forte " " prétendent que de tels programmes ne seraient pas simplement des modèles de la pensée, mais que ce seraient réellement des esprits, tout comme l'esprit humain. ".

désignée par " hypothèse de la transversalité ", soutient que le transfert peut être l'objet d'un enseignement. Elle avait été suggérée en 1988 par E. Bautier-Castaing et de A. Robert pour dénoncer le fait que le " rituel " de l'exercice d'application masquait " la nécessité d'apprentissage d'activités cognitives complexes telles que savoir établir une preuve [...], "savoir transférer", c'est-à-dire reconnaître la similitude de situations apparemment différentes, savoir manipuler des symboles et non des objets. Or, ces activités ne sont que très rarement considérées comme "à apprendre" " (1988, 17).
Bien que non injonctive, cette dernière proposition suggère tout de même qu'il est possible (ou envisageable) de les enseigner.
C'est à cette thèse que nous nous opposons. En effet, si le sens d'une connaissance s'établit, se donne à voir, par le rapport singulier et intentionnel qu'un sujet établit entre une règle ou une proposition (P) et un objet (O) au sein d'une situation (S), on ne peut alors envisager une méta-règle qui viendrait régler ce rapport sans être confronté à une aporie consécutive à une récursivité non-terminale.
Nous avons tenté de schématiser cet argument dans la figure ci-après :

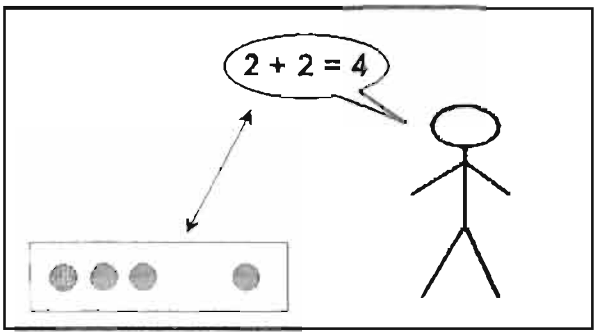


Si cet argument s'adresse à l'enseignement méta (pour " l'apprentissage à la résolution de problèmes " par exemple) il vaut aussi pour des phénomènes d'enseignement plus locaux comme, c'est le cas lorsqu'un professeur demande à un élève d'expliciter la stratégie qu'il a utilisée pour produire sa réponse : si cette demande ne se justifie pas par la situation mais seulement par le désir du professeur, l'élève est alors conduit nécessairement à s'interroger sur le sens de la question elle-même (" Pourquoi me demande-t-il cela ? Que cherche-t-il à me dire par sa question ? Me suis-je trompé ? ... "), ce qui revient, le plus souvent, à produire un superbe effet Topaze auquel les professeurs ont nécessairement recours lorsque l'élève a produit une erreur que le milieu matériel ne pouvait réguler. Si ce phénomène s'observe assez fréquemment chez de jeunes professeurs — qui confondent ce type de questionnement, quasi socratique, avec la dialectique de la formulation de la théorie de situations —, nous le rencontrons aussi chaque fois que des psychologues, par exemple, transposent des moyens de productions de données à des fins de théorisation de phénomènes psychologiques de leur champ au champ didactique — cf. par exemple, l'usage didactique de l'entretien d'explicitation (Vermesch, 1990, 1994, 1997).
Considérons, par exemple la situation suivante :

Ecris le nombre de jetons sous la forme d'une écriture additive :



Situation 1



Situation 2

Ainsi le sens d'une tâche n'est à rechercher ni dans les assertions (ou actions) du sujet ni dans la tâche elle-même mais bien dans le rapport que le sujet établit par ces actions au sein d'une situation.

Présentation des résultats

Nous nous limiterons dans cette dernière partie à la présentation synthétique des principaux résultats de notre recherche on trouvera dans Sarrazy 1996 et 1997 un exposé détaillé sur les modes de productions et les commentaires de ces conclusions.

1. L'effet " L'âge du capitaine " est à considérer comme un effet du contrat didactique et non, ainsi qu'il est courant aujourd'hui de l'affirmer, la manifestation d'un dysfonctionnement de la relation didactique ou de l'absence de compétence langagière qu'il conviendrait de réguler par un enseignement " méta " ou / et par un enseignement visant à permettre à l'élève de mieux " comprendre " les énoncés de problèmes qu'on lui soumet.
2. L'explicitation des attentes mobilisées dans le contrat didactique ne permet pas d'en réduire les effets ; non seulement elle conduit à " dédidactiser " la situation mais repousse récursivement les effets liés aux implicites nécessairement contenus dans cette explicitation.
3. La situation de production de la réponse à un problème inhabituel (type capitaine, énoncé lacunaire ou avec données supplémentaires) détermine le sens attribué aux énoncés qui sont proposés ; *l'AFC permet d'attester que la situation a un " poids " plus important que le niveau scolaire des élèves en mathématiques pour expliquer les types de réponses à un problème inhabituel* (Cf. sur ce dernier aspect : Sarrazy, 1996) ; ainsi, la notion de " tâche " apparaît comme une notion vide de sens[1], et non productive pour ce qui concerne les phénomènes didactiques, indépendamment de la situation.

Ce dernier résultat permet d'invalider un des postulats majeurs de l'enseignement méta : la transversalité des procédures de résolution. En effet, il montre nettement que l'actualisation d'une procédure est davantage liée au type de situation qu'au niveau cognitif de l'élève.

4. Au sein d'une même situation, la variabilité des réponses des élèves est à interpréter comme l'expression de différences de sensibilité à l'égard du contrat didactique (Cf. *supra*, note 1 p. 3); elles expriment à la fois les différences de " lecture " des situations scolaires, et donc du contrat didactique, et en conséquence la manière de s'y inscrire.
5. Bien que ne s'y réduisant pas la sensibilité est fortement liée au niveau scolaire en mathématiques ; cette liaison doit être interprétée comme une " causalité récursive " : la sensibilité est à la fois cause et effet du niveau scolaire : le bon élève se montre capable de reproduire les règles qui lui ont été enseignées sans pour autant s'y attacher " mécaniquement " mais par ailleurs, il s'autorise davantage que les autres des écarts à la règle — écarts qui sont aussi un moyen de les reconnaître — du fait de ce que nous avons par ailleurs appelé la " bienveillance didactique " que le professeur entretient à leur égard. Leur participation est, en effet, didactiquement nécessaire pour le maître en tant qu'elle lui permet, entres autres choses, de faire avancer sa leçon.
6. Les rapports différents que les maîtres manifestent à l'égard de l'enseignement et de l'apprentissage — leur épistémologie spontanée, dirait G. BROUSSEAU — sont associés[2] à des différences dans leurs " styles d'enseignement ". Ces styles, au nombre de trois (" dévoluants " (G1), " Institutionnalisants "

[1]. Cf. annexe 1 dans laquelle nous reproduisons la réponse à la critique de R. Brissiaud sur la validité de ce résultat.

[2]. Nous ne voulons pas dire que l'épistémologie spontanée des maîtres *conditionne* l'adoption d'un style d'enseignement — ce qui conduirait à une vision fixiste de la pratique didactique et à occulter les effets de système sur le profil d'action didactique (voir M. BRU, 1991).

(G2) et " Intermédiaires " (G3)[1]) ont été obtenus par une classification hiérarchique ascendante sur la matrice résumant leurs profils d'action didactique — mesurés sur 11 dimensions. Le style " dévoluant " se caractérise par une forte variabilité dans la sélection des modalités didactiques qui structurent la situation ; à l'autre extrême, il s'oppose fortement au style " institutionnalisant ". Enfin, comme son nom l'indique, le style " intermédiaire " regroupe les maîtres dont la variabilité se situe entre les deux styles précédemment définis.

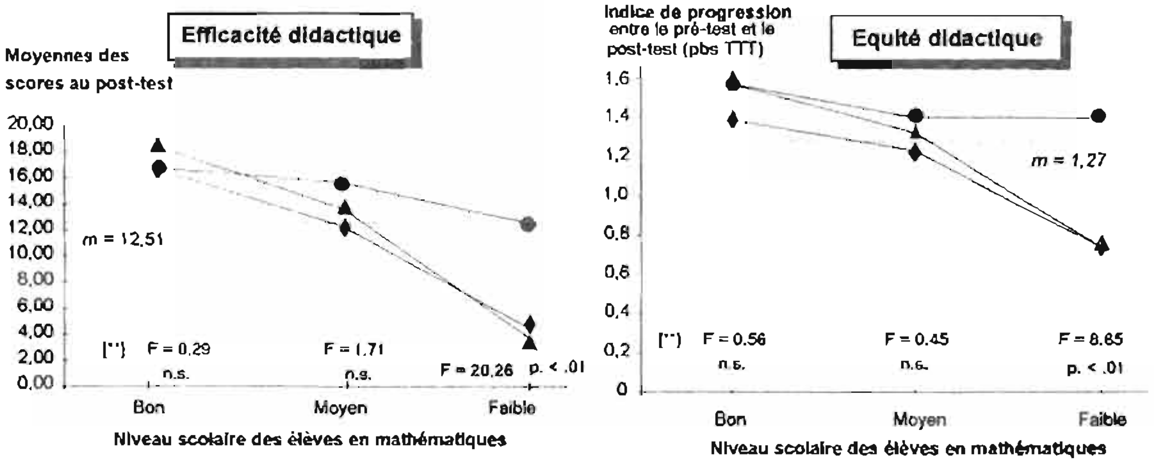
7. Le style " institutionnalisant " serait plus " efficace " et plus " équitable " — principalement pour les élèves faibles — lorsque les situations sont faiblement décontextualisées[2]. L'explication de ce phénomène est à rechercher dans le mode d'interaction privilégié propre au style " institutionnalisant " . les élèves faibles sont davantage sollicités que par les " dévoluants " qui ne contrôlent pas, ou très peu, les prises de parole. En revanche, les élèves soumis au style " institutionnalisant " parviennent avec beaucoup plus de difficulté à recontextualiser leurs connaissances lorsque la situation d'évaluation est fortement décontextualisée : plus l'élève est sensible au contrat, moins il parvient à adapter ses anciennes connaissances aux contextes nouveaux et plus le maître est conduit à lui enseigner des algorithmes, plus il favorise les phénomènes de sensibilité au contrat. Des résultats à peu près symétriques ont été obtenus pour le style " dévoluant ". Enfin, ceux que nous avons enregistrés chez les bons élèves du groupe " intermédiaire " sont analogues à ceux des maîtres dévoluants ; les résultats des autres (moyens et faibles) sont quasiment similaires à ceux des maîtres institutionnalisants. (Une pédagogie faiblement structurée, telle celle des maîtres intermédiaires — *i.e.* ni vraiment " dévoluante ", ni vraiment " institutionnalisante " — n'a pas, comme l'arithmétique nous conduirait à le penser, des effets " moyens " mais au contraire des effets fortement différenciateurs : les bons élèves sont aussi performants que les élèves des classes dévoluantes dans les situations décontextualisées, et les faibles sont moins performants que ceux des classes institutionnalisantes dans des situations fortement contextualisées.)

Nous présentons ci-après les graphiques correspondant aux performances observées par type d'élèves (bons, moyens et faibles) pour chacun des trois styles (G1, G2 et G3) dans les deux types de situations (faiblement et fortement décontextualisée).

Situations faiblement décontextualisées
Equité et efficacité des 3 styles d'enseignement selon le niveau en mathématiques
à propos de la résolution de problèmes additifs (type TTT)

[1] Ces concepts que nous introduisons ici (" dévoluants ", " institutionnalisants " et " intermédiaires ") sont à comprendre comme des " idéaltypes " au plein sens wéberien (WEBER, 1992) c'est-à-dire comme des " *moyens* de la connaissance " : " L'idéaltype est un tableau de pensée, il n'*est pas* la réalité historique ni surtout la réalité "authentique" [...] Il n'a d'autre signification que d'un *concept limite* purement idéal, auquel on *mesure* la réalité pour clarifier le contenu empirique de certains éléments importants, et avec lequel on la *compare*. "

[2] Ces résultats ont été obtenu à partir de la comparaison des résultats obtenus au pré-test / post-test sur 21 problèmes additifs de type TTT. Deux leçons d'une heure chacune ont été réalisées entre ces deux épreuves. On peut donc admettre que l'épreuve du post-test, bien que non triviale, est une situation faiblement décontextualisée.

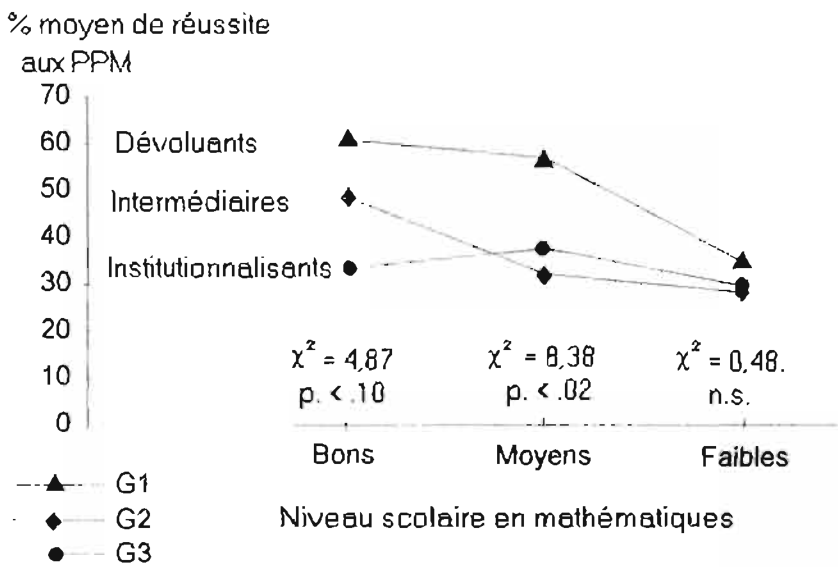


Désignation	*Code*	*F (efficacité)* [*]	*F (équité)* [*]
G1 : Dévoluants	—▲—	F = 9,19 s. p.<.01	F = 30,93 s. p.<.01
G2 : Intermédiaires	—◆—	F = 5,25 s. p.<.01	F = 20,31 s. p.<.01
G3 : Institutionnalisants	—●—	F = 0,45 n.s.	F = 1,86 n.s.

[*] Comparaison des moyennes intra-groupe (Bons moyens et faibles)
[**] Comparaison des moyennes inter-groupes (à même niveau scolaire)

Cas des situations fortement décontextualisées

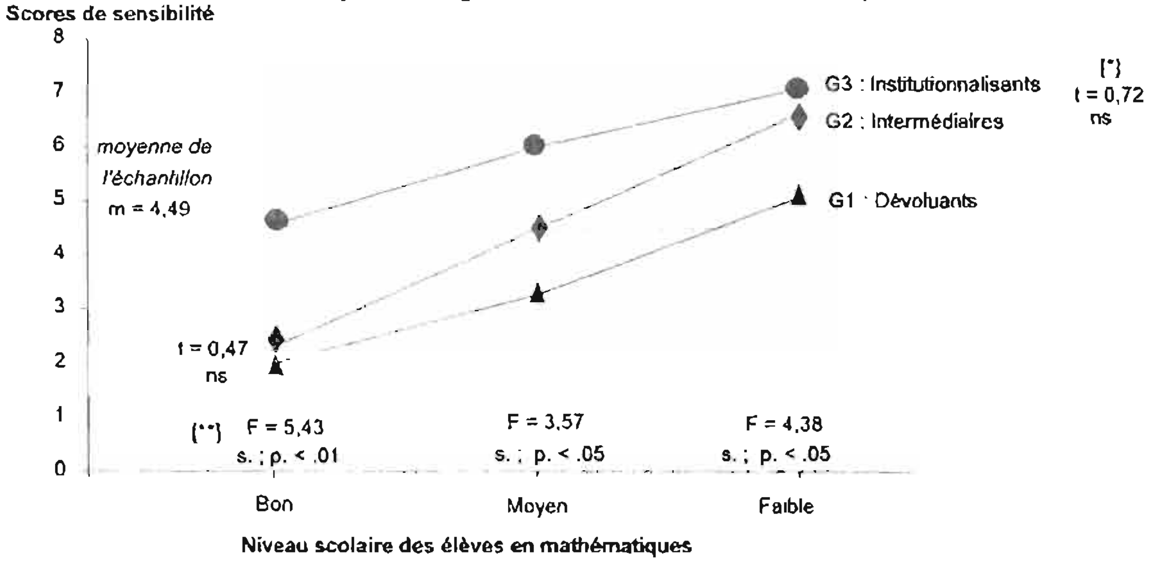
Scores moyens de réussites aux problèmes " pseudo-multiplicatifs " (PPM)[1] selon le style d'enseignement pour chaque niveau scolaire



Toutes choses égales par ailleurs, le style d'enseignement a un effet significatif sur la sensibilité (Analyse de la variance : Plan factoriel : NIVEAU SCOLAIRE X STYLE — N= 112) F = 9,96 ; s , .01) :

[1] Il s'agit de problèmes dont l'habillage (déclencheur, indice sémantique...) suggère une solution multiplicative : par exemple. *Un escargot est au fond d'un puits. Il décide de sortir de ce puits. Sachant qu'il mettra 6 jours pour sortir du puits, combien de temps mettront 3 escargots pour faire le même trajet ?*
Maîtriser la multiplication ce n'est pas seulement savoir identifier que la solution d'un énoncé relève effectivement de la multiplication, c'est aussi utiliser celle-ci pour affirmer qu'un problème ne relève pas de cette opération. Ce dernier usage est d'une part bien moins fréquent (surtout à l'école élémentaire) et d'autre part bien plus difficile (comme l'a bien montrer Piaget, 1974) que pour affirmer la validité d'une proposition.

Sensibilité au contrat
selon le style d'enseignement et le niveau en mathématiques



[*] t de Student (comparaison des deux moyennes G2 G3)
[**] F de Snédécor (analyse de la variance à un fact. de classification : styles G1 G2 G3)

Commentaire de ces derniers résultats
Que constate-t-on ?

1. A même niveau scolaire, il y a un effet significatif (F, s., $p < .01$) du style d'enseignement sur la sensibilité au contrat didactique : les élèves des maîtres institutionnalisants sont en moyenne plus sensibles que ceux des maîtres intermédiaires eux-mêmes plus sensibles que ceux des maîtres dévoluants.

2. On observe aussi un effet significatif (F, s., $p < .01$) du niveau scolaire sur la sensibilité au contrat qui se maintient pour chaque style d'enseignement.

3. On ne peut pas affirmer l'existence d'une interaction entre le niveau scolaire et le style d'enseignement ($F = 0.20$; n.s.) : il n'y a pas d'effet surajouté du style d'enseignement lorsque le niveau scolaire décroît.

Remarque : le terme choisi pour G2 — " intermédiaires " — pour inélégant qu'il soit — se révèle empiriquement assez bien adapté. En effet :

1. Les élèves faibles de G2 ne se différencient pas des élèves faibles de G3 ($t = 0.72$; n.s.) ;

2. Les élèves moyens de G2 ont un score de sensibilité quasi analogue à celui qu'on peut observer sur l'ensemble de l'échantillon ; ce score se situe pratiquement entre celui des élèves moyens de G1 et G3 ;

3. En revanche, les élèves de G2 ayant un bon niveau scolaire ne diffèrent pas, du point de vue de la sensibilité des élèves de G1 ($t = 0.47$; n.s.)

On peut donc affirmer l'existence d'un effet fortement significatif du style d'enseignement, indépendant du niveau scolaire, sur la sensibilité au contrat didactique. Ainsi, *plus le maître cherche à maîtriser l'incertitude des situations (comme c'est la cas pour les maîtres institutionnalisants), plus il limite le champ des possibilités de décontextualisation des règles enseignées* et il n'est pas déraisonnable de penser qu'il renforce — ou établit — ainsi chez l'élève un rapport quasi univoque entre une règle et son application. La réduction de la variété limite en conséquence la pluralité des jeux de langage par lesquels l'enfant construit les significations mais aussi en éprouve la validité.
De par leur position forte dans le champ scolaire, et des bénéfices qu'ils peuvent en retirer, les bons élèves, quel que soit le type de classe dans laquelle ils sont, s'autorisent davantage d'incursions que les plus faibles dans les interstices que laisse nécessairement toute règle. Il serait faux de croire qu'ils prennent plus de risques que ceux qui " restent à leur place " car même si un échec est plus " mordant " pour un bon élève, car inhabituel, il n'est pas avilissant comme celui des plus faibles. (Il y a fort à parier que les maîtres sont dans ce cas plus

complaisants, à tout le moins, plus discrets, lorsqu'il s'agit de sanctionner publiquement l'erreur d'un bon élève.) Risques limités aussi car, le bon élève prend davantage les initiatives de la parole, il est donc plus facile de se taire lorsqu'il ne sait pas. Enfin, et compte tenu de ces arguments, on peut penser que le rapport à l'erreur est différent selon le niveau de l'élève : la logique didactique semblerait l'emporter sur la logique dignitaire chez le bon élève probablement du fait même qu'il ne connaît pas, ou si peu, les humiliations des sempiternels " C'est encore faux ! ". Rappelons, pour finir, ce que nous confiait cette " excellente " élève étonnante, bien des fois, par sa finesse d'analyse psychosociale et didactique :

> " C'est pas important quand on doit comprendre c'est ça le plus important parce que l'opinion du maître ça sera pas important plus tard, ça sera de bien savoir tout quoi [C'est quand même bien le maître qui va décider si tu redoubles ou pas ?] Oui d'accord... mais je pense que c'est important de comprendre bien comme il faut même si le maître doit penser. . et puis le maître il fait passer [*je non redoubler*] quand on a d'assez bonnes notes et qu'on participe assez bien, même si l'on pose des questions. "

Conclusion

> La vie est comme un chemin de crête ; à droite et à gauche des ravins glissants, dans lesquels tu dégringoles sans pouvoir te retenir Je ne cesse de voir des hommes dégringoler de la sorte, et je me dis : "Comment un homme pourrait-il se sortir de là !" C'est cela que veut dire "nier le libre arbitre." Telle est l'attitude qui s'exprime dans cette 'foi'. Mais ce n'est pas une foi scientifique. elle n'a rien à voir avec les convictions scientifiques. *Nier* la responsabilité veut dire ne pas *tenir* les hommes pour responsables.
>
> Ludwig Wittgenstein

Que ce soit chez l'enseignant ou le chercheur, l'un et l'autre soucieux des questions praxéologiques, pour des raisons différentes — mais pas nécessairement, la tentation est toujours forte de prendre au pied de la lettre les modèles de l'action didactique afin d'optimiser les productions de l'enseignement — à la manière d'un biologiste qui après avoir identifié un virus recherche les moyens de sa maîtrise. Ce dernier aspect est particulièrement marqué pour ce qui concerne le contrat didactique : combien sont ceux qui, afin d'éviter des effets directement liés aux implicats qu'il mobilise, ont proposé d'en expliciter les clauses (Cf. Sarrazy, 1995). Mais la pertinence, voire même les effets, des propositions d'action n'est pas toujours à la mesure de la noblesse des intentions qui les soutiennent et les nourrissent. Cette dénonciation ne doit pas être interprétée comme une marque " d'aristocratisme ", quasi cynique, qui, à terme pourrait conduire à un obscurantisme paralysant (notamment pour les professeurs) ou encore à un relativisme radical laissant ainsi la porte ouverte à toutes les dérives, les traditionalismes dont on peut, parfois, subodorer les effets pervers. S'il ne s'agit pas de réduire tout espoir social, il ne s'agit pas non plus de sombrer dans un optimisme naïf en confondant le " vrai " et le " bien ". Ainsi, la question du statut praxéologique des productions de la didactique (comme ceux aussi des autres sciences humaines) se pose en termes fort différents pour les enseignants et pour les chercheurs qui se proposent d'intervenir directement sur les systèmes didactiques, les auteurs-chercheurs de manuels scolaires, par exemple — alors même que ceux-ci savent ou seraient censés savoir que la connaissance du réel est toujours incomplète, comme le disait si bien Bachelard (1975). Ce point aveugle de la théorie dans son rapport aux pratiques d'enseignement devrait conduire à plus de prudence quant à leurs injonctions (à tout le moins leurs propositions d'action) — devrait-on en conclure que la logique didactique n'est pas toujours compatible avec la logique éditoriale ou que l'économie des biens symboliques ne correspond pas à celle des biens matériels... mais c'est là une autre histoire. Toutefois, l'incomplétude de la théorie didactique pour expliquer les phénomènes d'enseignement n'exclut pas l'idée d'un réel travail d'information, de " didactisation " de ses productions. Mais il conviendrait, ici aussi, de rester prudent quant à la question du domaine de validité de ces productions et donc au statut de ces déclarations. Ainsi, comme pour l'élève à qui l'on dévolue une situation a-didactique, il s'agirait, peut-être, pour les professeurs, de laisser ouverte la question du " sens " et donc, du même coup celle de la pratique. En effet, nous avons montré que si la question du sens pouvait clairement se poser, et s'examiner par l'étude de ses conditions d'émergence, sa réponse, quant à elle, devait être passée sous silence. La pratique enseignante ne saurait se réduire à une technique dont la didactique constituerait sa technologie mais est à considérer comme un art (théâtral ?), à tout le moins une *poïèsis*, qui, pour théorisable qu'elle soit, demeurera à jamais une sensibilité pédagogique.

Bernard Sarrazy
Laboratoire DAEST
Université Victor Segalen — Bordeaux II

ANNEXE 1

Nous tenons ici à récuser l'argument de R. Brissiaud énoncé lors du débat selon lequel le résultat annoncé au point 3 (La situation de production de la réponse à un problème inhabituel (type capitaine, énoncé lacunaire ou avec données supplémentaires) détermine le sens attribué aux énoncés qui sont proposés — cf. aussi Sarrazy, 1996) ne serait pas valide du fait même que la tâche aurait été modifiée eu égard aux changements des conditions.

a) Faut-il une fois de plus rappeler que les situations retenues pour cette observation étaient toutes des situations d'évaluation dans lesquelles nous avons proposé les mêmes énoncés de problèmes — contrairement à celles que Brissiaud retient pour son expérience (1987). Ici, il s'agissait de la *même* tâche (au sens où ce concept est employé dans le champ même de la psychologie — HOC, 1987) : dans chacune des situations proposées, l'élève doit fournir la preuve qu'il sait faire ce qui lui est demandé. Cependant, elles diffèrent entre elles par leur degré d'analogie aux situations habituelles : le statut de l'émetteur peut être, selon les cas, l'expérimentateur (en S1), des élèves (en S2 : " concours de mathématiques ") ou le professeur (en S3). Un quatrième type de situation exige d'être un peu plus détaillé, nous l'avons baptisé : " situation avertie ". Il s'agissait de nous assurer que les élèves étaient *effectivement* capables de repérer un énoncé de problème " défectueux ". Dans cette épreuve nous informons les élèves de la présence dans le protocole de problèmes non calculables mélangés à des problèmes calculables. Chaque problème non calculable (forme classique) (PBA, PBI, PBS, PPM) a été appareillé à un problème calculable (forme déguisée). L'appariement portant sur le plus grand nombre de variables possibles : la structure de l'énoncé, le rapport sémantique entre le thème de la question et celui de l'énoncé...

2) D'autre part, nous rappelons que R. Brissiaud lui-même affirme que des élèves qui récusent la validité d'un énoncé de problème le rejetteront dans tout type de situations. Brissiaud admet donc ce que par ailleurs il récuse à savoir qu'il s'agit toujours de la même tâche (sans cela son argument n'est pas recevable). Pour partisan que je puisse être des jeux de langage, celui-ci me paraît pour le moins acrobatique. En fait, ce que R. Brissiaud n'a pas bien perçu est le fait que cette expérience vise à remettre en cause l'idée de la transversalité des procédures de résolution ; si certains élèves, comme ce fut d'ailleurs le cas récusent la validité de l'énoncé dans tout type de situations :

a) D'une part, il ne serait pas très sérieux de généraliser comme il fait à partir de quelques élèves (cf. annexe 2)

b) J'ai moi-même proposé une explication en terme de sensibilité au contrat dans le cadre de la théorie didactique à ce phénomène sans avoir eu besoin de recourir à des hypothèses fonctionnalistes.

3) Enfin, il est pour le moins curieux que Brissiaud utilise cet argument ici (changement de tâche) alors même qu'il procède ainsi dans son expérience sur l'âge du berger (Comment peut-il prétendre comprendre les conduites des élèves de l'expérience de Grenoble qui devaient résoudre l'énoncé alors que lui leur demande de se prononcer sur sa validité. (cf. Annexe 2 où nous développons davantage cette analyse.)

ANNEXE 2

Dans une publication de 1987, R BRISSIAUD avance avancedeux hypothèses pour expliquer ce phénomène ; celui-ci serait lié :

- à une méconnaissance des élèves d'un énoncé de problème bien formé ;
- à l'enseignement qui transformerait les élèves en *automathes*.

R. Brissiaud se présente à des élèves de CE2 (7-8 ans) comme un professeur de mathématiques voulant rédiger un manuel. Dans le cadre d'un entretien individuel, il demande à l'élève d'inventer un problème, de lui dicter l'énoncé, puis de le résoudre. Cette partie de l'expérimentation vise en fait à contextualiser l'activité ; l'expérience proprement dite ne débute que dans un second temps où il propose à élève le " problème du berger " :

> " Dans une autre classe, j'ai demandé à un enfant de faire un problème où l'on parle de 75 moutons et 5 chiens ; je vais t'écrire le problème que l'enfant a inventé, et tu me diras ce que tu penses de son problème [écriture du problème] [ ] "Dans un troupeau, il y a 75 moutons et 5 chiens ; quel est l'âge du berger ?" " (p. 67)

Ses observations le conduisent à conclure que les chercheurs de l'IREM de Grenoble ont sous-estimé dans leurs interprétations " la capacité des enfants à déceler une difficulté liée au traitement de l'énoncé, [et qu'] ils ont surestimé leur capacité à élaborer une décision de rejet de sa validité. " (p. 86).

Pour séduisante qu'elle puisse paraître de prime abord, cette affirmation nous semble être un peu hâtive. En effet, non seulement cette étude porte sur un échantillon très faible — 23 élèves au total — mais surtout, ce qui nous semble être beaucoup plus discutable, c'est le fait que la représentation de la situation par les élèves ne soit pas du tout prise en compte dans les interprétations avancées.
Peut-il en effet prétendre réviser l'interprétation avancée par les chercheurs grenoblois, alors que le contexte de l'expérience de 1979 est radicalement différent de celui qu'il met en place ?
Nous pointerons quatre différences, selon nous, essentielles :

- Les élèves de Grenoble avaient passé l'épreuve dans leur classe, et non en relation duelle avec une personne extérieure à leur classe ; BRISSIAUD semble admettre que le lieu, le moment, le statut de l'interlocuteur... n'auraient aucun effet sur la signification de la tâche et sur les attentes des élèves ?
- Ils devaient résoudre le problème (produire une réponse écrite) alors qu'ici l'élève se limite à se prononcer sur sa validité — la " tâche " est donc complètement différente.
- Les élèves grenoblois ne recevaient aucun feed-back durant l'exécution de la tâche, ce qui n'est le cas dans le contexte défini par R. Brissiaud ;
- Enfin, à Grenoble, le problème proposé était assumé par un adulte alors que dans cette expérience il est présenté comme ayant été produit par un élève :

> " Toujours dans le but de favoriser cette prise de conscience [celle de l'absurdité de la question posée], nous nous sommes efforcés qu'aucun piège ne soit tendu aux enfants : on ne leur demandait pas de résoudre le problème [sic], mais d'évaluer cet énoncé, de dire ce qu'ils en pensaient et, pour rendre plus crédible cette situation, nous avons créé un contexte où l'énoncé n'est plus assumé par un adulte mais est sensé [re-sic] avoir été produit par un autre enfant " (p. 67)

Néanmoins, nous venons de le voir, la tâche était *tout de même* proposée par un adulte, professeur de mathématiques, dont l'intervention était très certainement avalisée par le maître de la classe. . L'expérimentateur devait, en conséquence s'engager à assumer à l'égard de l'élève un certain nombre de clauses contractuelles. On peut aisément imaginer que l'élève aurait pu penser : " Cet expérimentateur ne me propose pas n'importe quelle tâche ", " Il a nécessairement déjà jugé cet énoncé ", " Que cherche-t-il et qu'attend-il réellement ? Où veut-il en venir ?... A évaluer mes compétences ? A m'enseigner quelque chose ?... " bref, tout un ensemble de questions, qui bien qu'implicites, permettent à l'élève de définir la situation *hic* et *nunc* et donc de s'y inscrire. C'est ce système d'attentes qui constitue, en référence au contrat didactique, le *contrat expérimental* (M. L. Schubauer-Léoni 1986) qui se noue entre l'élève et l'expérimentateur. Face aux ambiguïtés de la situation, l'élève peut attribuer à l'expérimentateur diverses intentions selon qu'il estime que cette tâche relève de connaissances déjà enseignées (l'élève définira alors la situation comme une situation d'évaluation et cherchera alors faire état de ces compétences) ; soit l'élève estimera que les connaissances en jeu sont nouvelles et ramènera la situation à une situation de test. Face à ces ambiguïtés, comme le souligne très justement M. L. Schubauer-Léoni (*id.*), l'élève peut être conduit à redéfinir un micro-contexte didactique où l'expérimentateur joue le rôle du nouveau maître et accepter ou rejeter le jeu qui lui semble devoir se dérouler. Dans le cas où les connaissances en jeu lui semblent identifiées, il cherchera des indices afin de satisfaire aux exigences supposées du contrat, dans le cas contraire il interprétera la situation comme une rupture dans le contrat didactique.

La négociation du contrat expérimental et la remise en cause de ces clauses implicites par un élève de l'expérience de R. Brissiaud (PAL) semblent venir à l'appui de notre interprétation :

> PAL : " Moi je dirais plutôt " Combien y a-t-il d'animaux ? " Ah, je crois bien qu'il [l'enfant présumé être l'auteur du problème du berger] croit que c'est 75 + 5 = 80. <u>Il ne t'a pas dit ce qu'il fallait faire ?</u> "
> EXP : " Non, je n'ai pas su quoi lui dire ! <u>Qu'est-ce que j'aurai dû lui dire après toi ?</u> " (Brissiaud, *id.*)

Malgré son intention explicitement avouée de ne tendre aucun piège à l'élève (voir *supra*), l'expérimentateur brise ici le contrat de communication en ne respectant pas la seconde maxime du principe de coopération de GRICE (1979) — " Que votre contribution soit véridique " En effet, selon le protocole expérimental l'élève doit résoudre l'énoncé qu'il a lui-même proposé en conséquence, l'élève auquel se réfère PAL — *i.e.* l'élève censé avoir produit le problème du berger — aurait dû indiquer à l'expérimentateur " *ce qu'il fallait faire* ". Pour byzantine qu'elle paraisse, cette remarque nous semble importante pour deux raisons :

La première tient à la cohérence entre les hypothèses du chercheur et les moyens mis en œuvre pour les éprouver : peut-il à la fois postuler que tous les élèves n'adoptent pas des conduites de conformité dans une situation ambiguë et leur demander, en même temps, d'accepter une contradiction entre ce qu'il demande (résoudre le problème) et ce qu'il affirme (PAL : *Il ne t'a pas dit ce qu'il fallait faire ? EXP: Non, je n'ai pas su* *quoi lui dire...*). Comment R. Brissiaud peut-il admettre qu'un élève croit réellement qu'un auteur de manuel de mathématiques ne sait pas quoi répondre à un élève qui lui soumet le problème du berger ? Il est tout aussi absurde de croire cela que de croire que le berger a 80 ans... Pourquoi l'élève feindrait-il de ne pas comprendre dans un cas et pas l'autre ?

La seconde raison arrive en conséquence de la précédente : ne peut-on pas penser que l'acceptation ou le refus implicite par l'élève de ces implicats modifie les représentations qu'il peut avoir de la situation, des attentes de l'expérimentateur... en un mot, le contrat expérimental.
Les effets du contrat expérimental dans l'interprétation de la situation apparaissent nettement dans l'entretien avec WON qui déclare : " *C'est bien,* [le problème est bien], *c'est que moi j'arrive pas à le faire.* " et l'auteur d'en conclure :

> " Cet enfant n'a pas cessé de s'attribuer la difficulté rencontrée : le problème est bien, s'il y a une difficulté, c'est parce que lui ne sait pas le faire. [...] l'élaboration d'une décision de rejet dépend d'un facteur de personnalité qui traduirait la plus ou moins grande inclinaison d'un sujet, lorsqu'il est confronté à une difficulté, à interpréter la difficulté comme le signe de son incompétence, plutôt que de remettre en cause la tâche elle-même. " (Brissiaud, 1988).

Bien que nous soyons également persuadé que le facteur " personnalité " intervienne dans la décision de rejet de la validité d'un énoncé, nous pensons que l'interprétation par l'élève de la difficulté comme " le signe de son incompétence " peut tout aussi bien être la manifestation d'une " perception ", différente des autres élèves, du contrat expérimental.

Discussion

En conséquence des analyses précédentes, ces travaux ne nous semblent pas apporter d'explication satisfaisante sur le phénomène " âge du capitaine " tant au plan de l'analyse didactique — rappelons que l'auteur s'est limité à une situation de test —, qu'au plan de l'analyse psychosociale — du fait des biais introduits, et non contrôlés par le dispositif expérimental, et d'autre part de la contradiction que nous avons évoquée dans son protocole expérimental.
Enfin, cette étude, centrée principalement sur le sujet psychologique, occulte les variables liées à la situation de classe dans laquelle *l'effet " âge du capitaine "* se manifeste. Comme certains psychologues, R. Brissiaud semble penser que la réalisation d'une tâche est indépendante des situations dans lesquelles elles s'actualisent et des institutions par lesquelles elles prennent sens[1].

Références bibliographiques

AEBLI H., *Didactique psychologique* : application à la didactique de la psychologie de Jean Piaget, 4ème ed., Neuchâtel : Delachaux et Niestlé, s.d., 163 p., 1966

BACHELARD G., *La formation de l'esprit scientifique* : contribution à une psychanalyse de la connaissance objective, Paris : Vrin, 1975, 257 p.

BERBAUM J., *Développer la capacité d'apprendre*, ESF, 1991.

BRISSIAUD R., " De l'âge du capitaine à l'âge du berger : quel contrôle de la validité d'un énoncé de problème au CE2 ? ", *Revue Française de Pédagogie*, n° 82, 1988

BRISSIAUD R., " Quel contrôle de la validité d'un énoncé de problème chez les élèves de cours élémentaire deuxième année " p. 61-88, *in* J. COLOMB, J.-F. RICHARD (dir.), *Résolution de problèmes en mathématique et en physique*, Rapports de recherches, 1987, n° 12.

[1] On pourrait nous objecter qu'il affirme le contraire : " le type de décision que prend l'élève [...] est extrêmement sensible aux conditions de passation. " (1987, 86), or ce qu'il écrit là est relatif à l'expérience grenobloise et l'auteur n'a, à aucun moment, mis en rapport les conditions de passation de sa propre expérience avec les résultats qu'il interprète : il n'enregistre, ainsi qu'il nous semble l'avoir montré avec le cas de *WON*, que des conduites qui sont, elles aussi, dépendantes des conditions de son expérience. Ce que nous contestons ici, c'est davantage l'usage normatif qu'il fait de ses résultats et la manière dont il les a établis que le contenu même de ses conclusions.

BROUSSEAU G., " Didactique fondamentale : cadre et objets de la didactique ", *Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire*, (Actes de l'université d'été d'Olivet, 2-8 juillet 1988 b), Bordeaux : IREM, s.d., p. 10-25.

BROUSSEAU G., PERES J., *Le cas Gaël*, (doc. ronéo.), Université de Bordeaux I : IREM, août 1981 a, 59 p.

BROUSSEAU G., *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Thèse pour le doctorat d'état, Université de Bordeaux I, 1986 a, 481 p.

CAILLOT M., " La résolution de problèmes de physique : représentations et stratégies ", *Psychologie Française*, 1984, tome 29-21, p. 257-262.

CERQUETTI-ABERKANE F., *Enseigner les mathématiques à l'école*, Paris : Hachette, 1992, 253 p.

CHEVALLARD Y., *Sur l'analyse didactique* : deux études sur les notions de contrat et de situation, (doc. ronéo), IREM, n° 14, 1988 a, 92 p.

CHEVALLARD Y., JOHSUA M.-A., *La transposition didactique :* du savoir savant au savoir enseigné, Grenoble : La pensée sauvage, 1991, 240 p.

CLANCHÉ P., " L'enfant et le contrat didactique dans les derniers textes de Wittgenstein ", *in* H. HANNOUN, A.-M. DROUIN-HANS, (dir.), *Pour une philosophie de l'éducation*, [Actes du colloque " Philosophie de l'éducation et formation des maîtres " Dijon 14-15-16 oct. 1993], ed. CNDP, CRDP de Bourgogne, 1994, p. 223-232.

CLAVIER Y., BIA J., MARECHAL C., *Objectif calcul CM1*, Paris : Hatier, 1987, 223 p.

COLOMB J. (dir), *Apprentissages numériques et résolution de problèmes :* cours préparatoire, Paris : Hatier / INRP-ERMEL, 1991, 358 p.

DEBRAY R., *Apprendre à penser* : Le programme de R. FEUERSTEIN : une issue à l'échec scolaire, ed. Eshel, 1989.

DIENES Z. P., JEEVES M.A., *Pensée et structure*, [traduit de l'anglais par L. MAURY], Paris : OCDL, 1967, 147 p.

DUFOUR D.-R., *Folie et démocratie* : essai sur la forme unaire, Paris : Gallimard, 1996, 256 p., coll. Le débat

ESCARABAJAL M.-Cl., " Compréhension et résolution de problèmes additifs ", *Psychologie Française*, 1984, n° 29, 247-252.

ESCARABAJAL M.-Cl., " Schémas d'interprétation et résolution de problèmes arithmétiques ", *Revue Française de Pédagogie*, INRP, 1988, n° 82, 15-22.

FAYOL M., MONTEIL J.-M., " Stratégies d'apprentissage / Apprentissage de stratégies ", *Revue Française de Pédagogie*, 1994, n° 106.

FLAVELL J.H., " Le développement métacognitif ", *in* J. BIDEAUD, M. RICHELLE (eds), *Psychologie développementale* : problèmes et réalités, Mardaga, 1985, p. 29-42.

GALATANU O., " Savoirs théoriques et savoir d'action dans la communication didactique ", *in* J.-M. BARBIER (dir.), *Savoirs théoriques et savoirs d'action*, Paris : PUF, 1996, 305 p., coll. pédagogie d'aujourd'hui, p. 101-118.

GLASER R., " Enseigner comment penser : le rôle de la connaissance ", *in* M. CRAHAY, D. LAFONTAINE, (dir.), *L'art et la science de l'enseignement*, Bruxelles : Labor, 1986, p. 251-280.

GRICE H.P., " Logique et conversation ", *Communications*, 1979, n°30.

NGUYEN-XUAN A., RICHARD J.-F., HOC J.-M., " Le contrôle de l'activité ", *in* J.-F. RICHARD et al. *Traité de psychologie cognitive : le traitement de l'information symbolique*, Paris . Dunod, 1990, 289 p., t. 2, p. 207-246.

NOËL B., " La métacognition ", *Sciences Humaines*, décembre 1995, n° 56, p. 23-25.

NOËL B., *La métacognition*, De Boeck, 1991.

PIAGET J., *Recherches sur la contradiction*, Paris : PUF, 1974.

RICHARD J.-F., " L'approche cognitive dans la résolution de problèmes à l'école ", *in* J COLOMB, J.-F. RICHARD (dir.), *Résolution de problèmes en mathématique et en physique*, I.N.R.P, coll. rapports de recherches, 1987, n° 12, p. 277-281.

ROBERT A., ROBINET J., " Prise en compte du méta en didactique des mathématiques ", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1996, vol. 16, n° 2, p. 145-176.

SARRAZY B., " Peut-on formaliser les procédures de résolution des problèmes d'arithmétique à l'école élémentaire ? ", *Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle*, 1994, n° 3, 31-54.

SARRAZY B., " Le contrat didactique ", *Revue Française de Pédagogie*, 1995, n° 112, p. 85-118.

SARRAZY B., *La sensibilité au contrat didactique* : Rôle des Arrière-plans dans la résolution de problèmes d'arithmétique au cycle trois, Thèse pour le doctorat de l'Université de Bordeaux II — Mention Sciences de l'Education, sous la direction de M. le Professeur Pierre CLANCHÉ, 1996, 775 p.

SARRAZY B., " Sens et situations : une mise en question de l'enseignement des stratégies métacognitives en mathématiques ", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 17, n° 2, 1997, p. 135-166

SCHUBAUER-LEONI M.-L., *Maître-élève-savoir* : analyse psycho-sociale du jeu et des enjeux de la relation didactique, Thèse de Doctorat de la faculté de psychologie et des Sciences de l'Education de Genève, sous la direction de A.-N. PERRET-CLERMONT, 1986

SEARLE J.R., *Sens et expression :* Etudes de théorie des actes du langage, [traduction de J. PROUST], Paris : Les Editions de Minuit, 1982.

SEARLE J.R., " L'esprit est-il un programme d'ordinateur ? ", *Pour la science* 1990, n° 149.

VERMESCH P., " Questionner l'action : l'entretien d'explicitation ", *Psychologie Française*, Dunod, 1990, t. 35-3, p. 227-235

VERMESCH P., *L'entretien d'explicitation en formation initiale et en en formation continue*, Paris . ESF, 1994, 184 p., coll. Pédagogies.

VERMESCH P., *Pratique de l'entretien d'explicitation*, Paris : ESF, 1997, coll. Pédagogies.

WEBER M., *Essais sur la théorie de la science*, [traduit de l'allemand et introduit par J. FREUND], Paris : Plon, 1992, 478 p.

WITTGENSTEIN L., *De la certitude*, [traduit de l'anglais par G. DURAND], Paris : Gallimard, 1976 (pour la trad. franç.), 152 p., coll. TEL

WITTGENSTEIN L., *Tractatus logico-philosophicus* (Suivi des *Investigations philosophiques*), [traduit de l'allemand par P. KLOSSOWSKI], Paris : Gallimard, 1961, 364 p., coll. TEL.

CE QUE NOUS POUVONS APPRENDRE DE L'OBSERVATION BIOGRAPHIQUE DES ELEVES

Alain MERCIER Université de Marseille

Résumé

L'observation didactique, fondée principalement sur l'analyse de la transposition puis sur l'analyse des situations didactiques, peut emprunter la voie complémentaire de l'observation individuelle des élèves en situation de travail scolaire dans les différents lieux de l'étude, « en classe », « à l'école », « à l'aide aux devoirs » ou « à la maison ». On découvre alors des phénomènes bien connus en pratique, mais peu étudiés par les didactiques ou les sciences de l'éducation : les élèves apprennent aussi tout autre chose que ce que les professeurs leur enseignent explicitement. L'étude biographique du didactique enrichit la compréhension du travail du professeur, qui se comprend comme "régulation de la relation didactique", selon l'expression de Brousseau, ou «direction de l'étude», comme le décrit Chevallard.

LES ELEVES APPRENNENT, OU QUAND ET QUOI ?

Ces questions apparemment simples n'émergent pourtant qu'aux yeux de ceux qui renoncent à la fois à demander comment les élèves apprennent-ils (ce sont les psychologues) et pourquoi le font-ils (ce sont les sociologues), parce que chacune de ces deux questions rencontre tellement facilement le questionnement premier sur le didactique et parce qu'elle est tellement ardue, que la plupart de ceux qui s'y engagent, s'y arrête sans atteindre au didactique. Mais le questionnement didactique a dû, pour expérimenter les premières théorisations proposées, chercher à produire expérimentalement les phénomènes que la théorie prenait en charge : une phénomènotechnique s'est développée, qui a été regardée et reconnue par les professeurs et leurs formateurs avec leurs yeux de producteurs artisanaux de moyens didactiques, développés dans la lignée des tableaux ou «cartes» de Jean Baptiste de La Salle (1720, De la conduite des écoles chrétiennes) cité ici par le Dictionnaire d'histoire de l'enseignement, sous la direction de François Chagneau (1981).

« ...dans la première classe, il y aura deux grandes cartes attachées à la muraille à la hauteur de 6 ou 7 pieds, à prendre depuis le haut de la carte jusqu'à terre. L'une remplie de lettres simples, petites et grande diphtongues, et l'autre de syllabes de deux ou trois lettres. . » Une «table» est réservée à l'enseignement des mathématiques : « Il faut aussi que les deux pans de cette table soient peints en huile de couleur noire, afin qu'on puisse écrire les règles dessus, avec de la craie. »

... et des autres «matériels scolaires» comme l'on disait dans les écoles primaires ou «matériels didactiques» comme on le dit encore dans les facultés de médecine. Or, contrairement à leur dénomination usuelle d'ingénierie didactique, les montages expérimentaux des didacticiens ne sont pas des moyens didactiques professionnels qui relèveraient d'une approche scientifique, c'est-à-dire une ingénierie : leur diffusion sous cette appellation relève d'un contresens, entretenu il est vrai par le fait que les chercheurs en didactique ont aussi développé des ingénieries au sens propre, qui diffusent sous le même nom que leurs instruments expérimentaux.

Le résultat en est le suivant : les trois questions que j'ai posées restent l'apanage des professeurs, qui les résolvent depuis toujours pratiquement, en leur inventant une solution personnelle qui a les qualités d'efficacité des solutions pratiques en même temps qu'elle en a les défauts rédhibitoires : car une solution pratique rend invisible le problème qu'elle résout, ce qui interdit d'identifier les solutions possibles, de les comparer ou de les transmettre. Chacun doit réinventer la sienne propre, qui devient comme un élément de son histoire personnelle.

Je tenterai donc de partir de ces questions c'est-à-dire de les poser, pour les quitter afin d'y revenir armé des savoirs ramassés au cours d'un trajet d'enquête qui a fait l'essentiel de ma recherche et dont j'espère arriver à rendre compte dans l'heure qui m'est impartie.

Où apprennent les élèves ?

Evidemment, les élèves apprennent en classe... Pourtant rien n'est moins sûr, et si nous savons dire que tel élève a appris ce n'est pas, en général, parce que nous avons observé le phénomène même de cet apprentissage en observant l'élève dans la classe où il est enseigné : nous affirmons qu'un élève a appris parce que dans un premier temps nous avons observé un comportement qui manifestait son ignorance, puis que, dans un second temps, nous avons observé un comportement qui manifestait sa connaissance. Aller observer ailleurs suppose que l'on fasse exister des questions rarement étudiées. Le questionnement que les élèves engagent en classe se poursuit-il ailleurs et dans quelles conditions ? Les réponses que les élèves étudient en classe sont-elles précédées d'un questionnement apparu ailleurs ? Peut-on observer des différences dans les apprentissages venues des différences observables à ces niveaux ? Comme tout professeur expérimenté, vous êtes persuadés de connaître des éléments de réponse à ces questions ; mais notre conviction est-elle fondée et quels sont les moyens à notre disposition pour réduire l'inégalité devant l'école qui s'en suit, c'est une des questions que nous devrons étudier (Lahire, Culture écrite et inégalités scolaires, Sirota, L'école primaire au quotidien, Mercier, thèse, conclusion, René...)

Quand apprennent les élèves ?

Bien sûr, s'ils apprennent ailleurs, ils apprennent dans d'autres temps. Mais il faut aller plus loin : chacun de nous se souvient sans effort d'au moins une occasion où ce n'est que quelques semaines, quelques mois ou même quelques années après qu'il a appris ce qui avait été enseigné il y a longtemps. Nous rencontrons ainsi chaque année des élèves professeurs qui apprennent enfin, en préparant une leçon, ce qui leur avait été enseigné plus de dix ans auparavant sans jamais être repris dans une nouvelle occasion d'apprentissage : *professeur, chacun sait que c'est pour apprendre*, comme l'a dit fort justement Lacan. Observer plus tard suppose cette fois encore que l'on se déprenne de l'emprise de l'institution scolaire, qui tend à faire croire que tout se passe en classe (Meirieu, Plantu & Serguei, Le Monde du 29 avril dénonçant «le *tout magistral*»...). Pour observer de tels phénomènes, nous devrons imaginer des questions nouvelles au terme desquelles nous découvrirons sans doute un sens nouveau aux travaux de Brousseau sur la didactique du sens : en didactique des mathématiques aussi, le sens vient après-coup. Les élèves apprennent-ils après-coup, à quelles occasions le font-ils ? Quels sont les liens entre ces apprentissages et l'existence de lieux d'étude périscolaires ? Comment les professeurs prennent-ils en compte ce phénomène, comment produisent-ils des occasions d'après-coup ? Poser ces questions fait sans doute venir à votre mémoire des éléments de réponse, nous devrons en proposer l'organisation systématique, parce qu'il semble que les réponses professionnelles des enseignants à la première question dépendent en grande partie de leurs réponses à celles-ci.

Quoi donc apprennent les élèves ?

Il est maintenant certain qu'ils n'apprennent pas seulement ce qui leur est officiellement enseigné, même lorsqu'ils sont en classe ! Mais encore ? Sans doute apprennent-ils des éléments utiles pour résoudre les problèmes qu'ils se posent à propos des enseignements qui leur sont dispensés : mais le professeur n'a pas accès à l'ensemble de ces problèmes et y aurait-il accès qu'il ne saurait quoi en faire. Nous devrons par conséquent produire une description de la relation didactique qui nous permettre de prendre en compte ce fait essentiel : une part importante des apprentissages réalisés par les élèves échappe à l'intention didactique qui a présidé à l'organisation de leur enseignement. Est-ce une part négligeable ou une part essentielle ? Quelle en est l'organisation ? Peut-on et doit-on chercher à la diminuer en l'organisant explicitement, ou faut-il organiser l'enseignement de manière à l'augmenter ? Je montrerai en conclusion comment les réponses que l'on peut donner rejoignent certains travaux de Brousseau et permettent d'en donner une interprétation que je crois nouvelle.

COMMENT DECRIRE L'ACCES DES ELEVES AU SAVOIR ?

Les questions que je pose ici proviennent du travail d'observation et de théorisation engagé par Yves Chevallard et ses étudiants au tout début des années 80 (Tonnelle 1979, Schneider 1979, Pascal 1980, Jullien 1985) et aboutissant à la proposition d'une métaphore nouvelle pour décrire connaissance et savoir, les notions de rapport personnel et de rapport institutionnel à un objet. Je n'argumenterai pas l'intérêt de la chose, préférant vous en montrer le fonctionnement et la productivité théorique et pratique. L'idée est la suivante : nous accédons à un savoir en entrant dans une institution spécialisée dans la pratique de ce savoir et qui organise pour ses sujets des gestes d'étude, tout comme nous accédons au religieux en entrant dans une assemblée spécialisée dans la pratique d'une religion et qui organise pour ses sujets des gestes de dévotion. Pour le dire le plus généralement possible, en donnant une définition anthropologique :

Une institution se définit par un objet (le savoir, le religieux, le politique, etc.) qui se décline en une organisation de sous objets.
Elle ouvre à ses sujets l'accès à une pratique normalisée relative à une classe d'objets, et l'objet de l'institution se trouve ainsi réalisé, pour ses sujets.
On remarquera que plusieurs organisations institutionnelles peuvent entrer en concurrence à propos d'un même objet.
L'anthropologie des institutions consiste en l'étude des formes de pratiques et des organisations de pratiques proposées par les diverses institutions existantes.

Etre enseigné par corps (exemple construit)

Je ne développerai cette définition que dans le cas des institutions didactiques, et je me limiterai à ce qui concerne le jeu temporel qui s'y joue en suivant le cas particulier d'un exemple observé. Considérons en effet qu'un jour particulier, au CM1 le professeur présente (comme le programme l'y engage) *un objet* mathématique, mettons un nombre, 12340, dont les élèves savent montrer qu'il est supérieur à 9999, et qu'il pose le problème suivant : comment nommer un tel nombre ? Nous dirons que la dénomination des grands nombres est l'objet *sensible* de sa leçon (C'en est l'*enjeu didactique officiel* et c'est sur cet objet que l'enseignement et l'apprentissage seront évalués). Par conséquent, les élèves vont devoir développer un certain *rapport personnel à cet objet nouveau*, au travers des instructions qu'ils vont recevoir. Par exemple, le professeur leur montrera que l'on écrit traditionnellement (dans la vie courante) le nombre 1,2,3,4,0 en laissant un espace entre 1,2 et les trois chiffres 3,4,0 qui suivent de manière à obtenir douze et trois cent quarante. Le nombre se lit alors «douze *mille* trois cent quarante», ce que le professeur justifie en expliquant à l'aide d'un tableau de numération que douze est le compte des unités de l'ordre des mille et que l'on regroupe les ordres en classes pour économiser les noms d'ordres en fabriquant des noms composés.

Classe des millions			classe des mille			classe des unités simples		
ordre des centaines de millions	ordre des dizaines de millions	ordre des unités de millions	ordre des centaines de mille	ordre des dizaines de mille	ordre des unités de mille	ordre des centaines simples	ordre des dizaines simples	ordre des unités simples
				1	2	3	4	0

Le rapport personnel des élèves à la dénomination des grands nombres sera jugé *adéquat* si, face au nombre 4578103 ils peuvent produire le comportement suivant :

Ecrire le nombre en regroupant des classes de trois chiffres à partir de la droite, **4 528 103**
Ecrire chacun des nombres figurant dans les classes indépendamment de sa position, c'est le nombre d'unités de son ordre qu'elle contient **quatre** pour les millions, **cinq cent vingt huit** pour les milles, **cent trois** pour les unités simples,
mais ne pas oublier d'indiquer le nom de chacune des classes après le nom du nombre d'unités de son ordre qu'elle contient... sauf pour les unités simples, quatre **millions** cinq cent vingt huit **mille** cent trois

Il va de soi qu'une telle règle n'est pas explicitement écrite : elle est enseignée « par corps », comme le dit si justement le sociologue Pierre Bourdieu, c'est-à-dire qu'elle est proposée comme une manière de faire pour laquelle chacun pense qu'il n'y a là « rien à savoir » ou à comprendre au point par exemple qu'en Suisse, ce n'est pas un objet de l'enseignement élémentaire des mathématiques. Je pourrais dire, pour être provocateur avec un vocabulaire psychologique que c'est un simple comportement mais je dirai, conformément à l'usage anthropologique, que c'est une « manière » d'écrire et de lire les grands nombres semblable dans son statut social à une « manière » de mettre la couvert ou de dresser la table : lorsqu'on montre une manière de faire à un apprenti, on attend simplement de lui qu'il la réalise lorsque cela sera nécessaire, ou lorsque cela lui sera demandé, mais on n'attend pas qu'il se pose un quelconque problème. C'est bien sûr une manière socialement identifiée (on ira lire des grands nombres à l'extérieur de l'école, pour observer la manière dont ils sont présentés), c'est une manière dont le professeur peut rendre compte (il fera réaliser un tableau de numération comprenant la description des ordres supérieurs à mille en sous-ordres d'une classe), c'est une manière qui doit être produite lorsque l'occasion s'en présente (le professeur propose à cet effet une série de problèmes qu'il nomme très justement «exercices», parce qu'ils donnent de nombreuses occasions d'exercer la manière attendue, pour l'incorporer). Cette manière de faire est un savoir, qui peut être nommé : « Si on sait écrire en trois chiffres, on peut écrire n'importe quel chiffre » dira un élève, rappelant d'un coup le problème résolu et l'idée originaire.

On remarquera que le rapport aux grands nombres ainsi institutionnalisé par l'enseignement (ce que Chevallard nomme le *rapport officiel à l'objet* ou le *rapport institutionnel à l'objet sensible*) est *conforme* au rapport de la société à ces nombres, mais pas au rapport des mathématiciens à ces nombres. Car les problèmes posés par les systèmes de numération ne comprennent le choix d'un système particulier de dénomination et l'écriture en classes que dans le cadre de la question posée par Chuquet au XVI^e^ siècle : produire un système de dénomination de tout nombre, quelle que soit sa taille.
On remarquera aussi que cette description de l'enseignement laisse ouverte la question de la manière dont se forme le *rapport personnel des élèves à l'objet* et les conditions de sa formation heureuse. L'observation des épisodes de la biographie didactique des élèves portera précisément sur ce point, mais nous pouvons prévoir a priori certains des problèmes que nous observerons.
On remarquera enfin que ce n'est là que *la surface des activités scolaires*, parce qu'il n'est nul besoin d'une école pour obtenir des apprentissages par corps sans chercher à justifier les savoirs ainsi transmis. Il est en revanche des savoirs qui ne peuvent être transmis d'une génération à l'autre que par le moyen d'une institution où des professeurs dirigent l'étude des élèves : ce sont en particulier les savoirs scripturaux, parce qu'ils ne sont pas contenus dans une pratique technique mais qu'ils comprennent encore un discours qui rend compte de la pratique (une technologie) et même, un discours qui rend raison de l'ensemble (une théorie). Il est alors nécessaire d'étudier les discours de manière à pouvoir les reproduire, dans le temps même de l'étude des problèmes pratiques (qui forment les questions vives dont traite le savoir).

Etudier à nouveau ce que l'on sait (exemple construit)

Imaginons maintenant ce qu'il en est, pour un élève qui découvre cette distinction nouvelle entre nombres et grands nombres. Son problème va être de *retravailler son rapport ancien* à l'écriture et à la dénomination des nombres de manière à rendre compte de ses pratiques nouvelles en les rapportant à ses pratiques anciennes, et réciproquement.

par exemple, il va dorénavant devoir décider par lui-même s'il doit écrire **1 143** ... ce qu'il écrivait **1143**

Ainsi, le présent n'est pas sans influence sur le passé, bien que le travail du passé ne soit pas organisé explicitement et même, bien que la nécessité de ce travail soit déniée. Examinons de plus près cette question, car le discours ordinaire ne peut permettre de la traiter : le rapport ancien retravaillé ne correspond pas à un prérequis, puisqu'il ne pouvait exister avant que ne soit donnée la règle pour les grands nombres : il ne correspond pas à un savoir erroné, et l'usage social accepte les deux formes, pour les nombres entre mille et dix mille. Mais de fait, le professeur ne demande pas aux élèves qu'ils produisent ce travail. Ainsi, le retravail du rapport ancien à l'écriture des nombres et en particulier la définition d'un petit nombre n'ont pas d'existence officielle. Par bonheur, les rédacteurs de programmes n'ont pas identifié ce sous-objet, pertinent au cycle III : avec leur naïveté didactique usuelle, ils en feraient un objectif du cycle II, un objectif « non exigible » bien sûr puisqu'il ne serait requis que plus tard.

Réorganiser son savoir pour faire place à un savoir nouveau est seulement ce que j'appellerai « une nécessité de la raison étudiante », un problème qu'un élève se pose et résout normalement à l'insu du professeur comme de l'institution : cependant, le professeur doit savoir que les élèves doivent traiter de tels problèmes, et leur en laisser l'occasion. Ainsi, *l'élève va rendre son rapport (personnel) (à l'écriture des nombres) propre à la production du rapport institutionnel qui est l'enjeu didactique (on le dit de manière condensée : idoine au rapport institutionnel nouveau)*. Le travail de l'idonéité (du rapport personnel à un objet) est une nécessité pour l'élève mais n'est pas un enjeu pour l'institution, parce que l'objet en question est depuis longtemps *absent* et que le rapport à un objet absent est *forclos* : c'est-à-dire qu'on ne peut plus porter de jugement à son endroit, il ne peut plus être l'objet d'une évaluation. Deux questions essentielles se posent maintenant. Etant donné un élève particulier de la classe que nous avons évoquée, quand va-t-il rencontrer l'occasion effective de faire ce travail ? Quel est, dans la création de telles occasions, la responsabilité du professeur comme directeur de l'étude ? Comment exerce-t-il cette responsabilité ?

On remarquera que de ce fait, un objet forclos ne peut plus être enseigné. Car l'enseignement ne peut jamais porter que sur un objet sensible dans la mesure où sa fin est déclarée par une évaluation positive relative à *l'adéquation du rapport personnel des élèves à cet objet* : c'est la raison d'être des « effets de contrat » décrits par Brousseau, j'y reviendrai. Le travail de l'élève sur son rapport à un objet forclos ou insensible est institutionnellement silencieux alors même qu'il se rapporte à un objet problématique.

<table>
<tr><td colspan="3">Objets institutionnels</td><td colspan="2">Objets non institutionnels</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objets officiels, localement présents</td><td>Objets localement absents</td><td>Objets localement manquants</td><td>Objets localement extérieurs</td></tr>
<tr><td colspan="5">Position épistémologique et didactique des objets</td></tr>
<tr><td>Objets problématiques enseignés</td><td>Objets problématiques pertinents</td><td>Objets non problématiques latents</td><td>Objets problématiques pertinents</td><td>Objets intitutionnelle-ment inconnus</td></tr>
<tr><td>sensibles</td><td colspan="2">forclos</td><td colspan="2">insensibles</td></tr>
<tr><td colspan="5">Position du rapport aux objets dans les enjeux didactiques</td></tr>
<tr><td>Jugement d'adéquation</td><td>Epreuve de l'idonéité</td><td>Neutralité</td><td>Epreuve de l'idonéité</td><td>Neutralité</td></tr>
</table>

Voici, en un tableau synoptique, l'ensemble des positions institutionnelles, épistémologiques et didactiques possibles pour un objet mathématique ou didactique pris dans l'activité de l'élève (un objet du milieu ou de la situation, dirait Brousseau).
L'espace didactique est bien plus riche que ne le laissent entendre les déclarations usuelles sur les prérequis d'un enseignement, qui observent la permanence du nom des objets et en déduisent la conservation du rapport des institutions et de leurs sujets à ces objets, et n'atteignent jamais que la couche superficielle des problèmes didactiques (qui correspond à la première ligne du tableau ci-dessus).

Etudier l'usage d'une manière de faire (exemple observé)

Il est lié à l'observation d'un épisode au cours duquel un élève rappelle un usage ancien. Ce rappel et son statut dans la classe permet de bien voir *comment les élèves contrôlent l'usage adéquat d'une manière de faire*. Nous sommes toujours dans le chapitre sur l'écriture des grands nombres, mais il s'agit ici de la transcription enregistrée dans un CM1 réel, où l'on étudie ce savoir. Jérôme est un bon élève, qui s'est trompé ; le professeur l'a envoyé au tableau pour qu'il se corrige. L'exercice demandait l'écriture en chiffres du grand nombre « dix sept millions deux mille cinquante huit », Jérôme avait écrit 17 200 058, mais il a maintenant compris la place du 2 des mille, et nous observons ici la poursuite de son travail sur l'écriture des zéros qui donnent les ordres manquants dans une numération de position. Voici le bref instant où le phénomène s'observe, après que Jérôme se soit finalement corrigé. Le professeur de la classe est Michèle.

(*Pendant que l'enseignante parle Jérôme écrit, ce qui fait 17 002 ...*)

120 Michèle : Marc et Sonia aussi... ne dors pas Sonia...
121 Des élèves : non ... si. . si si si ...
122 Michèle : chut...
123 Jérôme : parce qu'après on doit encore mettre un écart numéro 3...
124 Michèle : et y'en restera encore...
125 Les autres : 3...
126 Michèle : et là... qu'est-ce que tu marqueras dans ces 3...
127 Jérôme : cinquante heu. . huit...
128 Michèle : ah... 58... (*protestations des élèves*) chut...
129 Jérôme : si... mais attendez...
130 Michèle : attendez...
131 Jérôme : comme il en reste 3 là... là (*il montre le tableau*) il en reste 3 alors...
132 Michèle : attends... attends... je crois que...
133 Jérôme : zéro centaine (*il écrit 0*) y'a zéro centaine...
134 Michèle : et puis....
135 Jérôme : ou alors on aurait dit 158 .. mais comme y'en n'a pas... on marque ça... après on marque 50 et 8 (*il écrit 58, au tableau on a 17 002 058*).
On entend des protestations.
136 Michèle : chut... bon .. Louis .. attends... ils n'écoutent pas... Thibault et Joseph n'écoutent pas... tu peux aller t'asseoir Jérôme... heu..... Louis n'est pas d'accord
Minute 27

Etudier, c'est aussi *convoquer une manière ancienne dans une situation nouvelle pour en éprouver la pertinence*, lorsqu'on juge que la situation offre quelque ressemblance avec une

situation connue. Ici, bien qu'il ait donné la raison du zéro qu'il écrit (« y'a zéro centaines... »), Jérôme est engagé par le professeur (« et puis... ») à utiliser explicitement une manière de contrôler l'exactitude d'une écriture numérique qui a sans doute été enseignée. On pourrait l'énoncer ainsi, bien qu'elle ne soit écrite nulle part : pour se convaincre du fait qu'il faut « mettre un zéro » il faut imaginer que l'on ait un certain nombre de centaines à écrire ; et comme il n'y en a pas « on écrit un zéro à la place ». Certes, ce n'est sans doute pas une règle explicitement enseignée, bien qu'un professeur ou quelqu'un ayant occupé cette position en dehors de l'école ait dû, une fois au moins au cours de la scolarité de Jérôme, donner cette « explication » : et en effet, l'enquête dans les ouvrages d'enseignement montre que les 0 que l'on écrit ne sont jamais considérés comme le compte des ordres correspondants, mais qu'ils sont et demeurent dans tous les écrits techniques, le moyen graphique de garder les places inoccupées - ce qu'exprime très bien Jérôme.
Comme si avoir dit qu'il y a « zéro centaine », dans un discours technologique qui justifie l'écriture attendue et qui relève pourtant d'une construction plus évoluée que l'explication technique, ne suffisait pas : pour l'institution mathématique qu'est la classe de Jérôme, zéro n'est pas un nombre.

L'OBSERVATION BIOGRAPHIQUE DU DIDACTIQUE

On l'aura compris, par l'observation d'épisodes de la biographie didactique des élèves, nous accéderons aux objets que nous annonce la théorisation que j'ai exposée. Mais on n'observe pas ces épisodes en suivant un élève au hasard de ses activités, vingt quatre heures sur vingt quatre. Heureusement, une analyse a priori de la transposition didactique permet de dessiner une organisation écologique de chacun des objets enseignés : les objets de son environnement sont justement les objets pertinents, ce qui va guider l'observation en donnant l'identification des objet pouvant appeler, pour certains élèves, un travail de l'idonéité de leur rapport.
Ainsi, l'observation biographique ouvre un accès nouveau à l'étude de la classe de mathématiques, en nous permettant par exemple de chercher si tous les professeurs ouvrent de même l'espace didactique à ce travail des élèves et si tous les élèves s'emparent à l'identique de ce lieu d'exercice d'une autonomie didactique. Nous savons que la réponse à ces deux questions est « non », mais nous commençons seulement à produire des éléments de réponse permettant de rendre compte des effets différentiels de différents enseignements et en particulier, de faire le pont avec l'avancée récente de Brousseau (1995) dans cette direction, en réponse à la question d'une théorisation didactique de l'enseignement.

Avant d'exposer rapidement les questions que pose l'observation biographique, permettez moi quelques mots relatifs à la méthode. J'ai dit qu'elle reposait sur une analyse a priori fouillée de la transposition didactique. Mais elle repose aussi sur une transcription des interactions didactiques - en classe ou hors classe - dont la qualité est sans commune mesure avec celles qui sont utilisées d'ordinaire par les didacticiens (si j'en juge par ce qu'ils donnent dans les annexes de leurs thèses). Car par exemple, l'identification de l'ensemble des interventions d'un élève, tout au long d'une séquence enregistrée, ou celle de ses actes graphiques et scripturaux, celle de ses interlocuteurs et de leurs interventions orales ou écrites, vont donner des interprétations possibles qui différeront notablement. En outre, la possibilité de connaître le projet d'enseignement précis du professeur et le motif qu'il donne aux décisions dont il a eu conscience sont des éléments essentiels de compréhension de l'espace didactique qu'il crée et dont il régule le développement. De ce fait, les travaux dans cette voie sont coûteux, et rares encore - ce qui montre que la preuve de leur rentabilité (le rapport coût de mise en oeuvre/connaissance produite) n'est pas encore certaine.

L'observation qui est produite ici provient du seul observatoire capable de donner tous les éléments que j'ai énumérés : le COREM, à l'Ecole Michelet, de Talence (Schubauer-Leoni & Leutenegger 1997, 1)

Observer des épisodes du travail de l'idonéité

La possibilité de rendre compte de la transformation de la position institutionnelle des objets de savoir est sans doute l'élément essentiel de la description engagée par Jullien (1985). La réorganisation théorique qui s'ensuit est exposée comme « une théorisation institutionnelle du didactique » par Chevallard (1989). Car elle permet d'imaginer a priori une description de l'organisation des savoirs qui accompagnent un objet d'enseignement et de son évolution : une théorie écologique de l'équilibre et de la succession des objets mathématiques et didactiques, en quelque sorte. Les observables didactiques en seront profondément transformés. Je ne propose une visite rapide d'une théorisation qui a dix ans et qui est je crois maintenant bien diffusée.

Par exemple, les objets qui ne sont pas enseignés sont normalement extérieurs à l'espace institutionnel, et les élèves ne sont pas censés entretenir avec eux un quelconque rapport, mais leur existence dans l'environnement d'un objet d'enseignement peut soudain les rendre problématiques alors qu'ils demeurent insensibles : voici qu'ils sont manquants. La production d'un rapport idoine à ces objets est une des conditions de la réussite des élèves : tel est le cas de l'objet « apprendre par coeur » lorsqu'il devient nécessaire de mémoriser les sommes des nombres à un chiffre, au CE1.

Par exemple encore, des objets d'enseignement sensibles vont devenir latents et forclos, jusqu'à ce que leur pertinence leur redonne vie en les rendant à nouveau problématiques sans lever la forclusion dont ils sont frappés. Ici encore, la production d'un rapport idoine à ces objets est une condition de la réussite des élèves, nous en avons étudié deux cas de figure dans le point précédent et c'est encore le cas de l'objet « suite des nombres » lorsque le professeur introduit les fractions et les fractions décimales : car voici que d'un coup on ne peut plus énumérer la suite des nombres.

Mais il arrive aussi qu'un objet absent, pris depuis longtemps dans une pratique routinière, redevienne un enjeu d'enseignement et retrouve sa sensibilité. C'est par exemple ce qu'il se passe avec la multiplication des nombres, lorsqu'apparaissent les décimaux.

Ces effets du temps didactique sont remarquables, car ils produisent dans la classe de mathématiques des problèmes mathématiques (au sens large, ce sont parfois seulement des problèmes d'étude des mathématiques) que les élèves vont devoir affronter sans être soumis à une intention didactique du professeur : *cela correspond assez précisément à la définition que Brousseau donne de la dévolution d'une situation adidactique*, sauf qu'il s'agit ici de situations adidactiques non intentionnelles de la part du professeur : l'intention d'étudier ces problèmes devra venir des élèves eux-mêmes ou de leur environnement non scolaire. Identifier les conditions des études qu'ils mènent alors sera l'enjeu premier de l'observation biographique d'élèves. Ces temps, où le travail de l'idonéité du rapport personnel de certains élèves à la production du rapport institutionnel à un objet sensible peut se produire sont ce que j'appelle des *épisodes didactiques* : même si on peut identifier une dimension adidactique des épisodes didactiques, je ne les analyse pas en termes de théorie des situations mais en termes de *régulation de la relation didactique* (Brousseau 1995, Sensevy 1994).

Les effets des épisodes didactiques

A la minute 26 de la séquence d'enseignement observée, nous avons vu Jérôme s'essayer à énoncer un élément technologique relatif à la numération décimale, pour le cas des zéros. Mais si nous revenons en arrière de quelques minutes, nous observons comment ce savoir s'est produit, et nous comprenons pourquoi Jérôme est le seul à y faire référence (Mercier 1997, La relation didactique et ses effets. *In* Variations sur une leçon de mathématiques à l'école élémentaire, les grands nombres).

La relation didactique est le fait de plusieurs partenaires, qui partagent les actions d'enseignement dont le professeur reste, en dernier ressort, responsable. C'est ainsi que nous pourrons interpréter ce fait insistant et pourtant fort étonnant du point de vue des approches didactiques habituelles : par leurs interactions avec le professeur, certains élèves participent tout au moins à la reconnaissance des épisodes didactiques par lesquels ils ont appris personnellement, ce qui leur permet de participer à l'enseignement, ne serait-ce qu'en menant leur progression personnelle au voisinage de la trace que produit l'action enseignante du professeur, Michèle. Observons comment les élèves et le professeur coopèrent, au moment où Jérôme a déjà passé cinq minutes au tableau (la numérotation commence à son arrivée, minute 19.

78 Christian : ça (*montre le* « 2 »)... ce sont les unités...... et ça (« 0 ») c'est les dizaines et ça (*montre de droite à gauche les deux zéros*) c'est les cent
79 Jérôme : mais non ça (*montre le* « 2 ») c'est les centaines...
80 Christian : ça (*montre le* « 2 » *puis* « deux mille ») c'est les milliers
81 Des élèves : (*plusieurs élèves parlent à la fois*)
82 Michèle : chut chut...

Christian identifie précisément le problème et énonce clairement la solution, et Jérôme, qui s'est trompé, se saisit de l'argument.

83 Jérôme : (*tout en écrivant au tableau*) là on marque un c là on marque un d et là les unités
Au tableau on a
dix sept | millions | deux | mille | cinquante huit)
c d u
1 7 2 0 0
84 Un élève : il s'est trompé
85 Michèle : (*efface* « c« , « d » *et* « u » *que J. vient d'écrire*)
86 Michèle : alors... (*prend Christian par les épaules*) ils ne sont toujours pas d'accord (*main sur l'épaule de Jérôme et renvoie Christian de l'autre main*) ils n'arrivent pas à trouver un terrain d'entente qui pourrait venir et clairement... les mettre d'accord
87 Des élèves : moi moi...
88 Michèle : Fatia ? allez... viens... laissez-la passer. .
Minute 24

Michèle laisse Jérôme persister dans son erreur en refusant l'appel à l'argument de Christian : elle efface la notation c. d. u. Plusieurs élèves se proposent alors. Fatia est appelée.

89 Jérôme : ah oui (*chuchote*)
90 Michèle : aïe ça y est Jérôme commence à... voyons chut tch tch

Même quand il chuchote discrètement, Michèle ne perd pas Jérôme de vue ni d'ouïe, et maintient le contact.

91 Fatia : (*en montrant le tableau*) quand on dit dix sept millions on écrit toujours à un écart
92 Michèle : oui
93 Fatia : et après on dit... deux mille... deux mille... deux c'est... ça veut pas dire deux cent (*encadre le « 2 » avec les doigts puis écarte les doigts en encadrant* " 200") c'est à dire heu
94 Un élève: ah ouais...
95 Michèle : pousse-toi Jérôme

Michèle protège les interactions qui se produisent au tableau, et elle protège Fatia qui donne un argument recevable . comme Michèle l'avait prévu dans la préparation de la séquence, la correction de l'écriture d'un grand nombre est relative à la possibilité de relecture du nombre écrit.

96 Fatia : autrement on aurait dit...
97 Plusieurs élèves (*ils parlent à la fois*)
98 Michèle : chut tch tch. .
99 Fatia : quand on efface... quand on efface... attends elle est où la craie (*Fatia efface* « 200 » *et cherche une craie*)
Minute 25
100 Michèle : Jérôme a compris... alors Jérôme... attends s'il a compris... voyons s'il a compris ton explication... qu'est-ce qu'il pourrait mettre alors d'après toi...

Mais entre les élèves au tableau, comme elle l'avait fait face à Joseph à Mathieu et à Christian, Michèle a choisi finalement Jérôme comme destinataire et auteur privilégié de l'explication : elle disqualifie Fatia.

101 Jérôme : ben oui parce que deux mille ça s'écrit comme ça (*écrit* « 2000 » *plus bas sur le tableau, dernier zéro plus petit*)
102 Des élèves : hé mais non
103 Nathalie : si c'est juste
104 Michèle : ah attendez... asseyez... Ahmed... tu n'es pas transparent (*plusieurs élèves parlent à la fois*)
105 Jérôme : ça s'écrit comme ça deux mille (*en regardant ce qu'il a écrit*)
106 Michèle : alors voyons chut...

Jérôme a trouvé le moyen de produire « la réponse juste ». Son argumentation a trait à l'écriture des petits nombres et n'est pas reprise par Michèle, cela laisse ouvert le problème, les élèves poursuivront le débat.

Cependant, Jérôme a montré quel est le savoir mathématique pertinent pour la classe des problèmes étudiés : une théorie pour écrire les « grands nombres » qui s'appuie sur la théorie anciennement connue qui valait pour les « petits nombres » (Mercier, 1997). Sans doute, le rapport à la numération reconstruit par Jérôme est déjà semble-t-il le rapport personnel de certains[1] qui, comme Fatia, n'ont cependant pas la parole : nous n'avons donc pas les moyens de les observer. Nous avons cependant repéré précisément le point où Jérôme a repris son rapport ancien à la numération, dont nous avions observé l'idonéité à propos de l'écriture de 105.

Bien qu'il ait trait à l'objet officiel de la classe (ce qui doit, à ce moment, y être enseigné), l'épisode didactique qui fait événement dans la biographie de Jérôme ne signe pas une situation adidactique. Car l'enseignant ne prend pas au compte de la classe le nouveau rapport de Jérôme aux grands nombres. Il ne produit donc pas d'institution pour que le rapport personnel de l'élève vienne nourrir le rapport officiel au savoir (Rouchier 1991) : sans doute n'institutionnalise-t-il pas ce progrès parce qu'il ne reconnaît pas la qualité mathématique du discours de l'élève, ou bien c'est parce qu'il a choisi de ne proposer, pour cette manière de faire, qu'un apprentissage par corps (Schubauer-Leoni & Leutenegger 1997, 2). Cela étant, la classe n'apprend pas ce que Jérôme a appris : *le rapport institutionnel aux grands nombres n'évolue pas*.

Les biographies didactiques des élèves

Alors que Jérôme vient de trouver l'occasion d'un épisode didactique pour progresser, et qu'il s'essaie à l'usage de son rapport nouveau à l'écriture des nombres grands et petits, Louis affirme fermement qu'il n'est pas convaincu, parce que dit-il « les millions on aurait dû mettre des zéros avant [...] (avant 17) on aurait du mettre un zéro ». Avec la position épistémologique de Louis, on ne peut que se demander pourquoi garder par un zéro la place des centaines dans la classe des unités simples et ne pas garder de même celle des centaines dans la classe des millions ? Nous reprenons donc à la minute 27.

142 Michèle : non... Karina n'a pas bien compris ... Louis... viens au tableau...
143 Louis : sinon... on aurait mis 2 zéros là... (*il écrit 00 devant 2 340 105*)
144 Michèle : taisez-vous... laissez-le faire... qu'on comprenne bien ce qu'il veut dire... et après... vas-y continue...
145 Louis : et puis là... ça aurait fait que des zéros et puis si on... s'il faudrait pas mettre les zéros... on aurait tout effacé les zéros... sauf celui des centaines qui est... au milieu...
Minute 28
146 Michèle : ah... celui-là tu le gardes quand même...
147 Louis : oui...
148 Michèle : mais... alors... qu'est-ce que vous pensez de ce qu'est en train de dire Louis... il est en train...
149 Louis : car...
(*plusieurs élèves parlent à la fois*)

Louis ne partage pas avec Jérôme l'interprétation de zéro comme un nombre pour compter les collections vides, mais cela n'empêche pas que dans son explication, Louis sache faire la part des choses, comme le montre la suite : il sait que l'usage ne permet pas que l'on supprime le 0 de 105. Mais il considère que l'on n'applique pas correctement les règles énoncées et il

[1] Robert Noirfalise a le premier attesté de la diversité possible des rapports à un objet mathématique qui peuvent coexister dans l'écosystème qu'est une classe de mathématiques. Il s'agissait de la démonstration, en Sixième (Noirfalise 1993).

pense semble-t-il qu'elles n'ont rien à voir avec l'écriture des petits nombres - les nombres à trois chiffres. Il a raison si la règle consiste en cela, qu'il faut compléter avec des zéros les classes, jusqu'à trois chiffres ; mais il a tort s'il pense avec l'idée (qui semble être celle que Jérôme utilise en privé) que l'on écrit le nombre d'éléments de chaque ordre, jusqu'au dernier ordre non nul. Seulement, personne ne va lui tenir ce discours, et Louis ne trouvera pas dans sa question l'occasion d'un progrès personnel.

On remarquera que le fonctionnement didactique produit inégalement des épisodes de la biographie didactique des élèves, et Jérôme se trouve être le grand gagnant de la séquence de classe observée, parce qu'il sera le seul à y trouver l'espace nécessaire à un travail d'idonéité : la technologie qu'il maîtrise a ainsi trouvé une extension remarquable. Certes, il semble bien qu'il ne soit pas le seul dans ce cas à la fin de la séquence : il semble même que d'autres élèves, comme Christian, avaient déjà fait le travail avant que l'enseignement ne soit dispensé. Mais si on sait qu'à la fin de l'enseignement, tous les élèves écriront correctement les grands nombres, ce qui était l'enjeu officiel, la plupart des autres, dont sans doute Louis, n'auront pas trouvé de réponse mathématique à leurs questions. *Pour la grande majorité des élèves, l'écriture et la lecture des grands nombres resteront un savoir par corps*, au moins jusqu'à la prochaine occasion. Les professeurs d'IUFM savent, qu'il est rare que cette occasion trouve place dans le cours des études secondaires et même, que nombreux sont les élèves professeurs des écoles qui pensent que zéro n'est pas un nombre c'est à dire, la mesure d'une quantité, mais que c'est seulement le signifiant de son absence. *Les occasions d'apprendre certains savoirs manquants que l'on pourrait pourtant croire essentiels sont particulièrement rares*, comme l'a montré par exemple Pascal (1979).

On remarquera que la réponse à la question de Louis ne figure pas dans la première description de la manière de faire que j'ai donnée, et que cette description s'avère donc insuffisante lorsqu'on n'a pas un nombre à trois chiffres pour chaque classe. Mais par exemple, cet ajout lui-même ne suffirait pas à rendre compte du cas de la partie décimale d'un nombre. On peut alors demander si l'on peut décrire une manière de faire de telle façon que son emploi ne comporte plus aucune ambiguïté. Et si ce n'est pas le cas, de quoi est faite la connaissance qui en permet le contrôle et surtout l'usage pertinent ? C'est à l'évidence, une connaissance technologique ou théorique comme celle que manifeste Jérôme lorsqu'il travaille sur de 0 de 058 ou de 105.

L'ESPACE DIDACTIQUE ET SES PROPRIETES

Longtemps, la modélisation des situations adidactiques par lesquelles un groupe d'élèves rencontrait un problème et produisait progressivement, grâce aux organisations successives de l'étude des stratégies de sa résolution, l'objet de savoir qui faisait l'enjeu de l'enseignement est apparue comme la théorie générale des gestes didactiques. C'est que l'exigence que porte Brousseau, que toute heure d'enseignement donne lieu à un progrès dans le savoir mathématique dont disposent les élèves, nous a fait confondre sa description de la didactification maximale de l'enseignement avec une description de l'enseignement tel qu'il pourrait être si seulement... Pourtant, la description conjointe des différents effets de contrat et de leur prégnance aurait dû nous engager à rester plus vigilants : Brousseau ne rappelait-il pas dès 1983 que la théorisation des phénomènes didactiques qu'il ne nommait pas volontiers « la théorie des situations » n'atteignait à ce statut qu'avec le concept de contrat didactique,

parce que ce dernier lui permettait de prendre en charge la contingence et sa dimension de production aléatoire comme un des éléments mêmes de la théorisation ; il allait même plus loin avec la seconde thèse de Ratsimba-Rajohn, qui montrait que le professeur aidait à la pérennité de rapports contradictoires de différents élèves à certains objets, en un macle qui lui permettait de convoquer à la demande soit le rapport idoine de tel élève, pour le montrer aux autres sans avoir l'air de proposer un enseignement, soit le travail de l'idonéité nécessité par tel autre forme de rapport, dans un but de démonstration tout aussi essentiel et implicite.
Je pense pourtant que c'est en fait l'exposé de 1995 sur le travail du professeur à la recherche d'un contrat plus ou moins proche du contrat extrême qui correspond au fonctionnement précis du modèle de l'adidacticité, qui a fait date sur ce point. J'interprète ainsi cet exposé : le paradoxe fondamental de toute action didactique tient au fait que le professeur ne peut pas désigner à l'élève ce que l'élève ignore vraiment, parce que si l'élève l'ignore il ne peut reconnaître ce que le professeur lui désigne. Il y tout un espace de solutions à ce paradoxe, qui jouent sur une seule et même variable : la part du travail d'identification et d'exploration de l'objet enseigné qui est laissée à l'étude autonome de l'élève.

Ainsi, le niveau zéro est celui où l'élève se voit exposer le programme de ses études, qu'il réalise à sa guise, le professeur n'intervenant plus que pour évaluer l'adéquation du rapport construit par l'élève au rapport officiel : c'est un contrat d'information. et le niveau extrême est celui où l'élève se voit proposer une série de situations d'action, de communication et d'étude des stratégies de l'action, au terme desquelles il aura produit comme naturellement (mais ce naturel correspond à un artefact absolu) le rapport attendu à l' objet dont il aura fait le tour. Entre les deux, nous trouvons par exemple l'ostension et l'ostension déguisée, identifiées en géométrie par Marie-Hélène Salin et René Berthelot (1992) et plus particulièrement sur la leçon des grands nombres dont je rends compte ici par Salin (1997). Ainsi, le professeur est, selon Brousseau, responsable de la gestion de l'adidacticité des situations didactiques qu'il crée par son enseignement ; mais on peut observer quotidiennement comment, lorsque le professeur n'assure pas les conditions de l'action adidactique des élèves, certains élèves arrivent cependant, à propos des questions qu'ils identifient et des actions qu'ils arrivent à mener à bien parmi celles que le professeur leur demande, à apprendre quelque chose des mathématiques qui leur sont officiellement enseignées. Cet espace là est à la fois un espace où les élèves coopèrent avec un professeur insuffisant et un espace où les mêmes élèves se trouvent en concurrence pour obtenir la reconnaissance de leur capacité à substituer le professeur... à moins qu'ils ne cherchent à faire valoir jusque dans la classe un système de valeurs qui leur serait plus favorable que le système des valeurs scolaires, qui est fondé sur la capacité à produire, à la demande, des rapport nouveaux et des rapports à des objets nouveaux.

Concurrence et coopération dans la classe

D'où vient l'idée technologique de Jérôme ? Nous le savons dans ce cas exceptionnel, puisque nous avons identifié précisément l'épisode biographique correspondant : elle vient du travail de l'idonéité de son rapport à la numération des petits nombres, travail qu'il a mené en public, avec l'aide de nombreux élèves (Christian, Mathieu, Fatia) et sous la protection de Michèle (qui organise les interventions de ses contradicteurs et lui redonne la parole chaque fois qu'il la demande) mais dont le bénéfice est resté sa propriété exclusive, parce que le professeur, ne peut pas évaluer le travail d'un élève relatif à un objet forclos. Mais il y a ici un phénomène plus délicat : comme le professeur enseigne par corps des manières de faire dont il ne cherche pas à en rendre compte dans une dialectique de la validation et il laisse venir à la surface un discours technologique qui va progressivement se constituer en obstacle.

Prenons en effet le problème tel que Louis le présente. On remarquera que Louis fait très attention à ne pas s'attaquer à son professeur qui a dit que « on n'écrit pas millions et mille, parce qu'on laisse un espace à la place » et qu'il fait porter la critique sur ses camarades de classe. Car il est une autre voie possible pour le travail de l'idonéité du rapport aux petits nombre, qui semble tout aussi cohérente que celle de Jérôme et qui correspond par conséquent elle aussi à une technologie. Pour la saisir, il faut penser que Louis a raison et chercher pourquoi il semble aussi assuré : *alors on comprend que les espaces qui sont le signifiant de mille et de millions que l'on n'écrit pas en lettres sont comme les zéros qui sont pour Louis et pour de nombreux élèves les signifiants des ordres que l'on ne peut dénombrer explicitement.* L'idée de Louis est particulièrement intéressante si l'on considère ce qu'elle implique comme économie de travail de l'idonéité. Car en écrivant 17 2 58 pour lire dix sept millions deux mille cinquante huit, non seulement on minimise le nombre des signes écrits, mais on évite d'avoir à interpréter le 2 dans 002 058 et le 58 dans 058, puisqu'ils continuent à être écrits comme lorsqu'ils sont considérés en eux-mêmes : *les espaces sont des signifiants redondants avec les zéros et ce sont ici des signifiants plus forts que les zéros (ils se suffisent à eux-mêmes), donc les zéros qui ne sont pas au milieu des petits nombres sont inutiles.*

Hélas Louis, qui prend donc le parti épistémologique de son professeur, apparaît au contraire aux yeux de celui-ci comme un contradicteur incontrôlé, car la technologie qu'il expose (elle est remarquable, et correspond à la solution historique babylonienne de la sur-base soixante en proposant de fait une sur-base mille) n'engage pas dans la voie socialement dominante, qui est une technologie moins performante localement mais qui se trouve sous le contrôle d'une unification théorique d'une toute autre ampleur.

Le débat dans la classe est donc biaisé, en raison du manque de la théorie de la numération qui est un effet de la transposition didactique actuelle. Ce manque provient de la suite des contre réformes acharnées qui ont visé depuis quinze ans à expulser toute référence théorique dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire et au collège, mais il n'est pas différent dans le principe de son fonctionnement de celui qu'a identifié ici même Denise Grenier, sur les questions de la combinatoire, et il n'est pas très différent dans ses effets didactiques de ceux qu'ont étudié ici encore, Teresa Assude sur l'arithmétique, René Berthelot sur l'espace ou Joël Briand sur les inventaires des collections finies. Car, on l'aura compris, Jérôme est « un bon élève de la classe » et Louis est « un élève moyen qui semble plafonner ». C'est que Jérôme pose les problèmes mathématiques essentiels, à l'occasion de l'enseignement qui lui est proposé mais dans un espace épistémologique autonome de celui du professeur ; tandis que Louis pose des problèmes tout aussi essentiels, mais il le fait dans le cadre épistémologique des manières de faire que le professeur propose. C'est sans doute pour cela qu'il recevra le soutien de plusieurs élèves et non des moindres : Gwenaëlle, puis surtout Nathalie qui apportera le soutien le plus inattendu, du point de vue du professeur, tandis que Christian et Mathieu ont pris le parti opposé (ce dernier élève manifeste d'ailleurs un rapport aux zéros semblable à celui qu'à reconstruit Jérôme) jusqu'à ce que Karina, plus soumise encore, propose de « faire le tableau (de numération) », qui est l'instrument technologique officiellement enseigné et qui permet la dénégation du travail d'idonéité. Le professeur tracera donc lui-même le tableau, pour régler la question.

Ainsi, j'ai montré que la généralité des questionnements que les élèves engagent dans un cas de figure et dans l'autre, n'est pas du même ordre de grandeur : l'un accède à une culture mathématique et l'autre à une culture scolaire.

Il semble qu'il en soit ainsi chaque fois que l'école étudie des manières de faire sociales sans les mettre en question dans le cadre d'un système de pensée plus large que la connaissance première qu'ils engagent. : le fonctionnement didactique enregistre alors telles quelles les positions sociales que les élèves ont acquises à l'extérieur et en traitant apparemment les élèves à l'identique, elle entérine purement et simplement les inégalités extérieures.

Ce faisant, elle produit ce que Bourdieu nomme « une violence symbolique » importante sur les élèves qui font confiance à sa neutralité proclamée, en les « remettant à leur place » et en validant cette place sociale par une position culturelle scolaire semblable.

Mais je ne voudrais pas laisser penser qu'il y va de la responsabilité personnelle d'un enseignant et que ce discours s'adresse individuellement à chacun d'eux. C'est un phénomène global produit par certaines formes de la transposition et renforcé à mon avis (c'est la direction actuelle de mes travaux) par le manque institutionnel d'un référent théorique permettant de valider les manières techniques qui sont enseignées par corps. Je ne prendrai qu'un exemple rapide pour argumenter ce point essentiel : j'ai pris le pari que les deux visites de classe que j'ai faites cette semaine me donneraient cet exemple et la prévalence du phénomène est telle que ce fut le cas dès la première.

Il s'agit d'un **cahier de vie, en grande section de maternelle**, dans l'école de ZEP de la cité Air Bel, à Marseille. Les élèves sont invités à y dessiner puis à y écrire ou à y faire écrire par un parent des faits de leur vie quotidienne extra scolaire et chaque lundi matin, durant le regroupement sur le tapis, la maîtresse lit les cahiers de ceux qui ont écrit ou fait écrire et demande aux autres s'ils veulent raconter ce qu'ils n'ont pas écrit. Les textes sont du style : « j'ai été au centre aéré où j'ai rencontré de nouveaux amis et nous avons été à la piscine, je me suis bien amusé mais j'attendais la rentrée avec impatience » ou « nous sommes allés voir les requins avec ma tante et mes cousins, ma cousine Alia a eu très peur » bref, comme l'observait la sociologue Régine Sirota, les parents décrivent des centres d'intérêt extra scolaires intéressants pour l'école : mais que se passe-t-il pour ceux dont les parents n'écrivent pas ou n'entretiennent pas ce rapport à l'école en emmenant les enfants au muséum ? Eh bien, malgré les relances de la maîtresse, ils n'ont rien à dire.

Car cette vie, que le cahier enregistre par la technique de l'écriture, n'est pas la leur. Les loisirs sont, par l'intermédiaire du cahier, devenus un objet institutionnel, mais ce sont les objets d'un jeu auquel ils participent en principe de manière autonome et dont ils sont scolairement exclus tout autant qu'ils le sont socialement.

La question n'avait pas été posée. Il sera pourtant relativement facile d'instaurer une écriture du cahier de vie par l'enseignante ou par un des auxiliaires d'enseignement de l'école, dans le temps de l'accueil du matin, pour les élèves qui le désireraient, et de faire ainsi émerger dans l'espace de la classe des questions certainement aussi intéressantes que la rencontre des requins du muséum : car ce matin là, à l'entrée dans la cour, deux élèves de la classe voisine discutaient pour savoir si l'un d'eux, qui avait ramassé et manipulé une seringue, avait ou non attrapé le Sida ; et deux élèves de cette classe dessinaient des maisons surmontées de deux drapeaux, l'un bleu blanc rouge et l'autre vert blanc rouge marqué d'un croissant.

Lorsque la sélection des bonnes questions est laissée à l'espace des rapports sociaux quotidiens, l'école se présente comme la servante de la hiérarchie sociale des valeurs et non comme service pouvant aider à identifier la valeur d'universalité des questions épistémologiques ou sociales posées aux élèves. Dès la maternelle, l'autonomie absolue dans l'étude entérine publiquement les exclusions sociales.

La viabilisation de l'espace didactique

C'est en ce point que nous retrouvons quelque chose de ce qui a fait la force du questionnement engagé par Brousseau, et que je vais tenter d'exposer comme je l'ai compris. Je retiendrai deux motifs.
Tout d'abord, *l'école vise à son extinction* : car le seul motif valable pour prendre le loisir d'étudier est que très souvent il est moins coûteux d'apprendre avant de réaliser, que de tenter une réalisation par des tentatives ajustées par approximations successives. Ce motif de l'extinction de l'école doit être présent au coeur même de l'école, c'est le sens de la dimension adidactique nécessaire à la dévolution efficace des problèmes. La théorie des situations décrit alors la résolution du paradoxe fondamental de toute relation didactique, qui doit faire exister du non didactique par une construction didactique.

Ensuite, *l'école doit assumer sa mission le plus complètement possible* : ce qui suppose que l'organisation de la relation didactique ne doit pas laisser les élèves errer à l'aventure dans l'espace des problèmes, mais qu'au contraire le professeur doit les conduire à la rencontre des problèmes adidactiques, qui justifient l'école en donnant à sentir le bénéfice que l'on retire de l'étude. La théorie des situations décrit alors a priori le point extrême de l'adidacticité, et les conditions qui doivent être satisfaites pour qu'il soit atteint.

Alors, l'idée de Brousseau est celle-ci : le travail du professeur consiste à rechercher le contrat le plus didactifié possible en trouvant la situation didactique fondamentale pour le savoir qu'il vise, parce que sous cette condition (et sous cette condition seulement) la dimension adidactique pourra être pleinement développée. C'est une voie escarpée mais si l'école, comme système d'enseignement et comme corps des professeurs, faillit à cette tâche, elle enseigne aux héritiers comment faire fructifier leur héritage et elle montre aux autres leur dénuement comme un destin.

Mais comment, dans le cadre de la construction théorique que l'ai exposé ici, peut-on aborder le problème que Brousseau a posé il y a bientôt trente ans ? Comment faire le partage de ce qui peut ou doit être enseigné par corps, et de ce qui doit être enseigné par sa raison ou plutôt, sur quelle analyse fonder, dans chaque question d'enseignement, la part de ce qui va entrer dans une routine et de ce qui va demeurer sous le contrôle de la raison et comment bâtir le lien entre ces deux parts ? Comment aider le professeur à viabiliser l'espace des problèmes qui sont les causes du savoir sans engager les élèves sur une voie royale où ils perdraient - comme c'est trop souvent le cas - jusqu'au souvenir des problèmes ?

C'est sans doute là que l'on peut situer tout l'intérêt pour nous du travail sociologique de Bourdieu et, plus proches de nous puisqu'ils sont dans cette salle et qu'ils travaillent en didactique, des travaux de Sensevy et de Sarrazy. Je pense d'abord dans ce paragraphe à l'interprétation des études de Wittgenstein sur « les règles et ce qu'il faut savoir pour les suivre » que propose Sarrazy. Nous savons que le philosophe, dont les écrits pédagogiques viennent d'être publiés en français, a posé la question en lui conservant toute sa force questionnante, mais - comme ce fut le cas avec Vygotsky - c'est simplement pour nous une rencontre heureuse sur un chemin que nous avions commencé à explorer il y a longtemps : nous en attendons des échanges d'informations sur les pistes qui sont apparues sans issue et sur la géographie des zones que nous n'avons pas explorées par nous-mêmes. Mais nous savons que dans tous les cas la référence à de grands ancêtres ne nous dispense pas de bâtir les réponses aux problèmes d'aujourd'hui, car nous avons des éléments de réponse à la question de Wittgenstein : *les règles s'apprennent par coeur mais la manière de les suivre s'apprend par corps, et la mobilisation des manières de faire que décrivent les règles est liée à la situation*, au sens que Brousseau a donné à ce concept c'est-à-dire, au problème et au contrat institutionnel qui définit son traitement (que l'on pense pour s'en persuader... à la conduite automobile).

Mieux, la description de l'espace des positions institutionnelles des objets de savoir et des rapports des sujets à ces objets décrit de nombreux éléments de la situation qui semblaient jusqu'alors faire partie d'un ensemble indifférencié, un peu fourre-tout, que nous nommons le contrat didactique. La surface des objets didactiques est décrite par les analyses classiques et certains des mouvements profonds associés aux phénomènes de surface (nous les classions en « éléments du contrat » et « éléments de la situation ») nous sont maintenant accessibles, surtout si nous acceptons de ne pas limiter l'observation biographique de l'espace institutionnel aux objets mathématiques identifiables et si nous nous intéressons aux objets mathématiques, paramathématiques, protomathématiques, ou simplement didactiques, qui s'avèrent *pertinents* : nous comprenons alors que le travail de l'idonéité est bien plus large que nous le pensions a priori. *Au point qu'il n'est en général pas possible de détacher les connaissances d'un sujet que nous trouvons épistémologiquement nobles, de ses connaissances relatives au contrat institutionnel dans lequel il exerce son activité et de ses connaissances relatives à la situation* dans laquelle il cherche à résoudre un problème. Nos savoirs les plus théoriques sont sous contrat, comme je l'écrivais en conclusion de ma thèse, et c'est sans doute pour cette raison qu'il faut étudier les livres afin de s'approprier à nouveau les savoirs qui y sont décrits : nous devrons un jour dire tout le bénéfice que l'humanité retire de ce phénomène de transmission scolaire des savoirs, ce bénéfice est sans doute aussi grand que, selon les biologistes, celui que le vivant retire de l'invention de la reproduction sexuée : la production automatique de nouveauté, à chaque génération.

L'efficacité des relations faiblement didactiques

Je considère donc que, Brousseau ayant défini ce que sont les relations didactiques complètement didactifiées, le processus de recherche d'un contrat capable de viabiliser le parcours des élèves produit, pour les enseignements et les systèmes d'organisation de l'étude que nous pouvons observer d'ordinaire, des relations d'autant plus faiblement didactifiées que la négociation d'un contrat a été plus difficile. L'observation biographique du didactique nous permet alors d'observer l'efficacité de ces relations, faiblement didactiques, tandis que l'observation institutionnelle nous permet de comprendre les contraintes qui les ont produites. Mais la notion d'enseignement par ostension puis, par ostension déguisée, proposée par Berthelot et Salin caractérise l'autre versant de la recherche en montrant une forme relativement stable d'organisation des relations faiblement didactiques.

C'est sans doute Sensevy qui, avec le « Journal des Fractions », a ouvert la voie à l'exploration d'une question qui était en 1992-1994 absolument nouvelle mais qu'aujourd'hui je formulerais ainsi : « comment redidactifier une relation par trop dédidactifiée » soit, dans les termes de la salle des professeurs : « Comment négocier à la hausse, quand on trouve que le niveau baisse trop ? ». Car il a inventé un dispositif simple, qui travaille le partage institutionnel des tâches respectives du professeur et des élèves et augmente de ce fait la dimension adidactique du rapport des élèves aux fractions. Mais dans le même temps Brousseau engageait une série d'études sur ce qu'il a appelé « la didactique du sens » dans les cas de la soustraction et de la division, et inventait lui aussi, avec les « Ateliers de Production d'Enoncés de Problèmes », un dispositif didactique moins coûteux que le montage complet d'une série de situations fondée sur une situation fondamentale. Je crois que notre compréhension de ce que sont les gestes de la direction d'étude et de ce qui fait leur efficacité nous permettront, dans un avenir raisonnablement lointain, de développer enfin des outils technologiques robustes relevant de la théorie didactique, de définir les conditions de leur efficacité et d'enseigner leur usage aux nouveaux professeurs.

CONCLUSION

Au moment d'accepter la proposition qui m'a été faite d'exposer ici ce que mes recherches avaient pu m'apprendre et qui pouvait être utile à des professionnels de l'enseignement et de la formation d'enseignants, je me suis rendu compte que j'allais me trouver dans une situation absolument nouvelle pour moi. Car, bien qu'ayant pris la responsabilité d'enseigner longtemps des mathématiques dans des collèges et des lycées et bien qu'ayant pris plus tard la responsabilité d'enseigner des mathématiques pour l'enseignement et des sciences de l'éducation à des élèves professeurs ou encore, celle d'enseigner de la didactique des mathématiques à des étudiants en sciences de l'éducation, je ne m'étais adressé publiquement, à des auditeurs qui seraient institutionnellement mes pairs, qu'en matière de recherche : la position d'orateur n'y est jamais tout à fait une position autorisée par avance et on se sent plus modeste d'y prétendre. Mais je crois que les observations que j'ai pu mener dans mon travail de chercheur m'ont appris quelques *vérités relatives* qui pourraient être utiles au formateur, et qu'il doit être maintenant possible de les partager comme savoir commun. Parce que, - cela a été mon cas - vous connaissiez sans doute la plupart de ces vérités, mais - c'est trop souvent mon cas et c'est ce qui me pousse à chercher - vous ne faites pas confiance à une connaissance qui ne serait fondée que sur la pratique, dont on ne pourrait pas rendre compte et qu'on ne pourrait pas repenser pour l'améliorer.

Si votre cas est semblable au mien, vous êtes peut-être maintenant convaincus de cela aussi : *la connaissance théorique d'une catégorie de phénomènes (l'identification des variables pertinentes) permet d'en interpréter rapidement les manifestations singulières en les situant dans un espace dont la forme est connue* ou autrement, *de repérer des points singuliers correspondant à des contraintes non encore identifiées* : dans le premier cas, on peut alors partager ce que l'on sait et dans l'autre, partager son ignorance ; mais dans les deux cas, ce que l'on acquiert par l'expérience est devenu partageable et transmissible, ce qui est je crois l'enjeu de notre participation à ces Journées.

Communications

GEOMETRIE DANS L'ESPACE

François Boule, Dijon

Ceci n'est pas une communication, au sens habituel, c'est à dire le compte-rendu d'une recherche scientifique en cours. Je m'efforcerai, sinon de conserver le sujet initialement prévu par A. Mesquita, du moins de rester dans le champ de la géométrie, en vous faisant part de quelques réflexions que j'illustrerai par quelques tentatives de réalisation.

Pourquoi la géométrie ?

Le programme du présent Colloque lui fait une place importante, et que l'on peut trouver paradoxale. En effet, la Géométrie laisse peu de souvenirs dans la mémoire des anciens élèves et des futurs professeurs; elle est enseignée avec quelques réticences à l'école. Sa place est traditionnellement étendue dans l'enseignement français depuis des siècles; après une crise dans les années 70, les programmes lui ont fait de nouveau une place significative, mais qui est en train de se réduire dans les lycées.

A quoi sert-il d'enseigner la géométrie ?

Cette réflexion devrait être constitutive des Programmes et de leur évolution. Elle sera largement évoquée à d'autres occasions ces jours-ci. Contentons-nous ici de suggérer rapidement trois directions qui pourraient orienter l'enseignement de la géométrie et lui donner sens.

• La première direction est instrumentale : faire acquérir des notions et des techniques élémentaires nécessaires à la vie quotidienne du citoyen; il s'agit par exemple de notions, de configurations et de quelques résultats classiques.

• Mais il s'agit, avant cela même, d'établir les *conditions* de ces apprentissages, c'est à dire d'*éduquer la perception* et d'élaborer des représentations, c'est à dire construire l'espace. Et au-delà de saisir les objets de la géométrie pour développer des méthodes. Cet aspect méthodologique semble d'ailleurs la caractéristique la plus constante et la finalité la mieux affirmée de cet enseignement depuis des siècles : esprit logique, formation du raisonnement, construction de preuves. Le langage est fortement impliqué par cet aspect des choses.

• Enfin, il serait dommage de ne pas inscrire la géométrie, au même titre que la musique, l'architecture ou la poésie dans une perspective culturelle. Certains résulats géométriques, l'évolution de la représentation de l'espace représentent des étapes capitales dans le progrès de la pensée scientifique. Cette trace n'en est pas moins profonde que celles de l'Illiade, de l'Art de la Fugue ou des Demoiselles d'Avignon.

Afin de mieux préciser mon propos ultérieur, je vous propose maintenant quelques images :

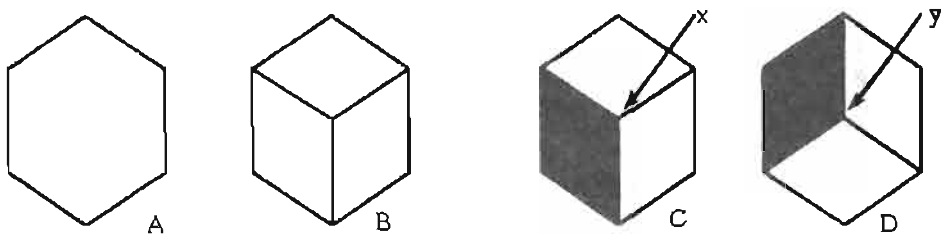


fig. 1. a, b, c, d.

L'image A, regardée seule, représente une figure plane, un hexagone. Mais il suffit d'ajouter trois segments (B) pour qu'elle devienne pour nous tous la vue d'un cube, et d'autant plus volontiers que l'on colorie les losanges (C). Il ne s'agit pourtant encore que d'un simple hexagone. Ceci montre la capacité interprétative (culturelle) de la perception. Comment interprétez-vous le sommet x ? Comme le point en avant de la face supérieure ? Et pourquoi pas comme le coin reculé d'un plafond avec les murs d'une pièce, en creux ? De même en (D). Nous voyons ainsi qu'une figure plane n'est pas seulement lue, elle est **interprétée**.

Voici maintenant un petit problème bien connu :

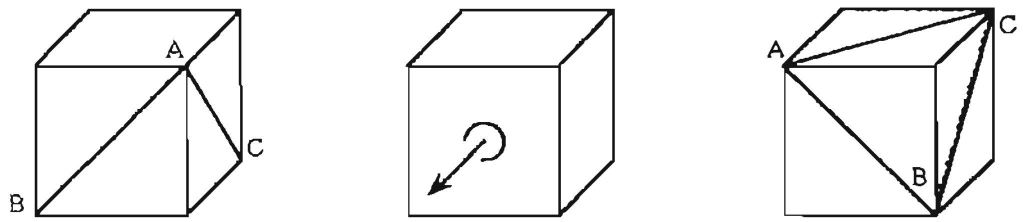


fig. 2 a, b, c.

Admettons que la première figure représente un cube. AB et AC sont les diagonales de deux faces. Quel est l'angle de ces segments ? On pourrait songer à mettre en équation, invoquer la trigonométrie, solliciter quelque théorème. Il est plus simple et fructueux d'imaginer le cube dans sa main, et le faire tourner (2.b). La solution devient évidente : BC est une troisième diagonale de face, le triangle ABC est équilatéral, l'angle cherché mesure 60°.

Que s'est-il passé ? L'étude de la figure réactive des connaissances, mais aussi stimule des évocations. Imaginer le cube et le manœuvrer, c'est *se mettre soi-même en scène* avec lui, dans **l'espace**.

Voici un autre exemple que vient de me suggérer M. Carral :

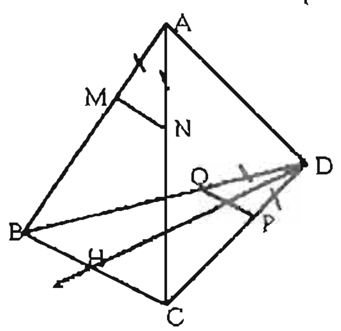


fig. 3

Le tétraèdre ABCD est régulier.
On définit les points M, N, P, Q par les longueurs égales
AM = AN = DQ = DP.
Quelle est la nature du quadrilatère MNPQ ?

Il suffit de faire tourner le tétraèdre, c'est à dire de prendre le plan ADH comme plan de bout, pour s'apercevoir qu'il est plan de symétrie. Par conséquent MNPQ est un rectangle.

C'est pourquoi je vous propose maintenant une interprétation des relations entre espace et géométrie.

Espace et géométrie.

L'un des grands mérites de Piaget est d'avoir établi que l'intuition de l'espace, de la durée, de la causalité, du nombre entier etc. que l'on croyait condition nécessaire et primitive de toute pensée est en réalité une construction individuelle. Celle-ci procède par enrichissement de l'expérience et coordination des différents "espaces" perceptifs. Ainsi se constitue un "espace vécu", une "géométrie concrète", qui est prise de possession de l'espace et découverte d'invariants propres à l'environnement et aux objets qu'il contient. Cet espace devient *objectif* lorsque le sujet en vient à disposer de *représentations* qui deviennent communicables et permettent d'évoquer les objets, voire de raisonner sur eux même en leur absence. Ainsi s'élabore l'"objet géométrique" qui est un être abstrait.

La construction de l'espace est d'abord *activité du corps*. Les gestes, les mouvements, les déplacements sont une prise de possession de l'espace. Cet espace premier se développe par élargissement de l'espace vécu puis par objectivation (espace centré sur soi, puis décentré, capacité de détour, d'anticipation), enfin par l'élaboration de représentations objectivables.

Une tentation simplificatrice consisterait à placer "du côté de l'espace" ce qui concerne l'organisation du cadre spatial, conduisant à l'espace objectif à trois dimensions, et "du côté de la géométrie" les invariants descriptifs des objets (comme le parallélisme, les angles, les notions de milieu, de longueur, d'aire etc.), bref ce que développent les classiques Eléments d'Euclide.

Une éventuelle distinction entre espace et géométrie est loin d'être claire chez Piaget. Au reste sa conception des rapports géométriques soulève quelques problèmes, en particulier la phase intermédiaire qu'est la géométrie projective. Une meilleure connaissance récente de la perception visuelle a permis un recadrage de la question. Ceci dépasse mon propos d'aujourd'hui.

Je vous propose l'idée que la géométrie *évacue* le sujet alors que l'espace maintient une connexion avec lui. En ce sens l'espace est illimité et inclut jusqu'au sujet, alors que la géométrie découpe une portion (peut-être infinie) qui l'exclut. Autrement dit : selon Piaget "une image mentale, c'est de l'action intériorisée"; dès lors que cette intériorisation supprime sa propre histoire (encapsulage), on entre en *géométrie*. Si les procédures peuvent être ré-ouvertes (comme dans l'évocation suggérée par les "transformations géométriques"), il s'agirait *d'espace*.

Deux idées résultent de ce propos :

♦ A l'école, il est moins question de *géométrie* que d'**espace**. Il s'agit d'établir des représentations mentales par prolongement de l'expérience, et de les maîtriser, en un mot de commencer à **penser l'espace**. Cette capacité est une des conditions de la mémorisation et de la schématisation. Les représentations mentales sont partout présentes. Cela passe naturellement par le repérage, les déplacements, la reconnaissance de formes (que l'on voit enfin mentionnées explicitement à l'école maternelle), mais aussi par la construction d'objets, la mémorisation des lieux, l'évocation des points de vue, l'imagination. On aurait tort de réduire ce champ à la manipulation des indicateurs spatiaux du langage, même si l'établissement d'un vocabulaire est une évidente nécessité.

Penser l'espace, c'est prolonger l'expérience par des représentations; celle-ci peuvent être langagières mais aussi gestuelles ou visuelles, extériorisées ou non. C'est la *condition* de la géométrie, bien sûr, mais bien plus fondamentalement un des moyens de la connaissance.

Combien d'adultes entend-on déplorer de ne pas "voir dans l'espace", ou qui s'orientent avec difficulté, ou encore qui se trouvent dans l'embarras devant une carte routière ? Ces compétences, qui ne sont pas typiquement géométriques, ont probablement une origine dans les dix premières années de la vie.

♦ La seconde conséquence est une interrogation sur le processus de connaissance, et le rôle qu'y tient le langage. Voici un nouvel exemple pour illustrer cette interrogation :

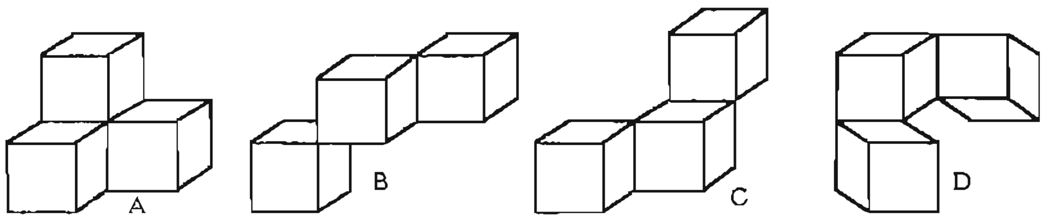


fig. 4 a, b, c, d

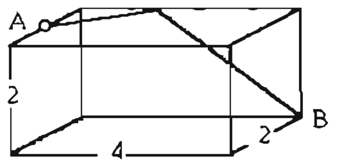
Projetons successivement ces images, pendant quelques secondes, avec la consigne de les *reproduire de mémoire*.
La première image ne pose pas problème; on pourrait dire qu'il s'agit d'*espace pur* : tout le monde reconnaitra une construction de cubes, très simple. Cette évocation dispense d'une analyse plus profonde.
La deuxième est moins évidente. Si cubes il semble y avoir encore, ils sont en contact les uns avec les autres par une arête, mais ne reposent pas sur un plan de base. Comment repérer ce voisinage ? C'est ici que *les mots* vont devoir intervenir, en spécifiant soit les arêtes, soit les points de vue.

Au fait, croyez-vous que (B) et (C) représentent la même construction ?
Comment pourriez-vous argumenter votre conviction ?

Les relations spatiales –comme les relations logiques– ne sont pas *seulement* langagières : la construction de l'espace ne s'identifie pas à des leçons de vocabulaire, même si le langage est indispensable pour établir certaines représentations. Il se pourrait même, comme le suggère C.Lorenz [Psychologie et phylogénèse, 1954] que *"l'espace serve de modèle pour tous les rapports abstraits"*.

La dernière image (D), dans une égale durée d'observation, conduit à une difficulté bien plus grande. Si l'on veut encore y voir des cubes, il ne s'agit plus d'un espace "normal"; et les relations entre ces cubes doivent emprunter d'autres formes, par exemple en termes de transformations géométriques. On décompose l'image, pour en soumettre les parties à un traitement pour lequel le langage devient très utile. Notons au passage que cette décomposition introduit *de la durée* dans une image qui ne l'impose pas d'elle-même. La difficulté proviendrait alors de la recherche d'un *traitement approprié* ou du maintien des informations utiles (saturation), voire des deux. la complexité du problème s'exprime ici en termes d'économie, de déperdition, de saturation d'informations. Ce que je développerai volontiers une autre fois.

Je ne développerai pas non plus ce qui concerne la construction de l'espace, qui débute dès la naissance, et ne s'achève pas à l'entrée à l'école, ni même peut-être à l'entrée au lycée. Je m'en tiendrai aujourd'hui à la *géométrie dans l'espace*, en tant qu'elle concerne l'école élémentaire, et ses anciens élèves que nous sommes. Je n'évoquerai pas davantage les résultats classiques de la géométrie que nous avons tous appris.
Mais avant d'illustrer la géométrie dans l'espace à l'école, je vous propose deux petits problèmes :



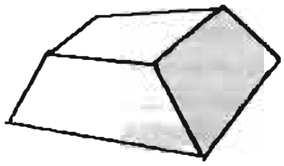


fig. 5 : quel est le plus court chemin de A à B ? *fig. 6 : ceci n'est PAS une pyramide tronquée, pourquoi ?*

En fonction des hypothèses ci-dessus, s'agit-il d'espace ou géométrie ?

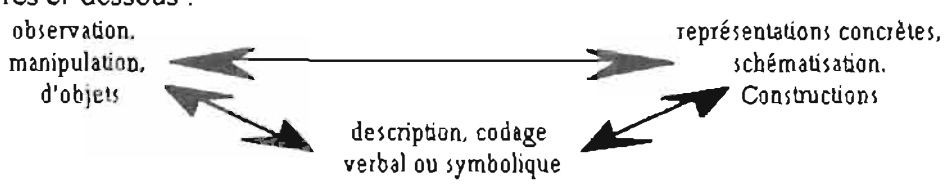
Des activités pour l'école

Observer et faire

Il faut distinguer fermement ce qui concerne les objets, leur représentation interne, et la capacité d'exprimer une représentation. Reconnaître un objet selon telle ou telle apparence est une compétence élémentaire. La mémorisation de ces apparences et leur mise en relation relève d'un second niveau. La capacité de construire des représentations et de les maîtriser en l'absence des objets constitue un troisième niveau. C'est pourquoi les activités de géométrie dans l'espace doivent obligatoirement s'initier avec de VRAIS objets dans le but, à plus long terme, de travailler seulement sur des représentations. *C'est la fréquentation initiale du réel qui assurera la disponibilité des représentations.*

Les définitions abstraites (droites, plans, parallélisme...) n'ont pas lieu d'intervenir à l'école en dehors de situations manipulables. Par contre les occasions de préciser le vocabulaire ne manquent pas en partant d'objets concrets : boîtes de jeux de construction, objets usuels. Ni le vocabulaire, ni les représentations ne constituent par eux-même un objectif. Il s'agit prioritairement d'enrichir et de structurer l'expérience.

Dans la pratique scolaire ordinaire, ou les propositions des manuels, ces activités sont plutôt rares : il s'agit le plus souvent d'observer des objets de l'environnement, de construire des polyèdres ou encore d'explorer les "développements" d'un cube ou d'un pavé. Toutes activités intéressantes, mais qui n'épuisent pas les possibilités de ce domaine. En particulier, nous suggérons que la capacité adulte de "voir dans l'espace" c'est à dire d'évoquer des objets et de traiter leurs représentations est issue de l'expérience précoce des relations triangulaires ci-dessous :



C'est la **circulation** entre ces différents termes (et pas seulement chacun d'eux) qui engendre les représentations mentales. En particulier, les tentatives ci-dessous décrites ont clairement fait apparaître l'importance de la *formulation explicite* pour faciliter les repérages d'orientation, et la mémorisation des situations.

La géométrie dans l'espace n'est pas absente de l'école. Mais les sujets abordés et les activités pratiques s'écartent généralement peu de deux thèmes principaux :
l'observation / construction de polyèdres, et les "patrons" du cube. Ils sont souvent évoqués dans les manuels en usage.

C'est pourquoi je préfère vous proposer quelques autres situations qui ont été exploitées lors de deux séances en CM1, en mars 98, par des stagiaires P.E.2, dans le cadre d'un Atelier Pédagogique (structure en petit groupe, pilotée par un prof. d'IUFM et un I.M.F).

1. *Observation d'un dé à jouer, réalisation à partir de faces préparées, puis construction de patrons de ce dé.*
2. *Solides construits à partir de cubes emboitables : observation, description, reproduction avec modèle présent, ou de mémoire.*
3. *Points de vue ; c'est une variante de la fameuse situation des Trois Montagnes décrites par J.Piaget.*
4. *Représentation d'un solide par des vues (face, côté, dessus). Reconnaissance ou construction d'un solide d'après 2 ou 3 vues (matériel Structuro).*

Le dé à jouer

Rappel, observations.

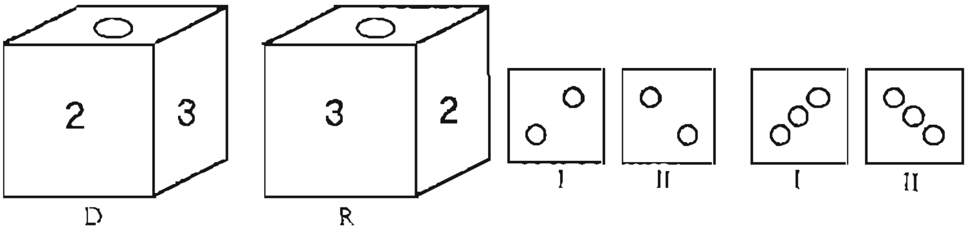


fig. 7

Il y a deux types d'orientation, D et R (la plupart des dés en circulation sont du type D); mais la disposition des constellations, pour le 2 et le 3 peuvent être de type I ou de type II. Il en résulte $2 \times 2 \times 2$ possibilités pour ces trois faces. Les faces 4 et 5 ne sont pas orientées. Mais la face 6 peut recevoir deux orientations. Il y a donc 16 façons de constituer un dé à jouer (en respectant bien sûr les sommes de faces opposées égales à 7).

Déroulement

• Un dé (en carton, assez gros) est soumis à l'observation : identifier l'objet, le nombre et la nature des faces, reconnaître les constellations. On n'insiste aucunement sur l'orientation et la position relative des faces. Les enfants reconnaissent "un cube", ou "un dé", et les faces comme des carrés. Le comptage est peu méthodique, les enfants tournent et retournent le cube tout en comptant. Ils reconnaissent "des points" sur les faces "qui permettent de compter".

• Il s'agit de construire un dé identique. Les enfants, par petits groupes, reçoivent des carrés porteurs de constellations, du ruban adhésif, des ciseaux, un modèle à la même échelle.
• La construction faite, on compare la réalisation au modèle.

L'une des construction étant faite exactement *sur* le modèle, la validation devient impossible : le modèle disparaît dans sa copie.
Lorsque les autres réalisations sont terminées, la comparaison (en disposant les deux cubes en translation l'un par rapport à l'autre) fait apparaître que l'on n'a généralement pas tenu compte de l'orientation des faces.

Cubes emboitables

On utilise des cubes emboitables de 2cm d'arête, et de deux couleurs. Dans la construction des solides, on ne tient pas compte des attaches (boutons et alvéoles).

1. Construction à partir d'un modèle manipulable.

Six modèles sont proposés, un par enfant, qu'il peut prendre en main. (fig.8 a)
Travail par deux : un enfant fabrique un modèle en se cachant; puis l'autre doit reproduire ce modèle; puis inversion des rôles.

2. Construction avec modèle fixe.

Le modèle est posé sur la table, on ne peut pas le toucher. Observation, pendant une demi-minute environ. Puis réalisation de la construction en l'absence du modèle.
Un modèle pour trois élèves (fig.8 b). Les élèves ont cependant le droit de se déplacer autour du modèle

3. Construction de mémoire.

Le modèle est composé de 5 cubes (fig.8 c) ; il est observé, et manipulé par chaque enfant pendant dix secondes. Puis on demande de le construire ; validation par comparaison au modèle.

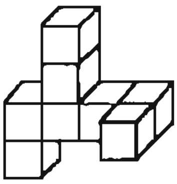


fig. 8 a

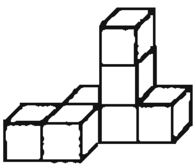


fig. 8 b

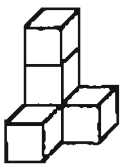


fig. 8 c

4. Construction "téléphonée"

Un modèle est construit et caché. Description par le maître : "c'est un escalier contenant 6 cubes. Il mesure 3 cubes à la base et 3 cubes en hauteur." Les enfants doivent le construire.

Autre modèle, autre consigne : "c'est un immeuble de trois étages. Chaque cube représente un appartement, et il y a 4 appartements par étage."

Dernier modèle : "c'est un volume qui a trois cubes à la base. A l'une des extrémités de cette base, deux cubes viennent s'ajouter en hauteur ; à l'autre extrémité, un cube vient s'ajouter en hauteur."

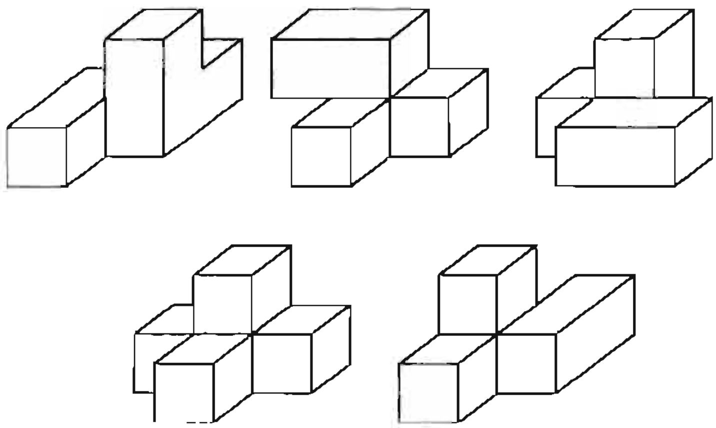
5. Autres constructions "téléphonées"

Des modèles sont réalisés par les élèves et les descriptions sont faites par le constructeur. Le modèle est constitué de 5 ou 6 cubes. Le réalisateur doit construire sans voir le modèle, et le descripteur, sans voir la réalisation.

6. Autres exercices possibles

• ***Reconnaissance.***

Plusieurs solides sont proposés. On se demande si plusieurs d'entre eux sont pareils. Il est possible de les prendre en main pour les comparer. Ce qui est ici en jeu est l'orientation. Exemples :



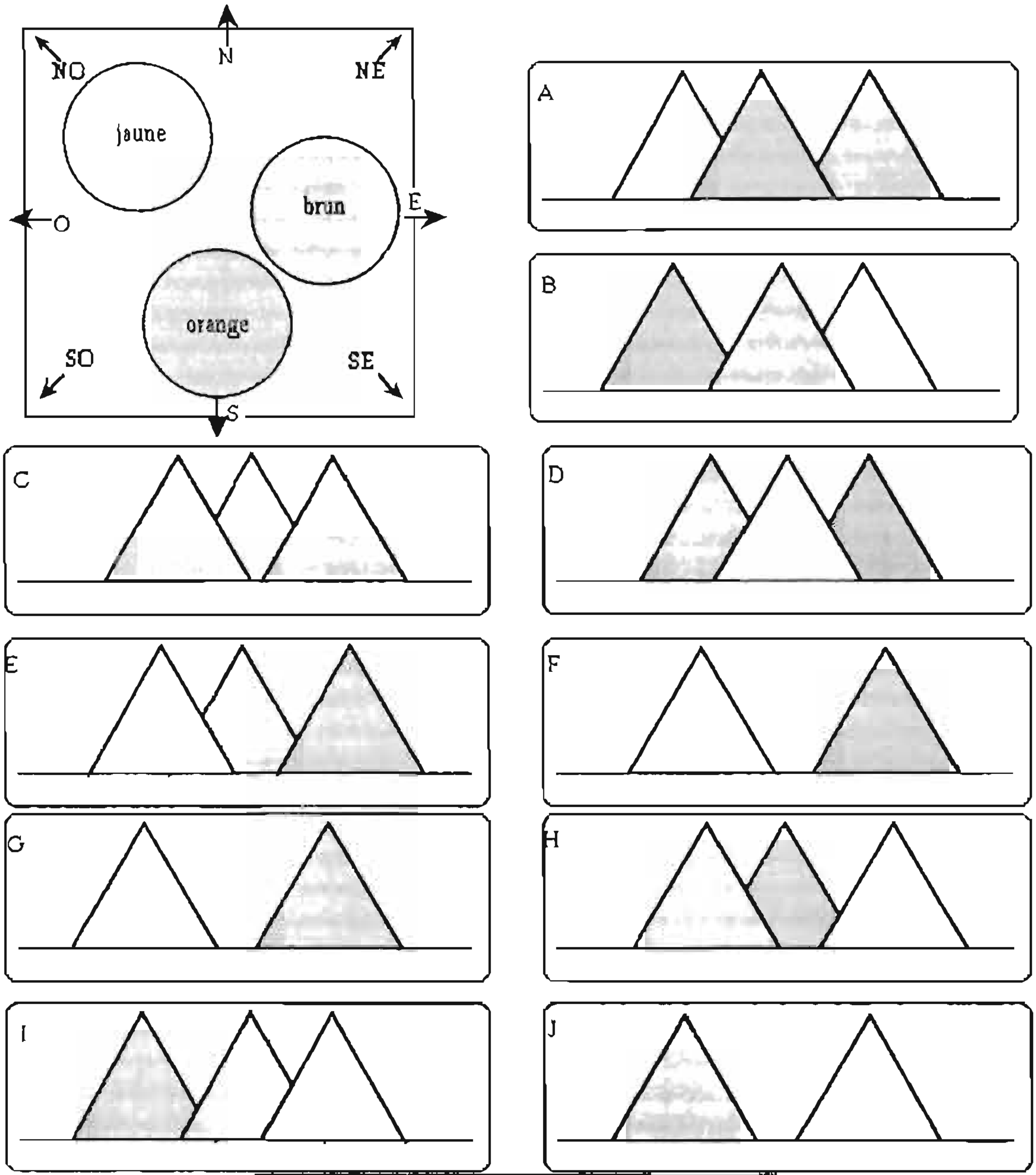
Parmi les solides ci-dessus, y en a-t-il deux ou davantages qui sont **pareils** ? L'exercice est d'autant plus difficile que n'apparaît pas de plan de référence évident (plan frontal, ou plan de repos).

• ***Variante.***

Reconnaissance différée : un solide est présenté à l'observation pendant quelques dizaines de secondes (il doit être simple : 4 ou 5 cubes). Puis il est replacé dans une boîte qui contient déjà d'autres constructions voisines. Retrouver le solide observé initialement. Cette dernière variante fait intervenir une évocation, qui suppose une organisation de la représentation.

Points de vue

Le matériel est constitué d'un plancher portant les directions cardinales, et sur lequel sont placées trois cônes de couleur (les "montagnes") ainsi que d'une série de fiches représentant les vues.



A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
sud	est	s-e	n-o	ouest	s-o	faux	nord	faux	n-e

fig. 10

• Première phase de familiarisation : un enfant se place selon l'une des directions cardinales, l'œil juste au-dessus du niveau de la table. Il doit dessiner ce qu'il *voit*. On analyse en groupe les productions obtenues. Globalement, les enfants ne respectent pas la "ligne de terre", mais disposent les vues (triangulaires) à des niveaux différents selon leur éloignement. Cette erreur étant notifiée, on passe à la phase suivante :

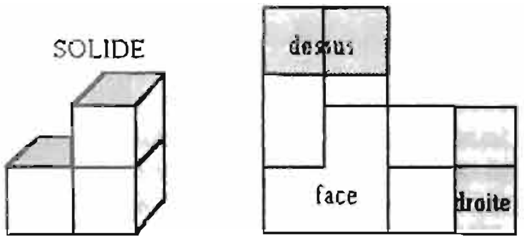
• Deuxième phase : chaque enfant reçoit une vue (ci-dessus) et doit retrouver la direction de vue (ex. A : Sud ; B : Est, etc.). Cette phase est généralement bien réussie. Mais il apparaît que la *description orale* de la vue est un élément important de discrimination; exemple : "on voit la montagne orange en avant, et la jaune à gauche...")

• Troisième phase : les enfants sont placés autour de la table, chacun occupant l'un des huit points de vue "cardinaux". La consigne donnée à l'enfant X est : "dessine ce que voit Y depuis sa place".

Voir en annexe quelques autres exemples de situations, que l'on peut proposer en formation.
La différence essentielle de présentation tient en ceci : pour les enfants, il est indispensable de travailler avec la situation matérielle présente; avec des adultes, on peut s'en tenir à une simple vue de dessus.

Les cubes Structuro

Objectif : construire un solide à partir de différentes vues; comprendre le rôle des traits continus (arête saillante visible) ou discontinus (arête saillante cachée) dans la représentation des faces.

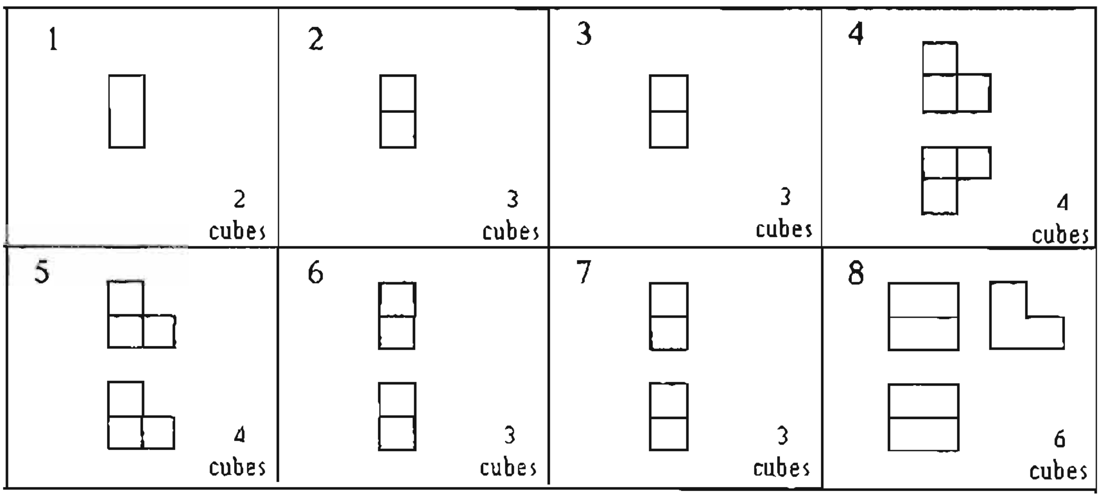


Contrairement à l'usage du dessin technique, on représente ici la vue de droite à droite de la vue de face, et la vue de dessus, au-dessus.

fig. 11

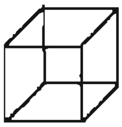
Déroulement

La règle de disposition des cubes Structuro est présentée au groupe entier : face rouge vers soi (vue de face), faces bleues latérales (vue de gauche ou droite), face jaune au-dessus. "Où doit-on se placer pour ne voir que la face rouge ?"[en face]; "que la face jaune ?" [au-dessus], "que la face bleue ?" [de côté, à gauche ou à droite]; ultérieurement, on n'utilisera que la vue droite. Tous les cubes seront disposés de cette façon.
On utilise ensuite les cartes suivantes, indiquant une ou deux vues, ainsi que le nombre de cubes de la construction :



Fiche n°1 [un cube = un carreau]. Ce solide est facile à construire.
Fiche n°2 : CONVENTION : un trait **continu** représente une arête visible que l'on peut toucher.
Fiche n°3 : CONVENTION : un trait **discontinu** représente une arête non visible (cachée, en arrière), mais que l'on peut toucher.

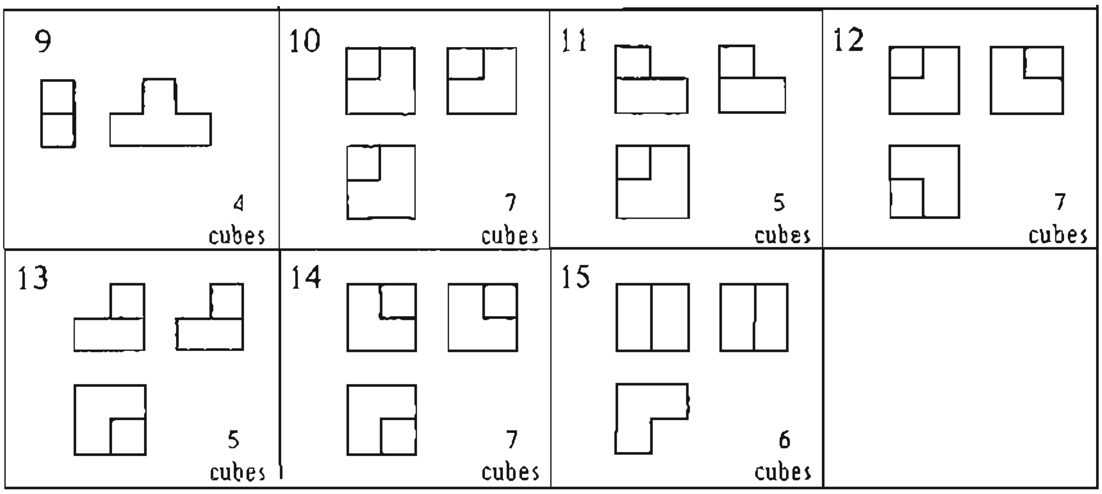
On peut utiliser comme aide une représentation du cube en perspective cavalière : .



Faire toucher chacune des arêtes représentées par un trait continu (visibles), et celles qui sont représentées par un trait discontinu (non visibles)

On propose alors les situations 4 à 15 en s'assurant que les enfants :

- ont bien orienté chaque cube
- ont compris le fonctionnement de la représentation (trait continu/discontinu)



Observations :

Tous les enfants ont très vite compris les rapports entre couleurs et vues (rouge = face ; bleu = côté ; jaune = dessus). La convention continu / discontinu a été plus difficile à faire admettre. Cependant par le toucher, la manipulation et une aide individualisée, les enfants ont finalement saisi la signification de ces conventions, quoique à des rythmes différents. Deux enfants se sont particulièrement bien appropriées ces conventions, de sorte qu'ils avaient quelque avance sur les autres.

Après quoi les enfants travaillent de façon individuelle sur les fiches (une ou deux vues) qui leur servent de mode d'emploi pour les constructions. Quelques enfants moins rapides ont besoin d'aide, sous forme orale de la part du maître et/ou une mise en rapport constante entre plan et solide, mais peu après, quelques unes ont pu progresser de façon discrète et autonome. Cependant, même aux enfants sans difficulté, on a demandé aux enfants d'expliquer pourquoi ils avaient construit leur solide ainsi.

Il semble cependant que la progression proposée ait été un peu rapide. La séance a porté essentiellement sur la capacité des enfants à construire un solide selon des vues données. Pour permettre aux enfants les plus lents de progresser, on a demandé à ceux-ci de dessiner les vues d'un solide qu'ils avaient construit. Les couleurs et les vues ont été correctes; mais l'emplacement des vues a été plus difficilement respecté.

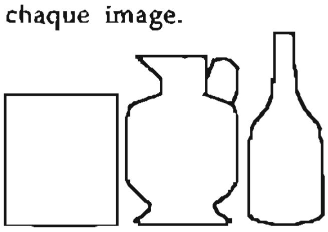
Une seconde séance, à huit jours d'intervalle, à permis de vérifier que ces activités avaient été bien intériorisées : deux ateliers ont été conservés (cubes enboîtables et structuro), animés par des enfants l'ayant suivi, à l'intention d'autres enfants ne les ayant pas suivi. La passation des consignes, le contrôle des activités a montré une bonne persistance des représentations.

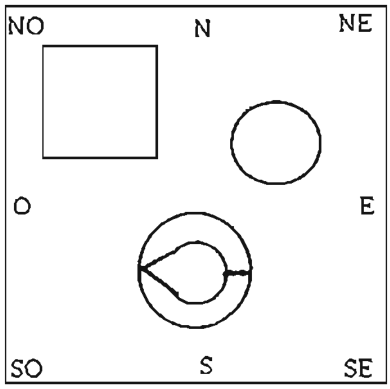
La fiche ci-dessous propose une variante, soit pour la classe (avec les objets réels) soit en formation (fiche seule).

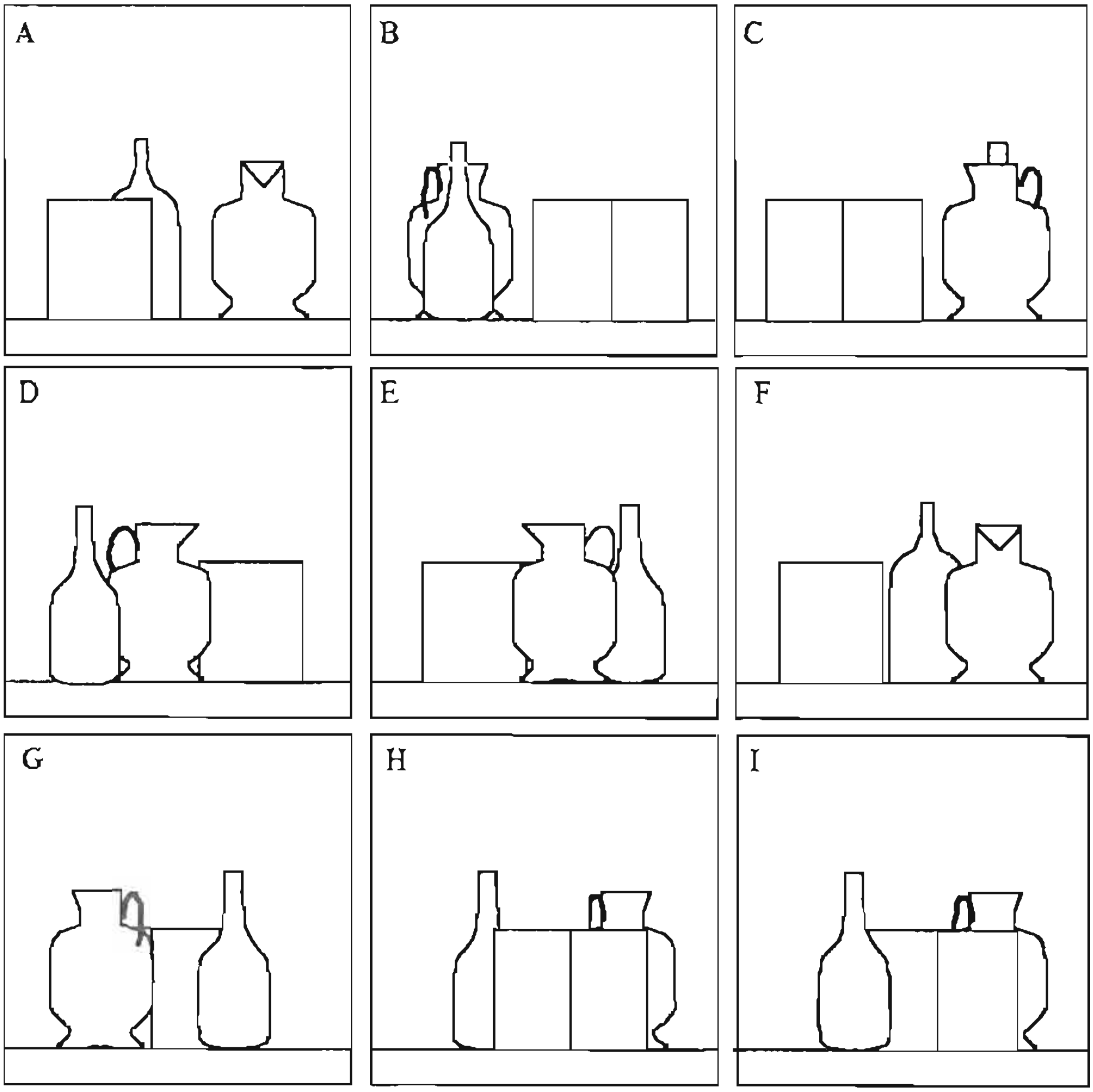
Trois objets (une boîte, une bouteille, un pichet) sont disposés sur une table comme l'indique la vue de dessus ci-contre.
Les images qui suivent représentent des vues, selon différents points de vue cardinaux (Nord, Sud, Nord-Est, Nord-Ouest,)

Déterminer quel est le point de vue de chaque image.

Attention :
Certaines vues sont fausses.
Lesquelles ? Pourquoi ?







F.Boule *Autrial. puis Dijon*

Etude et réalisation d'une situation d'enseignement dans le domaine pré-numérique en grande section de maternelles.

Joël Briand I.U.F.M. Bordeaux.

Ce travail a été réalisé grâce à l'équipe des maîtresses de l'Ecole maternelle Jules Michelet de Talence (33), et en particulier, de Michèle Hervouet et de Marie- José Lacave- Luciani, travail poursuivi et adapté par Véronique Goua de Baix (PE2 IUFM de Bordeaux) et de Dominique Bedère (IMF Bordeaux).

Pour que l'élève apprenne ou utilise les savoirs scolaires, il doit mettre en oeuvre des connaissances que le professeur ne peut pas lui enseigner. Il ne suffit donc pas de se servir de l'organisation des savoirs " déjà là " pour organiser l'enseignement. L'observation des élèves montre que ceux-ci mettent en œuvre des connaissances qui ne s'identifient pas au savoir repéré par l'institution. Nous avons montré [Briand 1993] que l'énumération était une connaissance nécessaire au comptage.
Comment alors mettre en place des situations dans lesquelles l'énumération d'une collection soit seule (indépendemment du nombre) la solution à un problème posé ?
Au cours de la recherche déjà citée, plusieurs dispositifs de mise en œuvre de la situation fondamentale de l'énumération (dans le cadre de collection finies d'objets visibles) ont été mis au point. En particulier une modélisation à l'aide de l'outil informatique a été réalisée [Briand J., Brousseau G., Oyallon J.L. 1985]. Les expérimentations qui en découlaient ont déjà été rédigées [Briand J. 1985-93].

Nous proposons ici l'étude d'une ingénierie plus large dans une classe, avec, en particulier :
- un exemple d'organisation d'une situation d'apprentissage de l'énumération dans le cadre de la classe de moyenne section de l'école maternelle,
- l'étude d'effets produits par de légères modifications du dispositif, souvent à l'insu des enseignants.
- Les questionnements restés en suspend, en particulier dans des domaines connexes de savoirs tels que l'argumentation.

1. UNE MODALITE DE LA SITUATION FONDAMENTALE DE L'ENUMERATION : ANALYSE DU CHAMP DE CONTRAINTES.

1.1 PRESENTATION DU DISPOSITIF ET ANALYSE A PRIORI :

Le dispositif s'adresse à des élèves de 4-5 ans. Un élève dispose devant lui (sur une table) d'un tas de boites d'allumettes identiques percées sur le côté d'un petit trou permettant le passage d'une allumette. Des bâtonnets (sans le phosphore) sont les allumettes. Ces bâtonnets, en grand nombre, sont dans une boite plastique. Il s'agit de placer une allumette et une seule dans chaque boite sans l'ouvrir, de savoir lorsque l'on a terminé, puis de s'assurer si l'on a réussi ou échoué en ouvrant les boites. S'il y a une seule allumette dans chaque boite et si aucune boite n'est vide, alors l'élève a réussi.

Nous avons souhaité intégrer ce travail dans une pratique de classe habituelle : en collectif, la maîtresse présente l'activité en l'appelant "jeu des boîtes d'allumettes". Elle ne fait pas travailler les élèves. Puis, après avoir lancé d'autres ateliers autonomes, la maîtresse appelle trois enfants : un va jouer et deux observent. Ils joueront après.
Le rythme de travail choisi est de faire passer environ 6 élèves par séance, ce qui demande donc 4 à 5 séances pour que les élèves aient effectué le même type de travail. Cette expérimentation s'est déroulée de début novembre 96 à la mi-février 97.

Caractéristiques de cette situation a-didactique :

Nous analysons quel peut être l'enjeu de cette situation pour l'élève, en fonction en particulier des possibilités d'action, de choix, de décision, de contrôle et de validation dont il dispose. Nous prévoyons les champs de comportements possibles.

Les variables que nous avons repérées sont :

V1- Le type d'espace dans lequel l'élève va travailler. Ici, nous avons choisi de fixer cette variable. Il s'agit du micro-espace du plan de travail de la table. Chaque enfant travaille sur une table 120x80.
V2- Le nombre de boîtes.
V3- Le fait que les objets (boîtes d'allumettes) soient effectivement déplaçables ou non.
V4- La possibilité de déplacer les boîtes dans un espace restreint ou plus large. (liée à v1 et v3)
Remarque : le marquage des boites n'est ni suggéré, ni institué.

Analyse de la tache, Familles de stratégies attendues :

L'élève a devant lui des boîtes. Sa tâche consiste à constituer une collection nouvelle d'éléments "boîte-allumette" en distinguant en permanence cette nouvelle collection de la collection des boîtes "encore" vides.
Les stratégies possibles (gagnantes ou non) peuvent être les suivantes :
- L'élève prend une boîte, une allumette, met l'allumette dans la boîte, pose la boîte "à distance" des boîtes non encore remplies.
- L'élève prend une boîte, une allumette, met l'allumette dans la boîte, pose la boîte parmi les autres boîtes non encore remplies.
- L'élève associe une allumette à chaque boîte, puis met les allumettes dans chaque boîte. (Cette stratégie a peu de chances d'apparaître)

Variantes prévues de la situation

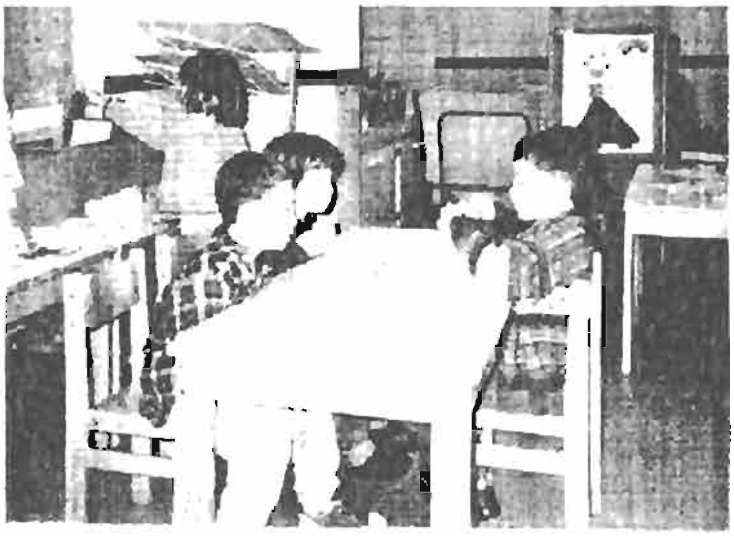
Première variante : 8 boîtes déplaçables sur une table 120x80.
Deuxième variante : 20 boîtes déplaçables sur une table 120x80
Troisième variante : (pour faire construire le marquage). 20 boîtes fixées sur un support.

Auxquelles nous avons ajouté deux variantes :

- Lors du deuxième jeu, nous avons constaté que les élèves secouaient les boîtes pour contrôler la présence ou l'absence d'allumettes. Nous avons donc décidé de placer une allumette dans les boîtes, la consigne devenant "il faut qu'il y ait deux allumettes par boîte". Nous allons étudier dans la suite de cet article en quoi cette décision n'était pas utile.
- Une collection de 20 boîtes rend la situation inutilement complexe. Nous l'avons observé dès les premiers élèves. Aussi, nous avons rapidement réduit à 15 le nombre de boîtes.

	Configuration matérielle	**Raisons des choix.**	**Analyses effectuées après l'expérimentation.**
JEU 1	8 boîtes déplaçables		- Stratégies pour remplir des boîtes, élaborer une collection. - Etude d'énumérations induites involontairement.

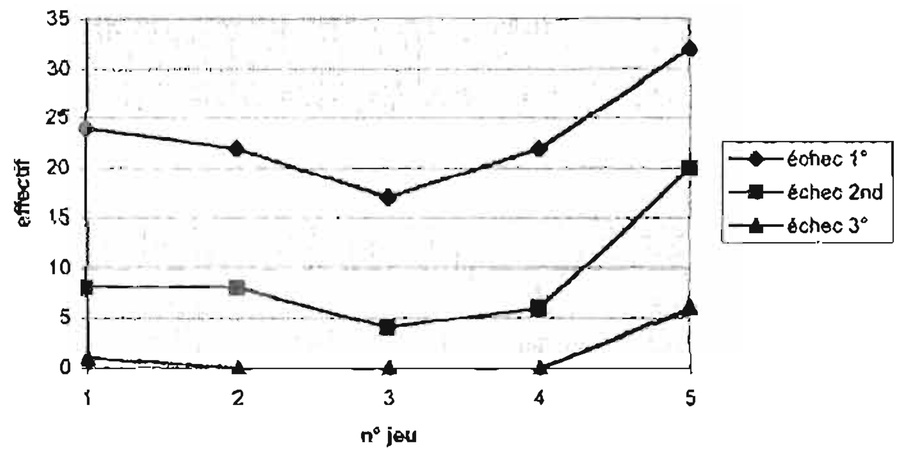
JEU 2	20 boîtes déplaçables	changement significatif du nombre de boîtes.	- Influence du passage de 8 à 20 sur les résultats, et sur les stratégies mises en œuvre.
Première phase collective		faire formuler les stratégies, faire anticiper un résultat	- Passage des propositions aux prédicats puis aux calculs sur prédicats. - Traitement des erreurs par l'enseignant. .
JEU 3 (2)	20 boîtes déplaçables		
JEU 4	15 boîtes déplaçables. Une allumette déjà présente dans la boîte.	le secouage (deux allumettes) 15 : 20 rend trop long la validation	- Etude détaillée du " secouage ".
Deuxième phase collective	15 boîtes déplaçables. Une allumette déjà présente dans la boîte.	faire formuler les stratégies faire anticiper un résultat	- Un savoir et son enseignement possible ou impossible. - Limites de ce type de séances. - Absence d'une situation a-didactique de formulation
JEU 5	15 boîtes non déplaçables. A nouveau une seule allumette.	énumérer une collection d'objets non déplaçables. Faire des marques.	- Analyse de la complexité de la tâche.



3 enfants sont autour d'une table : 1 joueur, 2 observateurs. Chaque enfant joue l'un après l'autre avec 8 boîtes placées en désordre devant lui. Si l'enfant échoue, il recommence. L'élève a devant lui le stock de bâtonnets ainsi que les boîtes disposées en désordre.

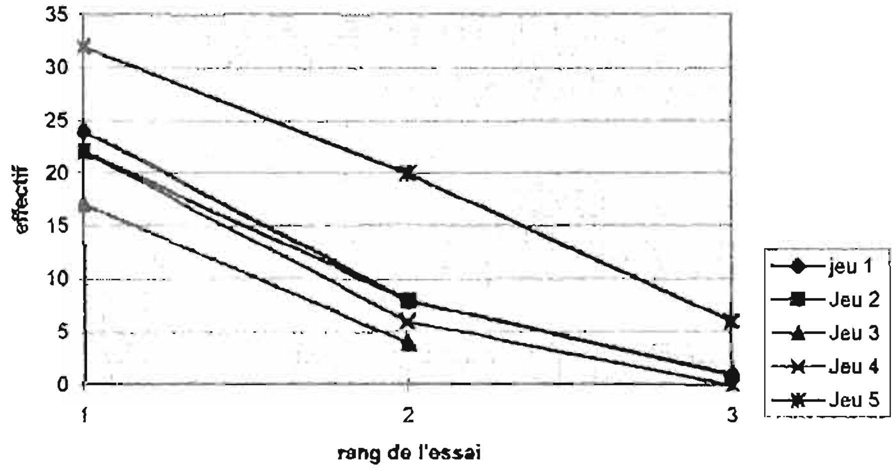
1.2 LES RESULTATS OBSERVES :

nombre d'échec selon l'essai



Ce schéma montre que pour chaque situation, les progrès sont évidents. L'enchaînement des jeux 1, 2 , 3 montre qu'à chaque jeu, le nombre d'échecs au premier essai redevient plus important que le nombre d'échecs au dernier essai du jeu précédent, mais en même temps, le progrès réalisé en trois essais par jeu reste très significatif. Le passage à deux allumettes et surtout le bloquage des boîtes d'allumettes (jeu 5) vont augmenter le nombre d'échecs à rang d'essai identique. Les variantes informationnelles sont significatives.

nombre d'échecs sur les deux classes



Ce deuxième schéma montre que, quelque soit les jeux, il y a progrès. Le progrès ne se mesure donc pas uniquement d'une séquence à l'autre, d'un jeu à l'autre, ce qui serait nier l'apport des modifications de variables significatives, mais à l'intérieur d'une même configuration de jeu.

Remarque : Peu d'élèves échouent après trois tentatives. Pour ceux-ci, nous prenons pour engagement de ne pas les confronter à l'échec répété. Nous proposons qu'ils demandent de rejouer lorsqu'ils en manifesteront le souhait. C'est un rapport, non tendu, à la situation qui doit être maintenu afin que l'élève ait envie de réussir, d'y voir un enjeu le concernant.

2. ANALYSE DETAILLEE DU JEU 1 : MISE EN EVIDENCE D'EFFETS DIDACTIQUES

2.1 LES STRATEGIES REPEREES :

Les élèves parviennent à réussir au jeu 1 (24 échecs en premier essai, 7 au deuxième (donc 24-7 réussites) et 1 au dernier essai (donc 7-1 réussites)).
Les stratégies mises en oeuvre pour réussir sont :
1- mise à l'écart, des boîtes remplies.
- Sur la table
- Sur la table et alignées, ou en bordure de table.
- Sur la table et alignées et empilées.

2- Repérage d'un chemin, a priori, permettant une exploration exhaustive de la collection première.
- L'élève replace la boîte remplie à sa place initiale.
- L'élève ne se préoccupe pas de la place de la boîte remplie.

3- Organisation préalable de la collection des boîtes vides.

Remarque :
- nous mettons le " secouage " à part puisqu'il se greffe sur les stratégies repérées.
- le rangement a priori des boites vides (en ligne) afin de mieux contrôler l'exploration future, n'est jamais apparu.
- la consigne empêche la réalisation de la stratégie qui consisterait à placer les allumettes sur les boîtes (une sur chaque boîte) ou des allumettes à moitié enfoncées.

2.2 DEUX EFFETS D'ERGONOMIE AVEC POUR CONSEQUENCES : UNE COLLECTION NON CONSTRUITE ET UNE ENUMERATION INDUITE.

2.2.1 PREMIER EFFET :

Devant une différence importante de résultats sur deux classes parallèles, nous nous sommes rendus compte que la situation n'était pas présentée de la même façon, mais avec une variation infime :
- Dans la première classe, la maîtresse pose, en vrac, les boîtes d'allumettes loin de l'élève. Pour cela, elle met les boîtes dans une grande boîte (à chaussure) qu'elle renverse sur la table. Dans l'autre, les boites sont disposées assez proche de celui-ci.

Or, pour mettre une allumette dans chaque boîte, l'élève doit :
1- Se saisir d'une boîte.
2- prendre une allumette *(ces deux actions peuvent être permutées)*.
3-mettre l'allumette dans la boîte.
4- poser la boîte remplie
- recommencer cette séquence.

Dès la deuxième boîte, la réussite impose la constitution, par énumération, de la collection des boîtes remplies.
Dans la première classe, l'action 1 impose un déplacement corporel (tendre la main, se lever un peu de sa chaise). L'action 4 sera réalisée au moindre coût en posant la boîte devant soi.
Dans la seconde classe, l'action 1 n'impose aucun déplacement, l'action 4 doit alors s'accompagner d'un geste volontaire (coûteux) de mise à l'écart, geste qui signifiera une intention de constitution de collection.

Dans le premier cas, pour des raisons ergonomiques élémentaires, l'élève n'a pas (ou peu) en charge l'énumération. La deuxième collection (boîtes-allumettes) peut se construire totalement à son insu.
On peut donc faire l'hypothèse que la différence de résultats est largement explicable par cette différence d'organisation.

2.2.2 DEUXIEME EFFET :

Une autre contrainte ergonomique a joué comme une variable de la situation : la place de la boîte qui contient les allumettes. Selon la place qu'elle occupait sur la table, elle constituait, ou non, un moyen mis à disposition des élèves pour qu'il n'aient pas à confondre les boîtes remplies et les boîtes à remplir ·
Remarque : nous n'avons pris conscience de ces phénomènes qu'après la première observation de 6 élèves dans l'une et l'autre classe. Ensuite, les dispositifs furent identiques : boîtes placées devant l'élève, boîte contenant les allumettes en bord de table.

2.3 ETUDE DETAILLEE DE L'EFFET DU SECOUAGE :

A un moment ou à un autre, les enfants secouent pour savoir s'il y a une allumette dans une boîte.
Exemple 1 : Romain place les boîtes pleines avec les vides. Il perd. Au deuxième essai, il écoute le bruit en secouant. Il reprend toute la collection et trie les vides et les pleines.
Exemple 2 :Damien en GM1 prend une boite, déjà remplie. Il découvre le bruit de l'allumette dans la boite. Il secoue une autre, et recommence. Il fait un tri fondé sur le bruit. Secoue mais n'organise pas spatialement (ne conçoit pas) la collection des boîtes remplies. Il met alors deux allumettes dans une boîte.
Constats :

- Le bruit est un événement (qui peut avoir un caractère ludique évident).
- Il peut devenir une propriété qui caractérise un nouvel objet : boîte avec allumette.
- Il peut être un moteur de tri de ces objets afin de constituer une nouvelle collection.
- Il peut, en inter-action avec une organisation spatiale, être une aide au contrôle de l'énumération.

L'élève qui ne se fonde que sur le tri à l'aide du bruit, sans constituer spatialement la nouvelle collection des boîtes remplies, est devant une tâche très coûteuse et non totalement fiable que nous analysons ainsi : soit E tel que card(E)=n. Il s'agit pour l'élève de :

1- prendre un élément de E
2- Construire un nouvel élément (couple (boîte, allumette)), lui attribuer une propriété (bruit) qui caractérise ce nouvel objet. (Et constituer un sous ensemble de R de E)
3- prendre un élément de C(E,A).
4- recommencer 1 jusqu'à ce que E soit vide.

Mais l'exécution de cette boucle ne peut se faire que si l'élève utilise en permanence le contrôle par le bruit afin de ne pas reprendre un élément de R et s'il dispose d'une stratégie pour contrôler l'arrêt de la boucle. Or, nous avons constaté que plusieurs élèves qui utilisaient le bruit, mais pas à chaque boucle, mettaient deux allumettes dans une boîte. Enfin, pour contrôler l'arrêt, il faut être sûr que toutes les boîtes ont eu une allumette, il fait donc les secouer toutes, mais comment contrôler si TOUTES sont secouées alors que la collection “ boîtes-allumettes ” peut ne pas être la préoccupation de l'élève ?

En conclusion, contrairement à une première analyse qui pourrait en être faite, le " secouage " d'une boîte n'est pas suffisant pour réussir. Il ne constitue pas une stratégie permettant totalement l'évitement de l'acquisition du savoir visé (constitution d'une collection par pratique énumérative). Toutefois, par le contrôle même incomplet qu'il permet, il augmente la probabilité réussir sans avoir de procédure énumérative bien aboutie.

3. ANALYSE DU PASSAGE DU JEU 1 AU JEU 2 (PASSAGE A 20 BOITES) :

1°) Nous faisons l'hypothèse que le passage de 8 à 20 boîtes permettra de mieux expliciter les stratégies de contrôle et de constitution de la collection des boîtes pleines.[1] Les résultats examinés plus haut ont montré qu'il n'y avait pas de différence significative sur les résultats si l'on prenait en compte le travail sur deux essais.

2°) Les résultats en GM2 sur les trois essais du premier jeu et les deux du second, sont les suivants :
6 élèves secouent les boîtes en Jeu1. 12 élèves secouent les boîtes en Jeu2 (à des moments différents de l'activité).

3) Une cause d'erreur repérée est une rupture dans la suite : (B : boîte ; A : allumette).
B-A, B-A, B-A, B-A, etc. ou la suite A-B, A-B, A-B, A-B, etc.
par exemple, une suite :
B-A, B-A, A-B-A, B-A. qui conduit à la mise de deux allumettes dans une boîte où à l'oubli d'une allumette, selon le moment ou se fait la rupture.

4°) Nous remarquons que la phase de validation est un moment au cours duquel les élèves :
- pensent qu'il est nécessaire d'ouvrir les boîtes qui restent même après avoir ouvert une boîte qui ne contenait pas d'allumette ou qui en contenait plus d'une.
- peuvent signifier les conditions de la réussite ou de l'échec.

Conclusions :
- le passage de 8 à 20 boîtes ne modifie pas significativement les résultats des élèves, en terme de réussite échec.
- les nouvelles contraintes ont permis l'émergence de stratégies d'organisation plus marquées (empilages, mises en ligne, bordure de table).
- la phase de vérification est très fastidieuse.

4. ANALYSE DES PHASES COLLECTIVES :

4.1 QUESTIONS DE LOGIQUE :

La première phase collective (à la suite du jeu 1) a permis
1°) de formuler une stratégie (" il faut mettre de côté "). Cette stratégie est formulée huit fois au cours de l'entretien.
2°) de prendre conscience de toute la logique en acte qui se développe derrière cette expérience et qui n'a pas été prise en compte au départ ou qui a été sous-estimée. " Perdu", " perdu un peu plus ", " gagné ", " gagné pour cette boîte ". Les élèves passent de l'énonciation de la valeur de

[1] Mais nous n'avons pas préparé les élèves à ce projet : les questions " Est-ce que tu saurais faire avec plus de boîtes ", de même que " qu'est-ce qui pense qu'il peut gagner.?" n'ont pas été proposées aux élèves.

vérité d'une proposition (il y a une allumette dans cette boîte) à l'élaboration conjointe de prédicats : " s'il existe une boîte sans allumette ... " " il y a une allumette dans cette boîte... ", ainsi que d'un calcul sur ceux-ci : " donc il a perdu ", " pour l'instant c'est juste ".
Il y a là un travail à poursuivre. Nous pensons que cette construction se fait dialectiquement avec la construction du concept de collection. L'hypothèse étant que la formulation de tels prédicats et des calculs sur ces prédicats participe à la constitution de la collection, que cela **" cimente " les objets pour en faire une collection**.
Dans les moments collectifs, nous avons constaté que les termes employés n'avaient pas de statut très clair. Par exemple, les termes " vérifier ", " réussir ", " échouer ", qualifient tantôt une réussite locale (une allumette dans cette boîte) tantôt la réussite ou l'échec à l'activité (" tu as échoué "). L'enseignant doit alors improviser un discours qui tourne autour des prédicats sans qu'un contrat précis sur les exigences n'ait été négocié.
Le tableau suivant fait état des comportements attendus, des savoirs visés du point de vue du travail sur les propositions et les prédicats, et du point de vue des interventions du professeur.

moment étudié	Analyse logique	analyse des comportements	savoir qui peut être visé	intervention possible
secoue les boîtes (secouer avant l'action , secouer après l'action)	l'information donnée par le bruit permet de savoir s'il y a une (ou plusieurs) allumettes dans la boite.	Permet de s'assurer de la présence d'une allumette.	Secouer avant permet de contrôler s'il y a présence d'une allumette. Secouer après ne permet pas de contrôler si la boîte était vide.	
Découvrir une boite ide.	Signifie l'échec au jeu	Peut signifier échec pour cette boîte. (proposition) Peut signifier échec au jeu. (prédicat)	Il suffit qu'une boite ne contienne pas d'allumette Il n'est pas nécessaire de vérifier pour celles qui restent.	" Il suffit " peut être repéré dans l'action (s'interrompt-on lors de la vérification au cas où une boite vidée apparaît). Peut être repéré dans le langage

4.2 QUESTIONS DE CONTRAT DIDACTIQUE :

Au cours des observations, nous avons constaté deux difficultés rémanentes pour les enseignantes. Nous décrivons ces difficultés, sans pour cela approfondir l'étude :
- Tout d'abord, le déroulement de ces séquences pose la question de l'enjeu. Quelle forme d'enjeu faut-il maintenir pour que les élèves prennent ce problème à leur compte ? La situation permet à l'enfant de savoir s'il a échoué ou réussi. A la suite d'une vérification , quelle attitude le maître doit-il avoir ? Il faut que celui-ci montre que réussir et échouer ne sont pas deux issues auxquelles il convient d'attribuer la même valeur. Or les enseignants en maternelle rechignent à tenir ce contrat, pensant décourager l'élève.
- Pour conduire cette phase, nous avons constaté que c'est en l'interrogeant sur ce qu'il compte faire la prochaine fois, et non sur ce qu'il vient de faire, que l'élève prend petit à petit le projet à son compte. Cela suppose chez l'enseignant qu'il envisage l'apprentissage se faisant non seulement dans les séquences elles-mêmes, mais aussi d'une séquence à l'autre, y compris chez de jeunes enfants. L'anticipation d'une séance à l'autre nous semble être un élément du contrat didactique.

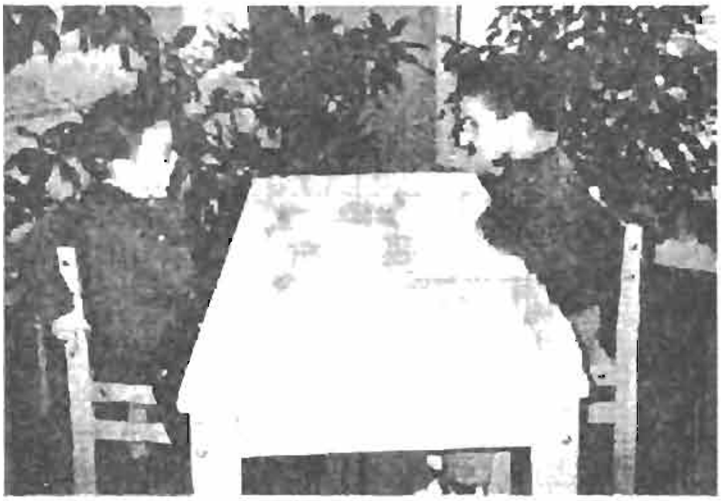
- La négociation du contrat n'est pas simple : l'enseignant est gêné lorsqu'il s'agit de trancher dans certaines circonstances. Par exemple : l'enseignant n'ose pas dire à T. qu'il a une bonne méthode mais qu'il s'est trompé parce qu'il a été distrait à tel moment.
- L'enseignant est souvent gêné lorsqu'une réponse juste a été donnée : le silence est interprété comme une annonce d'erreur.
- Le traitement des erreurs dans la relation didactique est aussi un point délicat ; certaines erreurs que les élèves font, peuvent être traitées en classe, d'autres non. Telle erreur d'un élève peut être difficile à traiter en public. Les niveaux d'explication n'étant pas les mêmes d'un niveau de savoir à l'autre, une explication aisée à donner à un élève s'avérera intenable à entendre pour un autre élève. Le risque, pour l'enseignant, est de se contenter d'une interprétation scolaire, de se ramener au projet scolaire, alors que bien souvent il s'agit de conceptions plus fines en jeu. Il y a donc des erreurs que l'on a intérêt à corriger en public, d'autres qui se règlent avec un seul élève, et d'autres qui ne peuvent même pas être débattues (savoirs absents).

5. ANALYSE DU JEU 4 : VERS UNE SITUATION A-DIDACTIQUE DE FORMULATION

Pour des raisons déjà évoquées, nous avons ramené le nombre de boîtes à 15. Les résultats ne sont pas significativement différents des précédentes séances. Le secouage est devenu un rite, certains élèves sourient, d'autres essaient de reconnaître le bruit de deux allumettes par rapport au bruit d'une allumette.
La phase de débat ne provoque pas de formulation interne à la situation : dans notre dispositif, un enfant regardait un autre effectuer le travail. Etait-ce utile? Il nous semble que l'on se fait beaucoup d'illusions à ce sujet. Plusieurs rôles sont possibles pour l'élève observateur. Prenons deux rôles possibles courants : un élève regarde un autre travailler en vue de faire la même tâche, ou bien en vue de prévoir si celui que l'on observe a réussi ou non. Dans le premier cas, certains enfants prennent cette place comme une place dans une file d'attente. Ces enfants n'ont pas d'engagement, pas de responsabilité dans l'action ou dans la formulation. Dans le deuxième cas, bien souvent l'élève observateur ne peut pas expliquer les raisons d'un éventuel échec. Il répète alors une phrase toute faite : " il a oublié une boîte " et donne alors une (sa) méthode pour " mieux réussir ". Il est rare qu'un élève puisse analyser ce qui a échoué dans la méthode de l'autre.
Un autre type de rôle, par une organisation du travail à deux, permettrait de rencontrer un nouveau problème dans lequel la connaissance interviendrait obligatoirement sous forme d'un langage. Il faudrait pour cela, que l'équipe soit formée pour résoudre une tâche commune. Exemple de fonctionnement possible : consigne " *vous allez travailler à deux. A un moment donné, je demanderai à celui qui a commencé de laisser sa place à l'autre pour qu'il termine. Vous pourrez vous parler. Qui pense pouvoir réussir ?* ". Dans une perspective de travail sur le marquage (jeu 5 : voir ci-après) , l'interruption du jeu pourrait faire intervenir un marquage (un type de marquage, un repérage). Pour cela, il suffirait de préciser dans la consigne si les consignes de passage de relais peuvent s'effectuer par écrit ou oralement.

Cette hypothèse de travail a été reprise par une PE2 qui a mené le travail avec une IMF :
Voici un extrait d'un travail effectué par Véronique Goua de Baix (mémoire de PE2 1997 IUFM Bordeaux) dans la classe de Dominique Bedère (Ecole Paul Lapie Bordeaux).

Un message qui n'a pas permis de comprendre :
Consigne d'E à A : "A, tu mets ça comme ça, d'accord?" et A répond "d'accord". E avait rangé les boîtes pleines en zig- zag (voir photo) et A a cru que c'était les boîtes vides. Il a donc mis une allumette dans les boîtes où il y en avait déjà une.
Alors, pendant qu'A. jouait, un dialogue s'est installé :
E : "ce que j'avais mis ici, c'est ce que j'avais mis ici".



A : "Tu en as déjà mis ici ?"
E : "oui".
A : "J'avais pas compris le jeu".
E : "J'avais oublié de te le dire".
A : "ben, ça y est, il y en a déjà deux. Alors c'est perdu ?".
A s'arrête de jouer en pleine partie et demande de recommencer.

6. NALYSE DU JEU 5 (BOITES BLOQUEES SUR UN PLATEAU):

La construction du dispositif nécessite que l'on prenne en compte plusieurs problèmes :
- les boîtes sont collées sur un tableau véléda.
- On peut ouvrir les boîtes sans être gêné (en vue de la validation).
- La disposition de la collection est choisie sans structure spatiale évidente.

Conséquences sur la complexité, intérêt pour le comptage : reprenons la situation fondamentale de l'énumération, cette fois sous la forme proposée par un logiciel [Briand J., Brousseau G., Oyallon J.L. 1995]. Le logiciel proposait à l'élève de parcourir visuellement une collection de quelques objets. Le pointage (mémorisé par la machine) de chacun des objets inventoriés une fois et une seule est alors la solution du problème posé. Il n'est pas nécessaire d'effectuer une autre action que le seul passage d'un objet à l'autre. A la différence du logiciel, la situation des boîtes d'allumettes, nécessite que l'enfant prenne, à chaque fois, en un lieu précis, les allumettes. Mais les boîtes sont déplaçables. Les élèves mettent ceci à profit pour dépasser la difficulté de la prise des allumettes. Il reste à ne pas commettre d'erreur dans la suite séquentielle allumette-boîte-allumette-boîte, etc. Par contre, la situation des boîtes fixées va créer les ruptures étudiées précédemment. Le marquage ajoute, provisoirement, une difficulté. Dans le cas ou les boîtes sont déplaçables, le contrôle s'exerce par la force des choses puisque la boîte concernée est le plus souvent tenue en main.

7. CONCLUSION

Notre étude portait sur les activités relatives aux collections finies à objets visibles (c'est le contexte de l'acquisition des premiers nombres) ainsi que sur les activités relatives aux collections finies dont il faut définir les objets (c'est le cas des opérations arithmétiques puis de l'analyse combinatoire). Les observations conduites ont montré un champ de recherches à effectuer au niveau de l'école maternelle. Cela concerne l'organisation de situations de formulation provoquant des activités spontanées de logique.
Par ailleurs, le fait que des PE2 aidés par des IMF aient pu s'appuyer sur le travail effectué à l'école Jules Michelet pour modifier des séquences, dont nous savions qu'elles n'avaient pas apporté tout ce que l'on souhaitait, fut très motivant dans l'action de formation initiale.

8. APPENDICE

A la suite de l'étude, décrite plus haut, Le plan suivant a été adopté :

	Configuration	raison des choix.
JEU 1	8 boîtes déplaçables	
JEU 2	8 boîtes déplaçables. 2 élèves. Un qui observe. Tâche interrompue.	Modifier le rôle de l'observateur.
Première phase collective	- Simuler des phases de validation dans le but de faire formuler plus précisément.	faire formuler les stratégies, faire anticiper un résultat
JEU 3	15 boîtes déplaçables. 2 élèves. Le deuxième n'observe pas. Consigne orale du premier au deuxième au moment de la passation de rôle. (vu dans le mémoire).	Faire formuler sur l'énumération et la constitution des collections.
JEU 4	15 boîtes déplaçables constituées de boîtes de différentes formes et de couleurs différentes.	Faire travailler sur les classifications croisées.
JEU 5	15 boîtes non déplaçables. Le deuxième n'observe pas. Traces écrites sur tableau pour le récepteur au moment de la passation de rôle.	Faire formuler, instituer des résultats sur l'énumération et les procédures de marquage.

C'est celui qui a été suivi par la PE2 dont nous avons montré une part du mémoire.

9. BIBLIOGRAPHIE :

BOULE F (1989) *"La construction des nombres"*. Armand Colin. Paris.
BRIAND J. (1985) *" logiciels d'enseignement et situations didactiques "* DEA Bordeaux I.
BRIAND J. (1993) *"L'énumération dans le mesurage des collections "* Thèse Bordeaux I
BRIAND J., BROUSSEAU G., OYALLON J.L. (1995) : logiciel *" A nous les nombres "* Profil ed. PARIS.
BRISSIAUD R. (1989) *"Comment les enfants apprennent à calculer ?"* RETZ, Paris.
BRISSIAUD R. (1991) *"Calculer et compter de la petite section à la grande section"* in Grand N, n°49, Grenoble, CRDP, 1991. 37-48.
BROUSSEAU G (1984) *"L'enseignement de l'énumération"* Congrès C.I.A.E.M. Adélaïde.

BRUN J. (1994) " Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques ".in *"20 ans de didactique des mathématiques en France"* (Artigue, Gras, Laborde, Tavignot) La pensée sauvage.

CHEVALLARD Y. (1997) "Familière et problématique la figure du professeur". *Revue de didactique des mathématiques* Vol 17- 3

CENTENO J. (1992) *"La mémoire du système didactique"* Texte LADIST Bordeaux I.

CONNE F. (1993) "Savoir et connaissance" *Recherches en didactique des mathématiques* : RDM vol 12/2.3 la pensée sauvage Grenoble.

DIGNEAU J.M. (1985) *"le saut informationnel"*. Mémoire de DEA Université Bordeaux I.

EL BOUAZZAOUI H. (1982) *" Etude de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération "* Thèse université Bordeaux I.

FAYOL M. (1985) *"Nombre, numération et dénombrement, que sait-on de leur acquisition ?"*. Revue française de pédagogie, INRP, Paris. 59-77.

FISHER. (1984) *"La dénomination des nombres par l'enfant"* IREM Strasbourg .

FUSON K.C. HALL J.W. *1983 " matching, counting and conservation of numerical equivalence "* Ginsburg ed.

GELMANN & GALLISTEL (1978) *" the child understanding of number "* HARVARD University Press.

GELMAN (1983) "Les bébés et le calcul". *La recherche* n° 14.

GRANNEY CH & PERROT G. (1970) *" Mathématiques et apprentissages du calcul "* Delagrave

GRECO P.& MORF A.(1962) *" Structures numériques élémentaires "* Paris P.U.F.

HARRISON.RATSIMBA-RAJOHN (1982) "Deux méthodes de mesures rationnelles" *Recherche en didactique des mathématiques* R.D.M. vol 3-1 P.65 la pensée sauvage Grenoble.

I.N.R.P. *" un deux beaucoup passionnément "*.

MELJAC C. (1979) *"Décrir, agir, compter"* P.U.F.

PERES J. (1986) *"Construction et utilisation d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle"*. Bordeaux. thèse.

PERES J. (1987) *"Construction et utilisation d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle"*. I.R.E.M. de Bordeaux.

PIAGET J. & SZEMINSKA A. (1941- et éd.67) *"La genèse du nombre chez l'enfant"*. Neufchâtel. Paris. Delachaux et Niestlé.

PIAGET J. (1955) *"de la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent"* PARIS-

PIAGET J. (1975) *"L'équilibration des structures cognitives"*. Paris PU.F.

ROBERT M. (1972) " réflexion sur le programme rénové " in *" La mathématique à l'école élémentaire "* APMEP PARIS.

VERGNAUD G. (1991) "L'appropriation du concept de nombre : un processus de longue haleine." in Bideaud J, Meljac C, et Fischer J.P. (eds). *Les chemins du nombre*. Presses uiversitaires de Lille, Lille, 271-282.

ZIGLON R. (1971) *" mathématiques pour l'élève professeur "*. Hermann. PARIS 1971

Problématiques de calcul : des Egyptiens à la TI 92

Alain Bronner IUFM et IREM de Montpellier

Cette communication est une reprise d'un exposé présenté au Colloque Francophone Européen " Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques " à La grande Motte en mai 1998.

J'ai commencé par présenter une modélisation des problématiques de calcul, pouvant fournir un cadre d'analyse des pratiques de calcul dans différentes institutions. Ce cadre permet la prise en compte des divers moyens de calcul, algorithmes à la main et calculatrices scientifiques et/ou symboliques. Cette modélisation se fonde sur mes recherches sur l'enseignement et l'apprentissage du Numérique (Bronner A., 1997)[1]. Dans le cadre élaboré, j'ai comparé les pratiques de certaines institutions historiques, celles suggérées par les programmes anciens et actuels, et celles pouvant se dégager d'une utilisation d'une calculatrice symbolique comme la TI 92. D'une part, j'ai mis évidence certaines caractéristiques des problématiques de calcul de la calculatrice TI 92, ainsi que ses potentialités et limites, et d'autre part j'ai soulevé certains problèmes mathématiques et didactiques engendrés par l'utilisation de ce type de calculatrices. J'ai ensuite avancé quelques hypothèses didactiques concernant l'intégration des calculatrices symboliques.

Les personnes souhaitant prendre connaissance du contenu complet de l'exposé pourront se reporter aux actes du Colloque Francophone Européen " Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques " de La grande Motte (1998) publié par l'IREM de Montpellier en avril 1999.

---

[1] BRONNER A., 1997, *Etude didactique des nombres réels : idécimalité et racine carrée*, Thèse de didactique, Grenoble

ESSAI D'ANALYSE DES EFFETS D'UN STAGE DE FORMATION CONTINUE EN GÉOMÉTRIE SUR LES PRATIQUES D'ENSEIGNANTS DE L'ÉCOLE PRIMAIRE

Danielle Vergnes Versailles

Plan : Dans cet article, nous présentons une analyse des effets d'un stage de formation continue en géométrie sur les pratiques d'une enseignante.
Il s'agit donc d'une analyse de cas.
Nous préciserons d'abord les cadres théoriques sur lesquels nous nous sommes appuyés.
Nous décrirons ensuite le dispositif de formation et les effets attendus a priori de cette formation sur les pratiques.
Nous expliciterons les outils d'analyse des pratiques des enseignants que nous avons utilisés.
Nous mettrons enfin en regard les effets attendus de la formation avec les pratiques effectives d'une enseignante, ou du moins ce que nous en avons perçu.

I. A LA RECHERCHE D'UN CADRE THÉORIQUE

I.1 Comment notre travail s'insère dans l'ensemble des recherches actuelles

Les recherches en didactique des mathématiques se sont intéressées à la réalité de la classe de mathématiques sous l'angle des rapports entre enseignement et apprentissage d'un contenu donné. Elles ont proposé des modélisations de certains apprentissages, sur certains contenus. Elles ont en particulier produit des ingénieries, scénarios à jouer en classe, permettant de mettre en oeuvre des hypothèses d'apprentissage.

Assez vite le Ministère de l'Education nationale d'une part et des formateurs d'autre part se sont emparés de ces recherches. Le Ministère de l'Education Nationale a d'abord préconisé (à partir des années 80), dans certaines instructions officielles ou au détour des programmes, des démarches inspirées de scénarios du type précédent, puis a inscrit au concours de recrutement des professeurs des écoles une partie de didactique (1992). Des formateurs, quant à eux, avaient introduit des éléments de didactique des mathématiques dans la formation des futurs professeurs d'école bien avant le nouveau concours (1992), et ont évidemment continué depuis.

En fait, bien souvent les formateurs profitaient de ce détour par la didactique pour refaire faire des mathématiques à leurs étudiants, la plupart du temps un peu faibles dans ce domaine.

A Kuzniak[1] a ainsi pu montrer que des formateurs utilisaient dans ce but une stratégie, qu'il a appelé stratégie d'homologie, qui consiste à faire faire aux étudiants des mathématiques de leur niveau mais sous une forme originale, inspirée des recherches en didactique, et pouvant être réutilisée avec les enfants sur d'autres contenus adaptés. Cette forme d'enseignement intéresse les étudiants et par ce biais les amène à refaire des mathématiques.

Tout ceci contribue à une sorte de vulgarisation des recherches en didactique, et notamment à un essai (désir), plus ou moins explicité, de faire passer en classe, via la formation des enseignants, les démarches de type ingénieries didactiques.

Cependant le passage des recherches aux pratiques[2] par des enseignants ordinaires (non encadrés par les chercheurs), n'est pas prévu dans les recherches. Pour les chercheurs, ce passage n'est pas toujours souhaitable ! Le plus important, pour nous ici, est qu'il ne va pas de soi. En effet des conditions sont nécessaires à une bonne transmission des chercheurs aux formateurs et des formateurs aux enseignants de l'école primaire, conditions qui tiennent à une bonne connaissance des hypothèses implicites mises en oeuvre dans les produits proposés, pour permettre aux enseignants de respecter l'esprit et non la lettre des recherches. De plus, il "manque" aussi objectivement des volets entiers aux recherches pour "passer" facilement à la classe. En particulier, les domaines de validité des produits expérimentaux ne sont pas établis, bien des contenus ne sont pas couverts, beaucoup d'ingénieries concernent des séances introductives qui sont développées en détail, sans que rien ne soit indiqué sur la suite de l'enseignement. Par ailleurs on ne sait pas dans quelle mesure il est efficace pour les élèves de "mélanger" plusieurs stratégies d'apprentissage...

Dans cette perspective, tout naturellement, deux nouveaux chantiers, qui ne sont indépendants ni entre eux, ni du chantier de la didactique des mathématiques, se sont ouverts aux chercheurs en didactique des mathématiques : celui du passage des recherches en didactique (ou de certains de leurs produits) à la classe et celui des formations à l'enseignement des mathématiques. Avec, en filigrane aux trois chantiers (didactique, passage à la classe, formations), un problème commun, celui de la description, de l'analyse et même de la formation des pratiques des enseignants en classe.

1.2 Notre contribution à l'élargissement des investigations[3]

Les formateurs d'enseignants du premier degré sont sollicités pour élaborer et mettre en oeuvre des stages de formation continue.

Or la conception de ces stages dépend de deux grandes variables très complexes : à quoi former et comment former. Notre pratique de formateur ne nous a pas semblé comporter suffisamment d'éléments explicites pour éclairer comme nous le souhaitions ces deux questions, d'où le détour par la recherche.

---

1 KUZNIAK A. (1994), *Etudes des stratégies de formation utilisées par les formateurs des maîtres du premier degré*, Thèse Université de Paris VII.

2 "Ensemble des activités de l'enseignant qui aboutissent à ce qu'il met en oeuvre en classe et à ses activités en classe" ROBERT A. (1998), Réflexions sur des recherches didactiques sur la formation professionnelle des enseignants de mathématiques de lycée et collège : cadrage théorique et recherches préliminaires sur les pratiques enseignantes en classe. *Document interne IUFM de Versailles*.

3 Ce travail a débuté par une recherche menée à l'IUFM de Versailles en 95/97 par C. AURAND, C. LARÈRE et D. VERGNES, intitulée "Formation des maîtres du 1er degré à l'enseignement de la géométrie". Cette recherche a fait l'objet d'une communication par C. AURAND et C. LARÈRE au colloque de la COPIRELEM en 1997.

De plus en nous posant la question en terme de recherche, la question de l'évaluation devenait incontournable. Il nous importait de préciser sur quoi reposait le sentiment de "réussite" que nous avions après certains stages, ou l'échec que nous ressentions après d'autres stages.

Nous avons donc élaboré des scénarios de formation continue dans le domaine de la géométrie, en essayant de dégager les hypothèses implicites à nos pratiques de formation[4]. Nous avons expérimenté ces scénarios, et nous les avons partiellement évalués, notamment en essayant de mettre en rapport les hypothèses que nous avions dégagées avec les pratiques que nous avons pues observer en classe, après le stage, chez cinq enseignants.

Nous nous plaçons donc sur le chantier des formations, en empruntant au chantier de la classe ce qui concerne l'analyse des pratiques de nos stagiaires de retour dans leurs classes.

Comme nous l'avons expliqué ci-dessus, pour mener à bien une telle recherche nous avons besoin de nous placer au sein d'un certain cadre théorique, incluant les hypothèses sur lesquelles nous appuyer, cadre qui légitime une manière de découper la réalité et facilite les descriptions débouchant sur des analyses. Or le cadre de la didactique des mathématiques, s'il nous permet d'appréhender ce qui concerne les contenus mathématiques et certains éléments de gestion, nous a paru devoir être complété pour aborder les analyses des pratiques des enseignants en classe et les analyses des formations.

I.3 De quels cadres théoriques disposons-nous pour aborder notre question ?

Deux sources théoriques nous ont permis le nécessaire travail sur le cadrage théorique à mettre en place pour concevoir nos expériences et les interpréter :

- d'une part les travaux sur les pratiques des enseignants en classe, conduits soit par des ergonomes qui considèrent l'enseignant comme un adulte en situation de travail soit par des didacticiens, qui étendent les concepts didactiques à l'étude des pratiques rapportées à ce qu'on attend de l'enseignement ;

- d'autre part, les travaux sur la formation aux pratiques, essentiellement ceux issus de l'ergonomie.

II PROBLEMATIQUE

L'origine de ce travail est un questionnement de formateur :

- Quels effets ont des actions de formation continue sur les pratiques des enseignants dans leur classe ?
- Comment provoquer, par des actions de formation continue, des modifications significatives de leurs pratiques ?

Ces deux questions concernent à la fois la conception et l'évaluation des actions de formation continue.

---

4 Ensemble de ce qui est dit et fait par le formateur au cours d'une formation.

II.1 Conception de la formation continue

Pour concevoir une formation, nous devons en déterminer deux composantes essentielles : les savoirs de référence et les stratégies de formation.

II.1.1 Les savoirs de référence

Nous faisons l'hypothèse qu'une formation professionnelle dont l'objectif est la modification des pratiques doit reposer sur des situations de formation qui intègrent simultanément trois types de connaissances :

- des savoirs[5] savants de nature mathématique, didactique et psychologique.

- des connaissances de type réflexif sur sa propre pratique, c'est à dire l'utilisation des savoirs savants précédents à l'analyse de sa propre pratique en situation effective. Cela suppose qu'une partie de l'expérience professionnelle puisse se "mettre en mots" et se communique, se faisant elle peut se décontextualiser et se dépersonnaliser.

- Mais aussi des connaissances manifestées à travers une organisation invariante de la conduite en situation que nous appellerons gestes professionnels. Ces connaissances ne sont pas toujours explicitables par l'enseignant.

Nous pensons que chacun de ces trois types de compétences est modifié par les autres en interaction. Comme pour beaucoup de connaissances, en particulier pour les connaissances mathématiques, la recomposition ne peut-être "qu'individuelle, privée, intime"[6]. Les situations de formation doivent, elles, être significatives pour chaque enseignant.

II.1.2 Les stratégies de formation

a) Il s'agit de concevoir une formation intégrant des savoirs savants et des savoirs réflexifs sur sa propre pratique.

Nous avons relevé plusieurs stratégies de ce type dans la typologie de Kuzniak (1994).

- Les stratégies dans lesquelles on axe la formation du formé sur la réalisation effective d'une activité proposée dans un document didactique. Le travail s'effectue en doublette (formateur/formé) et s'étale dans le temps en suivant le rythme de la classe dans un jeu de préparation, séance et bilan. Cette stratégie était mise en oeuvre pour former les futurs conseillers pédagogiques dans le cadre des écoles normales.

- Les stratégies dans lesquelles les stagiaires élaborent des séances de classe qui sont réalisées non par eux mais par un maître formateur, démarche préconisée par J. Briand[7].

---

5 "Nous entendons par savoir, une connaissance explicite et partagée mise en mots, tandis qu'une part de la connaissance est expériencielle et difficile à mettre en mots "
BROUSSEAU G. (1991), Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, *Recherche en didactiques des mathématiques vol 11/2.3*, page 176.
6 ROBERT A. (1996), IUFM : Réflexion sur la formation professionnelle initiale des professeurs de mathématiques des lycées et collèges", *Repères-IREM n° 23*, Editions Topiques, p 96.
7 Rapport au savoir, dévolution, institutionnalisation, *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, COPIRELEM, Cahors 1991, p. 105.

b) Pour A. Robert[8], plusieurs conditions, éventuellement disjointes, sont nécessaires pour que des connaissances formalisées se traduisent dans les gestes professionnels :

- la prise de conscience d'un besoin,

- l'émergence d'une conviction (c'est mieux, cela vaut le coup),

- la faisabilité (ce n'est pas trop coûteux - principe d'économie - et c'est suffisamment assuré).

Il nous fallait concevoir un stage où l'enjeu pour les enseignants ne serait pas trop important. Nous pensions qu'ainsi ils pourraient plus facilement prendre le risque de modifier leur pratique. C'est pourquoi nous avons choisi comme contenu l'enseignement/apprentissage de la géométrie. En effet la géométrie n'est pas considérée comme présentant un enjeu essentiel à l'école primaire. Elle a plutôt le statut d'une discipline d'éveil liée aux arts plastiques et à la découverte de l'espace environnant.

Nous avons fait l'hypothèse que c'était un lieu où le poids du métier et des habitudes des enseignants étaient le moins "indurés"[9] et de ce fait nous pourrions plus facilement faire bouger les pratiques professionnelles.

Mais c'est aussi un domaine où les travaux didactiques sont peu nombreux.

II.2 Les effets attendus de la formation sur les pratiques des enseignants

Il n'existe pas de modèle de référence universel pour décider si telle ou telle pratique est une pratique efficace ou non. La seule validation possible consisterait à évaluer l'apprentissage des élèves. Nous n'avions pas les outils pour mettre en oeuvre une telle évaluation. Cependant, la communauté des formateurs propose une norme de ce que pourrait être une bonne pratique professionnelle à l'école élémentaire, ce que nous allons tenter de décrire maintenant en distinguant deux aspects :

- le choix des exercices (avant la séance) ;

- l'animation de la séance (avant et pendant la séance).

Compétences attendues d'un enseignant

a) Le choix des exercices
- L'enseignant identifie les contenus mathématiques et les compétences visées au cours d'une séance.
- Il prévoit une progression dans un projet de plusieurs séances.
- Il choisit une tâche adaptée aux connaissances visées et s'appuyant sur les compétences antérieures des élèves, ce qui suppose qu'il essaie d'anticiper l'activité possible des élèves et qu'il prévoit comment la gérer ; en particulier, il prévoit les aides à apporter aux élèves en difficulté.

---

8 Document interne IUFM de Versailles (1996)
9 CHEVALLARD Y. & JULIEN M (1990/91), Autour de l'enseignement de la géométrie au collège, *Petit X n° 27*.

b) L'animation de la séance

- L'enseignant réalise un déroulement découpé en phases, en assignant un objectif spécifique à chaque phase ;
- Au cours de la phase où il donne le travail à faire, il précise le but à atteindre pour l'élève et donne les critères d'évaluation ; il prévoit ce qu'il va faire pour que les élèves s'approprient la tâche.
- Au cours de la phase de travail des élèves, il laisse du temps aux élèves pour réaliser le travail demandé, sans réaliser la tâche ou une partie de la tâche à leur place ; toutefois, il ne reste pas sans rien faire au cours de cette phase. Le professeur cherche à faire en sorte que le problème posé devienne le problème de l'élève et qu'il se sente responsable de la résolution[10].
- Au cours de la phase de validation du travail des élèves, l'enseignant ne corrige pas lui-même ou ne fait pas corriger par un bon élève mais soit il propose une tâche avec une validation interne, soit il essaie d'organiser un débat (c'est une des phases les plus délicates à gérer même pour les maîtres experts) ;
- Enfin au cours de la phase de synthèse des connaissances qui ont émergé au cours de l'activité, ce que G. Brousseau[10] appelle l'institutionnalisation, il gère le temps pour permettre que ce moment de synthèse ait lieu et d'autre part utilise les connaissances réellement mises en jeu par les élèves au cours de la séance pour élaborer cette conclusion ;
- l'enseignant adapte son déroulement à l'activité effective des élèves, pour cela il doit être suffisamment disponible pour être à l'écoute des élèves et avoir prévu des directions de travail différentes en fonction de leurs réactions.

III METHODOLOGIE

III.1 Le scénario de formation

Le stage de formation continue qui sert de cadre à cette expérimentation est un stage de formation continue proposé au plan d'actions de formation continue sous l'intitulé "Enseigner la géométrie au cycle 3". Il s'est déroulé du 6/03/95 au 1/04/95. Ce stage est à dominante mathématique mais, pour des raisons conjoncturelles et de faisabilité, il est couplé avec les arts plastiques et l'éducation physique et sportive. La partie mathématique s'est déroulée sur 16 séances de 3 heures, la partie arts plastiques sur 10 séances de 3 heures, la partie EPS sur 6 séances de 3 heures.

• Les contenus géométriques abordés sont ceux relatifs à la géométrie plane enseignée au cycle 3 de l'école élémentaire.

• Notre hypothèse de départ est que les compétences (celles qui permettent les pratiques efficaces) se forment dans les rapports entre sujets et situations d'action. Mais il est possible de mettre en rapport de manière efficace les systèmes de pensées issues de l'action et ceux issus d'un savoir formalisé[11]. Il nous fallait donc concevoir un stage avec une partie de pratique effective et une analyse de cette pratique.

---

10 "Nous appelons "dévolution" l'activité par laquelle le professeur cherche à atteindre ces deux résultats" BROUSSEAU G. (1986), Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 7/2, La pensée Sauvage, Editions
10 BOUSSEAU G (1998), Théorie des situations didactiques, La pensée Sauvage, Editions
11 PASTRÉ P. (1995), cité par ROBERT A. dans Réflexions sur des recherches didactiques sur la formation professionnelle des enseignants de mathématiques de lycée et collège : cadrage théorique et recherches préliminaires sur les pratiques enseignantes en classe, *Document interne IUFM de Versailles*.

Nous avons proposé des séances de cinq types différents :

a) deux séances de "monstration". Les formateurs ont préparé, animé et enregistré des séances de géométrie dans des classes. Ces enregistrements ont été visionnés et analysés par les stagiaires. L'objectif est de mettre à jour le processus de conceptualisation de certaines figures géométriques par les élèves. Par exemple :

- Que font les élèves quand on leur demande de construire un carré, un des côtés du carré étant donné ?
- Par rapport à cette tâche, quelle différence y a-t-il entre les procédures de construction utilisées par des élèves de CE2 et des élèves de CM1 ?

b) cinq séances "d'homologie"[12] : les stagiaires résolvent des problèmes de géométrie[13], analysent leur fonctionnement en situation, puis recherchent les modifications à apporter pour que les situations qu'ils viennent de vivre soient transposables au cycle 3.

c) deux séances "d'institutionnalisation" : les formateurs explicitent les concepts et les outils de la didactique et de la psychologie du développement mis en évidence localement au cours de l'analyse des différentes séances ;

d) deux séances d'information sur l'histoire de la formation de certains concepts en géométrie ;

e) cinq séances d'enseignement : les stagiaires conçoivent et réalisent des séances en classe (3 séances en CE2 et 3 séances en CM1).

C'est la partie de la formation innovante par rapport aux pratiques en cours dans les stages de formation continue.

Ces séances en classe élémentaire ont été menées dans des classes d'application avec des élèves habitués à la présence de professeurs stagiaires et d'observateurs dans leur classe. Nous avons choisi de proposer des séances de réinvestissement de notions déjà connues des élèves afin de ne pas entraver la progression de l'enseignant titulaire de la classe.

Les stagiaires ont préparé collectivement 3 séances consécutives de géométrie en CE2 et en CM2. Deux stagiaires, volontaires, ont mené les séances avec les élèves, les autres stagiaires sont présents dans la classe en tant qu'observateurs mais n'interviennent pas auprès des élèves. À l'issue de chaque séance, nous avons réservé un temps d'analyse et un temps de préparation de la séance suivante.

---

11 KUZNIAK A. (1994), *Etudes des stratégies de formation utilisées par les formateurs des maîtres du premier degré,* Thèse Université de Paris VII.

12 Reproduction, construction de figures complexes à l'aide des instruments usuels, construction de figures à l'aide du logiciel Cabri-géomètre, jeux du portrait sur des polygones, réalisations de messages pour faire construire des figures.

13 Reproduction, construction de figures complexes à l'aide des instruments usuels, construction de figures à l'aide du logiciel Cabri-géomètre, jeux du portrait sur des polygones, réalisations de messages pour faire construire des figures.

Nous souhaitions que les formateurs interviennent peu au cours de l'élaboration des séances, leur rôle devait se limiter à la gestion du groupe de stagiaires mais non au choix des contenus et de la gestion des séances. La préparation de ces séances d'enseignement a été assez difficile. Les stagiaires ne sont pas habitués à échanger avec d'autres enseignants sur leurs choix didactiques et leurs stratégies de gestion de classe. Pour leur faciliter l'analyse de la situation qu'ils proposaient, les formateurs ont interrogé les stagiaires :

1 Sur les objectifs

Nous leur avons demandé :

- d'expliciter la notion mathématique dont l'apprentissage est visé à long terme ;
- d'expliciter les éléments spécifiques de cette notion visés dans la séance et au bout des 3 séances.

2 Sur le choix de la situation

Nous leur avons demandé :

- d'expliciter la tâche de l'élève (consigne, but pour l'élève, matériel dont l'élève dispose) ;
- d'analyser les connaissances que les élèves devront mobiliser pour réaliser la tâche et vérifier l'adéquation de la tâche avec l'objectif visé ;
- la validation prévue ;
- sur quoi porterait l'institutionnalisation ;
- les aides éventuelles à apporter pour permettre à tous les élèves d'entrer dans l'activité.

3 Sur la prévision du déroulement de la situation

Nous les avons interrogés sur :

- le type de gestion de classe envisagé (travail individuel, en groupe, collectif)
- le travail de l'enseignant pendant les différents moments de la séance.

Pour analyser a posteriori la séance, nous avons choisi comme outil les techniques mises en oeuvre dans les entretiens d'explicitations[14]. Nous avons demandé à l'enseignant qui avait mené la séance d'expliciter ses différentes actions et celles des élèves en reprenant l'ordre chronologique, puis nous lui avons demandé de comparer la prévision de séances telle qu'elle avait été faite collectivement et ses décisions propres dans l'action, en tentant d'expliciter les raisons de ses décisions.

Ce travail d'analyse s'est heurté à plusieurs difficultés :

- verbaliser une action n'est pas habituel, ce qui vient en premier, spontanément, ce sont plutôt des jugements, des commentaires, des généralités ;
- l'action contient beaucoup de savoir-faire en actes, c'est à dire automatisés;
- une autre difficulté est celle de la mémoire et de la qualité du rappel des faits.

14 VERMERSCH P. (1994), *L'entretien d'explicitation en formation initiale et en formation continue*, ESF.

De plus le fait d'être questionné sur sa pratique est vécu par l'enseignant et ses collègues comme un jugement porté a priori. Les autres stagiaires présents au cours de la séance s'en tiennent à des appréciations positives et très générales sur la gestion de la séance : *"ça s'est bien passé, les élèves ont été très actifs"*.

En revanche, ils analysent de manière très fine les tâches réalisées par les élèves.

III.2 Outils pour analyser les pratiques

Nous avons analysé trois séances, dans des classes de niveaux différents (CE2, CM1 et CM2) et avec cinq enseignants différents. La première et la deuxième séances se sont déroulées environ 6 mois après le stage, la troisième séance s'est déroulée environ 18 mois après le stage. La première et la troisième séances ont porté sur la géométrie, la deuxième séance a porté sur un contenu numérique. Nous souhaitions pouvoir comparer les pratiques des enseignants dans un domaine abordé pendant le stage avec un autre domaine d'enseignement des mathématiques.

Ces séances ont été enregistrées au magnétophone, puis elles ont été transcrites. Nous avons relevé la fiche de préparation élaborée par le maître. Chacune de ces séances a été suivie d'un entretien avec l'enseignant. L'entretien, de type entretien d'explicitation[15], a porté sur le contenu de la séance. Ces entretiens ont été décryptés.

1 A partir de la transcription de la séance et de l'écoute de la bande, une première analyse est menée pour déterminer le scénario global de la séance, et en étudier le déroulement (analyse a posteriori). On découpe la séance en épisodes, chaque épisode étant défini, si possible, par une seule activité des élèves, activité déterminée par une tâche particulière prescrite par l'enseignant à ce moment-là. Un épisode[16] pour nous est un découpage a posteriori du protocole d'observation contenant un début, un déroulement et une fin.

2 Nous avons procédé à l'analyse du contenu mathématique de la séance. Pour cela nous avions deux entrées :

- d'une part les intentions du maître manifestées dans sa fiche de préparation et au cours de l'entretien qui suit la séance ;

- d'autre part ce que nous pouvions en percevoir à partir des consignes ou des exercices effectivement donnés par le maître dans la classe.

2.1 Nous avons tenté de repérer la tâche prescrite par l'enseignant, c'est à dire la consigne de travail décrite dans le vocabulaire de la discipline envisagée[17] ou encore ce qui est pour les ergonomes[18] une prescription écrite des procédures concernant le travail.

15 VERMERSCH P. (1994), *L'entretien d'explicitation en formation initiale et en formation continue*, ESF.
16 MARGOLINAS C. (1993), *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, La pensée Sauvage p 74.
17 ROBERT A. (1997), *Cahier de DIDIREM n° 28*
18 ROGALSKI J., Propos tenus au séminaire INRP Juin 1997.

2.2 Nous avons ensuite repéré la tâche attendue par nous formateur et par l'enseignant.

Pour A. Robert[19] les tâches attendues par l'enseignant sont celles qui mobilisent les activités des élèves, activités préjugées grâce à des analyses cognitives des tâches prescrites, plus précisément ce que l'enseignant suppose que la tâche prescrite va mobiliser comme activités chez l'élève. L'activité de l'élève est la partie immergée de l'iceberg : c'est à dire l'ensemble des connaissances qu'il met en oeuvre pour réaliser la tâche prescrite.

E. Bautier, J.Y Rochex[20] estiment que les tâches prescrites ne couvrent pas tout ce qui est en jeu dans les activités cognitives attendues de l'enseignant. Les bons élèves seraient ceux qui identifient (au moins en actes) les activités intellectuelles nécessaires à la tâche prescrite, mais nécessaires en termes d'apprentissage, et non pas en termes de simple effectuation de la tâche (souvent contenue, elle, dans la consigne), activités intellectuelles qui "débordent" donc la prescription.

Pour cerner la tâche attendue par le maître nous disposons de trois corpus : les objectifs ou compétences décrits dans sa fiche de préparation, les relances que l'enseignant propose dans le cadre de la séance, ce qu'il dit au cours de l'entretien que nous menons à l'issue de la séance.

Nous avons recherché si la tâche prescrite aurait pu être intégrée, moyennant certains aménagements, dans une situation a-didactique.

2.3 Enfin nous avons tenté d'identifier les tâches effectives des élèves dans chaque épisode.

Pour J. Rogalski[21], la tâche effective, c'est ce qui est en oeuvre du côté de l'élève, en particulier la succession des sous-buts qu'il se donne pour réaliser la tâche prescrite.

Nous avons alors fait une première mise en regard : tâche effective des élèves et tâches attendues par l'enseignant.

Nous avons repéré s'il existait des décalages entre la tâche attendue par le maître et la tâche effective des élèves, du moins ce que nous pouvions en percevoir.

2.4 Nous avons repéré les modes d'ajustement ou de non-ajustement enseignant-élèves dans l'interaction pédagogique.

M. Altet[22] définit ainsi ce concept, descripteur des pratiques : "*La manière de prendre en compte les réactions des élèves dans les interactions, son type réactionnel, sa façon de s'adapter aux apprenants ou non à leurs réactions.*"

Elle met ainsi en évidence de possibles décalages à différents niveaux de fonctionnement.

---

19 *Cahier de DIDIREM n° 28*, Mars 1997.
20 E. BAUTIER, J.Y ROCHEX (1997), Apprendre des malentendus qui font la différence dans *La scolarisation de la France, critique sur l'état des lieux*, Editions La Dispute.
21 Propos tenus au séminaire INRP 3 Juin 1997.
22 ALTET M. (1994), *La formation professionnelle des enseignants*, PUF.

3 Puis nous avons analysé la mise en oeuvre de la séance et nous avons repéré, quand cela était possible, différentes phases par exemple :

- la phase où le maître présente aux élèves la tâche qu'ils vont avoir à faire ;
- la phase où les élèves réalisent la tâche prescrite par le maître ;
- la phase de mise en commun-correction ;
- la fin de la séance.

3.1 Nous avons recherché si on pouvait repérer un processus[23] de dévolution : c'est à dire comment le maître s'y prend pour que le problème qu'il communique aux élèves devienne le problème (au sens mathématique du terme) de l'élève[24]. En particulier nous avons recherché comment se faisait la répartition des responsabilités, et les changements dans cette répartition ; autrement dit ce qui va scander la dévolution et la reprise de la classe par le maître.

3.2 Nous avons tenté de repérer s'il existait des moments a-didactiques[25].

3.3 Nous avons analysé le mode de gestion de la phase : mise en commun-correction
Au cours de cette phase nous avons recherché comment les élèves ont des informations sur la validité de leur travail. Nous avons cherché à repérer l'attitude du maître dans cette phase : il peut délivrer directement un jugement sans appel sur l'activité de l'élève[26], le maître peut aussi organiser le milieu de telle manière que l'élève puisse décider lui-même de la validité de son travail[27].

3.4 Nous avons regardé si à la fin de la séance on pouvait repérer une phase d'institutionnalisation, c'est à dire :

> ". ... ce que font les maîtres à longueur de cours... ils doivent prendre acte de ce que les élèves ont fait, décrire ce qui s'est passé et qui a un rapport avec la connaissance visée, donner un statut aux événements de la classe, comme résultats des élèves et comme résultats de l'enseignant assumer un objet d'enseignement, l'identifier, rapprocher ces productions des connaissances des autres (culturelles, ou du programme)..."[28]

IV UN PREMIER BILAN A PARTIR D'UN CAS INDIVIDUEL

IV. 1 Les tâches prescrites

Séance 1 : géométrie (6 mois après le stage)

Tâche prescrite au début de la séance

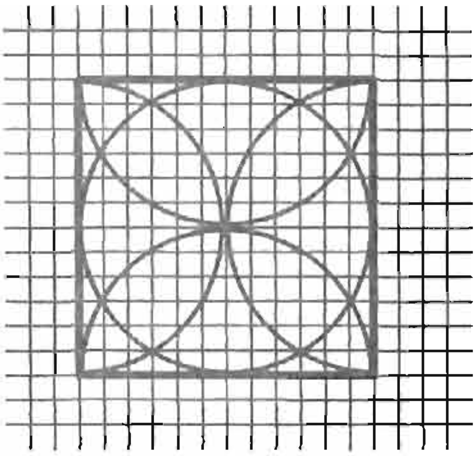
Martine distribue aux élèves au début de la séance deux feuilles à trame quadrillée (1cm x 1cm).

---

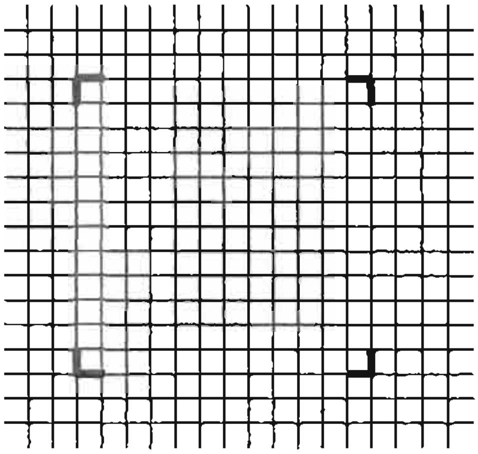
23 Le petit Robert " processus : ensemble de phénomènes, conçu comme actif et organisé dans le temps".
24 MARGOLINAS C. (1993), *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, La pensée Sauvage p 38.
25 C'est-à-dire un moment qui peut-être vécue par l'élève en tant que chercheur d'un problème mathématique, indépendant en ce sens de l'intention du maître.
26 Ce que C. MARGOLINAS (1993) appelle phase d'évaluation.
27 Ce que C. MARGOLINAS (1993) appelle phase de validation.
28 BROUSSEAU N. & BROUSSEAU G. (1987), *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, Publication de l'IREM de Bordeaux.

Sur la première feuille est dessinée une figure géométrique composée d'un carré, d'un cercle inscrit dans le carré et de quatre demi-cercles, intérieurs au carré, dont les centres sont situés au milieu des côtés du carré et dont les diamètres correspondent à la longueur d'un côté du carré.
Sur la deuxième feuille, les sommets du carré sont reportés sur des noeuds du quadrillage.

(croquis à une autre échelle)



Feuille 1



Feuille 2

Les enfants doivent :

- Reproduire la figure de la première feuille sur la deuxième feuille.
- Vérifier leur reproduction, à l'aide de transparents sur lesquels la figure est photocopiée.
- Expliciter, à leurs camarades, la méthode qu'ils ont utilisée pour reproduire la figure.

Tâche prescrite à la fin de la séance

Reproduire cette figure (feuille 1) en plus petit.

Séance 2 : numérique (6 mois après le stage)

Tâche prescrite au début de la séance

C'est une variante du jeu de l'oie qui sert de support à cette leçon :

- La piste est numérotée de 1 à 46.
- Le dé comporte les configurations classiques de 1 à 6.
- Les cases dont le chiffre des unités est 9 sont coloriées en vert, et les cases dont le chiffre des unités est 4 sont coloriées en bleue. Les autres cases sont blanches.

Le jeu consiste à lancer le dé et à avancer d'autant de cases qu'il y a de points sur le dé. Les cases vertes et bleues sont des cases pièges : lorsqu'on tombe sur une de ces cases, on recule de 5 cases pour les bleues et de 12 cases pour les vertes. C'est un jeu, il y a donc un gagnant : celui qui atteint la case 40 ou la dépasse.
Les élèves jouent par deux. Ils doivent noter sur une feuille le déroulement de leur jeu.
Ils auront ensuite à contrôler entre eux, les déroulements des parties.

Tâches prescrites à la fin de la séance

Le schéma d'un déroulement de partie de jeu de l'oie est reproduit, les faces du dé sont dessinées, ils manquent des cases d'arrivée à la fin du jeu. Les élèves doivent retrouver ces cases d'arrivée.

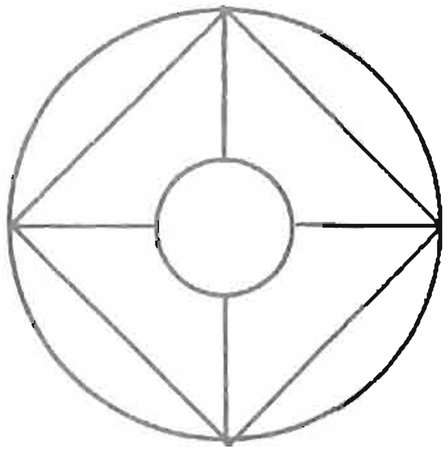
Les différentes faces du dé d'un joueur sont dessinées, les élèves doivent retrouver les numéros des cases sur lesquelles le pion de ce joueur s'est arrêté.

Séance 3 : géométrie (18 mois après le stage)

Tâche prescrite au début de la séance

Martine distribue deux feuilles aux élèves.
Sur la première de ces feuilles qui n'est pas quadrillée, est dessinée une figure composée de deux cercles concentriques, et d'un carré inscrit dans le cercle le plus grand. Les portions de diagonales du carré comprises entre les deux cercles sont signalés par un segment vertical et un segment horizontal par rapport à la feuille.

(croquis à une autre échelle)



Le rayon du petit cercle mesure 2 cm, le rayon du grand cercle mesure 7 cm. La mesure du côté du carré ne correspond pas à un nombre entier de centimètres.
La deuxième feuille est à trame quadrillée (1cm x 1cm), il n'y a aucun dessin.
Les enfants doivent :

- Reproduire la figure sur la feuille à trame quadrillée (1cm x1cm).
- Ecrire les étapes de la reproduction.
- Vérifier leur reproduction, à l'aide de transparents sur lesquels la figure est photocopiée.

Tâche prescrite à la fin de la séance

Reproduire cette figure en plus petit.

IV.2 Mise en regard de la pratique effective de l'enseignant et de la pratique attendue par le formateur

Choix des exercices

Martine propose à ses élèves des formes géométriques complexes à reproduire, mais elle s'arrange pour en réduire considérablement la complexité (présence de trames quadrillées).

Explicitation de ses choix avant la séance

Dans sa fiche de préparation, Martine décrit les objectifs sous la forme de tâches à réaliser aux enfants. Elle n'explicite pas les connaissances nouvelles qu'elle veut faire construire ; elle ne dit rien à propos des connaissances anciennes sur lesquelles les élèves peuvent s'appuyer.

Elle n'écrit pas son projet de progression dans sa fiche de préparation.

Explicitation de ses choix après la séance

Au cours de l'entretien, Martine dit qu'elle visait au cours de ces séances l'acquisition du vocabulaire de géométrie expert. Elle pense que les élèves devaient l'utiliser spontanément au cours de l'explicitation des reproductions.

Elle pense qu'elle n'a pas atteint cet objectif et envisage de demander aux élèves de dessiner des figures géométriques particulières : "*Maintenant, il faudrait que je réinvestisse davantage, par exemple je vais leur faire faire des constructions, je vais leur demander, tracez-moi un cercle de 10 cm de diamètre, voilà.*"

Martine semble ainsi distinguer deux niveaux dans l'utilisation du vocabulaire géométrique :

- D'une part, le comprendre quand il est utilisé par un tiers (vocabulaire mobilisable) ;
- D'autre part, l'utiliser spontanément dans l'action (vocabulaire disponible).

Elle visait le deuxième niveau, les situations qu'elle a choisies ne lui ont pas permis de l'obtenir. Elle envisage alors de proposer une tâche du premier niveau, mais elle n'a pas conscience qu'il ne s'agit plus de la même conceptualisation pour les élèves.

Il y a un décalage entre d'une part la géométrie que Martine voudrait que les élèves s'approprient c'est à dire essentiellement leur faire utiliser le vocabulaire géométrique expert pour expliciter leur reproduction et d'autre part la situation qu'elle propose, situation qui permet la reproduction d'objets géométriques sans nécessiter l'explicitation des propriétés de ces objets ni l'utilisation d'un vocabulaire spécifique. Cela correspond au cours de la séance à de nombreux décalages[29] sur le plan cognitif entre Martine et les élèves.

---

29 "Le décalage des questions traduit l'autre décalage notable sous-jacent sur le plan cognitif qui se situe au niveau du raisonnement : l'enseignant suit son raisonnement, oriente, tire l'élève vers son raisonnement sans prendre en compte le raisonnement de l'élève, ... d'ou un dialogue souvent difficile ou l'élève suit pas à pas le raisonnement de l'enseignant sans en avoir le fil directeur."
" .. la pensée des élèves suit le cheminement intellectuel de l'enseignante qui les conduit comme elle l'entend, ou elle veut, même si cela ne semble pas la logique la plus simple pour l'élève. D'autres approches étaient possibles que le professeur n'autorise pas."
M. ALTET (1994), *La formation professionnelle des enseignants*, PUF, page 99 et suivantes.

Nous avions au cours du stage analysé les effets d'un changement d'échelle dans une reproduction. Martine a retenu l'idée et propose, en fin de séance, la reproduction de la figure à une échelle différente du modèle. Elle a conscience que cette tâche est plus difficile mais elle ne peut expliquer en quoi elle est plus difficile. L'analyse qu'elle fait de cette tâche au cours de l'entretien semble nous montrer qu'elle n'a pas perçu les effets de cette variable sur l'activité des élèves.

Au cours du stage Martine prend conscience de l'intérêt de préparer sa classe en pensant à la situation de l'élève et non plus seulement à ce qu'elle doit faire comme enseignante.
Elle dit au cours de l'entretien qu'avant le stage elle abordait la géométrie en montrant aux élèves des procédés de construction qu'ils avaient à refaire ensuite.

Après le stage elle propose des figures complexes à reproduire. Elle manifeste ainsi qu'elle veut s'appuyer sur leur savoir ancien, toutefois elle s'arrange pour en réduire la complexité, ce qui semble montrer qu'elle n'est pas assurée dans cette nouvelle démarche.

Martine semble ainsi prise entre deux conceptions qui pour elle sont contradictoires et qu'elle n'analyse pas encore. Dans sa conception ancienne : enseigner la géométrie, c'est avant tout apprendre aux élèves à utiliser un langage géométrique expert. Dans la nouvelle conception apparue au cours du stage et qu'elle expérimente avec ses élèves, apprendre la géométrie, c'est se confronter à des problèmes de reproduction de figures géométriques et ce faisant, se poser des questions d'ordre géométrique pour mener la tâche à son terme.

Découpage prévu

Martine montre dans sa prévision de séance et au cours de la réalisation effective de la séance qu'elle a intégré un déroulement temporel en phases : phase d'action, de validation, d'explicitation et de confrontation des procédures.

Déroulement

Dans le même temps où elle donne la **consigne**, Martine donne des indications qui sont des éléments de résolution.

Au cours de la phase de **recherche des élèves** (par groupe de deux), Martine interroge les élèves individuellement sur leur travail et adresse très fréquemment, à toute la classe, les commentaires destinés au travail particulier de l'élève interrogé. De ce fait, il nous semble que les élèves les moins assurés ne peuvent investir leurs connaissances propres, ils sont détournés de leur travail par les commentaires de la maîtresse.

Bien que Martine n'ait pas de problèmes de gestion de classe, sa classe "tourne", elle semble vouloir montrer en parlant à voix haute de façon permanente tout au long de la séance qu'elle est toujours présente. Ce n'est que dans les dix dernières minutes que Martine laisse les élèves chercher seuls, sans aide et sans intervention de sa part.

Elle a découvert au cours du stage qu'il peut y avoir des moyens de **validation** autre que l'évaluation classique du travail par le maître :

"Ils ont validé avec les transparents, ça leur plaît toujours d'aller valider, ça je ne le faisais jamais, je ne connaissais pas le transparent, il a fallu que je vienne en stage pour l'apprendre."

Martine demande aux élèves d'**expliciter leurs méthodes** ; ces explicitations se passent entre deux élèves et le maître. Lorsque le vocabulaire utilisé par les élèves interrogés ne correspond pas au vocabulaire attendu par Martine, elle s'adresse à nouveau à toute la classe.

Mais Martine et les élèves ne parlent pas de la même chose. Les élèves décrivent les actions qu'ils ont menées pour réaliser la reproduction de figure : compter les carreaux pour repérer les points sur le quadrillage par exemple. Alors que Martine attend un langage géométrique lié à des concepts et des propriétés tout en utilisant elle-même les deux registres de langage quand elle s'adresse aux élèves, celui de l'action et celui de la géométrie. Martine enchaîne alors une série de questions auxquelles les élèves répondent en tentant de deviner ce qu'elle attend. Finalement c'est le plus souvent Martine qui donne elle-même la réponse qu'elle cherchait à obtenir des élèves.

La phase de mise en commun se transforme alors en une correction-formulation dans laquelle l'enseignant pointe et rectifie ce qui représente pour elle des erreurs de vocabulaire.

Il n'y a pas de phase de **synthèse**. A la fin de la séance Martine propose une nouvelle tâche aux élèves.

Evolution entre les séances 1 et 3

Ce qui a évolué

Le dessin donné à reproduire au cours de la séance 3 est plus complexe que celui donné au cours de la séance 1 (il est donné sur une feuille non quadrillée de plus les élèves doivent rechercher le centre d'un cercle).

Martine ajoute une consigne supplémentaire au cours de la séance 3 : la rédaction des étapes de construction ce qui incite les élèves à utiliser du vocabulaire géométrique.

Martine fait une prévision partielle de ce que vont faire les élèves.

Ce qui n'a pas évolué

Martine continue à se centrer principalement sur l'utilisation du vocabulaire de géométrie. Elle procède par questionnement au cours de la mise en commun. Les décalages entre les réponses qu'elle attend des élèves et les réponses des élèves sont très nombreux. Elle ne fait pas des gestes techniques de base pour la gestion de la mise en commun, comme par exemple donner aux élèves de grandes feuilles et des feutres pour communiquer les étapes de la construction.

Elle reste omniprésente, en s'adressant collectivement à tous les élèves, tout au long des séances.

Il n'y a pas de bilan à la fin de la séance.

IV.3 Effets de formation

Ce qui semble stabilisé

Martine a choisi de nous montrer au cours des 3 séances des situations d'action avec une validation interne. Elle demande aux élèves, à chaque séance, d'expliciter leurs procédures.

Sa conception de l'enseignement de la géométrie a changé :

"Ce qui s'est passé par rapport au stage en formation continue, c'est que ma pédagogie a totalement changé, c'est positif parce que premièrement je prends du plaisir à faire de la géométrie, je m'amuse, je pense que les enfants aiment bien. Mon programme je l'ai complètement bouleversé, j'ai des projets d'arts plastiques et je greffe ma géométrie dessus. ... les autres années je démarrais tout bêtement par les segments, les droites, les demi-droites, etc. Je donne une plus grande part de découverte à l'enfant, alors que j'étais très directive avant."

Ce que Martine dit correspond en partie à ce que nous avons vu au cours de la séance. Elle a manifesté du plaisir à faire son travail au cours de cette séance.

Ce qui semble en cours d'organisation (contradictions)

Des contradictions apparaissent dans les actes et témoignent d'une réorganisation des gestes professionnels que nous pouvons penser encore peu stabilisée. Les situations choisies ne correspondent pas aux objectifs d'apprentissages qu'elle s'est fixés. Le matériel nécessaire à la phase de mise en commun collective n'est pas prévu.

On observe des gestes professionnels nouveaux :

- une pédagogie davantage centrée sur l'apprentissage, Martine fait chercher les élèves,
- une pédagogie qui ne part plus du simple pour aller au complexe,
- une pédagogie qui distingue l'évaluation menée par l'enseignant et la validation opérée par les élèves (utiliser un transparent pour la validation individuelle).

Ces gestes coexistent avec des gestes professionnels plus anciens :

- vouloir aider les élèves en commentant la situation à leur place,
- donner la priorité à l'acquisition du vocabulaire géométrique du programme[30].

Martine a un objectif en entrant en classe cet objectif est très global : faire reproduire des figures géométriques aux élèves et leur faire expliciter leurs tracés en utilisant un vocabulaire expert. Elle a analysé au cours du stage l'activité des élèves en train de réaliser une tâche. Elle en a mesuré la richesse et la complexité. Elle souhaite en tenir compte pour mener sa séance mais dans l'action, elle ne peut comprendre et donc pas gérer la multitude d'informations qui lui arrive. Elle reste dans sa position de maître qui enseigne et n'arrive pas encore à y intégrer l'élève qui apprend.

On peut tenter d'expliquer qu'elle soit ainsi démunie par le fait que le savoir qu'elle enseigne est assujetti à la liste des notions décrites dans les programmes. Les niveaux de conceptualisation de ces notions, attendus des élèves, n'y sont pas explicités et l'articulation enseignement /apprentissage de ces notions est loin d'être modélisée de manière stable et accessible pour les enseignants dans les ouvrages qui leur sont destinés.

---

30 "un adulte qui transmet une notion à un enfant croit qu'avec le mot il communique un concept (parce que pour lui concept et mot coïncident), alors que l'enfant n'assimile qu'un pseudo-concept , c'est à dire une entité qui a la forme d'un concept, mais qui ne fonctionne pas comme un concept."
PASTRÉ P. (1994), Variations sur le développement des adultes et leurs représentations, *Education permanente* n° 119.

La réflexion que nous avons menée au cours du stage l'a sans doute déstabilisée. Elle lui a permis de pointer un manque dans sa pratique antérieure, elle lui a fait prendre conscience de la distinction entre enseignement et apprentissage des élèves, mais elle ne lui a pas permis de se construire une nouvelle pratique intégrant les différents aspects qui ont été abordés. Elle semble s'être appropriée certains éléments (faire chercher les élèves, proposer des figures complexes, donner des moyens de validation, ...). Mais sur d'autres points en particulier sur le plan des connaissances visées, il semble y avoir un conflit entre ce qu'elle a toujours pensé, et ce qu'elle commence à entrevoir.

Ce stage de formation continue de 4 semaines au cours desquelles 16 séances de 3 heures ont concerné l'enseignement /apprentissage des mathématiques aboutit à une prise de conscience et à l'émergence d'une conviction pour cette enseignante. Par contre ce temps de formation est trop court pour lui permettre d'inscrire dans sa pratique cette approche de l'enseignement de la géométrie des figures planes.

EPISTEMOLOGIE ET DIDACTIQUE : UN EXEMPLE DE CADRE CONCEPTUEL POUR ANALYSER L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE

Catherine HOUDEMENT, Alain KUZNIAK

Résumé
Dans cet article, nous présentons nos réflexions sur l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. Nous nous interrogeons notamment sur le sens et la cohérence de cet enseignement. Nous proposons de fonder cette cohérence sur une approche épistémologique de la nature de la géométrie et des relations entre la géométrie et la notion d'espace.
L'article présente notre cadre théorique et des exemples d'usage de ce cadre.

I POSITION DU PROBLEME.

I.1 Un vieux débat

L'enseignement de la géométrie a toujours tenu une place à part dans l'édifice des mathématiques. Il a suscité des polémiques sur sa nature et ses formes d'enseignement, et cela non seulement chez les spécialistes des mathématiques, mais même dans les sphères politiques responsables des contenus d'enseignement.
Illustrons notre propos par un débat à la chambre des députés le 29 avril 1833, entre M.Guizot, ministre de l'instruction publique, et d'autres députés, débat qui porte sur la rédaction des contenus de l'instruction primaire et primaire supérieure. Des avis différents se manifestent d'une part sur la nécessité d'un enseignement des éléments de la géométrie aux instituteurs et d'autre part sur la différence entre dessin linéaire[1] et éléments de géométrie (au sens d'Euclide). Le débat oscille entre la nécessité d'enseigner les fondements avant de passer aux applications pratiques (les tracés) ou bien l'enseignement préalable des savoir-faire pratiques, accessibles à tous, pour garder l'enseignement des fondements pour plus tard (éventuellement). Notons ces deux citations :
" Les éléments de géométrie sont le principe, le dessin linéaire n'est que l'écriture de la géométrie ; il faut dire éléments de géométrie, dessin linéaire, arpentage et autres applications " (M de Tracy, député).
" Le dessin linéaire ne suppose pas la connaissance de la géométrie, c'est une chose purement mécanique ; l'on interdit même aux enfants qui apprennent le dessin de se rendre compte de ce qu'ils font ". (M de Laborde, député).

[1] Dessin linéaire : tracé aux instruments des lignes droites, des parallèles, des perpendiculaires, des courbes, des figures, des polygones inscrits ; division des lignes ; solides, usage de l'échelle, perspectives...Le tout sans essai de fondement, ni de justification théorique

Un autre débat met particulièrement en scène la géométrie. Doit-on enseigner des éléments de raisonnement (et donc des éléments de géométrie) aux enfants du peuple et à leurs enseignants issus des mêmes milieux sociaux ? Ou doit-on seulement leur enseigner des savoir-faire pratiques liés à l'arpentage ou aux problèmes concrets de mesure de l'époque ? Témoin de ces hésitations, la géométrie disparaîtra de l'enseignement en France (loi Falloux 1850) pour réapparaître quelques années plus tard.

I.2 Aujourd'hui

Les mêmes oppositions réactualisées s'exercent sur la formation actuelle en géométrie des professeurs d'école et rendent cette formation particulièrement problématique.
En effet on assiste à ce niveau à un phénomène de double évacuation de la géométrie :

- La tendance concrète tend à réduire la géométrie à une appropriation de connaissances spatiales basées sur la manipulation de différents matériels. Les objets de cette géométrie sont situés dans le monde 1 de Popper K. (1972), celui des objets physiques et matériels.
- La tendance abstraite fait évoluer la géométrie (des mathématiques en général) vers une étude des structures (groupe, espace vectoriel, programme d'Erlangen de Klein 1872) et regroupe des secteurs "anciens" par analogies structurales ; dans cette conception, la géométrie élémentaire n'existe plus en tant que telle ; elle n'est plus qu'une partie de l'algèbre linéaire. Or l'algèbre linéaire n'est pas un objet d'étude mathématique de l'école (ni des professeurs d'école). Cette fois, il s'agit clairement d'une géométrie insérée dans le monde 3 de Popper, celui des figures idéales et des théories.

La première difficulté de l'enseignement de la géométrie aux professeurs d'école provient des différentes conceptions de la géométrie qui apparaissent au cours de la formation des étudiants. Nous reviendrons sur cette question mais nous pouvons affirmer grossièrement que nos étudiants, avant leur entrée à l'IUFM ont généralement suivi des cours de géométrie de " type Lycée ou Université "et auront à enseigner une géométrie de type différent, pour faire bref disons de " type école ".
Le second problème est celui de la définition et même de l'existence de cette géométrie de " type école ", compte tenu du rôle du raisonnement dans l'enseignement. Certains auteurs pensent que sans démonstration, il n'y a pas de géométrie ; or les capacités de l'élève de l'école ne lui permettent pas d'accéder à cette maîtrise bien calibrée du raisonnement. Donc la géométrie de l'école n'est au mieux qu'un ensemble de recettes (... de la cuisine !).
Les conséquences de ces conceptions vont se faire sentir dans les centres de formation (I.U.F.M.) des enseignants. En effet, s'il n'y a pas de véritable géométrie à l'Ecole Elémentaire, faut-il continuer à enseigner la géométrie en formation des maîtres du premier degré ? De même si la géométrie de l'école se réduit à un ensemble de recettes, ne vaut-il pas mieux laisser les futurs maîtres faire leur propre cuisine et restaurer le vieux clivage entre dessin linéaire et éléments de géométrie ?

II UN EXEMPLE DE CADRE CONCEPTUEL.

Il nous semble qu'une grande partie de la confusion qui règne dans l'enseignement autour de la géométrie résulte de la diversité de points de vue qui renvoient finalement à des

conceptions et à des approches méthodologiques différentes. Or, dans une perspective de formation d'enseignants il est nécessaire de s'interroger : "*pourquoi faire de la géométrie ?*" et "*pourquoi faire faire de la géométrie ?*". Cela suppose un détour épistémologique mais ce détour peut envisager de multiples chemins. Dans le cadre de notre étude qui concerne des enseignants apprenant les mathématiques pour les enseigner ensuite à des élèves, il nous semble important de privilégier les approches épistémologiques qui valorisent la relation entre le sujet et l'objet de connaissances.
Nous avons choisi comme première approche des problèmes posés précédemment d'utiliser les travaux de Ferdinand Gonseth en les interprétant en fonction de notre position de formateur d'enseignants.
Gonseth est né en 1890 dans le Jura bernois et est mort à Lausanne en 1974. C'est un mathématicien, contemporain de Piaget (1896-1980) qu'il a côtoyé et dont il a dit :"Piaget n'a aucun sens des mathématiques. Tout ce qu'il en dit, c'est moi qui le lui ai appris ...". Gonseth a été presque aveugle assez jeune. Il a été Professeur à l'école polytechnique de Zurich. Il a également formé pendant deux ans des enseignants, ce qui a donné naissance à son ouvrage *Les fondements des mathématiques* (1926 Editions Blanchard). Il est surtout connu pour ses écrits en philosophie des sciences. Parmi ses autres ouvrages traitant de la géométrie citons notamment :

1936 *Les mathématiques et la réalité*, Editions Blanchard

1945-1955 *La géométrie et le problème de l'espace* , Editions du Griffon, Lausanne

Un colloque a été consacré en 1990 à Gonseth dont les actes sont parus sous le titre suivant :

1992 *Espace et horizon de réalité*, colloque sur GONSETH, par Panza et Pont, Editions Masson

Gonseth intègre sa réflexion sur la géométrie dans le cadre plus vaste d'une réflexion sur la démarche scientifique. Son approche n'est pas historique mais dialectique et vise à mieux comprendre l'effort qui construit et fédère la géométrie dans son rapport à l'espace et au monde sensible. Pour cela, il dégage différentes synthèses dialectiques de la géométrie qui s'organisent précisément autour de trois piliers essentiels : intuition, expérience et déduction.

II.1. Intuition, expérience et déduction

Dans la perspective pédagogique qui est la notre, il importe de bien comprendre l'évolution et les rapports existants entre géométrie et réalité. Pour un sujet confronté à l'apprentissage de la géométrie, cette articulation passe par une meilleure définition des trois modes de connaissances de l'espace que constituent la déduction, l'intuition et l'expérience.
Nous allons maintenant préciser le sens que nous attribuons à ces trois termes en revisitant ces expressions. Puis nous développerons notre propre synthèse qui résulte d'une adaptation à notre sujet d'étude des travaux de Gonseth.

II.1.1. L'intuition.

Prendre en compte l'intuition nous semble fondamental dans l'approche de la géométrie. Mais le premier embarras que l'on éprouve en mettant l'accent sur l'intuition provient de la difficulté à définir précisément ce qu'englobe ce terme. A moins d'admettre que tout le monde a une intuition de ce qu'est l'intuition. Mais il nous importe ici d'être opératoire.
L'approche de l'intuition relève, sans doute, de différents champs de connaissance comme la logique ou la psychologie. Nous suivrons Gonseth lorsqu'il reprend l'idée kantienne de forme intuitive comme forme a priori de la connaissance de l'espace. L'intuition apparaît comme le

réceptacle interprétatif de nos sensations, elle structure la pensée en terme d'évidence. L'intuition peut se caractériser alors comme une prise de contact immédiate, directe, concrète avec son objet. Mais ce contact direct réalise en même temps la compréhension la plus intime avec son objet, le saisissant dans son essence et dans sa singularité. L'intuition s'opposerait ainsi à tout ce qui est pensée discursive, *"chaîne de raisons ", détours de la démonstration, mise en œuvre formelle, application minutieuse d'une méthode.*

Dans notre conception, l'intuition peut évoluer avec le sujet grâce à un ensemble d'expériences et donc de connaissances a posteriori. La contradiction n'est qu'apparente : il faut voir l'intuition structurée au niveau de l'individu en un ensemble de strates qui se superposent et font oublier les premières intuitions. Certaines de ces strates seraient communes à tous les individus ; c'est le travail des psychologues de les mettre en évidence (théorie des stades), d'autres dépendraient de la pratique du sujet et seraient dépendantes du passé scolaire ou professionnel.

II.1.2. L'expérience.

L'expérience permet d'approcher la géométrie en restant proche de l'action et d'une certaine réalité physique. La nature de l'expérience géométrique va dépendre des objets sur lesquels elle s'exerce.

Ainsi dans un premier cas, faire une expérience en géométrie ce sera tenter de vérifier matériellement ce que l'on avance. On montrera par exemple que la somme des angles intérieurs d'un triangle est un angle plat en rapprochant des gabarits des trois angles du triangle. Pliages, découpages et constructions à la règle et au compas constituent la base de cette approche expérimentale qui peut déjà être développée à l'école. Cette approche se développe dans un espace mesurable, grâce à la perception ou à des instruments.

Aux moyens traditionnels d'expérimentation s'ajoutent désormais les possibilités offertes par l'informatique avec certains logiciels (Cabri-géomètre ou Logo). Il s'agit ici de simulations qui opèrent sur des objets virtuels. Ainsi peut-on découvrir certaines intersections de droites, certains alignements de points ou des lieux géométriques. Les fractales sont l'illustration la plus contemporaine de ce lien entre géométrie et expérience par l'intermédiaire de la simulation.

Enfin une dernière forme d'expérience peut être mentale, *experimental thought*, elle consiste à mettre en œuvre mentalement des déplacements, des découpages sans les effectuer réellement.

II.1.3. La déduction ou ratio.

On peut définir la déduction en disant que, certaines connaissances étant considérées comme acquises, elle consiste à en tirer d'autres qui en sont les conséquences. La déduction permet d'atteindre de nouvelles informations à partir de celles déjà acquises, sans recours à l'expérience ou à toute autre source extérieure. Elle est basée sur le raisonnement logique et elle permet de réorganiser les apports de l'expérience. Nous employons le mot **déduction** mais l'usage que nous en faisons est plus vaste et proche du raisonnement dans son ensemble.

Le pôle déductif et logique est certainement le plus naturel quand on pense à la géométrie. Certains ne justifient le maintien de l'enseignement de la géométrie que pour les apports logiques qu'elle est censée apporter. Mais il est important de ne pas réduire ces aspects déductifs à la démonstration basée sur des axiomes bien définis et en nombre réduit. L'enfant peut aussi faire des déductions et prouver des affirmations déduites de ses observations et basées sur des constructions. C'est graduellement qu'il lui sera demander d'argumenter à partir de certaines propriétés des figures qui auront été définies avec lui. Ces figures deviennent alors le support adapté pour guider l'intuition mais elles ne suffisent plus à fournir une preuve. Nous illustrerons plus loin ce point de vue.

II.1.4. Articulation entre intuition, expérience et déduction.

Chez Gonseth, l'intuition et l'expérience " constituent le pôle empirique de la géométrie, la déduction participe du pôle théorique ". Gonseth illustre le lien entre ces trois aspects par cette affirmation : " être géomètre c'est ne pas confondre une évidence issue de l'intuition avec un renseignement issu de l'expérience et le résultat d'une expérience avec la conclusion d'un raisonnement ".

Ainsi les élèves réussissent à tracer un "vrai" triangle dont les dimensions sont 8, 6 et 14. Le résultat de l'expérience est invalidé par la déduction (inégalité triangulaire) qui permet de conclure à la nature "aplatie" du triangle en question.

Enfin, René Thom illustre la nécessaire relation entre intuition et déduction par cette métaphore très audacieuse : " La déduction est à l'aveugle ce que l'intuition est au paralytique, l'une avance et ne voit pas, l'autre voit mais n'avance pas ".

II.2. Nos propres synthèses.

Gonseth propose trois synthèses dialectiques de la géométrie qui réorganisent les trois composantes précédentes. Nous avons repris son idée et l'avons transformée pour l'adapter à notre propos. La synthèse que nous présentons nous est personnelle et ne doit pas être comprise comme une présentation fidèle des idées de Gonseth.

II.2.1. La géométrie naturelle ou la confusion entre la géométrie et la réalité.

La géométrie naturelle a pour source de validation la réalité, le sensible. Elle comprend les trois aspects, intuition, expérience, déduction, mais la déduction s'exerce prioritairement sur des objets matériels à l'aide de la perception et de la manipulation d'instruments. En ce sens la géométrie d'Euclide n'est pas naturelle ; il s'agit plutôt de celle de Clairaut[2] (ou dans certains cas de Legendre) où la déduction peut être liée à une expérience mécanique et où on ne doit pas encombrer l'esprit en démontrant des choses évidentes.

Cette idée de preuve dynamique et mécanique s'oppose aux démonstrations statiques de la géométrie axiomatique, mais elle semble par contre très proche de la perception que peut avoir l'enfant de l'espace.

Une autre preuve peut aussi résulter de l'usage du pliage.

Ainsi que ce soit par pliage ou par "mouvement virtuel", la construction et la perception sont au cœur d'une géométrie naturelle de type expérimental. Le raisonnement que privilégie cette approche est le raisonnement de type constructif qui est fréquent dans la résolution de problèmes.

II.2.2. La géométrie axiomatique naturelle. La géométrie comme schéma de la réalité.

Dans la synthèse axiomatique euclidienne, les aspects " non rigoureux " et les appels à l'intuition de l'espace cèdent la place à la déduction logique et à la démonstration au sein d'un système axiomatique le plus précis possible. Gonseth pose un certain de nombre de questions sur cette géométrie. Quelle est la place de l'axiomatique ? Peut-on choisir n'importe quel type d'axiomes ? Quelle est la place de la réalité quand on axiomatise ?

Si l'axiomatisation est une formalisation, mais elle n'est pas nécessairement formelle, la syntaxe n'est pas coupée de la sémantique. La deuxième synthèse dialectique propose une

[2] Clairaut. (1741) Elémens de géométrie.

géométrie qui n'est pas réduite au naturel, mais qui conjugue les notions d'horizon de la réalité, de schéma et de modèle. Cette géométrie ne prétend pas comme la géométrie naturelle qu'elle est la réalité, mais elle aspire à être un schéma de la réalité.
La géométrie euclidienne classique est basée sur ce pas de côté, mais tout l'effort de schématisation est dissimulé et reste implicite.

II.2.3. La géométrie axiomatique formaliste. Indépendance de la géométrie et de la réalité.

Cette fois, à la suite de l'apparition des géométries non-euclidiennes, le cordon ombilical qui liait la géométrie et la réalité est coupé. Les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible et la primauté du raisonnement logique s'impose. L'approche axiomatique formaliste est bien explicitée par la rude affirmation de Wittgenstein qui clôt le débat entre géométrie et réalité :

" Les axiomes d'une géométrie peuvent ne contenir aucune vérité."

Dans l'enseignement, cette conception a permis d'introduire une géométrie élémentaire basée sur l'algèbre linéaire dont l'espace sous-jacent est l'espace R^3 muni d'un produit scalaire. Poussant jusqu'au bout les conséquences de cette vision algébrique de la géométrie, Dieudonné peut affirmer dans l'introduction de son traité : " Je me suis permis de n'introduire aucune figure dans le texte, ne serait-ce que pour faire voir que l'on s'en passe fort bien. ".

II.2.4. Notre synthèse dialectique.

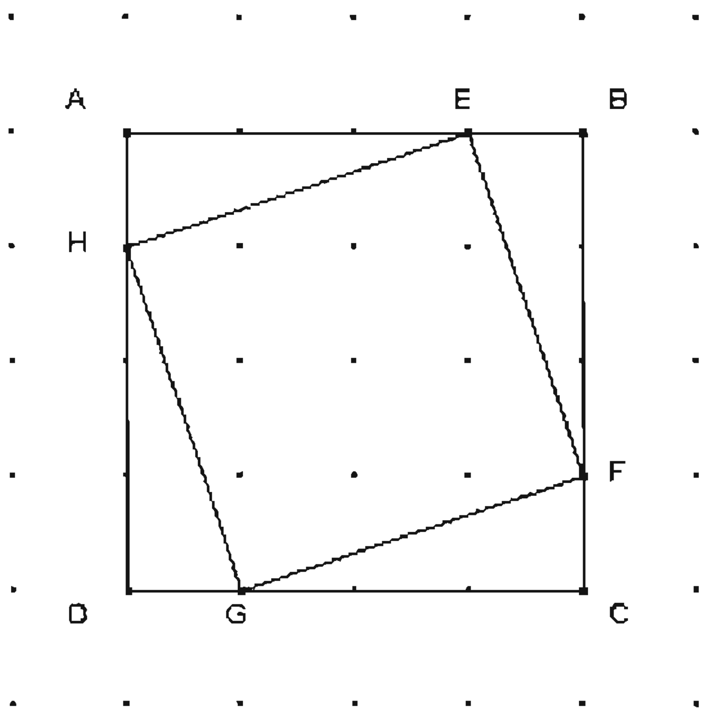
Plutôt que de voir l'évolution de la géométrie comme une suite de ruptures irréconciliables, nous adoptons, à la suite de Gonseth, une vision unificatrice de la géométrie grâce à cette idée de synthèse dialectique évolutive entre divers pôles. Ce point de vue nous parait fondamental dans une perspective de formation des maîtres. La géométrie peut contenir les trois pôles (intuition, expérience, déduction) ; il y a malaise si l'un des pôles est perdu (exemple hypertrophie du pôle déductif).

Tableau général des différentes géométries

	Géométrie naturelle I	Géométrie axiomatique naturelle II	Géométrie axiomatique formaliste III
Intuition	Sensible et perceptive	Liée aux figures	Interne aux mathématiques
Expérience	Liée à l'espace mesurable	Schéma de la réalité	De type logique
Déduction	Proche du réel et liée à l'expérience par la vue	Démonstration basée sur des axiomes	Démonstration basée sur des axiomes
Type d'espace	Espace intuitif et physique	Espace physico-géométrique	Espace abstrait euclidie[n]
Aspect privilégié	Evidence et construction	Propriétés et démonstration	Démonstration Et lien entre les objets.

II.3. Un exemple illustratif.

La figure suivante, sur papier pointé, est proposée aux élèves. La question porte sur la nature du quadrilatère EFGH. Dans un premier temps les seules hypothèses (on verra qu'elles peuvent dépendre du type de géométrie dans laquelle on souhaite implicitement que l'élève se place) sont la nature du support (réseau à mailles carrées) et le fait que les points soient des nœuds effectifs de ce réseau.



Telles quelles, les hypothèses restent floues pour un vrai "mathématicien".
Les hypothèses à saisir sont-elles

- hypothèses 1 : ABCD est un carré, E, F, G, H quatre points situés sur les quatre côtés du carré pris dans cet ordre [AB], [BC], [CD] et [DA],
- hypothèses 2 : les hypothèses 1 et aussi les vecteurs AE et CG puis DH et BF sont égaux en longueur et opposés deux à deux
- hypothèses 3 : hypothèses 2 et aussi AE = 1/4 AB

Il existe des réponses relevant de chacune des géométries définies précédemment

Dans le cadre de la géométrie naturelle (géométrie I).

Le seul dessin permet de prendre position à l'intérieur de la géométrie I. On peut tout voir et tout lire sur la figure. Le problème se construit en suivant les étapes de construction de la figure : d'abord un carré initial, puis de segments intérieurs particuliers [EF], [FG], [GH] et [HE], apparaît alors une nouvelle figure EFGH. Quelle est sa nature ?
La première solution (**Solution 1**), purement intuitive, indique que EFGH est un carré, ça se voit, il a les cotés égaux et ses angles sont droits.
Cette appréhension intuitive de la figure sera à la base de toutes les solutions qui vont suivre. Elle est à rapprocher de la construction sur un géoplan ou planche à clous d'un carré avec un

élastique. La seule justification donnée par les enfants est purement perceptive et intuitive : on allonge plus ou moins l'élastique. Elle pose parfois des problèmes lorsque des enfants ne sont pas d'accord sur la conservation des longueurs.
Une solution (**Solution 2**) basée sur <u>une expérience</u> va passer par la vérification de l'égalité des cotés avec un compas et de l'orthogonalité des cotés grâce à une équerre. On retrouve ici l'idée de Gonseth d'une première expérience liée à l'idée d'un espace mesurable. L'expérience doit rester proche de l'intuition pour garantir des résultats cohérents.
La solution (**Solution 3**) qui suit lie <u>déduction et expérience</u> dans le monde 1 de la géométrie naturelle : par superposition du gabarit d'un triangle rectangle égal à AEH, les élèves vérifient leur idée que l'angle AHE est égal à BEF. Ils utilisent une expérience antérieure qui leur avait permis de montrer que la somme des angles d'un triangle valait 180° pour en déduire que HEF est un angle droit.

Dans le cadre de la géométrie axiomatique naturelle (géométrie II).
Cette géométrie doit s'appuyer sur des hypothèses énoncées et non lues sur la figure : par exemple les hypothèses 2. Le texte de départ doit dégager de la figure ce qui peut y être lu (sous-entendu ce qui n'est pas écrit ne doit pas y être lu, mais déduit).
Commençons par une solution mixte (**Solution 4**) courante chez les élèves. Ils vérifient l'égalité des quatre côtés avec la règle graduée ou le compas, puis constatent l'existence d'un angle droit avec l'équerre, enfin ils concluent que "EFGH est un carré comme losange avec un angle droit" . Cette solution est à mi-chemin entre la géométrie naturelle, expérience, et la géométrie axiomatique naturelle (puisque la conclusion est fournie par une définition-axiome).
Cette preuve présente un défaut de cohérence, puisque certains résultats sont vérifiés sur la figure, et d'autres sont montrés comme connaissances d'une certaine axiomatique. Notons que ce défaut de cohérence est d'ailleurs très courant dans les productions des élèves de collège, peut-être parce que justement les cadres respectifs des géométries où on se place pour la preuve ne sont jamais suffisamment explicités.
Envisageons maintenant une solution (**Solution 5**) homogène. L'intuition nous dit que les triangles AEH, BFE, CFG et DHG sont superposables. Confirmons cette intuition grâce à une démonstration : par hypothèse AE=BF=CG=DH et EB=FC=GD=HA et par le théorème de Pythagore, les côtés HE, EF, FG et GH sont de même longueur. Notre intuition est confirmée.
Donc les angles AEH, BFE, CGF et DHG ont même mesure, qui correspond au complémentaire des angles AHE, BEF, CFG et DGH. Les angles du quadrilatère sont donc droits (comme dernière partie d'un angle plat)
Le quadrilatère EFGH est donc un carré.
Voici une autre solution (**Solution 6**).
Les segments HE, EF, FG et GH sont des diagonales de rectangles (par exemple AEE'H). par déduction des égalité des longueurs de l'hypothèse, les rectangles sont superposables, donc les diagonales ont même longueur et font le même angle avec le côté correspondant. On obtient déjà que EFGH est un losange.
On considère la rotation de centre E et d'angle (EH, EA) : le point H se transforme en H' sur [EA) et simultanément F se transforme en F' sur la perpendiculaire à (AB) qui passe par E
F se transforme en F' sur la perpendiculaire à (AB) qui passe par E. G se transforme en G'.
On obtient un losange EF'G'H' avec un angle droit. C'est donc un carré. Par suite EFGH est aussi un carré.

Dans le cadre de la géométrie axiomatique formaliste (géométrie III).
L'énoncé est donné par exemple avec les hypothèses 2.

Dans cette géométrie qui utilise le substrat euclidien au sens du produit scalaire, la première étape consiste à écrire les coordonnées des vecteurs EF, FG, GH et HE issues de la perception (seule concession nécessaire à l'intuition) et des hypothèses. Ensuite le calcul des normes des vecteurs et du produit scalaire permet de montrer que EFGH est un carré. On peut s'aider de la figure, mais on ne peut pas utiliser des données évidentes, comme les égalités des longueurs EF, FG, GH et HE.

Conclusion.

L'existence de ces différentes façons d'envisager un même problème est une source constante de difficultés dans l'enseignement de la géométrie. De plus, elle nous semble spécifique de cette partie des mathématiques élémentaires. En effet, prenons le problème concret suivant : 9 objets coûtent 15 F, quel est le prix de 15 objets ? La résolution de ce problème passe par l'utilisation d'un modèle, celui de la proportionnalité. Il existe plusieurs procédures de résolution, mais un seul choix de modèle (tout autre modèle contient la proportionnalité).
Prenons maintenant un problème géométrique, dans quel paradigme se placer pour le résoudre : géométrie I , II ou III ? Si le problème est théorique au départ, on reste dans la géométrie théorique (II ou III). Dans l'exemple que nous venons de traiter, la nécessité d'expliciter les hypothèses place la résolution en géométrie II ou III. Par contre si la question à résoudre se présente dans le monde physique ou si même si elle l'évoque, il existe un véritable choix de traitement : reste-t-on dans la géométrie I, ou passe-t-on dans la géométrie II ?
En résumé, il est en général demandé de traiter un problème dans une géométrie de niveau égal ou supérieur (géométrie I, II ou III) à celui dans lequel le problème est posé. Mais cette demande n'est pas explicitée, il n'existe même pas de mot pour dire, en général, ce niveau de géométrie.
Cette distinction de niveaux est pourtant reconnue dans certains problèmes, ainsi la construction effective d'un pentagone ou d'un heptagone régulier convexe se place dans la géométrie I (avec de l'intuition, de l'expérience et de la déduction notamment pour travailler sur des mesures approchées d'angles), mais le problème de la constructibilité (à la règle et au compas) se place en géométrie II ou III. Pour ces problèmes de reproduction de figures, il existe bien deux expressions différentes pour désigner le paradigme dans lequel on se place : construction et constructibilité. Par contre, et c'est un peu l'objet de nos écrits, il n'existe pas, pour la géométrie en général, de double ou triple expression pour désigner le paradigme dans lequel on travaille.
Pour nous, l'approche de la géométrie structurée autour de trois modes de connaissance identiques mais évoluant dans le temps peut constituer une source de clarification pour les futurs enseignants. Elle doit leur permettre d'enrichir leur propre conception de la géométrie et de la confronter avec une conception précise de la géométrie qu'il doivent enseigner à leurs élèves.

III EXEMPLES D'ETUDE UTILISANT NOTRE CADRE

Pour contrôler la pertinence de notre cadre, nous avons cherché à étudier certains observables liés à la géométrie à l'école ou en formation des maîtres.
Nous en présentons deux ici.

III.1- Les sujets de concours

Nous serons brefs sur ce thème. En effet il a fait l'objet d'un atelier au colloque de Montpellier en 1996 et d'un compte-rendu dans les Actes de ce colloque parus à l'IREM de Montpellier[3].

Nous avons travaillé sur l'extrait ci-dessous de l'épreuve de mathématiques du concours de recrutement externe des professeurs des écoles de Dijon 1995.

EXERCICE

On considère la figure ci-contre.

L'unité de mesure est le centimètre.

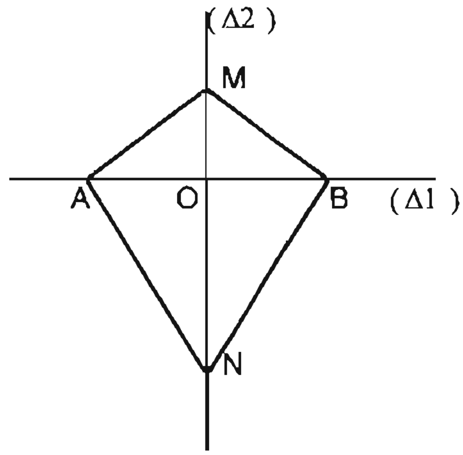
Les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires.

O est leur point d'intersection.

A et B sont deux points fixes de (Δ_1) symétriques par rapport à O et tels que OA = OB = 2.

M et N sont deux points de (Δ_2) situés de part et d'autre de O.

On pose OM = h et ON = k



Etude du quadrilatère AMBN

a) A quelle condition sur h et k, AMBN est-il un losange ? Justifier la réponse.

b) A quelle condition sur h et k, AMBN est-il un carré ? Justifier.

c) Le quadrilatère AMBN peut-il être un parallélogramme sans être un losange ? Justifier.

d) Dans le cas général, calculer en fonction de h et de k l'aire du quadrilatère AMBN. Comparer cette aire au produit MN × AB et expliquer les résultats.

*Considérons uniquement la question **a**.*

Pour la résoudre, il est possible d'envisager une expérience (virtuelle) de variation des longueurs. En effet, supposons le dispositif matérialisé par deux tiges (MN) et (AB) fixes et perpendiculaires, les points A et B sont fixes sur la tige.

Pour la question **a**, M est aussi fixe sur la tige, l'intuition (ou la déduction) nous dit que AM = MB et que NA = NB (existence d'un axe de symétrie (MN)). On fait varier N sur la demi-droite (NO] ; d'abord loin de O, il s'en rapproche progressivement : la longueur AN diminue de "très grande" à OA, elle passe nécessairement par la longueur AM (supérieure à OA), ce qui donne un quadrilatère à quatre côtés de même longueur. La condition (suffisante) est alors par déduction sur l'égalité des triangles AMO et AON par exemple, que MO = ON.

[3] Houdement, Kuzniak (1997) "Faut-il continuer à enseigner la géométrie en formation des maîtres premier degré ?" pages 187-202

On a donc là un exemple de raisonnement expérimental, puis déductif dans la géométrie naturelle I.
Mais on peut aussi se placer pour répondre dans la géométrie axiomatique II : il suffit d'invoquer pour la question **a** le théorème qui caractérise le losange comme quadrilatère aux diagonales perpendiculaires et qui se coupent en leur milieu pour aboutir à h = k comme condition nécessaire et suffisante.
Nous laissons au lecteur le soin de faire les justifications dans les deux niveaux de géométrie pour la question **b**.
Le texte de cet exercice permet donc au moins des réponses dans les deux niveaux de géométrie. Rien ne permet au candidat de choisir son niveau de réponse. Mais les correcteurs n'attendent-ils pas implicitement plutôt une réponse de type II ? C'est d'ailleurs ce qui est apparu dans le groupe de travail de Montpellier.

Ainsi on voit dans les sujets de concours la trace des deux géométries pointées, la I et la II. Ces géométries permettent de mieux analyser les types de réponses attendues des stagiaires par les formateurs. A terme elles peuvent permettre de mieux expliciter les attentes d'un concours (en géométrie) pour professeurs d'école.

III.2- Les études de manuels

Les manuels font partie des observables de la géométrie à l'école primaire et en formation , puisqu'ils sont censés aider des maîtres non spécialisés à faire au mieux leurs leçons.
Nous nous sommes intéressés à deux collections
Le Nouvel Objectif Calcul CE2 et *CM1* (1995), *CM2* (1996), Editions Hatier
Diagonale Math en Flèche CE2 et *CM1* (1993), *CM2* (1994), Editions Nathan.

III.1.1 Pourquoi ces deux collections :

- Elles sont toutes deux dirigées par des professeurs de mathématiques, formés à la didactique, et elles présentent des livres du maître détaillés qui tentent de préciser le rôle du maître et les attentes par rapport aux élèves pour chacune des séances. Les propositions d'activités géométriques dans ces manuels sont donc a priori dignes d'étude car on peut penser
  - qu'elles utilisent les résultats de recherches récentes en didactique,
  - qu'elles prennent en compte des contraintes effectives de classe,
  - qu'elles adaptent leurs propositions à une culture géométrique commune du maître.
- Dans la mesure où l'école primaire est désormais pensée en termes de cycles, nous nous sommes concentrés pour cette étude des manuels sur le cycle trois, qui regroupe les trois niveaux CE2, CM1 et CM2 et intéresse des enfants en général de 8 à 11 ans

Nous supposerons connues du lecteur la structure usuelle des manuels édités après 1990.
L'étude qui suit s'attache essentiellement aux doubles pages élèves explicitement mises par les auteurs dans la rubrique Géométrie Elle tente de saisir l'esprit avec lequel sont conçus la situation préparatoire et les exercices qui suivent.

III.2.2 Comment avons nous fait fonctionner notre cadre pour les activités proposées ? Notre filtre d'étude.

Nous allons utiliser le cadre théorique que nous avons défini dans la première partie de cet article en précisant le sens que ces concepts prennent pour cette étude des manuels.

L'intuition

Il s'agit ici de l'intuition de l'espace que l'enfant a développée ; bien entendu cette intuition sera de différents niveaux selon l'âge et le rapport au réel de l'enfant. L'intuition du carré de l'enfant de maternelle n'est pas celle de l'enfant en cycle trois.

Notre étude nous a permis de relever deux grands groupes d'activités relevant de l'intuition :

- des activités reposant sur la perception immédiate : la lecture de photos, l'observation immédiate d'objets[4], l'application mécanique d'un instrument, tout ce qui se place du côté d'une certaine évidence...mais qui simultanément donne du sens.
- des activités qui reposent sur une connaissance antérieure forte de la forme, de l'objet et où une construction mentale n'est pas nécessaire pour répondre à la consigne.

Voici un exemple de chaque catégorie.

- La situation de départ de *Nouvel Objectif Calcul* CE2 leçon 30 (cf. annexe 1) fait appel à une intuition géométrique préalable : celle liée à rond, mais aussi celle de couronne comme "entre deux" cercles. Il s'agit en effet, à partir du tableau Rythme n°2, de R.Delaunay de reconnaître *cercles et disques* comme formes, mettre en mot des agencements de cercles, prendre conscience de l'existence de couronnes, essayer de reproduire l'agencement (mais avec quel contrôle ?) : il s'agirait de rechercher des centres, de repérer l'emplacement des centres dans un schéma global.....Comme toute observation d'un dessin, cette activité comporte d'abord un appel à l'intuition (mais quelquefois elle est plus guidée ou soumise à un contrôle plus fin), là une sorte de connaissance préalable.
- *Nouvel Objectif Calcul CE2* leçon 49 (cf. annexe 1) fournit un autre exemple d'activité nécessitant une forte intuition : la question 1 demande de repérer parmi des dessins de napperons de papier ceux qui sont obtenus par pliage et découpage. Or ce repérage ne peut se référer qu'à une connaissance a priori de l'effet de pliages et découpages sur une feuille de papier, il nécessite donc une intuition forte. La question 2 donne l'occasion de mener l'expérience effective d'un pliage - découpage adapté. Cette expérience est réinvestie dans la question 3. L'activité proposée relève donc d'abord de l'intuition, puis de l'expérience qui aurait pu forger cette intuition.

Cet exemple nous fournit donc une transition vers l'expérience.

L'expérience

Nous proposons de regrouper sous cette dominante les activités qui nécessitent l'exécution d'un certain mouvement, la mise en oeuvre d'actions spécifiques (sans enchaînement déductif) pour répondre à la consigne. Dans cette rubrique nous avons trouvé des activités liées à une observation non immédiate, mais nécessitant une action expérimentale. Cette expérience est souvent liée à une action à l'école élémentaire, mais les actions effectives ne sont pas les cas d'expériences.

Nouvel Objectif Calcul CM2 leçon 14 (cf. annexe 2) est un exemple d'activité faisant appel principalement à l'expérience : il est demandé de construire *tous les triangles possibles* en juxtaposant trois pailles parmi des pailles de trois longueurs fixées (4 cm, 5,5 cm et 8 cm). Cette activité se situe dans la géométrie expérimentale dans la mesure où les élèves essaient des montages et concluent sur leur faisabilité. Ainsi ils peuvent constater que ces constructions ne sont pas toujours possibles.

Peuvent-ils en déduire que cela tient au choix des longueurs de départ ? Ce mouvement de bascule n'est pas automatique, il dépasse l'expérience et nous fait passer vers un aspect déductif.

---

[4] nous préciserons encore en y attachant un traitement cognitif sans modification (voir plus loin)

La déduction

Elle permet de réorganiser les apports de l'expérience, sans en relancer une nouvelle. Donnons quelques exemples : nous verrons d'ailleurs que l'aspect déductif n'apparaît qu'après une partie faisant appel à l'intuition ou à l'expérience.

Dans l'exemple *Nouvel Objectif Calcul CM2* leçon 14 (cf. annexe 2) déjà cité ci-dessus, l'expérience permet de conclure à l'impossibilité de *construire toujours un triangle* à partir de trois pailles, et cela est lié aux longueurs choisies pour les pailles ; elle permet d'aller jusqu'à l'explication "ça ne marche pas parce que c'est trop court, parce que les pailles ne se joignent pas". Telle quelle l'activité reste sous une forme "expérimentale".
La forme déductive produirait :

- la justification du processus de *non construction* : "on ne peut pas toujours construire un triangle à partir de trois longueurs fixées" (notamment si une des longueurs est supérieure à la somme des deux autres)
- la généralisation du processus de *construction* de triangles, par exemple par l'affirmation : "pour pouvoir construire un triangle à partir de trois longueurs fixées, il est nécessaire que chacune des trois longueurs (ou la plus grande) soit inférieure à la somme des deux autres".

Autrement dit, ici la forme déductive permettrait par exemple un processus de généralisation induit par les expériences menées sur quelques cas particuliers, mais choisis a priori pour décrire une généralité (ici la dite déduction est proche de l'induction). Comment faire passer les élèves dans ce processus déductif ? L'expérience s'y prête, mais il y manque un questionnement spécifique.
Ainsi cet exemple nous permet d'illustrer des faits que l'on rencontre souvent pour la déduction de l'école élémentaire :

- elle est très souvent de l'expérience vers la déduction (e vers d),
- le maître joue un rôle essentiel dans le passage éventuel vers la déduction.

Après cette brève illustration des trois aspects de la géométrie, nous donnons les résultats de l'étude des manuels que nous avons menée.

III.2.3- Les résultats de l'étude de manuels

Les activités présentées dans ces deux manuels restent plutôt dans la géométrie naturelle et principalement dans le micro-espace (une exception liée à l'étude de plans d'une ville). On note peu d'incursions dans la géométrie II.
Compte tenu de ces remarques, nous avons décompté les dominantes des activités dites géométriques, ce qui nous donne le tableau suivant, en codant naturellement intuition par **i**, expérience par **e** et déduction par **d**. Un certain nombre d'activités sont répertoriées comme **e** vers **d**, elles sont alors décomptées en **e** et en **d**.

Résultats du Nouvel Objectif Calcul

NOC	i	e	d	Nombre de doubles pages
CE2	10	8	1	15
CM1	3	13	4	15
CM2	2	16	13	21

Si les activités appelant plus l'expérience sont dominantes, on note cependant une évolution du CE2 au CM2. L'intuition était plus sollicitée au CE2, s'appuyant en cela sur les connaissances des années antérieures ou des connaissances externes (cf. les pliages de napperons) ; ces premières activités sont souvent relayées par des expériences qui peuvent alors construire l'intuition qui n'existait pas.
L'expérience est plus active en CM1, garde sa part au CM2, qui voit aussi augmenter la part faisant appel à la déduction. La déduction est très souvent consécutive à l'expérience, elle prend souvent la forme d'une induction et ne peut être expressément mise en oeuvre que par la volonté explicite du maître. Peu de situations comportent une entrée vers la déduction (sauf des reproductions de figures complexes).

Résultats de *Diagonale*

Nous avons répertorié toutes les doubles pages consacrées à la géométrie et principalement analysé les situations de départ. Les leçons *Résolution de problèmes* sont incluses dans l'étude quand elles sont très géométriques (plus d'un quart de problèmes géométriques). Il existe plus de problèmes géométriques dans ces leçons que dans le *Nouvel Objectif Calcul*. C'est pourquoi nous avons un tableau spécifique consacré à ces problèmes.
Le comptage des diverses étiquettes i, e et d donne les tableaux suivants

Dia	**i**	**e**	**d**	Nombre de doubles pages
CE2	1	14	3	16
CM1	5	19	5	20 (dont 2 résolutions de problèmes)
CM2	4	11	4	11

Les problèmes de géométrie dans les leçons *Résolution de problèmes* (sauf pages 134, 170 répertoriées ci-dessus) nous fournissent les décomptes suivants.

Dia	**i**	**e**	**d**	Nombre de problèmes
CE2	1	0	0	1
CM1	1	7	2	9
CM2	5	4	6	10

La majorité des activités proposées, nous semble-t-il, amène l'élève à dessiner, plier, construire puis faire des constats ou s'interroger sur des généralisations. L'idée dominante semble donc d'enrichir la culture géométrique du micro-espace de l'élève, c'est-à-dire, en gardant la terminologie de Gonseth, d'enrichir son intuition du micro-espace, par l'accumulation d'expériences. Les activités visant la déduction sont relativement modestes dans les leçons de géométrie proprement dites, par contre elles se rencontrent souvent pour les problèmes des leçons intitulées *Résolution de problèmes*.

III.2.4 Conclusion sur l'étude des manuels

Les activité proposées restent essentiellement dans le micro-espace, complètement pour celles relevant de géométrie plane. Notre cadre d'analyse reste donc pertinent (puisqu'il se limite implicitement à cet espace).

La géométrie de l'école, reflétée par les manuels, est une géométrie naturelle où le mode de validation est le sensible. Les activités proposées rendraient possibles des incursions dans la géométrie II, par exemple lorsqu'une tentative de généralisation appuyée sur l'expérience et la déduction permet de construire, de comprendre un axiome de la géométrie II et aussi quand il s'agit de travailler dans le méso-espace, à l'occasion d'étude de solides.

On peut relever une épistémologie d'auteurs, qui privilégie l'expérience dans le cycle trois, pour une collection engage beaucoup plus la déduction (surtout CM) et l'intuition surtout (CE2). Cette épistémologie semble spontanée, les intentions dans ce sens ne sont nulle part explicitées, même dans les livres du maître. Les auteurs ne proposent pas non plus d'autre cadre pour justifier leur progression.

En résumé, il semblerait que les auteurs de manuels pour le cycle 3 privilégient un type de géométrie : la géométrie naturelle (type I). Dans cette géométrie, sans explicitation préalable, ils semblent privilégier les activités du côté de l'intuition et de l'expérience. Ces activités semblent seulement juxtaposées et non coordonnées. L'expérience semble se limiter à l'action matérielle avec des instruments. Il semblerait que le questionnement proposé n'engage pas ou peu dans des expériences virtuelles.
Seuls certains aspects de la géométrie naturelle semblent ainsi exploités. Ne serait-il pas intéressant d'en exploiter d'autres ?
Là encore les paradigmes géométriques introduits nous permettent de repérer des types d'activités privilégiés dans les manuels scolaires. Pourquoi ceux-ci et pas d'autres ? Les paradigmes proposés ne permettraient-ils pas d'atteindre une certaine cohérence dans la progression ? Telles sont les questions auxquelles notre cadre de départ peut donner naissance.

CONCLUSION GENERALE

Nous avons tenté de poser différemment le problème de l'enseignement de la géométrie en fédérant celle-ci principalement autour des trois modes d'approche de connaissance que sont l'intuition, l'expérience et la déduction. En nous inspirant de Gonseth, nous avons dégagé trois synthèses possibles qui permettent d'articuler de manière cohérente la progression globale de l'enseignement de la géométrie : la géométrie naturelle (géométrie I), la géométrie axiomatique naturelle (géométrie II) et la géométrie axiomatique formaliste (géométrie III). Cette dernière, sans doute à cause du niveau d'enseignement étudié est restée à l'arrière-plan, il faudra vérifier sa pertinence au niveau des élèves de Lycée et de leurs enseignants.
Ce cadre conceptuel a été ensuite appliqué à l'analyse de manuels de l'école élémentaire et aux sujets de concours de recrutement d'enseignants. Cette analyse nous a permis certains constats :

- Il n'y a pas à l'école de cohérence au sens de notre synthèse, il n'y a que des formes appauvries de la géométrie. Le pôle déductif est réduit à sa plus simple expression. Il s'agit là d'une forme de dénaturation simplificatrice que nous avions déjà pointée dans notre étude des stratégies de formation des enseignants.
- Dans les sujets de concours, il existe un flou sur la nature du contrat attendu des candidats et espéré par les formateurs

Ce constat est renforcé et expliqué par l'analyse des conceptions des différents acteurs du systèmes qui se situent implicitement dans différents types de géométrie. Cette conception paraît diffuse et peu cohérente.
Pour nous, l'approche de la géométrie structurée autour de trois modes de connaissance identiques mais évoluant dans le temps peut constituer une source de clarification pour les

futurs enseignants. Elle doit leur permettre d'enrichir leur propre conception de la géométrie et de la confronter avec une conception précise de la géométrie qu'il doivent enseigner à leurs élèves.

Cette clarification doit permettre d'éviter le type de confusion rapportée par Nimier[5] et qui est due à la juxtaposition de géométries différentes où le rôle respectif de l'intuition, de l'expérience et de la déduction ne sont pas les mêmes.

> "On nous avait donc fait ça avec les vieux bouquins que vous trouverez de cette époque là, les cas d'égalité des triangles avec calque, etc... Et puis, on nous avait donné après un problème, alors moi j'ai fait le problème par la même méthode, c'est-à-dire : je prends un calque, je fais ci, je fais ça, j'ai répété le discours qu'on avait fait pour les cas d'égalité des triangles et mon prof m'a expliqué que c'est pas du tout ça qu'il fallait faire, que maintenant on avait les cas d'égalité des triangles et il fallait les appliquer et ... démontre..., bon je ne sais pas pourquoi."

Cependant de nombreuses questions restent en suspens même si l'on admet la pertinence de notre synthèse.

Notre cadre permet-il de donner une véritable cohérence de la géométrie à l'école ? Permet-il d'en faire un tout, préalable à celle du collège ? Permet-il réellement de favoriser l'articulation entre les différents cycles d'enseignement ? Enfin, comment sensibiliser les futurs enseignants à cette approche de la géométrie ?

BIBLIOGRAPHIE

ARSAC G. Vérité des axiomes et des théorèmes en géométrie. Vérification et démonstration. *Petit x*, 1994,n°37, p. 5-33. IREM de Grenoble.

ARSAC G, MANTE M. Situations d'initiation au raisonnement déductif. *Educational Studies in Mathematics*, 1997, Vol 33, n°1.

BERTHELOT R, SALIN. M.H. *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse de l'Université de Bordeaux I, 1992.

CHEVALLARD Y. et JULLIEN M. Autour de l'enseignement de la géométrie, première partie. *Petit x*, 1991, n°27, p.41-76. IREM de Grenoble.

DUSSUC M-P. *Du constat graphique à l'évidence géométrique : étude de démarches d'élèves de CM2 et de 5ème.* Mémoire de DEA de Didactique des Mathématiques. Université Lyon I, 1994.

DUVAL R. Approche cognitive des problèmes de géométrie. *Annales de Sciences Cognitives et de Didactiques de Strasbourg*, 1988, p. 57-74. IREM de Strasbourg.

FISCHBEIN E, MARIOTTI M. Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 1997, Vol 34, n°3.

FISCHBEIN E. The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 1993, Vol 24, n°2.

FLORIS R. *Qui a tué la géométrie à l'école. Etude didactique, de la noosphère à la classe.* Mémoire de DESSE (direction J.Brun), FSPE. Université de Genève, 1996. Suisse.

FREGONA D. *Les figures planes comme milieu dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transpositions didactiques.* Thèse de l'Université de Bordeaux I, 1995.

GONSETH F. *La géométrie et le problème de l'espace.* Lausanne : Editions du Griffon, 1945-1955.

---

[5] *Les modes de relation aux mathématiques* (Editions Méridiens-Klinsieck)

HOUDEMENT C. et KUZNIAK A. Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 1996, Vol 16/3. Grenoble : La Pensée Sauvage.
HOUDEMENT C. *Projet de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation de stratégies.* Thèse de doctorat. Paris 1995 : Université de Paris VII.
HUSSERL. *L'origine de la géométrie.* Traduction et introduction de J. DERRIDA. Paris : PUF (1936), 1962.
KUZNIAK A. *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs des maîtres du premier degré.* Thèse de doctorat. Paris : Université de Paris VII, 1994.
LABORDE C. L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploitation de phénomènes didactiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 1988, Vol 9/3, p. 337-364. Grenoble : La Pensée Sauvage.
LAKATOS I. *Proofs and refutations* 1976 (*Preuves et réfutations*, Paris : Hermann, 1984).
LOBO DE MESQUITA. *L'influence des registres figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie : éléments pour une typologie.* Thèse de doctorat. Université de Strasbourg , 1989.
PARZYSZ B. Knowing vs Seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 1988, Vol 19.1.
PIAGET J. *Introduction à l'épistémologie génétique, tome I, La Pensée Mathématique.* Paris : PUF, 1950.
POPPER K. *Objective knowledge.* Clarendon Press, 1972.
RAUSCHER J.C. *L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes : le cas de l'enseignement de la géométrie au début du collège.* Thèse de doctorat : Université de Strasbourg, 1993.

EVOLUTION DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ARITHMETIQUE ET FORMATION DES MAITRES

Teresa Assude
IUFM de Versailles & DIDIREM (Paris VII)

Résumé

L'enseignement de l'arithmétique est présent dans la formation des professeurs des écoles (première année) mais l'arithmétique a disparu de l'enseignement au Collège même si elle vient d'être réintroduite au niveau de la Terminale scientifique, enseignement de spécialité. Or, il est convenu dans les pratiques des formateurs même si ce n'est pas dans les textes officiels que le « programme officiel » du concours des PE1 est le programme de mathématiques du Collège et éventuellement certaines parties du programme de seconde.
La question que je me suis posée est donc : *pourquoi l'arithmétique continue-t-elle à vivre dans l'institution « PE1 » tout en ayant disparu de l'enseignement secondaire ?*
Nous amorcerons l'étude de cette question en utilisant les outils de l'approche écologique développée en didactique des mathématiques par Yves Chevallard.

I - PRESENTATION DE LA QUESTION A ETUDIER

Dans cette communication, je me propose d'étudier ou plutôt d'amorcer l'étude du problème suivant : l'enseignement de l'arithmétique est présent dans la formation des professeurs des écoles (première année) mais l'arithmétique a disparu de l'enseignement au Collège même si elle vient d'être réintroduite au niveau de la Terminale scientifique, enseignement de spécialité. Or, il est convenu dans les pratiques des formateurs, même si ce n'est pas dans les textes officiels, que le « programme officiel » du concours des PE1 est le programme de mathématiques du Collège et éventuellement certaines parties du programme de seconde. La question que je me suis posée est donc : *pourquoi l'arithmétique continue-t-elle à vivre dans l'institution « PE1 » tout en ayant disparu de l'enseignement secondaire ?*

Pour étudier cette question, je vais me situer dans le cadre de l'approche écologique du didactique que je présenterai rapidement dans un premier temps, pour ensuite essayer de donner quelques réponses à la question posée. Pour cela, je ne prendrai pas l'arithmétique dans sa totalité mais seulement les notions de divisibilité, nombres premiers, pgcd et ppcm.

II - CADRE THEORIQUE

L'approche écologique du didactique est une approche qui utilise les outils de l'écologie pour « problématiser le réel didactique ». Ainsi, on s'intéressera aux « pourquoi » des choses : par exemple, on se demandera pourquoi tel objet existe dans l'enseignement et aussi pourquoi tel autre est absent. Poser ce type de question (en lien avec le comment) amène à s'intéresser à l'environnement des objets, à leur écosystème et à leurs interrelations avec les autres objets. Un premier principe de l'écologie didactique des savoirs est le suivant (voir Rajoson 88) :

> *Principe du tout structuré* : un objet de savoir ne vit pas isolé mais il prend place dans un tout structuré où il assume une ou plusieurs fonctions.

L'opérationalité de ce principe en tant qu'outil d'analyse nous amène à considérer les notions d'habitat et de niche (Voir Chevallard 95). L'habitat est le lieu où on trouve l'objet, en quelque sorte son adresse, et la niche est la fonction que l'objet exerce dans cet habitat. On peut alors se poser les questions : dans quels habitats va-t-on trouver le pgcd ou le ppcm ou les nombres premiers, et si on trouve ces habitats (car l'objet peut être absent), quels sont les niches qu'il vient y occuper ?

Un outil de description de ces « touts structurés » a été proposé par Chevallard avec la notion d'organisation praxéologique ou simplement praxéologie. Une praxéologie est un quadruplet formé par (tâche, technique, technologie, théorie). Ainsi, l'élève va être confronté à une tâche, quelque chose à faire, et pour le faire il va avoir une « manière de faire », d'accomplir cette tâche. La technique est donc la manière (même s'il peut y en avoir plusieurs) d'accomplir une tâche et la technologie est ce qui rend intelligible cette technique, ce qui la justifie, la théorie étant la technologie de la technologie. La notion de praxéologie permet donc de décrire le rapport institutionnel à l'objet (voir Chevallard 92) dans les institutions considérées.

Un autre principe de l'écologie didactique des savoirs (voir Assude 94 et Artaud 97) est le suivant :

> *Principe d'économie*: dans un écosystème, la tendance est de minimiser le nombre d'objets et d'interrelations entre les objets jusqu'au seuil de densité possible.

Opérationaliser ce principe consiste donc à regarder si le nombre d'objets de savoir dans un écosystème ne peut pas être minimisé ce qui peut amener à la disparition de certains des objets. Comme le dit Artaud, ce principe permet que le contrôle de la charge didactique (pour l'enseignant) et de la charge cognitive (pour l'élève) puisse se faire dans des conditions satisfaisantes pour l'enseignement et pour l'apprentissage.

Nous avons donné le cadre théorique qui va nous permettre d'étudier notre question de départ. Pour plus de détails sur l'approche écologique, voir le cours de M.Artaud (1997).

III - L'ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE ET FORMATION DES INSTITUTEURS

Considérons trois périodes pour analyser l'enseignement de l'arithmétique à l'école élémentaire. Dans un premier moment, cette division en trois périodes est fonctionnelle par rapport à notre étude même si, par la suite, nous pouvons prendre des divisions plus fines. Nous utiliserons les trois périodes suivantes : la période classique (qui va jusqu'à la fin des années 60), la période « moderne » (qui correspond à la réforme des maths modernes - années 70), et la période actuelle.

On peut considérer que l'époque classique correspond à la période définie par la loi du 30 octobre 1886, dite loi Gobbet, organisation qui reste stable entre 1886 et 1940. La loi Gobbet précise que :

> « L'enseignement primaire est donné
> 1° dans les écoles maternelles et les classes enfantines ;
> 2° dans les écoles primaires élémentaires ;
> 3° dans les écoles primaires supérieures et dans les classes d'enseignement supérieur annexées aux écoles élémentaires et dites « cours complémentaires » ;
> 4° dans les écoles manuelles d'apprentissage, telles que les définit la loi du 11 décembre 1880. »

Ce sont les cours complémentaires dans les écoles primaires supérieures qui préparent au concours d'entrée dans les Ecoles Normales, chargées de la formation des instituteurs, et les Ecoles Normales Supérieures recrutent au sein des Ecoles Normales ceux ou celles qui formeront les instituteurs.

La scolarité des enfants est de 6 ans divisés en cours élémentaire, moyen et supérieur de deux ans chacun.

Cette structure de l'enseignement et de la formation des instituteurs a changé avec la mise en place de degrés dans l'enseignement qui a séparé l'enseignement primaire élémentaire, relevant du premier degré, des écoles normales, relevant du second degré. L'unification du second degré commence alors avec la mise en place de trois degrés en 1937, la transformation des écoles primaires supérieures en collèges en 1941, la création des CES (collèges d'enseignement secondaire) en 1963. Cette modification va entraîner des changements dans la formation des instituteurs car ils seront recrutés au niveau du baccalauréat à partir de 1945 et leurs formateurs seront des professeurs du second degré qui n'ont pas forcément de préparation pour cette fonction, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas forcément au départ une connaissance de la « culture du primaire ». Cette séparation entre deux mondes est encore nette car il y a une évolution de la formation des instituteurs vers l'enseignement universitaire. En 1969, la formation des instituteurs est de deux années après le baccalauréat, de trois années après le bac en 1979 avec notamment la préparation d'un DEUG-instituteur, et en 1986 le recrutement est fait au niveau du DEUG.

Cette évolution continue aussi dans la période actuelle où les écoles normales disparaissent avec l'apparition des IUFM (1991) qui fait alors basculer la formation des instituteurs (désormais des professeurs des écoles) dans l'enseignement universitaire.

IV - L'ENSEIGNEMENT DE L'ARITHMETIQUE A L'ECOLE ELEMENTAIRE

Essayons de voir, sans rentrer dans des analyses très fines sur les différences entre les diverses réformes, le corpus enseigné en arithmétique dans chacune de ces périodes.

1 - La période classique

1.1 - Découpage du corpus de l'arithmétique

En ce qui concerne la période classique, on peut considérer que le corpus de l'arithmétique était constitué par les rubriques suivantes que nous reprenons de la table des matières de l'Encyclopédie Quillet (édition 1958) :

Cette organisation se trouve dans des manuels d'arithmétique comme nous pouvons le voir par la table de matières du manuel d'arithmétique de F.J. (1913). Ce manuel est constitué par 7 livres dont les titres sont :

Livre I - Des nombres entiers
Livre II - Propriétés des nombres
Livre III - Des fractions
Livre IV - Puissances et racines
Livre V - Des mesures
Livre VI - Rapports et applications
Livre VII - Approximations numériques

Pour ce qui est des nombres premiers, de la divisibilité, pgcd et ppcm, nous pouvons dire que ces objets existent dans le livre II. Ce livre est composé de plusieurs chapitres dont les titres sont :

Chapitre I - Divisibilité

Définitions et théorèmes préliminaires
Caractères de divisibilité par 2 et par 5, 4 et 25
Divisibilité par 9 et par 3
Divisibilité par 11
Preuves de la multiplication et de la division
Exercices sur la divisibilité. Exercices numériques.
Exercices théoriques

Chapitre II - Théorie du plus grand commun diviseur

Définitions
Recherche du p.g.c.d. de deux nombres
Limite du nombre de divisions
Propriétés du plus grand commun diviseur
Plus grand commun diviseur de plusieurs nombres
Exercices sur le p.g.c.d.. Exercices numériques
Exercices théoriques

Chapitre III - Théorie des nombres premiers

Propriétés
Décomposition d'un nombre en facteurs premiers
Condition de divisibilité de deux nombres

Chapitre IV - Applications de la théorie des nombres premiers

Diviseurs d'un nombre
Du plus grand commun diviseur
Du plus petit commun multiple
Recherche directe du p.p.c.m. de deux nombres
Exercices sur les nombres premiers. Exercices numériques
Exercices théoriques

Dans la période classique, l'enseignement était organisé essentiellement en trois grands domaines dont l'un était l'arithmétique. Ce domaine était constitué d'un corpus stabilisé d'objets (même s'il y a des variations selon les réformes jusqu'à la période moderne) autour de quatre blocs : les nombres entiers et décimaux, les fractions, les mesures et les rapports et proportions. Les nombres premiers, pgcd, ppcm et divisibilité prenaient place dans cette organisation à la suite de l'étude des quatre opérations de l'arithmétique : addition, soustraction, multiplication et division de nombres entiers naturels. Cette organisation était fondée sur la notion de nombre et d'opération (notamment sur les techniques opératoires), et les objets en question avaient donc une niche consistant dans la présentation d'un certain nombre de propriétés des nombres.

En ce qui concerne ces variations, citons par exemple les programmes de 1920 des écoles primaires supérieures qui avaient été « débarrassés des développements théoriques sur la numération, sur les opérations, sur la recherche du plus grand commun diviseur. » Voilà par exemple ce que les auteurs d'un manuel d'arithmétique pour les écoles primaires supérieures (Royer et Court 1935) écrivent dans la préface : « *Le présent ouvrage est entièrement conforme aux programmes officiels des Ecoles primaires supérieures du 18 août 1920. Les matières y sont étudiées, en général, dans l'ordre fixé et le cours est débarrassé de quelques développements théoriques, incompatibles avec l'esprit des Instructions ministérielles du 30 septembre 1920. Nous avons réduit considérablement les théories sur la numération, sur les quatre opérations, sur le P.G.C.D. et le P.P.C.M., sur l'extraction de la racine carrée.* »

Une des *niches* occupée par nos objets consiste à donner à l'arithmétique une consistance théorique par rapport à l'algèbre, d'autre part les décompositions en facteurs premiers et le pgcd de deux nombres permettent la simplification et les opérations sur les fractions. Robert Neyret (1995), lorsqu'il analyse le traité de Bezout et celui du Baron Reynaud sur l'arithmétique, montre que l'apparition d'un chapitre indépendant sur la divisibilité dans le traité du second par rapport au premier, dans « la logique d'un exposé linéaire », permet de replacer « les différentes notions dans un environnement théorique plus important » et « de donner un statut plus « consistant » à l'arithmétique face à l'algèbre » (p.76).

L'enseignement de l'arithmétique se donnait les moyens de justifier sa place et son importance et d'être légitimé par les niches qu'il occupait : d'une part, il permettait aux commençants de s'approprier des méthodes plus simples que celles de l'algèbre, d'autre part l'organisation de cet enseignement faisait référence à des savoirs savants par l'introduction de certains chapitres plus théoriques : le chapitre sur la divisibilité en faisait partie. En outre, l'algèbre apparaissait par la suite comme « une arithmétique généralisée » ce qui lui donnait aussi un statut privilégié. Voilà, par exemple, ce que le Baron Reynaud écrit dans l'avertissement précédant les notes qu'il consacre au livre de Bezout (vu in Neyret 95, p.75) :

> « *La clarté des méthodes arithmétiques convient à la faiblesse des commençans*[1]*, et les formes variées dont elles sont susceptibles, en exerçant l'esprit des jeunes gens, les disposent à saisir les considérations abstraites de l'algèbre.*

[1] Orthographe de l'époque.

> *Les procédés algébriques, employés de trop bonne heure, accoutument les élèves à se laisser aveuglément conduire par le mécanisme des transformations, tandis que les considérations fines et ingénieuses qu'exigent les solutions arithmétiques forment le raisonnement et le préparent aux artifices brillans[1] de l'analyse.* »

R. Neyret parle de deux contraintes lors de l'organisation du texte de savoir en ce qui concerne l'arithmétique : une contrainte due à l'évolution du savoir savant - l'arithmétique devait « disposer d'un texte ayant une forte unité et une légitimité accrue, d'où l'affirmation du rôle propédeutique de l'arithmétique par rapport à l'algèbre » (p.78) et cela passe par le chapitre sur la divisibilité, et une contrainte didactique de disposer des méthodes plus simples pour que les débutants puissent résoudre des problèmes plus complexes. En résumant, les objets qui nous intéressent ont une pertinence théorique importante dans l'organisation de l'enseignement de l'arithmétique : on a alors dans l'enseignement les deux composantes de l'arithmétique, la composante « théorie des nombres » et la composante « calcul numérique ».

1.2 - Répartition des savoirs selon les niveaux

Dans la période classique, chaque cours reprend le cours précédent et se constitue aussi comme un tout structuré. Ainsi, selon R.Neyret, l'organisation est faite selon des cours concentriques : l'enfant doit à la fois repasser sur des mêmes savoirs pour une meilleure imprégnation, et chaque cours doit constituer un tout car cela facilite l'apprentissage et permet à ceux qui ne continuent pas les études d'avoir une vision cohérente et unifiée du savoir en question.

La divisibilité apparaît dans le cours moyen avec les principaux critères de divisibilité, et dans le cours supérieur on retrouve les nombres premiers, la recherche du plus grand diviseur commun et du pus petit commun multiple.

En ce qui concerne les Ecoles Normales, « le cours d'arithmétique dans une école normale doit naturellement être consacré à la révision détaillée et approfondie du cours supérieur » (vu in Neyret, p.84).

Cette organisation va changer, pas sur les contenus ni les objectifs, mais sur l'ordre d'apparition des objets et le découpage par niveaux. Ainsi dans la réforme de 1920, au lieu de cours concentriques, c'est plutôt l'idée de cours progressifs qui est mise en avant mais cela ne change pas beaucoup de choses car les objectifs généraux restent les mêmes (voir Neyret 95). Voyons les modifications sur les objets qui nous intéressent.

Dans le cours moyen, on voit disparaître « l'étude des nombres premiers, les caractères de divisibilité, le plus grand commun diviseur, en un mot tout ce qui est arithmétique pure » et le commentaire suivant précise le rapport avec l'école normale : « évidemment ces questions font la joie de quiconque a du goût pour les mathématiques. Elles continueront d'ailleurs de faire la joie de ceux qui, à l'école normale, poursuivront leurs études. » R.Neyret analyse ce passage comme le début d'une coupure entre l'enseignement primaire et la formation des instituteurs, coupure qui se précisera plus tard dans la structure même de l'organisation de l'enseignement et de la formation des maîtres. Il a mis en évidence l'influence d'Henri Lebesgue dans le fait que les fractions cessent d'être un des noyaux organisateurs de l'enseignement : du coup avec ce changement une des niches de nos objets perd de son importance.

Dans ce cas, la partie théorique de l'arithmétique est ainsi reléguée à la formation dans l'école normale ou dans l'enseignement secondaire. A ce propos, Henri Lebesgue écrit :

> « *Je demande qu'on emploie dans les hautes classes de l'enseignement secondaire les mêmes procédés que dans les basses classes et dans l'enseignement primaire ; procédés qu'actuellement on se croit de renier, de mépriser. Entre autres avantages, ceci permettrait aux élèves de bien comprendre que le seul but de l'étude de l'arithmétique, faite à la fin de l'enseignement secondaire, est d'élucider complètement, jusqu'à la formulation nette, à la compréhension consciente, ce qui avait été jusque-là senti inconsciemment et sans l'analyser.* » (p.7)

En conclusion, pour cette période, nous pouvons dire que la divisibilité, les nombres premiers, le pgcd, le ppcm sont des objets présents dans l'enseignement primaire et dans les écoles normales même si une évolution se fait sentir à partir de la réforme de 1920 et surtout après la deuxième guerre mondiale : ces objets permettaient de légitimer l'enseignement de l'arithmétique par l'existence d'une partie théorique et permettaient le travail de simplification des fractions et des opérations sur les fractions, la théorie des fractions ayant une importance décisive tant qu'un nouveau rapport aux nombres n'émerge pas surtout sous l'influence du mathématicien Henri Lebesgue.

2 - La période moderne

La période moderne est marquée par la réforme dite des mathématiques modernes qui va mettre l'accent sur les notions d'ensemble et de structure. Les programmes de 1970 gardent les contenus traditionnels liés à l'arithmétique comme ceux liés au nombre et aux opérations mais la manière de les enseigner n'est pas la même. Par exemple, en ce qui concerne le nombre l'accent est mis sur la différence entre le nombre pour exprimer le cardinal d'un ensemble et le nombre utilisé pour exprimer une mesure : il y a là une rupture avec les Instructions de 1945 qui disaient : « *On enseignera le décimètre en même temps que la dizaine.* ». Une autre distinction faite à ce moment était celle entre nombre et écriture, la place de la numération décimale étant partagée avec d'autres systèmes de numération à bases non décimales. Gustave Choquet souligne en 1959 lors des rencontres préparatoires à cette réforme :

> « *On a coutume de désigner sous le nom d'arithmétique, dans l'enseignement élémentaire, d'une part tout ce qui concerne les nombres entiers et les fractions, décimales et autres, d'autre part, un ensemble de règles compliquées qui permettent de résoudre certains problèmes crées tout spécialement pour illustrer ces règles (méthode de fausse supposition par exemple, ou partages inégaux plus ou moins compliqués). Il s'agit donc de l'étude des entiers et des rationnels, et d'un mauvais substitut à une algèbre élémentaire.*
> *Les mathématiques modernes tendent à supprimer de plus en plus les barrières entre arithmétique, algèbre, géométrie, analyse. Dans l'Enseignement Primaire et Secondaire également, il est important de ne pas opposer arithmétique et algèbre, mais au contraire d'en opérer une fusion aussi complète que possible, tout en complétant leur étude par des méthodes empruntées à l'analyse et à la géométrie.* » (pp367-368)

Et il ajoute, dans une perspective curriculaire :

> « *L'ensemble N des entiers naturels ou, mieux encore, l'ensemble Z des entiers de signe quelconque, est muni de nombreuses structures : ordre, groupe, anneau, et chacune d'elles a des caractères particuliers qui rendent Z particulièrement cher aux arithméticiens spécialisés. Si l'on ne retient de Z que sa structure algébrique (définie par l'addition et la multiplication), on dispose d'un excellent exemple de structure algébrique sur lequel on pourra faire l'étude des principales notions d'algèbre (identités remarquables, polynômes, etc.)*
> *Si l'on retient toutes ses structures, on obtient les propriétés proprement appelées arithmétiques (notion de divisibilité, nombres premiers, ... etc ..).*
> *Enfin, l'ensemble Z est un excellent matériel qu'on peut considérer comme concrétisé très tôt dans l'esprit de l'enfant ; il a un caractère « discret » qui le rend tangible ; aussi aura-t-on intérêt à l'utiliser, plutôt que la droite ou le plan, pour introduire et étudier des notions précieuses comme celles de correspondance biunivoque, de fonction, de transformation, de relation d'équivalence.*
> *En résumé, on peut utiliser ainsi l'ensemble Z des entiers :*
> *(i) avec toutes ses structures (propriétés arithmétiques) ;*
> *(ii) avec sa structure algébrique d'anneau ;*
> *(iii) comme ensemble discret particulièrement commode pour l'étude de notions d'algèbre des ensembles.* » (p.368)

Nous pouvons dire que la réforme des maths modernes n'a pas fait disparaître l'enseignement de l'arithmétique dans l'enseignement secondaire et les deux composantes de l'arithmétique (théorie des nombres et calcul numérique) y sont présentes. Par exemple, dans la classe de cinquième (programmes de 69-70-71-72), le chapitre 2 intitulé « Arithmétique » comporte les éléments suivants :

> « Ensemble des multiples d'un nombre ; division euclidienne d'un nombre naturel par un nombre naturel.
> Diviseurs d'un nombre naturel ; nombres premiers.
> Sur des exemples : pratique de la décomposition d'un nombre en un produit de nombres premiers et exercices sur les multiples communs et diviseurs communs à deux ou plusieurs nombres naturels. »

Le programme de l'école élémentaire comporte des éléments de logique, des relations, la notion de cardinal, de codage de cardinaux (numération) et codage d'ordinaux (numérotation), des opérations sur les cardinaux (en liaison avec les opérations sur les ensembles), les techniques opératoires (comme application de la découverte des propriétés des opérations et de l'utilisation de la numération de position), etc. La formation initiale des instituteurs a été alors prise en charge par l'Université en ce qui concerne les contenus mathématiques, et par l'Ecole Normale en ce qui concerne la formation professionnelle. A ce moment-là, la formation consistait donc à présenter la mathématique comme instrument de culture :

> « Un maître n'aura de liberté vis-à-vis de ce qu'il enseigne et en conséquence ne pourra accorder une autonomie à ses élèves qu'à la condition de dominer la matière enseignée. Cela nécessite en particulier *une réflexion sur la mathématique elle-même.*

En effet, dans une perspective d'enseignement, l'acquisition des notions fondamentales de base est insuffisante : le maître ne doit pas être seulement quelqu'un qui sait calculer, bien résoudre des problèmes, qui sait reconnaître dans une situation telle ou telle structure, il doit être capable d'une réflexion sur la mathématique qu'il connaît, avoir pris conscience des relations que les structures mathématiques entretiennent entre elles : les différentes rubriques du programme ne doivent pas être perçues comme juxtaposées. Une telle réflexion permettra en particulier au maître, quelle que soit la classe dans laquelle il enseigne, d'avoir pleinement conscience de la place du jalon qu'il est en train de poser, elle pourra s'appliquer, par exemple, aux propriétés des structures construites sur N, Z, Q, bien qu'elles ne figurent pas explicitement au programme. » (vu in Bulletin de l'APMEP n°258, p.28)

Dans l'esprit de ces programmes, on ne doit pas seulement former les instituteurs aux contenus qu'ils vont enseigner mais ils doivent avoir une vision plus large sur les mathématiques. Les programmes de la formation comportaient les éléments suivants :

1 - Logique et ensembles finis
2 - Ordres
3 - Algèbre
4 - Algèbre linéaire
5 - Fonctions numériques
6 - Mesure et Probabilités

Dans la partie 3, on retrouve nos objets :

Monoïde ; relation d'équivalence compatible ; monoïde quotient ; monoïde ordonné.
Groupe ; définition ; groupe opérant sur un ensemble ; groupes ordonnés ; groupes cycliques ; générateurs d'un groupe.
Exemples d'homomorphisme de groupes.
Anneaux ; anneaux d'opérateurs. Corps.
Analyse des structures de N, Z, Q.
Systèmes de numération, anneau ordonné des nombres à virgule.
Divisibilité et congruences dans Z.

Dans ces programmes, on est loin de l'état actuel de la formation des professeurs des écoles où, il nous semble que, selon nos analyses postérieures, l'empirisme gagne du terrain comme dans l'enseignement secondaire : la composante théorique y est présente ainsi que la composante calcul numérique.

3 - La période actuelle

Dans la période actuelle, les programmes de l'enseignement élémentaire (cycle 2 et 3) sont divisés en trois rubriques : nombres et calcul, géométrie et mesure. C'est dans la rubrique « Nombres et calcul » que nous trouvons des éléments de l'arithmétique, notamment ceux qui concernent la numération décimale, les techniques opératoires des quatre opérations, quelques propriétés des nombres (recherche du double, de la moitié de certains nombres ou la recherche de multiples de 2, de 5 et de10), la division euclidienne, les critères de divisibilité par 2 ou 5.

Ce qui me semple important à remarquer est le fait que désormais le savoir mathématique de référence dans la formation des instituteurs est celui du Collège. Cette conclusion a été aussi un des résultats du travail de thèse de Marie-Lise Peltier (1995). Or, au Collège l'enseignement de l'arithmétique notamment les objets « nombres premiers », « pgcd », « ppcm » et « divisibilité » ont disparu dès les programmes de 1985. Nous retrouvons ici notre question de départ : *pourquoi l'arithmétique continue-t-elle à vivre dans l'institution « PE » tout en ayant disparu de l'enseignement secondaire ?*

Il faut souligner que bien que ces objets disparaissent de l'enseignement au Collège, la formation des maîtres était réglementée par un texte où ils étaient présents. La réforme Chevènement en 1986 précise les contenus et les instructions pour la formation des instituteurs (BO n°35 - 9 octobre 1986) :

> « L'enseignement des mathématiques doit permettre à l'élève-instituteur d'établir un lien entre théorie et pratique, d'analyser des documents ou des manuels, et de comprendre le développement de la pensée logique de l'enfant. »

Quant aux contenus on a les divisions suivantes :

- Structures algébriques de base
- Arithmétique
- Décimaux et rationnels
- Relations, applications, fonctions
- Géométrie
- Langage et raisonnement
- Eléments d'histoire des mathématiques

En ce qui concerne l'arithmétique, le programme précise :

> « ensembles équipotents, ensembles finis, cardinaux. Etude de N (génération, ordre, opérations, numérations ; dénombrement, congruences) - Combinatoire - Probabilités simples. »

Actuellement, comme nous l'avons déjà dit, il n'existe pas de texte définissant les contenus précis de la formation des maîtres. La note de service du 30 janvier 1992 définit que :

> « *les épreuves du concours ont pour objectif d'apprécier l'aptitude des candidats à mobiliser et à exploiter les connaissances nécessaires à l'enseignement à l'école primaire sans exiger d'eux une connaissance approfondie de tel ou tel sujet précis dans la discipline considérée. C'est pourquoi le choix a été fait de ne pas arrêter de liste nominative de sujets pour les épreuves disciplinaires de ces concours.* »

Toutefois, lors de la formation des professeurs des écoles, il semble nécessaire de donner quelques éléments théoriques sur les connaissances d'arithmétique. On peut dire que les contenus mathématiques de l'école élémentaire nécessitent des technologies les justifiant et que ces technologies apparaissent, non pas au Collège, mais dans la formation des professeurs des écoles. Cependant, ces savoirs, si on les compare avec ceux de la réforme Chevènement, sont quand même en train de devenir évanescents. Voyons donc quelques hypothèses explicatives en ce qui concerne notre question de départ.

V - QUELQUES HYPOTHESES EXPLICATIVES

1 - Les objets mathématiques

Nous avons déjà fait une liste des contenus mathématiques existant dans l'enseignement élémentaire qui concernent l'arithmétique : le nombre et la numération, les quatre opérations de l'arithmétique, les critères de divisibilité par 2 ou 5. Il existe des techniques qui permettent d'accomplir des tâches concernant ces objets : par exemple pour accomplir la tâche « calculer 29x15 », une des techniques est celle de poser l'opération et d'utiliser la technique opératoire usuelle dans le système français. Le professeur a besoin de connaître la technologie qui permet de justifier cette technique, et le système de formation initiale prend en charge ce besoin. Une des raisons ainsi de la présence de l'arithmétique dans la formation est de satisfaire les besoins technologiques et théoriques des professeurs des écoles. Il existe toutefois d'autres aspects du programme qui nécessitent aussi des technologies : nous parlons ici du « calcul réfléchi » et de la « résolution de problèmes ».

2 - Le calcul mental

Une activité présente dans l'enseignement élémentaire est celle du calcul et notamment le calcul mental. Dans les programmes actuels pour le cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), l'une des rubriques est « Nombres et calcul » et on peut y lire :

> « *Elaboration progressive de différents procédés de calcul : calcul réfléchi (mentalement ou avec l'aide de l'écrit), technique opératoire de l'addition. Table d'addition : construction, utilisation, mémorisation. Approche des techniques opératoires de la soustraction et de la multiplication, de la table de la multiplication.* »

Il est précisé que :

> « *L'élève doit :*
> - *dans le domaine du calcul réfléchi, à partir de résultats mémorisés, savoir élaborer (mentalement ou avec l'aide de l'écrit) le résultat de certains calculs additifs, soustractifs et multiplicatifs, sans recourir nécessairement aux techniques opératoires usuelles ; il aura été particulièrement exercé à la pratique du calcul mental (il connaîtra notamment les décompositions additives des nombres jusqu'à 20 et saura les utiliser pour effectuer mentalement des additions) ;* »

Dans le cycle des approfondissements (cycle 3), il y a aussi une rubrique « Nombres et calcul », et en ce qui concerne les nombres naturels, il est écrit :

> « *pratique du calcul exact ou approché en utilisant : - les techniques opératoires, - le calcul réfléchi (mentalement ou avec l'aide de l'écrit), - la calculatrice dans les situations où son usage s'avère pertinent, - l'ordre de grandeur (encadrement, valeur approchée) ;* »

La division euclidienne vient s'ajouter aux trois autres opérations et on élargit ce type d'activité aux nombres décimaux.

Comme nous l'avons vu, l'accent dans les programmes actuels est mis sur le « calcul réfléchi », ce terme étant récent dans l'enseignement car avant on parlait essentiellement de calcul mental et de calcul écrit. Que nous dit de plus cette notion de calcul réfléchi que ce qu'on avait auparavant ?

René Taton (1953) définit le calcul mental « *comme l'art d'effectuer de tête des opérations arithmétiques, sans écrire les nombres qui y interviennent, ni utiliser aucun moyen matériel susceptible de soulager la mémoire. Mais en fait, comme nous le verrons, le champ d'action de cette activité de l'esprit s'étend à des domaines plus vastes* »(p.7) L'auteur montre l'importance de ce type d'activité dans la vie courante et même dans le calcul écrit. Il écrit :

> « *Entre tous les procédés opératoires possibles, le calcul mental doit choisir ceux qui s'adaptent le mieux à sa physionomie propre et qui, en particulier, peuvent soulager la mémoire dans l'important effort qui lui est demandé.* » (p.10)

Lorsqu'il présente certains de ces procédés dans le chapitre intitulé « La technique du calcul mental arithmétique », il écrit :

> « *L'arithmétique est le domaine d'élection du calcul mental. Aussi insisterons-nous quelque peu sur les principales méthodes relatives aux opérations arithmétiques élémentaires : addition, soustraction, multiplication, élévation à une puissance, division et extraction de racine. Nous supposerons simplement une connaissance très élémentaire de la théorie de ces opérations et nous nous efforcerons de préciser les techniques les mieux adaptées à la nature même du calcul mental, tout en situant leurs rapports avec les procédés couramment utilisés en calcul écrit.* »(p.13)

Un exemple de ce type de calcul très usuel actuellement serait : pour multiplier 13x99 on ferait alors 13x(100-1).

Une première remarque est que le nom « calcul réfléchi » n'est autre chose que ce que René Taton disait : trouver la méthode la plus adéquate pour faire un calcul mental sans surcharger la mémoire. L'existence du nom est significative du fait que le système d'enseignement élémentaire a pris ce genre de considérations en compte.
Nous le voyons dans un ouvrage destiné à la préparation du concours des professeurs des écoles (Charnay & Mante 1996) :

> « *La tradition de l'école primaire conduit à opposer calcul mental et écrit. Cette dichotomie est, en réalité, peu pertinente et ne permet pas de rendre compte de la diversité des procédures de calcul que les élèves doivent acquérir. D'une part, elle laisse de côté l'usage des calculatrices, aujourd'hui largement répandu ; d'autre part, elle méconnaît le fait qu'un calcul conduit par écrit (comme l'exécution d'un algorithme opératoire) nécessite aussi une activité mentale (rappel de résultats en mémoire, gestion de retenues,...).* » (p.113)

La distinction préconisée alors est celle du calcul automatisé et du calcul réfléchi, les auteurs le définissant ainsi :

> « *Il y a, au contraire,* ***calcul réfléchi*** *chaque fois que nous avons à élaborer une procédure spécifique pour un calcul donné, chaque fois que nous devons prendre, pour cela, des décisions personnelles.* »

Un des exemples est le calcul mental de 23x4 qui peut être fait par (23x2)x2 en décomposant 4 en facteurs premiers.

Une deuxième remarque est l'importance du calcul mental pour le développement de certaines facultés « *d'attention et de mémoire, plier l'intelligence à la gymnastique opératoire et l'amener à mieux saisir la structure des opérations, la signification abstraite des problèmes et les propriétés individuelles de chaque nombre* » (p.127) ce qui montre l'intérêt actuel pour ce calcul réfléchi.

Une troisième remarque est le besoin, essentiellement pour le maître, de connaître une théorie de ce type de calcul et notamment les propriétés des nombres. Le calcul mental permet alors de faire travailler par les élèves des propriétés des nombres qui ne seront pas forcément justifiées pendant l'enseignement élémentaire ce qui n'empêche pas que les professeurs d'école doivent les connaître. D'où la permanence dans la formation des maîtres de notions liées à la théorie des nombres notamment la divisibilité, les nombres premiers, le pgcd et le ppcm.

En conclusion, la prégnance du calcul mental et plus récemment celle du calcul réfléchi dans l'enseignement du cycle 2 et 3, et les besoins d'une technologie qui peut justifier les techniques utilisées par les élèves, est une contrainte pour le système de formation des professeurs des écoles. Il nous semble que ces besoins légitiment aussi la présence de l'étude de nos objets et donc d'une théorie élémentaire des nombres (même si elle a été très « décapitée »).

3 - La résolution de problèmes

En ce qui concerne la résolution de problèmes, nous pouvons dire qu'elle est un des noyaux organisateurs de l'activité des élèves. Voyons quelques passages du programme :

> « *Il est important que, dès le cycle des apprentissages fondamentaux, l'élève soit confronté à de véritables problèmes de recherche (qu'il n'a donc pas encore appris à résoudre) et pour lesquels il peut mettre en œuvre son esprit créatif et son imagination pour l'élaboration de solutions originales.* »

Les instructions pour le cycle 3 précisent certains aspects que nous ne détaillerons pas ici. L'existence de ce noyau n'est pas sans importance pour la formation des professeurs des écoles. Les enseignants doivent proposer des situations-problèmes aux élèves qui permettent à ceux-ci de résoudre des problèmes pour lesquels ils n'ont pas de solutions toutes faites. Comment font les enseignants pour gérer ce type de travail ? Une des hypothèses du travail de Kuzniak & Houdement est que les systèmes de formation vont créer les conditions pour que les étudiants ou les professeurs stagiaires puissent vivre ce type d'activité pour qu'ensuite, par une stratégie d'homologie, ils puissent eux-mêmes faire vivre ce type d'activités à leurs élèves.

Quel rapport à l'arithmétique ? L'enseignement de l'arithmétique donne la possibilité de faire des activités mathématiques intéressantes comme nous pouvons l'observer avec la numération (Bassis 1984) ou avec la division euclidienne (calendrier , voir Taton 1957, ou plus récemment Documents pour la formation de la Copirelem).

Ceci nous montre que les praxéologies existantes dans le système de formation ne sont pas seulement mathématiques mais sont aussi des praxéologies didactiques, comme le montre le cas de l'activité d'Odette Bassis qui concerne les bases qui ne sont plus enseignées à l'école élémentaire. Le détour du travail par d'autres systèmes de numération à base non décimale, pour comprendre le fonctionnement du système de numération décimale est ainsi possible même si certains PE2 peuvent nous demander s'ils ont encore à enseigner les bases et si non pourquoi faire ce type de travail.

4 - Différentes contraintes institutionnelles

Nous avons vu quelques raisons internes à l'institution « formation des maîtres » pour que l'arithmétique n'ait pas disparu comme fut le cas au Collège. Comment se fait-il que les besoins internes à cette institution aient été plus forts que les pressions culturelles qui ont fait disparaître ces objets de l'enseignement au Collège ?

L'enseignement des mathématiques au Collège, comme l'a montré Yves Chevallard, est soumis à une forte idéologie qui est celle de l'empirisme : on doit être proche du concret.

Ainsi, par cette idéologie empiriste, l'enseignement de l'arithmétique bascule du coté de la composante numérique dont le titre d'une des divisions actuelles « travaux numériques » est l'emblème.

Ainsi, actuellement quand on dit que l'arithmétique a disparu au Collège on parle plutôt de la théorie des nombres où la divisibilité, les nombres premiers, pgcd, ppcm avaient une part symbolique non négligeable. Le numérique prend en revanche une part considérable et toute la partie théorique disparaît de l'enseignement au collège et aussi de l'enseignement au lycée.

Le système de formation des professeurs des écoles est aussi traversé par cette idéologie (combien de fois n'entend-on pas dire aux PE2 : « à quoi cela peut-il nous servir dans notre métier ? ») mais elle est contrecarrée par une autre idéologie qui est celle de l'articulation entre théorie-pratique qui est bien explicite dans les textes de la réforme Chevènement ou dans des travaux actuels sur la formation des maîtres, comme par exemple la mise en évidence dans les stratégies de formation des stratégies de transposition (voir Houdement et Kuzniak). La négociation au sein de l'institution « PE » entre ces deux idéologies en ce qui concerne l'arithmétique permet encore de trouver à la fois la composante numérique et la composante théorique mais pour combien de temps ?

Cette négociation ne se fait pas in abstracto mais par l'intermédiaire des différents acteurs de l'institution et notamment par les formateurs de l'IUFM. Il faut préciser qu'une partie de ces formateurs sont des ex-PEN qui ont à enseigner les contenus disciplinaires notamment ceux qui concernent nos objets.

Ainsi, on peut penser qu'à défaut d'un texte qui précise les contenus disciplinaires, ils reprennent ce qu'ils faisaient avant, par tradition et pour combler un vide qui s'installerait et qui serait « insupportable » du point de vue des besoins technologiques et théoriques concernant les différents objets que nous avons mis en évidence auparavant. Nous n'avons pas les moyens de vérifier cette hypothèse mais elle nous paraît plausible. N'empêche que ce travail d'étude de la question que nous nous sommes posée met encore une fois en évidence un problème fondamental (et toujours à reprendre) pour la formation des « PE » qui est le suivant : quels sont les savoirs mathématiques et didactiques fondamentaux pour le métier de professeur des écoles, et en conséquence pour la formation des maîtres ?

BIBLIOGRAPHIE

A.P.M.E.P. (1969), Première étape... vers une réforme de l'enseignement des mathématiques dans les classes élémentaires, Rapport publié dans le Bulletin n°258, 32 pages.

A.P.M.E.P. (1972), *La mathématique à l'école élémentaire*, Paris.

Artaud M. (1997) *Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques*, in Actes de IXème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, ouvrage édité par Bailleul et alii, pp.101-139.

Assude T. (1994), *Quelques principes de l'écologie didactique des savoirs. Condensation et densité des formes de savoir.* Actes du Séminaire DidaTech, Grenoble, Séminaire n°161, pp.137-165.

Assude T (1997) Condensation et institutionnalisation: poser le problème et questions ouvertes. *Actes du séminaire Didatech*, Laboratoire Leibniz, Grenoble

Avanzini G (sous la direction de) (1981), *Histoire de la pédagogie du 17ème siècle à nos jours*, Privat, Paris.

Bassis O.(1984), *Les enfants prennent le pouvoir*, Nathan, Paris

Charnay R.& ManteM. (1996), *Préparation à l'épreuve de mathématiques du concours de professeur des écoles*, deux tomes, Hatier, Paris.

Chevallard Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.12, n°1, pp.73-112.

Chevallard Y (1994), Les processus de transposition didactique, in *La Transposition didactique à l'épreuve*, ouvrage coordonné par Arsac G. et alii, La Pensée sauvage éditions, Grenoble, pp.135- 180.

Chevallard Y (1995), *La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique*, in Actes de VIIIème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques, ed par Noirfalise R et Perrin-Glorian MJ, pp.83-122

Choquet G.(1961), L'enseignement de l'arithmétique à l'école primaire et à l'école secondaire, *Bulletin de l'APMEP*, n°215, pp.365-372

Combes J. (1997), *Histoire de l'école primaire élémentaire en France*, PUF, Que sais-je ?, Paris.

COPIRELEM, Documents pour la formation

F.J. (1913), *Eléments d'arithmétique*, A.Mame & Fils, Tours.

Lebesgue H (196 ?), Sur la mesure des grandeurs, Blanchard, Paris, édition 1975.

Houdement C & Kuzniak A (1996), Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.16.3, pp.289-322.

MEN, Programmes

M.E.N., Direction des Ecoles, Programmes de l'école primaire, CNDP, 1995.

Neyret R. (1995), *Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

Peltier M.L. (1995), *La formation initiale, en mathématiques, des professeurs d'école : « entre conjoncture et éternité »*. Thèse de l'Université de Paris VII.

Quillet, Nouvelle Encyclopédie autodidactique (1958), tome I, Paris.

Rajoson L. (1988), *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études de cas*, thèse de 3ème cycle, Université d'Aix-Marseille II.

Taton R. (1953), *Le calcul mental*, P.U.F., Que sais-je ?, Paris.

DES PROBLEMES « DISCRETS » POUR L'APPRENTISSAGE DE LA PREUVE ET DE LA MODELISATION

Denise Grenier et Charles Payan Grenoble[1]

Dans une approche épistémologique et didactique des mathématiques, nous étudions de nouvelles activités et de nouveaux contenus, à destination des élèves mais aussi pour la formation des enseignants. Notre hypothèse est la suivante : les Mathématiques Discrètes (ou, plus communément, Combinatoire) constituent un champ de problèmes nouveaux, riches et faciles d'accès, pertinents pour la formation à la démarche mathématique dans son sens le plus large, à tous les niveaux scolaires et universitaires. Nous développons cette hypothèse en nous appuyant sur plusieurs éléments : nous donnerons tout d'abord des constats et des résultats didactiques concernant l'apprentissage de la preuve et de la modélisation ; puis, nous regarderons comment, avec peu d'outils et quelques concepts de base, les mathématiques discrètes offrent une vraie place à la modélisation mathématique et à l'enjeu de vérité dans l'activité de preuve. Pour appuyer cela, nous donnons des exemples de situations qui ont été expérimentées à différents niveaux.

I. QUELQUES CONSTATS ET RESULTATS DE TRAVAUX

I.1. Positions de la Combinatoire dans l'enseignement et rapports aux mathématiques discrètes

Les mathématiques discrètes étudient les configurations qui peuvent être décrites en bijection avec N. Leur place dans des manuels scolaires est forcément implicite, puisque, si l'on excepte le chapitre « analyse combinatoire » des manuels de Terminale, ce champ des mathématiques n'est pas au programme officiel du collège et du lycée (ni même au delà). Cependant, des analyses didactiques (en particulier, Rolland 1995 et 1998) ont permis de repérer, dans les manuels du Secondaire, des problèmes relevant des mathématiques discrètes (selon les critères du savoir savant). Ces problèmes, étant bien sûr associés à des objectifs d'apprentissage du programme officiel, occupent de ce fait des positions très « inconfortables ».

---

[1] Equipe CNAM Département de Mathématiques Discrètes
Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier, Grenoble

Ainsi, on trouve, de manière récurrente, des problèmes dans lesquels la « problématique combinatoire »[1] est centrale selon le point de vue épistémologique, mais celle-ci n'intervient ni dans la présentation du problème, ni dans sa résolution : les stratégies induites par le contexte ne sont pas combinatoires. Considérons, par exemple, le problème ci-dessous (rectangle ou parallélogramme d'Euclide) :

> *Trace un rectangle ABCD tel que AB = 8 cm. et BC = 5 cm.*
> *Place un point E sur [AC] tel que AE = 3 cm.*
> *Trace la parallèle à (AD) qui passe par E ; elle coupe [AB] en N et [DC] en L.*
> *Trace la parallèle à (AB) qui passe par E ; elle coupe [AD] en M et [BC] en K.*
> *Parmi les deux rectangles EMDL et ENBK, quel est celui qui a la plus grande aire?*

La solution qui consiste à analyser la figure en sous-figures dont on compare les aires, sans aucun calcul, n'a pas de statut institutionnel au delà de l'école primaire : le problème est donné aux élèves pour faire utiliser le théorème de Pythagore (d'où le rectangle), le théorème de Thalès ou éventuellement des propriétés de trigonométrie. Or ce point de vue «combinatoire» sur la situation (décomposition en sous-figures, conservation des aires par découpage, additivité des aires) est pertinent pour deux raisons :
- il donne la solution la plus économique ;
- il permet de poser la question des hypothèses minimales sur le problème : le résultat (égalité des aires) est indépendant des mesures, est reste vrai si ABCD est un parallélogramme.

De fait, ce travail sur les aires et les formes (pavages, puzzles) n'est plus considéré comme pertinent dès le collège. Mais on trouve ces « problématiques combinatoires » dans de nombreuses activités de l'école primaire. Donnons des exemples.

Exemple 1. Les pavages.
Les objectifs pédagogiques affirmés sont parfois ambitieux. Ainsi, on trouve dans le « nouvel objectif calcul », CM1, Hatier, 1995, dans « géométrie : agencements de figures planes » :

> « Intentions pédagogiques.
> Amener les enfants à :
> - reconnaître les figures qui permettent de paver le plan, en repérant les propriétés concernant les angles et les longueurs des côtés ;
> - repérer certaines transformations géométriques (déplacements, symétrie) ;
> - retrouver l'élément de base d'un pavage. »

Réaliser un pavage, justifier la possibilité d'un pavage, sont aussi des thèmes dans d'autres manuels de CM1.

Exemple 2. Dénombrement sur des polygones ou des polyèdres.
Outre la reconnaissance de polygones ou polyèdres particuliers dans une figure donnée, on trouve des activités telles que :

[1] Nous parlerons de problématique combinatoire, comme on peut parler de problématique algébrique, géométrique ou analytique, pour dire que les objets ou les solutions du problème sont de nature combinatoire (resp. algébrique, géométrique ou analytique).

- établir le nombre de diagonales d'un polygone (pour des polygones jusqu'à 12 côtés)
- calculer le nombre de triangles dans une figure polygonale donnée
- établir la relation entre le nombre des faces, sommets et arêtes de polyèdres particuliers (pavé, prisme, pyramide, etc...

Des expérimentations concernant des PLC2, des étudiants de DEUG et Maîtrise et des enseignants, sont venues compléter ces analyses de manuels (Grenier et Payan, 1998 ; Rolland, thèse en cours). Elles révèlent un type de rapport personnel et institutionnel aux mathématiques discrètes assez répandu, que l'on peut décrire ainsi :
- il y a une restriction de ce champ des mathématiques à l'analyse combinatoire et la théorie des nombres ;
- la présence de savoirs mathématiques est souvent niée dans les problèmes qui relèvent de la Combinatoire, tels les casse-tête et autres jeux mathématiques ;
- il y a une difficulté quasi générale des "spécialistes" de maths devant une majorité des problèmes de base qui relèvent de ce domaine ; cette difficulté est attestée par l'absence de stratégies pour entrer dans le problème, et plus tard, lors de la résolution, par l'absence de critères de validation des solutions avancées.

En fait, cet état des choses place les mathématiques discrètes dans une position privilégiée intéressante pour l'utilisation que nous voulons en faire, aussi bien dans l'enseignement que pour la formation des enseignants. Nous allons développer pourquoi.

I.2. Le statut de la preuve dans l'enseignement

Cette analyse est détaillée dans Grenier-Payan (1998). Nous n'en donnons ici que les résultats essentiels. Nous avons classé ainsi les tâches et techniques qui mettent en jeu la preuve dans les manuels du secondaire.

Type 1 : observation-- preuve -- · validation par l'observation (!).

Autrement dit, l'observation est à la fois le point de départ et l'élément de validation de la preuve. Donnons pour exemple, cet extrait de Maths 4ème Collection M classique Hachette 1979, livre du prof, ch 3 Le plan P, p.36-37 :

> « [...] Dessiner une figure" signifie : "Traduisez par un dessin la situation envisagée". Cette figure est seulement un support visuel qui vous aide à raisonner, mais non à établir ce que l'on vous demande de démontrer. Vous pouvez ensuite contrôler sur cette figure si la conclusion de votre démonstration est conforme à la constatation graphique. »

Type 2 : preuve - démonstration "formelle" (liste)

Voici, par exemple, comment un mini dictionnaire pour la classe de quatrième définit une démonstration au collège :

> « Une démonstration est une succession de phrases montrant comment à partir d'hypothèses (considérées comme vraies) on peut aboutir logiquement à une conclusion en s'appuyant sur des propriétés pour lesquelles tout le monde est (alors) d'accord.
> En mathématiques, au collège, ces propriétés sont celles qui sont écrites dans les manuels de mathématiques. »

Type 3 : méthodes (pour prouver ou démontrer) ----> notions ou propriétés géométriques

Ici, il y a une technique de preuve pour chaque propriété à démontrer. Donnons l'exemple du manuel Maths Magnard, 3ème, 1989 : un « Index des méthodes » donne des techniques en distinguant un grand nombre de cas : « Comment faire pour : [...]
- Démontrer qu'un triangle est rectangle
- Démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme
- Démontrer que deux droites sont parallèles
- Démontrer que des points sont sur un même cercle
- Démontrer qu'une droite est perpendiculaire à un plan »

On retrouve cette idée dans plusieurs autres manuels, dont celui de l'IREM de Strasbourg, qui propose une liste de « clés pour démontrer que... » : les clés sont toutes reliées à des objets géométriques ou des notions.

En résumé, la preuve semble vivre essentiellement au collège dans le domaine de la géométrie et sous deux formes :
- le raisonnement déductif simple (à un petit nombre de pas), basé sur l'utilisation des propriétés ou théorèmes du cours,
- la rédaction de démonstration, où l'attention est portée sur le langage et la syntaxe plus que sur la logique et la sémantique.

Il s'agit pour l'élève d'apprendre à passer d'hypothèses qui sont données et reconnues comme vraies à une conclusion qui est donnée, ou donnée à voir comme évidente (par expérimentation et observation).
Il y a donc, de par ces choix, peu de place officielle pour l'enjeu de vérité et pour les conjectures (il est explicitement dit que l'on ne doit utiliser que les propriétés du cours ou celles d'une liste donnée).
La preuve au lycée ne semble pas porter des significations sensiblement différentes.

1.3. La place de la modélisation dans l'enseignement

Une étude du statut de la modélisation dans l'enseignement[2] révèle en particulier les aspects suivants. Bien qu'évoqué très fortement dans la présentation des programmes, le travail de modélisation est relativement absent de l'enseignement et, lorsqu'il est présent, à une situation donnée correspond en général un modèle unique. La situation est donc en fait un exercice consistant à faire fonctionner correctement le modèle auquel elle est associée et non de construire un modèle permettant de lui donner un sens. Le plus souvent d'ailleurs, on se place d'emblée dans le modèle, sauf lorsque le problème a été «habillé» après coup pour être replacé dans une situation « pseudo-concrète ».

Il y a donc peu de place effective, dans les manuels, pour l'**activité de modélisation**, même si les programmes mentionnent son importance.

Ce sont ces trois aspects de l'activité mathématique - enjeu de vérité, conjecture et modélisation - que nous mettons en avant dans les objectifs d'apprentissage qui fondent notre travail de recherche.

---

[2] J. Rolland, thèse en cours déjà citée.

I.4. Preuve et modélisation en Mathématiques Discrètes

En mathématiques discrètes, de nombreuses situations de base, parce qu'elles apparaissent souvent au premier abord comme non mathématiques, exigent un travail de «mathématisation». La modélisation apparaît alors comme permettant d'en préciser le sens. d'autre part, la diversité des modèles rend nécessaire le travail de modélisation
Plus fondamentalement, on peut considérer que c'est la modélisation elle-même qui a joué un rôle déterminant dans le genèse des mathématiques discrètes, au moins pour un domaine important de celles-ci, la Théorie des Graphes. En effet, un graphe n'est rien d'autre qu'une relation binaire et peut donc apparaître comme un objet redondant. Or le fait de considérer cet objet à travers sa représentation graphique et à travers les problématiques de structure qui lui sont liées, a donné naissance à une théorie qui a prouvé depuis sa fécondité.
Du point de vue de la preuve, nous dirons seulement ici qu'en mathématiques discrètes, elles sont souvent nécessaires car le résultat n'est pas évident, et constructives, c'est-à-dire qu'elles produisent en même temps la configuration étudiée.

II. UN MODULE « JEUX-MATHS » EN DEUG SCIENCES 1ÈRE ANNÉE

Nous menons depuis trois ans des tentatives d'insertion institutionnelle dans l'Université, des « problématiques combinatoires » liées aux mathématiques discrètes. L'enjeu est d'apporter aux étudiants un autre point de vue sur les mathématiques, aussi bien au niveau des méthodes qu'au niveau des contenus.
Nous faisons cela actuellement dans trois contextes différents :

- en DEUG Sciences 1ère année, dans le cadre de « modules libres »
- en maîtrise de mathématiques, dans le cadre des TER (Travail d'Etude et de Recherches) de didactique des mathématiques[3]
- en DEA de didactique des disciplines scientifiques, dans le cadre des mémoires associés.

Nous décrirons ici seulement le premier contexte.

Le module « Jeux-maths » fait partie des modules libres (au choix de l'étudiant) de 24 heures proposés aux étudiants de tous les DEUG Sciences du niveau 1 de notre Université (filières MIAS, SMa, SMb, SV-ST).
L'objectif annoncé aux étudiants est le suivant : « mettre en œuvre son imagination et sa créativité, dans une activité de recherche centrée sur des interrogations actuelles de mathématiciens ». Nous voulons en particulier développer chez les étudiants ce qui constitue la base de toute activité mathématique : l'activité de modélisation, la démarche de preuve, l'enjeu de vérité (le vrai et le faux).
Les questions et problèmes de recherche sont pris dans un domaine des mathématiques absent des cursus scolaires et universitaires, les Mathématiques Discrètes (pensez par exemple aux jeux mathématiques et Olympiades plutôt qu'à l'analyse combinatoire). Ce domaine de recherche est très développé notamment à Grenoble (le département de Mathématiques Discrètes de l'IMAG est un des plus importants en France).

---

[3] Les TER en question consistent en une approche didactique de problématiques liées aux mathématiques discrètes. Voici quelques exemples de sujets : La démonstration par récurrence ; Le dénombrement : de l'objet institutionnel à la modélisation ; La modélisation dans les manuels de Première et de Terminale et autres modèles en mathématiques discrètes ; Propriété d'un rectangle pavable par des rectangles ayant un côté entier ; Polyminos et induction ; Le raisonnement par l'absurde.

L'organisation pédagogique est spécifique. Elle comprend un travail de groupes, des exposés, des débats et des comptes-rendus de recherche. Les situations proposées sont des problèmes de recherche, mais aussi des problèmes « courts ». Chaque séance est décomposée en deux parties.

1. *Recherche et résolution d'un problème « long ».*

Ce problème, choisi au début de la première séance, sera travaillé tout au long des dix séances. Chaque groupe fait le point à chaque séance dans un **rapport de recherche écrit** contenant l'état des réflexions, les résultats partiels obtenus, les questions non résolues, les difficultés. En cas de difficultés majeures, il est prévu de faire le point collectivement et de renégocier la situation.

2. *Des problèmes « courts ».*

Les étudiants peuvent travailler en groupe ou individuellement. La résolution de tels problèmes se fait sur une ou deux séances et se termine par des exposés de quelques « délégués » de groupes, choisi pour l'originalité de leurs solutions par exemple, puis une synthèse collective menée par l'un des enseignants (toutes ces séances sont animées par un binôme d'enseignants chercheurs).

Au niveau des contenus, il s'agit de mettre en place ce que nous appelons « un milieu pour la combinatoire », c'est-à-dire de faire en sorte que des objets et des méthodes de mathématiques discrètes existent pour les étudiants. Mais, nous l'avons dit, nous nous intéressons surtout à l'apprentissage de la preuve et la modélisation, qui pourra être réinvesti dans d'autres domaines scientifiques. Des exemples de thèmes possibles sont donnés (les sujets sont choisis en accord avec les étudiants du module, lors de la première séance) : pavages de polyminos, empilements de sphères, fractales, rigidité de polygones, promenades dans un labyrinthe, automates, surveillance de musées, etc. Des exemples de méthodes de résolution : décomposition/recomposition, graphe, coloration, cage à pigeons, raisonnement par l'absurde, preuve par induction.

L'évaluation se fait en trois volets :

- une évaluation du travail en séance
- un devoir à la maison, dans l'esprit du travail de recherche,
- une épreuve écrite en temps limité.

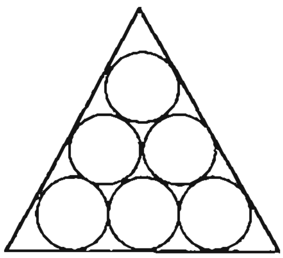
Toutes ces réflexions, ainsi que des exemples de problèmes, leurs solutions et les objectifs d'apprentissage associés, sont développés dans les articles déjà cités. En annexe, on peut trouver quelques exemples de problèmes traités en 1998. Nous allons seulement ici donner quelques unes des questions que ces situations soulèvent.

III. ELEMENTS D'ANALYSE DE QUELQUES SITUATIONS

Considérons le problème P2 : « De combien de façons différentes peut-on colorier n boules indiscernables en au plus k couleurs ? En exactement k couleurs ? ». Nos expérimentations montrent qu'il permet de travailler les aspects suivants de la démarche mathématique :
- il est possible de trouver des solutions dans des cas particuliers, par essais et comptages organisés ; ceci permet de se convaincre rapidement que les solutions ne sont pas directement des C(n, k) ;
- mais il n'est pas pour autant facile d'émettre une conjecture sur le nombre cherché ;
- la recherche d'un modèle - c'est-à-dire la réécriture d'une configuration dans un modèle théorique - dans lequel on sait compter, se révèle une sous-tâche quasi nécessaire à la résolution ; c'est en fait la tâche centrale dans ce problème.

Nous n'en dirons pas plus ici, mais la solution pour la première question (Cn+k-1, n) peut finir de convaincre : quel sens donner à n (boules) PLUS k (couleurs) MOINS une (boule ou couleur ?) ?

Examinons maintenant le problème P4.

> « Placement optimal de disques égaux dans un triangle équilatéral. On peut placer 6 disques de diamètre 1 dans un triangle équilatéral de côté 2+□3.
>
> 
>
> Est-il possible de placer ces 6 cercles dans un triangle équilatéral plus petit ?
> Est-il possible de placer 5 cercles de diamètre 1 dans un triangle équilatéral plus petit ?
> (Le problème général du placement de k cercles dans le plus petit triangle équilatéral possible est ouvert). »

Il est facile de se rendre compte assez vite que les stratégies de type « géométriques » avec calcul de longueurs, d'angles, etc.. ne peuvent aboutir : pris sous ce point de vue, le problème est trop complexe. Un travail de modélisation transforme le problème donné en un problème de placement de points. Ici, le but est d'introduire un outil « principe des cages à pigeons » qui va se révéler d'autant plus pertinent que la solution est alors très facile d'accès. C'est le même principe qui permet de résoudre économiquement le problème P5.

En mathématiques discrètes, l'induction (récurrence) a des caractéristiques très spécifiques :

- les deux versions du principe de preuve par récurrence donnés usuellement ne peuvent pas toujours fonctionner ;
- la version « descendante » (cf. dictionnaire Bouvier et al) est dans certains cas la seule possible. Elle est très souvent liée à une preuve par l'absurde. Les problèmes P3 et P1 (dans certains cas) sont des exemples types de problèmes mettant en jeu la « preuve par induction avec contre-exemple minimal ».

Ils offrent donc la possibilité de construire un nouveau rapport à l'objet « récurrence », replacé dans un contexte plus général de décomposition d'un objet en objets plus petits.

Enfin, signalons que les polyminos sont des objets fondamentaux pour les démarches combinatoires, la modélisation et la démarche de preuve (au même titre que, par exemple, les équations en algèbre). Leur définition ne présente aucune difficulté, les problèmes qu'ils soulèvent se situent à des niveaux très différents (du primaire à l'université). Nous pensons qu'il faudrait donc leur donner une vraie place dans les situations didactiques.

REFERENCES

ARSAC G. (1990) Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France, *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 9(3) 247-280.

BALACHEFF N. (1987) Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies for Mathematics*, vol.18, n°2, 147-176.

BERGE C. (1973) *Graphes et Hypergraphes*, Bordas.

CHEVALLARD Y. (1985) *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

DUCHET P. (1995) *Modélisation Combinatoires, Structures et méthodes*, Cours de DEA ouvert au télé-enseignement, Université Paris 6, Paris 1995.

GRENIER D. (1995) Savoirs en jeu dans des problèmes de combinatoire in *Différents types de savoirs et leur articulation*, Arsac G., Gréa J., Grenier D., Tiberghien A (eds), 235-251, La Pensée Sauvage, Grenoble.

GRENIER D., PAYAN CH. (1998) Spécificités de la preuve et de modélisation en Mathématiques Discrètes, *Revue de Didactique des Mathématiques*, vol. 18.2, pp. 59-100, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

LEGRAND M. (1996) La problématique des situations fondamentales, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 16/2, 221-280.

NOIRFALISE R. (1993) Contribution à l'étude didactique de la démonstration, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 13/3, 229-256.

PAYAN CH. (1995) La géométrie entre les lignes, *Cahier du séminaire DidaTech.*, Université Joseph Fourier, ed. IMAG, Grenoble.

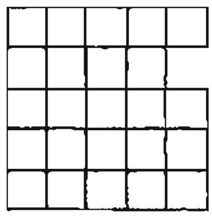
PAYAN CH. (1997) Empilement de cercles égaux dans un triangle équilatéral. A propos d'une conjecture d'Erdös-Oler, *Discrete Mathematics*, 165/166 (1997), 555-565.

ROLLAND J. (1995) *Le rôle ambigu des problèmes de combinatoire dans les manuels de troisième*, Mémoire de DEA de Didactique des Mathématiques, IMAG, Université de Grenoble.

ROLLAND J. (1998, à paraître) Des Allumettes aux polyminos : incursion des mathématiques discrètes dans la classe de troisième ? petit x n°49, ed. IREM de grenoble.

Annexe . Quelques problèmes étudiés dans le module « jeux-maths » en 1998

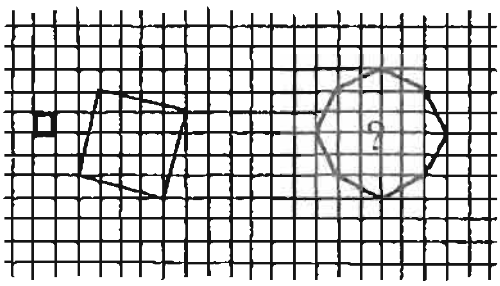
P1. Un polymino est un assemblage plan de carrés égaux (cases) tel que tout carré soit rattaché à la figure par au moins un de ses côtés. Exemples de polyminos : dominos, triminos, pentaminos. Paver un polymino consiste à le recouvrir par des polyminos plus petits de telle sorte que toute case soit recouverte une fois et une seule.
Le problème général des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour qu'on puisse paver un polymino par un type de polyminos donné n'est pas résolu. Nous nous intéresserons au problème particulier suivant :
Quels sont les polyminos carrés de côté impair tronqués d'une case que l'on peut paver avec des dominos ?



exemple : ce polymino est il pavable par des dominos ?

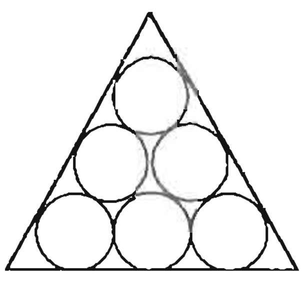
P2. De combien de façons différentes peut-on colorier n boules indiscernables en au plus k couleurs ? En exactement k couleurs ?

P3. Existe-t-il des polygones réguliers à sommets entiers (c'est-à-dire dont on peut mettre tous les sommets sur les noeuds d'une grille du plan à mailles carrées) ?



exemples de polygones à 4 et 8 côtés

P4. Placement optimal de disques égaux dans un triangle équilatéral.
On peut placer 6 disques de diamètre 1 dans un triangle équilatéral de côté 2+□3.



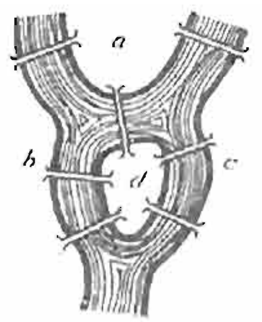
Est-il possible de placer ces 6 cercles dans un triangle équilatéral plus petit ?
Est-il possible de placer 5 cercles de diamètre 1 dans un triangle équilatéral plus petit ?

(Le problème général du placement de k cercles dans le plus petit triangle équilatéral possible est ouvert).

P5 Soient quatre entiers a, b, c, d.
Montrer que le produit des six différences (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) est un multiple de 12.

P6 Trouver en 3 pesées une pièce fausse (plus lourde ou plus légère) parmi 12 pièces.

P7 Les ponts de Kœnigsberg (parcours eulériens)
La ville de Kœnigsberg est traversée par la Pregel, qui coule de part et d'autre de l'île de Kneiphop, et qui possède sept ponts, comme le montre la figure. Un piéton peut-il en se promenant traverser une fois et une seule chaque pont ?



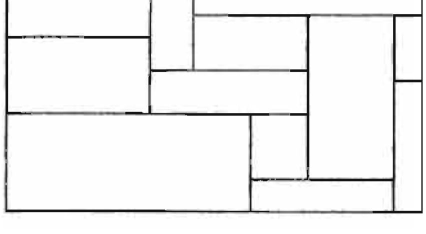
Ce problème passionnait les habitants de Kœnigsberg en 1736, lorsque Euler prouva son impossibilité

P8 Parcours de polyminos (parcours hamiltonniens)
Peut-on visiter toutes les cases d'un polymino (voir P1) en passant d'une case à une case voisine. Exemple : cas d'un polymino carré.

P9 Objets minimaux
Relier 2, 3, 4, ... points du plan par une « courbe » connexe (faite d'un seul morceau) de longueur minimale.

P10 Quel est le plus petit nombre de couleurs permettant de colorier toute carte de géographie de sorte que 2 pays ayant une frontière commune aient des couleurs différentes ?

P11. Démontrer que, si l'on peut paver un rectangle R par des rectangles dont, pour chacun, l'un (au moins) des côtés est entier, alors R a (au moins) un côté entier.



Création d'un groupe de recherche sur l'écrit en 6ème : quelles incidences sur les pratiques des enseignants ?

Jean-Claude RAUSCHER, IREM et IUFM de Strasbourg

La problématique du développement des connaissances et des pratiques chez les enseignants, posée à l'occasion de la création d'un groupe recherche à l'IREM de Strasbourg.

Quels dispositifs et quelles pratiques de formation permettent de faire évoluer les connaissances initiales et les pratiques des enseignants ? Voilà la question qui m'apparaissait essentielle à la suite de ma recherche doctorale de 1993*, il se révélait que la progression des élèves de début de collège pouvait en partie se rapporter à la capacité de leurs professeurs de mathématiques de discerner et de proposer un large éventail de traitements variés et progressifs quant aux contenus disciplinaires en jeu. Dans cette recherche, il apparaissait aussi que les professeurs les plus "performants" étaient ceux qui avaient participé au cours de leur carrière à des recherches-formations dans le cadre des IREM ou des MAFPEN. On peut donc émettre l'hypothèse selon laquelle que tout autant que des formations présentant aux professeurs des références aux modèles confirmés issues de recherches en didactique (pratiques de situation problème, prise en compte des conceptions et des représentations des élèves, analyse des tâches par exemple), c'est la participation à des recherches qui permettra aussi aux professeurs d'évoluer dans leur épistémologie et leurs pratiques.

Les conditions d'une mise à l'épreuve d'une telle hypothèse ont pu être analysées récemment dans une équipe de professeurs de collège à l'IREM de Strasbourg dans le cadre d'une recherche portant sur l'enseignement et l'apprentissage des nombres en début de collège. Les huit professeurs qui accepté de participer à ce groupe de recherche n'avaient à deux exceptions près jamais participé à des recherches à l'IREM ou à la MAFPEN. D'autre part, si le coordinateur du groupe que j'étais était convaincu de l'apport des recherches en didactique des mathématiques dans nos pratiques, en revanche les autres membres du groupe n'étaient pas, au-delà des recommandations des programmes, familiers des concepts et des pratiques issues des recherches en didactiques des mathématiques.

Le travail de cette équipe a comporté deux phases différentes. Dans un premier temps de travail s'est référé aux modèles établis par les recherches en didactique des mathématiques. Dans une deuxième phase, un objet de recherche plus neuf, ne se référant plus directement aux concepts établis de la didactique des mathématiques s'est ajouté à la perspective de recherche initiale : dans le cadre d'une recherche ADIREM/INRP sur le rôle de l'écrit au collège, la recherche était alors aussi consacrée à l'exploration de procédures qui amènent les élèves à produire des écrits leur permettant d'étayer les apprentissages et de réorganiser leurs connaissances.

La succession de ces deux phases dans le travail de l'équipe permet d'envisager la question des conditions d'intégration et de développement de connaissances didactiques chez les enseignants participants. Dans la première phase de travail, l'hétérogénéité du groupe quant à ses conceptions de l'enseignement s'est plutôt figée. Les modèles issus de la didactique des mathématiques n'ont pas été intégrés et ont suscité scepticisme et parfois rejet. A partir de la deuxième phase de travail, l'équipe s'est donnée le moyen d'expliciter à plusieurs reprises individuellement les bénéfices et les limites personnels de la recherche.

Nous pouvons donc apporter quelques éléments d'observation quant à l'évolution de la conception des pratiques chez les participants et ainsi donner quelques éléments de réponse la question des conditions d'intégration et de développement de connaissances didactiques. Dans la deuxième phase de travail, si les concepts développés par les recherches en didactique des mathématiques n'apparaissent pas non plus explicitement, les principes les justifiant sont évoqués comme des apports nouveaux dans les pratiques des participants. En effet, on voit à travers leurs évaluations comment l'introduction de cet objet de recherche a amené les participants à introduire des innovations dans leurs pratiques et comment ces innovations leur ont permis d'approfondir les connaissances quant aux modalités d'apprentissage des mathématiques chez les élèves (en particulier de tenir compte des conceptions et des représentations initiales des élèves) et de prendre conscience de leurs pratiques initiales d'enseignement pour les réaménager et les faire évoluer (en particulier de faire une place argumentée aux activités).

Présentons plus précisément les conditions d'observation et les observations réalisées.

Description du contexte de l'observation.

Les participants.

Notre équipe était constituée de huit professeurs de mathématiques de 6ème. Cette équipe était au départ hétérogène tant du point de vue des environnements dans lesquels ses membres exerçaient que du point de vue des ses rapports à la didactique et à ses recherches.

En effet, d'une part les établissements et les classes dans lesquels nous travaillions correspondaient à des environnements sociaux variés. Ainsi certains professeurs exercent dans des établissements de zones résidentielles où les élèves ont aux évaluations nationales en début sixième des résultats bien au-dessus de la moyenne nationale. D'autres exercent dans des collèges type ZEP où les résultats de début d'année sont plus inquiétants. D'autres encore exercent dans des établissements où le public est très hétérogène et les résultats proches de ceux de l'échantillon national. Cette hétérogénéité là, loin d'être un obstacle pour entamer notre recherche était un atout car représentative de différentes conditions d'enseignement.

D'autre part, il y avait des différences entre les professeurs de l'équipe quant à leur rapport initial à la recherche. Si nous étions deux à avoir déjà participé à des équipes de travail à l'IREM, pour les six autres enseignants c'était là la première expérience dans ce domaine. De façon générale, la majorité des participants n'étaient pas familiers des recherches menées en didactique des mathématiques. Quatre de ces professeurs faisaient d'ailleurs partie de l'échantillons de professeurs observés à l'occasion de mon travail de thèse (JC Rauscher, 1993, "L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes. Le cas de l'enseignement de la géométrie au début du collège.").

Cette hétérogénéité de départ se retrouvait dans les idées et les références inspirant les pratiques. Dans les premières discussions de travail que nous avions eu dans le groupe, certains mettaient avant l'importance de la mémoire et de l'apprentissage des algorithmes et exprimaient leur scepticisme quant aux options de ceux qui préconisaient des "activités" jugées trop "difficiles et complexes" pour démarrer des apprentissages.

En revanche, les participants du groupe se retrouvaient unis par leur souci d'améliorer l'efficacité de leur travail par une recherche pragmatique et ouverte à tous apports et évolutions.

Les objets de la recherche

Le contenu disciplinaire considéré.

A l'IREM de Strasbourg, dans le cadre de cette recherche d'abord menée de façon locale à l'IREM de Strasbourg, puis en collaboration avec l'INRP et l'ADIREM à propos de "L'écrit en mathématiques au collège", notre travail concernait plus spécialement **le rôle de l'écrit dans les travaux numériques au début du collège.** Tout particulièrement, nous avons abordé la recherche en considérant le problème des apprentissages relatifs aux nombres décimaux en début de collège.

Un premier volet de travail se référant aux modèles établis par les recherches en didactique des mathématiques.

Dans un premier temps de la recherche nous nous sommes attelés essentiellement à deux tâches : l'analyse des difficultés rencontrées par les élèves en début de collège, puis l'élaboration d'activités mathématiques à développer avec les élèves pour leur permettre de les surmonter.

Pour élaborer et mettre à l'épreuve dans nos classes des activités pour développer les apprentissages numériques à faire en début de collège à propos des nombres et tout particulièrement des décimaux (écriture, lecture, calculs), nous avons d'abord analysé les productions des élèves dans le cadre des évaluations nationales de début sixième. Cette analyse montre qu'en l'occurrence l'écriture et la manipulation des nombres décimaux nécessitent la maîtrise d'un système d'écriture différent de celui des entiers, même si les éléments de base sont les mêmes (chiffres) et que dans un cas comme dans l'autre la disposition de deux chiffres consécutifs se rapporte à deux nombres dans un rapport 10. Le passage des entiers aux décimaux constitue donc un obstacle qui est loin d'être levé en début de collège. Il faut donc que les élèves arrivent à réorganiser un système acquis, celui de l'écriture et des traitements des entiers, pour y intégrer les décimaux : voilà la tâche des enseignants en début de collège. Mais comment aider les élèves dans cette réorganisation ? Tel était le problème qui nous est apparu suite à notre analyse.

Pour l'élaboration d'activités mathématiques à développer pour favoriser cette réorganisation, nous avons été particulièrement attentifs à la diversité et la complexité des systèmes d'écriture (entiers, décimaux, fractions), des cadres (numérique, grandeurs) et des représentations (dimension 1 dans les graduations, dimension 2 avec les fractions d'aire) auxquels sont confrontés les élèves dans le domaine numérique. Cette diversité et cette complexité sont souvent considérées comme des sources de difficulté pour la compréhension. Mais en l'occurrence nous pensions qu'au contraire qu'elle permet aux élèves de dépasser une procédure purement algorithmique ou du moins de l'étayer et de la contrôler par des outils qui permettent de donner du sens aux traitements à effectuer. Nous avons donc élaboré et mené en classe de 6ème des activités au sujet des apprentissages dans le domaine numérique et plus précisément des calculs au programme avec les décimaux. Ces activités avaient pour but de faire dépasser aux élèves le simple traitement algorithmique des calculs et de redonner vie au développement de la conceptualisation des nombres décimaux. Pour les activités expérimentées qu'elles évoquent, les recherches effectuées par G. Brousseau, R. Douady et MJ. Perrin dans ce domaine nous ont inspirés.

On peut donc dire que ce premier temps de travail prend comme référence le modèle de travail bien connu développé par les recherches en didactique des mathématiques, à savoir l'ingénierie didactique où il s'agit après une analyse et une évaluation préalable d'élaborer des situations propices à l'appropriation des connaissances par les élèves. La notion de dialectique outil/objet et les notions de cadre et de registre précisées par les chercheurs en didactique des mathématiques (R. Douady, R. Duval) et la théorie des situations développées par G. Brousseau ont donc étayés nos travaux. Comme cela a déjà été souligné, les membres de l'équipe n'étaient pas a priori familier avec ces références : dans cette phase de travail, il y avait donc une forte composante d'initiation et de formation à l'utilisation de ces notions.

Un deuxième volet de travail de recherche plus innovant sans référence à des modèles déjà établis.

Après un an de travail, un deuxième volet de travail est venu s'ajouter au précédent à partir de la nécessité d'évaluer les effets du travail d'enseignement mis en place à la suite du premier volet et aussi à partir de la stimulation engendrée par la confrontation avec d'autres groupes menant cette recherche INRP/ADIREM lors des réunions annuelles à Paris qui nous a incité à développer un nouvel aspect de la prise en compte de l'écrit dans les apprentissages.

La première façon d'évaluer les effets d'une telle action est classique: il s'agissait en certaines occasions d'évaluation de reprendre certaines questions posées en début d'année.

La deuxième façon que nous avons eu d'évaluer les effets de notre enseignement est moins classique et c'est elle qui nous a ouvert de nouvelles perspectives relatives à la recherche sur l'écrit : elle sollicite en effet chez les élèves la production d'écrits inhabituels mais en relation avec les contenus enseignés. Il s'agissait de vérifier s'il y avait traces conscientes et restituables chez les élèves des procédures de médiation rencontrées aux cours de l'année. Par exemple en 94/95 sur le thème précis de la multiplication d'un entier par un décimal, nous avons demandé aux élèves de répondre aux questions suivantes :

7x0,5

1- Comment lis-tu cela ?

2- Quelle réponse proposes-tu ?

3- Peux-tu donner toutes les façons que tu connais pour illustrer ou effectuer ce calcul ?

4- Peux-tu donner l'énoncé d'un problème conduisant à cette opération ?

Et dans une évaluation finale nous avons proposé aux élèves de répondre au questionnaire suivant pour voir dans quelle mesure après cette année scolaire ils étaient capables de formuler les connaissances ou les activités rencontrées.

1) Qu'est-ce que tu as vu de neuf cette année en mathématiques ?
2) Dans tout ce que qu'on a fait qu'est-ce que tu as préféré ?
3) Qu'est-ce que tu as le moins aimé ?
4) Y a t il des choses qui te semblaient difficiles et que tu as maintenant comprises ?
5) Y a t il des choses que tu n'as pas comprises ?
6) Cette année, as-tu appris quelques choses de neuf sur :
a) Les nombres
b) L'addition et la soustraction
c) La multiplication
d) La division

Relativement à ce dernier questionnaire, l'analyse des productions des élèves nous montrait alors que majoritairement et tout particulièrement les élèves faibles ne formulent pas ou peu les connaissances rencontrées : "rien" ou juste une rubrique "les fractions". Mais l'on perçoit souvent l'importance d'événements personnels au cours de l'année : "le jour où j'ai compris la division par 0,1.." ou "que multiplier par un nombre c'était pas forcément plus grand".

Ces résultats, apparemment un peu maigres nous ont rendu attentifs aux possibilités offertes par ces écrits un peu inhabituels. Plutôt que de demander de telles productions écrites en fin d'année et de façon exceptionnelle, ne serait-il pas utile pour l'intégration des connaissances et le développement de capacités langagières de solliciter plus régulièrement les élèves ainsi ? Ces écrits ne pouvaient-ils pas avoir un rôle dans les processus d'apprentissage des élèves. Nous nous référions là aux travaux de MJ. Perrin ("Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les classes faibles", p 5 à 119, RDM, 1993) qui montrent que les élèves qui réussissent sont ceux qui réinvestissent les expériences acquises dans les activités dans la suite. Il est alors important de donner l'occasion aux élèves de se construire des représentations mentales par un retour réflexif sur l'action. En l'occurrence, c'est au moyen de productions écrites, individuelles, que nous avons voulu favoriser dans la suite de la recherche ce retour réflexif.
Un deuxième volet de type exploratoire s'est donc ouvert dans cette recherche : il s'agissait d'élaborer et de mettre à l'épreuve, différentes procédures permettant aux élèves grâce à des productions écrites de réaliser des retours réflexifs sur leurs connaissances. L'hypothèse était que ces écrits pourraient servir d'appui efficace pour les apprentissages considérés.

Dans la suite de notre travail, pour amorcer une activité, favoriser un retour réflexif sur les travaux ou renforcer les habitudes de contrôle, nous avons demandé à nos élèves de produire individuellement des écrits qui selon les moments où ils étaient sollicités avaient des modalités et des fonctions différentes. Nous avons exploré trois types différents de production. Nous distinguons :

- les écrits portant sur les représentations d'une notion avant son enseignement,
Voici un exemple de questionnaire proposé aux élèves avant qu'on aborde la multiplication de décimaux. Pour chacun des calculs les élèves doivent répondre à trois questions :

1) Comment lis-tu ce calcul ? (si tu vois plusieurs façons de le lire écris-les)
2) Quelle est la réponse que tu proposes ?
3) Trouve une ou des façons pour expliquer ou illustrer ce calcul à quelqu'un qui ne sait pas ce qu'il signifie.

1er calcul : 6x3	*2ème calcul : 7x0,4*
3ème calcul : 7x0,5	*4ème calcul : 0,2x0,3*

- **les écrits sollicitant un jugement étayé par des arguments s'appuyant sur références rencontrées dans les activités et permettant ainsi de contrôler ainsi des calculs préalablement effectués :**

Les élèves sont invités à revenir sur leurs productions (après une interrogation écrite par exemple) et à expliciter les connaissances mises en œuvre ou les incertitudes qu'ils ont encore. Voici un questionnaire donné en janvier par rapport à une interrogation écrite qui reprenait des calculs de début d'année du type "Calculer 7,24 - 4,3" :

En septembre :

1) Quels sont les calculs que vous avez trouvés les plus faciles et dites pourquoi. *2) Quels sont les calculs que vous avez trouvés les plus difficiles et dites pourquoi.*

En janvier :

1) Corrigez les deux feuilles en expliquant chacune de vos erreurs. *2) Y a t il des choses vues au premier trimestre qui vous ont permis de corriger ?*

- **les écrits sollicitant un retour libre sur les apprentissages (il s'agit pour les élèves d'expliciter librement les apprentissages réalisés).**

Il s'agit pour les élèves d'expliciter librement les apprentissages réalisés comme par exemple par des questions du type suivant :

Dans les apprentissages numériques récents y a t il des faits qui vous ont surpris ? Qu'avez-vous appris de neuf ? Y a t il des erreurs que vous ne faites plus maintenant ?

L'analyse des productions des élèves au cours de la progression en $6^{ème}$ montre que les élèves dans leur ensemble progressent dans leurs performances sur les contenus considérés. Certaines erreurs typiques de début d'année comme par exemple "0,48-0,3=0,45"se raréfient considérablement. Mais surtout en fin d'année beaucoup d'élèves arrivent à analyser avec leurs mots, par écrit, les erreurs de début d'année, en l'occurrence par exemple que le chiffre 3 n'a pas la même valeur dans le nombre 0,3 que le chiffre 8 dans le nombre 0,48 *("En début d'année, je faisais la faute de soustraire les dixièmes avec les centièmes")* En revanche pour expliquer leur progrès les élèves rappellent rarement les activités mises en place pour éclairer ces notions. Nous pensons qu'il n'est pas utile de préciser ici davantage les résultats observés chez les élèves.

Cette rapide esquisse du contenu de la recherche et de ses résultats auprès des élèves suffit pour préciser le contexte dans lequel nous avons observé des évolutions dans les pratiques des enseignants participant à la recherche.

Indications sur l'intégration et le développement de connaissances didactiques au sein de l'équipe.

La procédure d'observation employée :

Notre groupe était donc constitué de professeurs de collège qui en majorité au départ n'étaient pas initiés aux recherches et aux résultats de la didactique des mathématiques. Mais soucieux d'améliorer l'efficacité de notre travail avec nos élèves, nous étions prêts à mettre en commun nos expériences et à entreprendre une recherche pragmatique et ouverte aux apports pouvant s'intégrer dans nos pratiques. Outre un aspect recherche, notre travail revêtait donc indéniablement un aspect formation. Dans notre recherche, il était donc de faire un bilan sur les répercussions de notre travail sur nos pratiques en classe.
Un tel bilan ne s'est mis en place que dans la deuxième phase de notre travail de recherche (introduction et exploration de différentes modalités d'écrits chez les élèves).

Quels sont les effets de la considération explicite de la place de l'écrit dans notre enseignement sur nos pratiques ?
Pour répondre à cette question nous avons d'abord fait au bout de chacune des années de travail un bilan individuel et par écrit (il n'y avait pas de raison que nous échappions à l'objet de notre recherche...!).

A la fin de l'année 95/96 nous nous sommes soumis au questionnaire suivant :

1) Est-ce que cette recherche a modifié votre pratique d'enseignement en 6ème. En quoi ?
2) Sur quels points envisagez vous d'accentuer encore cette évolution ?
3) Décrivez ce qui mériterait d'être communiqué de notre recherche à des collègues de math qui enseignent en 6ème ou 5ème.
4) Qu'avez vous appris de neuf dans cette expérience :
a) sur les contenus enseignés ?
b) sur les façons d'enseigner ces contenus ?
c) sur les élèves ?

A la fin de l'année 96/97 nous nous sommes en outre astreints à évoquer plus précisément des exemples de changements :

A la suite de notre travail, qu'est-ce qui a changé :
- du côté des "élèves" ?
- du côtés des "enseignants" ?
Donner chaque fois des exemples précis illustrant ces changements.

Le corpus recueilli rend compte non pas des pratiques réelles en classe mais des représentations que les participants se font de leurs pratiques et surtout de leurs évolutions. Il nous donne donc des indications sur l'intégration et le développement des connaissances didactiques chez les participants de cette recherche.

Les observations.

Il nous faut distinguer la première phase de notre travail de recherche lors de laquelle nous ne nous sommes pas, soumis à un bilan écrit et pour laquelle je ne peux faire état que de mes impressions "subjectives".

Le groupe de recherche constitué était donc très hétérogène. La pratique d'analyse de productions d'élèves relatives aux évaluations nationales de début $6^{ème}$ a permis rapidement une mise au point de références communes quant à l'analyse des difficultés rencontrées dans les apprentissages numériques au début du collège. En revanche, il y avait de forts clivages en ce qui concerne les pratiques à mettre en place pour permettre aux élèves de surmonter ces obstacles. Certains pratiquaient régulièrement des "activités" en classe, destinées, d'autres ne juraient que par les apprentissages par cœur et la répétition des règles de calcul comme préalables. Je pensais qu'un travail commun d'analyse des tâches et d'élaboration d'activités réduirait cette hétérogénéité initiale. En fait, la première année, le travail a piétiné de ce point de vue et les positions ont eu tendance à se figer. Il faut bien constater qu'à ce stade, la présence d'un ou deux animateurs apportant des suggestions issues des recherches confirmées de didactique des mathématiques n'entraîne pas l'adhésion à celles-ci.

C'est en fait le deuxième volet de la recherche, l'exploration de procédures qui amènent les élèves à produire des écrits leur permettant d'étayer les apprentissages et de réorganiser leurs connaissances, qui a eu à mon avis une influence déterminante sur les conceptions et les pratiques des enseignants du groupe. Dès lors les activités proposés ont été élaborées, acceptées et intégrées par les enseignants du groupe. Cette impression se confirme avec le bilan écrit sur les répercussions de notre travail sur nos pratiques en classe.
Les réponses des professeurs rendent en fait compte d'une évolution de leurs pratiques. Il apparaît que la recherche a été révélatrice de nouveaux moyens d'enseigner. D'après leurs réponses, leurs pratiques se sont enrichies ou ont confirmé de nouveaux gestes professionnels. Ces nouveaux gestes témoignent souvent d'une nouvelle vision cohérente du métier. Dans d'autres cas en revanche, ils sont reconnus mais apparaissent en concurrence avec des habitudes et des perspectives anciennes auxquelles on tient.

Les gestes professionnels découverts ou renforcés.

On peut distinguer quatre gestes majeurs explicités par les professeurs comme étant des effets du travail de recherche entrepris.

Le premier peut se rapporter à la recherche indépendamment de son contenu spécifique : il s'agit de la **concertation et de l'échange entre collègues**.
Ainsi André écrit à propos de ce qu'il a appris sur les contenus enseignés et sur les façons de les enseigner : *"Le fait de mettre en commun, d'en discuter, permet souvent de détecter une subtilité ou une manière de faire à laquelle on n'avait pas songé. La critique est toujours constructive et les idées des collègues toujours positives et enrichissantes. Chacun a sa manière de présenter tel ou tel sujet, et le fait d'engager des réflexions en groupe, amène à parfaire la présentation et souvent à éclairer des thèmes sous des feux insoupçonnés auparavant. Les 'trucs' des uns peuvent servir aux autres, surtout s'ils 'marchent'."*

A mon avis ce sont effectivement ces échanges qui constituent un moteur nécessaire mais pas suffisant pour l'évolution des connaissances et des pratiques des uns et des autres. C'est à partir du contenu proprement dit de la recherche que les pratiques des uns et des autres se sont ouvertes à trois gestes essentiels.

Le premier de ces gestes est la **prise en compte effective des élèves dans leurs progressions**. Ainsi Edith écrit :*"J'ai davantage laissé s'exprimer les élèves, ce qui m'a permis de mieux cerner les difficultés"* André : *"Je suis davantage à l'écoute des enfants. On se prend plus le temps de vraiment faire le tour de la question, en insistant volontairement chez un élève plus faible"* et encore *"Il faut vérifier davantage si le texte lu est bien compris, car trop souvent, l'élève a tendance à lire les premiers mots et à s'imaginer la suite du texte"*. *"J'ai appris qu'il faut être plus modeste dans les exigences tout en restant inflexible sur la qualité du travail"*. *"Il est judicieux de faire formuler la question par l'élève avec son propre vocabulaire, afin de se rendre compte comment il a saisi la question"*. Gilles écrit qu'à la suite de ce travail il *"laisse davantage le temps aux élèves pour s'approprier une notion (ce peut être une semaine, un mois, un an..)"* Agnès donne une indication sur ce qui permet cette prise en compte des élèves : *"Au travers de ces écrits, je comprends mieux les élèves, je vois mieux comment ils raisonnent, ce qu'ils ont retenus, ce qui les a marqué, ce que représente la notion pour eux"* Maxime précise que pour lui :*"La correction d'un exercice ce n'est plus la donnée de la solution, mais le point de départ d'une recherche de la cause des erreurs repérées"*.

Il essaie : *"de repérer rapidement 2 ou 3 erreurs significatives et demande aux élèves concernés de transcrire leur démarche au tableau"*. Jean-Luc précise : *"J'ai appris qu'une erreur résulte rarement d'un comportement anarchique de l'élève ; l'erreur est en général le résultat d'une mauvaise interprétation qu'il faut découvrir pour y remédier"*.

Le deuxième geste : la mise en activité des élèves.

Cette perspective s'exprime parfois indépendamment des contenus d'enseignement, pour des raisons non pas didactiques, mais pédagogiques pourrait-on dire. Ainsi Jean-Luc explique une nouveauté apparue dans sa pratique : *"Avoir recours à l'aspect ludique (découpages, coloriages, séances de constructions de figures, avec différents instruments puis les colorier..) Cela permet à un élève faible d'être mis en valeur et par-là raccrocher à la matière, car il se rend compte "qu'il n'est pas totalement nul en tout"*.

Mais plus fréquemment, **c'est la prise en compte des contenus non pas de façon formelle mais dans une perspective d'activités qui font sens pour les élèves qui est évoquée** *"Je veille à donner plus de sens aux nombres décimaux, fractionnaires". "Mon but n'est plus que les élèves sachent faire par "bachotage" et répétitions d'exercices mais que les élèves sachent faire parce qu'ils ont compris ce qu'ils faisaient". "Avant cela représentait très souvent une technique, une règle de cuisine qui avait son fonctionnement propre sans avoir possibilité de recours à une vérification". "Ce n'est pas la quantité d'exercices qui est importante, mais la qualité : que ceux-ci prennent du sens, autant que possible" "Avec ce travail de recherche, les élèves semblent moins impatients d'avoir une "recette" à faire fonctionner. Ainsi, pour calculer 2:0,1 ou 6:0,2, l'interrogation "où placer la virgule dans le résultat" est moins fréquente ; elle est remplacée par "combien de fois 0,1 dans 2"*. Dans cette dernière remarque on voit qu'une sensibilisation à l'analyse des contenus fait partie des découvertes explicitées par certains.

Le troisième geste : l'analyse des contenus (analyse des tâches).

Agnès donne un exemple : *"Je m'intéresse plus au sens des mots pour les élèves. Par exemple que signifie 'diviser' ? Les élèves ont répondu 'partager'. Nous avons fait beaucoup de divisions avec la calculette (dans les cas où les diviseurs est inférieur à 1) et j'ai reposé la même question. Les élèves ont compris qu'on ne pouvait plus répondre 'partager'."*

Ces gestes ont des répercussions effectives dans les pratiques, sur la gestion du temps par l'enseignant par exemple : *"Je me permets plus souvent de faire des exercices qui autrefois me semblaient être une perte de temps (vu le temps que cela prenait par rapport au profil tiré). Mais en fait avec le recul, je m'aperçois que ce temps est gagné par la suite. Exemple : lors de la présentation des nombres décimaux, questionnement par écrit toutes les façons possibles et imaginables qu'ils ont pour les représente et les expliquer. Ensuite faire présenter à chacun sa solution aux autres. Cela permet à la longue aux timides de prendre de l'assurance, de formuler clairement leurs idées et de mettre en place un esprit critique"* (Ne retrouve-t-on pas là un modèle du type "action, formulation, validation" ?. Changements sur l'articulation entre les contenus aussi. Ainsi Gilles précise : : *"Le travail de recherche a renforcé chez moi l'idée que l'acquisition d'une notion doit être étalée sur toute l'année et qu'il faut décloisonner les chapitres. Ainsi, la notion d'aire a commencé à être vue dans la multiplication et la division par 10, 100, 1000 puis dans la multiplication de 2 décimaux. Lorsque le chapitre "aires" apparaît, certains jalons importants sont déjà posés"*.

Chez Maxime, c'est la fonction du cahier chez les élèves qui a changé : maintenant les élèves ont le droit et même le devoir de revenir sur des choses déjà écrites, de rectifier, de signaler les erreurs etc.

Ainsi s'esquissent de nouvelles pratiques qui cohabitent parfois mal avec d'anciennes convictions. Ainsi Edith est partagée : *"J'ai privilégié cette année la réflexion, ce qui est beaucoup plus intéressant ; mais est-ce bénéfique ? En particulier pour les élèves en difficulté. Ne vaut-il pas mieux faire assimiler une technique (ce qui n'empêche en rien la compréhension au moins partielle d'une notion) et attendre qu'une certaine maturité leur permette de comprendre réellement ?"* Elle fait aussi état comme d'autres de contraintes extérieures difficiles à respecter : " *Je ne suis pas sûre que ce travail est réellement payant pour les années ultérieures, parce que je n'arrive pas à boucler le programme.* Agnès aussi précise que ce qui a changé, c'est qu'avant elle terminait le programme et que maintenant elle est un peu mal à l'aise à cause de cela. Mais dans ces cas là, même s'ils ne s'intègrent pas encore dans une pratique stable et cohérente, les nouveaux gestes découverts permettront de développer petit à petit de développer de nouvelles pratiques.

En conclusion : Le problème de la formation des professeurs de mathématiques.

Dans sa recherche doctorale, J. Bolon (1996) analyse comment les enseignants tirent parti des recherches faites en didactique des mathématiques et montre combien il est difficile pour les professeurs d'intégrer des outils élaborés, séquences didactiques, issus de ces recherches dans leurs pratiques en dehors d'un contexte de formation. Pour leur part, C. Hache et A. Robert (1997), se demandent ce qu'il est possible d'enseigner comme éléments de didactique dans une formation et tout particulièrement dans une formation initiale : "Que devons-nous transmettre ? Est-ce un savoir ? Peut-il avoir une portée prescriptive, laquelle ?" Ils signalent aussi les dangers de l'entreprise entre l'informatif qui peut être perçu et sollicité comme du prescriptif et se posent alors la question de l'origine des décalages qu'on peut observer dans les formations entre les discours qui y sont tenus et leur transfert effectif.

Dans notre cas, l'analyse des déclarations montre que les professeurs qui ont participé à la recherche sur la place de l'écrit en mathématiques perçoivent dans leurs pratiques non pas l'apparition d'un modèle prescriptif formel mais celle de gestes professionnels susceptibles de favoriser les apprentissages des élèves. Plutôt que les modèles formels avancés par les recherches de didactiques des mathématiques, nous retrouvons là leurs motivations initiales fondamentales : "La didactique des mathématiques se présente, a priori, comme la science des conditions spécifiques de l'acquisition provoquée des connaissances mathématiques" (G; Brousseau, 1994, p51). D'autre part, nous trouvons évoqués par les professeurs en grande partie les perspectives qui guident les recherches en didactique des telles que les évoque N. Balacheff (Bulletin A.P.M., n°342, p94,1984) :

"La signification d'une notion mathématique n'est pas réductible au texte de l'une de ses définitions. Ce qui fait sens, c'est l'ensemble des classes de problèmes pour lesquelles cette notion constitue un outil fiable, économique de résolution". Nous retrouvons là l'idée exprimée par les professeurs de notre équipe d'une prise en compte des contenus non pas d'un point de vue formel mais dans une perspective d'activités qui font que les connaissances ont sens pour les élèves. N. Balacheff ajoute : "L'étude de la genèse d'une notion mathématique est l'un des moyens pour mettre en évidence ces classes de problèmes".

Nous ne pouvons pas dire que cette dimension est évoquée par les professeurs, de façon stricte, mais comme nous l'avons vu ils évoquent l'analyse des contenus en jeu, analyse qui met les enseignants dans la possibilité de définir des activités qui ont sens pour les élèves, tout comme la prise en compte des représentations initiales des élèves également évoquées. C'est là une autre idée directrice rappelée par N. Balacheff que nous retrouvons ici chez les enseignants de l'équipe : "L'élève n'est pas un récepteur passif de la connaissance : il agit sur elle. Il la reconstruit, rejetant ou modifiant les conceptions qu'il a déjà formées et dont les situations-problèmes peuvent manifester la défaillance. Dans ce contexte, l'erreur n'est pas analysée comme une faute mais comme un symptôme".

Nous retrouvons alors la perspective de formation des professeurs, telle que l'esquisse Guy Brousseau :"Une bonne formation mathématique des professeurs exige des connaissances mathématiques particulières, des présentations spécifiques des mathématiques qu'ils devront enseigner et aussi des connaissances des conditions didactiques de ces enseignements" (Guy Brousseau, 1994, p56). Il ajoute : "A ce sujet, une première constatation assez désagréable s'impose : la connaissance approfondie des conditions d'existence et de diffusion d'une connaissance paraît toujours beaucoup plus complexe que cette connaissance elle-même". Or il semble que ce qu'expriment les enseignants relativement aux apports de leur recherche sur la place de l'écrit dans l'enseignement des mathématiques, c'est la découverte de gestes qui leur permettent d'aborder la question de cette connaissance approfondie des conditions d'existence et de diffusion des connaissances.

Bibliographie.

J. Bolon,1996, Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école-collège, Thèse, Université rené Descartes, Paris V, Sciences Humaines Sorbonne.

G. Brousseau,1994, "Perspective pour la didactique des mathématiques", in "Vingt ans de didactique des mathématiques en France", p51 à 66, RDM, 1994.

R. Douady et M.J. Perrin,1986, "Liaison école-collège : Nombres décimaux", IREM de Paris VII.

R. Duval,1995, "Sémiosis et pensée humaine. Représentations sémiotiques et apprentissages intellectuels", Berne, Peter Lang.

C. Hache et A. Robert, 1997, "Comment, en didactique des mathématiques, prendre en compte les pratiques effectives, en classe, des enseignants de mathématiques du lycée ? ", Cahier de DIDIREM, Université Paris VII Denis Diderot.

MJ. Perrin,1993,"Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les classes faibles", p 5 à 119, RDM, 1993.

F. Pluvinage, 1977, "Difficultés des exercices scolaires", Thèse d'Etat, Strasbourg.

JC. Rauscher,1993, "L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes. Le cas de l'enseignement de la géométrie au début du collège.", Thèse USHS, IREM de Strasbourg.

Ateliers

TRAVAIL TRIANGULAIRE PIUFM / IMF / PE2 A TRAVERS L'EXEMPLE DES PROBLEMES ADDITIFS AU CE ET CM

ALAIN BRONNER, IUFM DE MONTPELLIER

SYLVIE LAUREYS ECOLE PRIMAIRE VENDARGUES

I. LES MOYENS D'UN TRAVAIL TRIANGULAIRE PIUFM / IMF / PE2

L'articulation du travail à l'IUFM et du travail dans les stages de pratiques accompagnées reste toujours problématique plusieurs années après la mise en place des IUFM. Les nombreuses réunions et commissions mises sur pied à l'IUFM de Montpellier n'ont pas débouché, de notre point de vue, sur des dispositifs donnant satisfaction aux divers acteurs de l'IUFM. En particulier, l'articulation entre la formation (disciplinaire ou générale) assurée par les professeurs de l'IUFM et celle encadrée par les IMF pendant les stages semble insuffisante dans de nombreux champs, voire inexistante dans certaines disciplines. Quand elle existe, elle repose sur l'initiative de certains formateurs qui développent des réseaux qu'il est difficile parfois de faire fonctionner dans le cadre officiel.

Si des réalisations existent dans certaines disciplines, nous avançons que l'organisation actuelle de la formation présente des obstacles à une vraie articulation théorie/pratique, ou, tout au moins, à une articulation travail à l'IUFM / travail dans les classes pour la formation PE2. En effet, même si des travaux préparés à l'IUFM donnent lieu à des expérimentations dans les classes pendant les stages de pratique accompagnée, les PE2, eux-mêmes, précisent qu'il est souvent difficile de les réaliser. Par exemple, le thème peut être complètement différent de ceux étudiés lors de la période du stage dans la classe d'accueil, les activités préparées sont difficiles à insérer dans les séquences d'apprentissage, les acquis des élèves ne leur permettent pas de s'approprier les situations ou sont insuffisants, ou encore l'enseignant qui encadre le stagiaire n'est pas d'accord avec les choix retenus,...

De plus certains phénomènes d'apprentissage et d'enseignement ne peuvent être identifiés que dans la durée, dimension qui actuellement n'est pas intégrée dans la formation à l'IUFM. On pourrait penser que les conditions du stage en responsabilité sont meilleures de ce point de vue, puisque les PE2 ont plus de liberté En fait des remarques analogues peuvent être faites, car il s'agit d'une liberté sous contraintes : un fichier à suivre parfois, des instructions assez strictes données par les enseignants quittant leur classe,... , et la visite des formateurs à préparer. De plus, les stagiaires prennent connaissance assez tard du programme qu'ils ont à traiter pour que l'on puisse réaliser un véritable travail préparatoire en équipe sur tous les thèmes se présentant aux PE2 dans un même groupe de professeurs stagiaires.

Des propositions peuvent être avancées et fonctionnent dans certaines académies. Par exemple, les stages de pratique accompagnée pourraient être remplacés ou accompagnés par des stages filés dans " des classes d'ancrage " où les PE2 iraient régulièrement une fois par semaine pendant une période déterminée. Les avantages sont multiples : travail dans la durée, prise en compte du programme traité pendant la période, suivi des évolutions d'un thème, prise en compte de l'histoire des classes, construction de projets dans les classes,... .

Des inconvénients apparaissent aussi, le travail dans la durée d'un thème réduit le nombre de disciplines donnant lieu à expérimentation compte tenu que le temps de formation est incompressible. Ainsi, les projets doivent être articulés entre les formateurs de l'IUFM, les IMF des classes d'ancrage, et les PE2. Il paraît souhaitable de créer des équipes ou des réseaux par discipline (français, mathématiques, physique, histoire, géographie,...) et par champ comme maternelle, Formation Générale et Commune,...

Cette collaboration devrait permettre de mettre au point les principes, modalités et programmes de coopération entre IMF et PIUMF pour la formation PE2.

N'étant pas satisfait de la structure existant officiellement à l'IUFM, et n'ayant pu obtenir la mise en place de classe d'ancrage, nous avons recherché un autre dispositif qui a été l'objet de l'étude de la première séance de l'atelier. Nous avons créé une structure permettant de réaliser une articulation plus satisfaisante entre le module mathématique et le travail dans les classes.

Cela a abouti à la constitution d'une équipe, le GRAME

(**G**roupe de **R**éflexion sur les **A**pprentissages **M**athématiques à l'**E**cole élémentaire).

Les objectifs généraux du groupe sont :

- de mettre en place une structure de réflexion et d'échange sur les pratiques en mathématique entre les IMF d'une part, les professeurs d'IUFM d'autre part ;
- d'articuler un travail dans les classes avec la formation donnée à l'IUFM ;
- de diffuser des résultats de la recherche en didactique des mathématiques et des sciences de l'éducation.

Ce groupe existe depuis quatre ans maintenant. Nous avons débuté en choisissant un thème général, qui pouvait intéresser de nombreux collègues IMF ou PE enseignant dans les diverses classes de l'école élémentaire, et pour lequel nous disposions de nombreux appuis dans les recherches en didactique des mathématiques, tout en restant encore problématique du point de vue des pratiques.

Le thème des problèmes additifs, regardé à travers les champs conceptuels de Vergnaud[1] nous avait paru être un bon thème, et, il nous semble que le travail réalisé a confirmé la pertinence de ce choix. Nous avons commencé par étudier et diffuser les résultats de divers travaux sur les problèmes additifs auprès de tous les membres du groupe GRAME. Ensuite, une problématique d'apprentissage de la soustraction – technique et résolution des problèmes relevant de l'addition et de la soustraction - du CP au CM a été élaborée débouchant sur une progression commune aux membres du groupe. De nombreuses séquences ont été construites en équipe et elles ont donné lieu à des expérimentations dans toutes les classes des membres du Groupe (et donc du CP au CM). Au cours de ces années, diverses évaluations et régulations des situations, ainsi qu'une reformulation des hypothèses, ont été opérées.

Cette structure a permis de créer des conditions de travail favorables à une articulation de la formation dispensée dans le module mathématique des PE2 et le travail dans les classes, et cela de façon indépendante des stages de pratique accompagnée.

[1] VERGNAUD G. (1991), *La théorie des champs conceptuels*, Vol 10/2.3, La pensée sauvage.

Un dispositif de formation, s'appuyant sur le travail de la structure GRAME, a été mis en place pour les PE2. Ainsi, à l'IUFM avec les PE2, nous avons commencé à analyser la problématique générale d'apprentissage des structures additives et de la résolution des problèmes additifs, et le début de la progression du groupe GRAME. Les PE2 procèdent ensuite à des analyses a priori de séquences particulières du groupe. Puis, par petits groupes de deux ou trois, ils mènent des observations des séquences analysées avec une grille d'observation et une répartition des tâches d'observation. Cette observation est suivie d'une analyse à chaud avec les maîtres, puis d'une analyse a posteriori à l'IUFM. La diffusion des observations et des divers problèmes rencontrés donne lieu à la mise au point d'un transparent structuré pour confrontation et échange entre les sous-groupes sur les points forts des observations. Ce travail est finalisé par la rédaction d'un document écrit, à remettre au formateur, et qui est évalué en fonction de divers critères de pertinence d'observation, d'analyse critique, et de propositions de modifications éventuelles des séances observées.

La structure GRAME, à travers le thème des structures additives, a favorisé depuis quatre ans un dispositif de formation, qui pourrait évoluer vers un dispositif institutionnel élargi, mais qui, compte tenu des diverses contraintes locales, a déjà permis un début d'articulation PIUFM / IMF / PE2.

II. TRAVAIL SUR LE THEME DES PROBLEMES ADDITIFS

Le travail du groupe a permis à chacun des membres du Groupe GRAME, et selon sa classe, de :

- Repérer les classes de problèmes difficiles et qui “ résistent ” encore au CM ;
- Étudier les procédures de résolution utilisées par les élèves ;
- Faire construire aux élèves des outils d'aide à la résolution des problèmes additifs du CP au CM2 ;
- Introduire ou renforcer les différents sens et techniques des opérations d'addition et de soustraction ;
- Établir une articulation “ minimale ” verticale du CP au CM et des progressions communes par niveau de classe assurant une cohérence intra-classe et inter-classe.

Nous nous sommes placés dans le cadre des modèles d'apprentissage de la didactique des mathématiques tout en prenant en compte les contraintes des pratiques d'enseignement mises en place dans les classes des personnes du groupe. En particulier, il s'agissait de proposer des progressions et des ingénieries, tenant compte de certains résultats des travaux en didactique, mais qui puissent être mises en œuvre dans les classes, sans nécessitées une remise en cause trop importante des pratiques des collègues de façon à pouvoir vivre toute l'année. L'intégralité de ce travail fera l'objet d'une publication ultérieure.

Deux points ont été particulièrement abordés dans l'atelier. Premièrement, nous avons rappelé les résultats de G. Vergnaud, pour lequel les problèmes additifs et soustractifs appartiennent à un même " champ conceptuel ", que l'on appelle le " champ des problèmes additifs ". Il distingue ainsi plusieurs classes de problèmes rencontrés à l'école primaire, et montre qu'il y a des décalages importants dans les réussites de ces problèmes. Les questions suivantes, qui sont des points-clefs du travail dans le Groupe GRAME et avec les PE2, ont été débattues dans l'atelier : Quels milieux peuvent convenir pour le champ des problèmes additifs ? La typologie de Vergnaud permet-elle d'élaborer une classification des situations d'apprentissage voire une progression d'apprentissage ?

Le deuxième axe de travail de l'atelier a porté sur le thème de la schématisation. L'objectif était de mener une réflexion et un échange sur la place et le rôle des schémas dans l'apprentissage de la résolution de problèmes (et notamment à propos des problèmes additifs).

Nous avons proposé dans l'atelier un travail de groupe portant sur les questions : *Faut-il introduire des schémas d'aide à la résolution des problèmes additifs ? Si oui, lesquels et de quelles manières ? Quel est alors le statut de ces schémas ?*

La documentation sur ce thème est relativement pauvre, et il existe peu de résultats fiables, à notre connaissance. Ces dernières questions font l'objet d'une recherche actuelle du Groupe GRAME. Les résultats de ce travail constitueront l'objectif d'un atelier du prochain colloque de Limoges.

LES FRACTIONS ET LES DECIMAUX AU CM1 UNE NOUVELLE APPROCHE

Rémi Brissiaud
IUFM de Versailles
Laboratoire "Cognition et activités finalisées"
Unité C.N.R.S. 7021 (UPRESA Paris 8)

Cet article présente un nouvel enchaînement des savoirs à enseigner au CM1 concernant le thème "fractions et décimaux". La progression proposée est à replacer sur l'ensemble du cycle 3. L'auteur la met en œuvre dans la collection "J'apprends les maths" RETZ (CE2 1996 ; CM1 1998 ; CM2 à paraître).
Si R. BRISSIAUD ne remet pas en cause l'entrée dans les décimaux par les fractions décimales, comme l'expliquaient les instructions officielles de 1980, il estime que cette pratique, maintenant largement répandue dans les classes, n'a pas généré une amélioration sensible des performances dans la résolution d'exercices classiques sur les décimaux.
Il propose donc de modifier le début de l'enseignement des fractions en donnant comme signification première à la notation $\frac{a}{b}$, non pas le fractionnement de l'unité comme cela est fait habituellement, mais la partition de la pluralité. Ce choix le conduit à définir une nouvelle division, "la division avec partage du reste". Il cherche ensuite à démontrer que la réussite ultérieure est essentiellement liée à l'appropriation, au CM1, de l' équivalence de deux significations de $\frac{a}{b}$ qui pourrait s'exemplifier ainsi :

$\frac{155}{3}$ se lit "155 divisé en 3" c'est $51 + \frac{2}{3}$ et c'est aussi 155 tiers . Réciproquement,

$\frac{155}{3}$ c'est aussi 155 fois un tiers ; pour trouver le nombre d'unités, on divise 155 par 3.

PLAN DU TEXTE

- C'est vraisemblablement au CM1 que se jouent les compétences futures des élèves concernant les décimaux.
- Qu'est-ce qu'un décimal ?
- Les décimaux écrits avec une virgule : ça ressemble à des entiers, ça se manipule comme des entiers, alors que ce ne sont pas des entiers.
- Un premier choix fondamental : enseigner d'abord les décimaux sous forme de fractions décimales.
- Une équivalence fondamentale pour conceptualiser les fractions : partition de la pluralité et fractionnement de l'unité.
- Un deuxième choix fondamental : donner d'abord du sens à $\frac{a}{b}$ dans un contexte de partition de la pluralité.
  - Ce qui advient lorsqu'on introduit $\frac{11}{4}$ comme "11 quarts".
  - Ce qui advient lorsqu'on introduit $\frac{11}{4}$ comme "11 divisé par 4" dans un contexte de partition de la pluralité.
  - Commencer par le sens le moins "naturel" ?
- La notion de conflit entre l'économie de la représentation et l'économie du calcul pour enseigner cette équivalence fondamentale.
  - Première étape : $\frac{a}{b}$ est défini comme "a divisé par b".
  - Deuxième étape : "3 partagé en 4", c'est "3 quarts".
  - Troisième étape : équivalences d'écritures et comparaison de fractions.
  - Quatrième étape : "155 tiers", c'est aussi "155 divisé par 3".
- Les autres choix fondamentaux et la fin de la progression.
  - Ne pas introduire d'emblée l'addition des fractions.
  - Utiliser d'abord des unités de mesure non conventionnelles pour favoriser l'appropriation de l'idée de fractionnement.
  - Enseigner l'écriture à virgule comme un simple changement de notation
  - Faire systématiquement oraliser les nombres à virgule, en explicitant les dixièmes, centièmes, etc.
- Conclusion
  - Une comparaison avec les deux progressions de référence (R. DOUADY, G. BROUSSEAU)
  - Quels résultats dans les classes expérimentales ?

C'EST VRAISEMBLABLEMENT AU CM1 QUE SE JOUENT LES COMPETENCES FUTURES DES ELEVES CONCERNANT LES DECIMAUX

Le temps que nous avons choisi de consacrer à l'apprentissage des fractions et des décimaux au CM1 est relativement important. Aussi convient-il tout d'abord de justifier un tel choix, en montrant que ce niveau de scolarité est vraisemblablement crucial pour l'appropriation de ces notions.

Les élèves comprennent mal les décimaux, ce qui les conduit à des erreurs systématiques qui, pour la plupart, sont bien connues des maîtres.

Lors de l'évaluation d'entrée en $6^{ème}$ de 1993, on demandait :
Quel est le plus grand de ces deux nombres : 6987 ou 6879 ?
Avec ces entiers, 87% des élèves ont réussi.
La même question avec les décimaux : 1,015 et 1,05 n'a conduit qu'à 52% de réussite. Un tiers des élèves ont écrit que 1,015 est plus grand que 1,05 ; vraisemblablement parce qu'ils ont comparé 15 et 5 sans se préoccuper que 15 désigne des millièmes alors que 5 désigne des centièmes.

Et lors de l'évaluation de 1997, il n'y a que 49% des élèves qui ont réussi la division 67 : 100 posée en ligne. Pour un adulte cultivé, cet exercice est très facile car diviser par 100, c'est prendre le centième.

On a donc $67 : 100 = \frac{67}{100} = 0{,}67$. Il faut croire qu'un tel raisonnement est beaucoup plus difficile qu'il ne paraît.

On ne peut même pas se rassurer en remarquant qu'un taux de réussite d'environ 50%, dans chacune de ces épreuves, est loin d'être négligeable car rien n'assure que les élèves qui réussissent ont bien compris les décimaux.

Concernant le premier exercice, on sait en effet que de nombreux maîtres enseignent la règle : "Pour comparer deux décimaux, on écrit des zéros à droite de la virgule jusqu'à ce qu'ils aient le même nombre de chiffres après la virgule". Un élève qui applique cette règle est conduit à comparer 1,015 et 1,050 et là, il ne se trompe plus parce que 15 < 50.
A-t-il pour autant mieux compris ce que sont des centièmes par rapport à des millièmes ? Rien n'est moins sûr.

La division par 100 possède, elle aussi, sa règle : "Pour diviser un nombre par 100, je décale la virgule de 2 rangs vers la gauche". Il est vraisemblable que certains élèves réussissent en utilisant cette règle sans beaucoup de connaissances concernant les décimaux.

Enseigner de telles règles est même très probablement un "piège pédagogique" parce qu'en les appliquant, certains élèves réussissent diverses tâches portant sur des décimaux alors qu'ils n'ont fondamentalement pas compris ce qu'est un décimal.

Une telle analyse est-elle purement spéculative ?

Des résultats rapportés récemment par J. BOLON[1] nous incitent à penser que non. Elle a proposé la tâche suivante à des élèves depuis la fin du CM1 jusqu'à la $5^{ème}$.
Par rapport à 7, quel est le nombre le plus proche : 6,9 ou 7,08 ?

Le tableau suivant donne les pourcentages de réussite :

Classe	CM1	CM2	$6^{ème}$	$5^{ème}$
Réussite	22%	30%	27%	29%

[1] BOLON J. (1996) Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école / collège. Thèse de Sciences de l'Education, Université Paris 5 - Sorbonne.

Comment un expert effectue-t-il cette tâche ? Il calcule d'abord les deux écarts ; celui entre 6,9 et 7 est de 1 dixième, alors que celui entre 7 et 7,08 est de 8 centièmes. Comme 8 centièmes est plus petit que 1 dixième, c'est 7,08 le plus proche de 7. La solution est donc assez immédiate pour celui qui a bien conceptualisé les décimaux.

En revanche, l'élève qui doit calculer deux soustractions, c'est-à-dire: 7 - 6,9 et 7,08 - 7 (en appliquant la fameuse règle : 7,0 - 6,9 et 7,08 - 7,00) puis comparer les résultats 0,1 et 0,08 (en appliquant la règle 0,10 et 0,08) a peu de chance de réussir.

Comment expliquer l'erreur persistante selon laquelle 6,9 serait le nombre le plus proche de 7 ? Là encore, les enfants travaillent vraisemblablement sur l'écriture des nombres indépendamment de ce qu'ils représentent. Ils savent que pour passer de l'écriture "6,9" à l'écriture "7,0", il faut "ajouter un 1", alors que pour passer de "7" à "7,08", il faut "ajouter un 8". L'écart est plus grand quand on ajoute 8 que quand on ajoute 1 ! L'erreur observée résulte bien, là encore, d'un défaut de conceptualisation, les élèves raisonnent avec ces nouveaux nombres en appliquant des règles qui ne valent que pour les entiers.

Les résultats obtenus par J. BOLON conduisent à penser que :

1°) Un petit quart des élèves ont déjà une bonne conceptualisation des décimaux dès la fin du CM1 (Cf. le pourcentage de réussite observé).

2°) En revanche, ceux qui n'ont pas compris les décimaux à ce moment, ne les comprendront vraisemblablement pas beaucoup mieux dans les quelques années qui suivent (le pourcentage de réussite n'évolue guère durant les trois années suivantes).

L'enjeu des pratiques pédagogiques des maîtres de CM1 concernant les décimaux est donc crucial ! Avant d'envisager une manière de surmonter les difficultés que les élèves rencontrent, il importe de se demander quelle en est l'origine. Celle-ci est d'abord à chercher dans la nature même des décimaux, très différente de celle des entiers : ce sont des fractions qui permettent d'approcher d'aussi près que l'on veut la mesure d'une grandeur continue quelconque.

QU'EST-CE QU'UN DECIMAL ?

S'approcher d'aussi près que l'on veut d'un nombre "irrationnel"

Considérons ce problème classique : combien la diagonale d'un carré (d) mesure-t-elle, quand on prend le côté du carré (c) comme unité de longueur ? On voit immédiatement que la diagonale contient une fois le côté mais pas deux fois.

Cette mesure, comprise entre 1 et 2, n'est donc pas un nombre entier.

Considérons une petite longueur égale à $\frac{c}{10}$. Il serait assez facile de montrer qu'on peut la reporter 14 fois sur d, mais pas 15 fois. On a donc :

$\frac{14}{10}c < d < \frac{15}{10}c$ ou encore $1{,}4\ c < d < 1{,}5\ c$.

Et en considérant une longueur encore plus petite, égale à $\frac{c}{100}$, il serait assez facile de montrer qu'on peut la reporter 141 fois sur d, mais pas 142 fois. On a donc :

$\frac{141}{100}c < d < \frac{142}{100}c$ ou encore $1{,}41\ c < d < 1{,}42\ c$.

Il importe de remarquer qu'à l'étape précédente, on avait placé la mesure de d entre deux nombres ($\frac{14}{10}$ et $\frac{15}{10}$) dont l'écart est $\frac{1}{10}$ et qu'on vient de le placer entre deux nombres ($\frac{141}{100}$ et

$\frac{142}{100}$) dont l'écart est 10 fois plus petit soit $\frac{1}{100}$.

En continuant de la sorte, on peut s'approcher d'aussi près que l'on veut de la mesure de la diagonale du carré. On n'exprimera jamais une mesure exacte de cette longueur : on sait en effet que le nombre dont on s'approche ainsi ($\sqrt{2}$) est dit *irrationnel*, ce qui signifie qu'il ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{p}{q}$. En revanche, on s'en approche d'aussi près que l'on veut par le développement décimal que nous venons d'amorcer :

$\frac{14}{10}$, $\frac{141}{100}$; $\frac{1414}{1000}$; $\frac{14142}{10000}$; etc.

C'est pour cela que le système des nombres décimaux (c'est-à-dire des fractions dont le dénominateur est une puissance de dix) a été inventé : ce système de fractions permet d'approcher d'aussi près que l'on veut la mesure de n'importe quelle grandeur continue. Les mathématiciens parlent du "filtre décimal". Il s'agit d'un filtre particulièrement intéressant parce qu'on peut régler à volonté la "taille des trous".

S'approcher d'aussi près que l'on veut d'un nombre "rationnel"

Rappelons d'abord que les nombres rationnels sont ceux qui peuvent s'écrire sous forme de fractions. A l'école élémentaire, c'est essentiellement en essayant d'approcher la valeur d'un rationnel, que les enfants vont prendre conscience de l'intérêt des nombres décimaux.

Considérons par exemple ce problème :

Lorsqu'elles sont empilées, 7 feuilles de cartons identiques forment une épaisseur totale de 10 mm. Quelle est l'épaisseur de l'une d'elle ?

Il s'agit donc de partager équitablement l'épaisseur totale de 10 mm entre les 7 feuilles identiques. Chaque feuille a une épaisseur légèrement supérieure à 1 mm. L'opération qui permet d'obtenir le résultat est une division-partition, mais une division différente de la division euclidienne parce que le reste, 3 mm, doit lui aussi être partagé entre les 7 feuilles, il s'agit donc d'une "division où l'on partage le reste".

Le lecteur sait que, dans ce cas là, on peut "pousser la division après la virgule", ce qui permet d'approcher d'aussi près que l'on veut la mesure de l'épaisseur d'une feuille, grâce à une suite décimale : 1,42857 mm, par exemple.

En revanche, les adultes cultivés ne savent pas toujours qu'il est possible d'exprimer exactement cette mesure en utilisant un rationnel :

10 divisé par 7 est très exactement égal à $(1 + \frac{3}{7})$.

Cette égalité s'obtient facilement à partir de celle de la division euclidienne :

quand on divise 10 par 7, le quotient est 1 et il reste 3.

Or, ces 3 mm qui restent doivent eux aussi être répartis entre les 7 feuilles, ce qui donne :

"3 divisé par 7" *ou* $\frac{3}{7}$ (cette conjonction "*ou*" exprime une équivalence qui sera minutieusement analysée plus loin).

Alors que le résultat de la division de 10 par 7 s'exprime exactement sous la forme $1 + \frac{3}{7}$ comment se fait-il que, la plupart du temps, on privilégie une approximation décimale de ce nombre, par exemple : 1,4285.?

Formulons différemment cette question : On comprend aisément l'utilisation du "filtre décimal" dans le cas des irrationnels, parce que ces nombres ne peuvent pas s'écrire sous forme de fractions. Mais pourquoi l'utilise-t-on également dans le cas des rationnels ?

Parce qu'il est plus facile de comparer, de faire des approximations et de calculer avec des développements décimaux qu'avec des expressions exactes qui utilisent les fractions.

Par exemple, pour comparer $\frac{4}{7}$ et $\frac{3}{5}$ à partir de leur écriture fractionnaire, il faut les réduire au même dénominateur. On obtient $\frac{4}{7}=\frac{20}{35}$ et $\frac{3}{5}=\frac{21}{35}$ ce qui permet de conclure.

Le problème de comparaison est résolu, mais on ne sait guère "ce que vaut" chacune des fractions.

En revanche, dès le second chiffre après la virgule, on voit que $\frac{4}{7}=0{,}57...$ alors que $\frac{3}{5}=0{,}6$.

Dès ce moment, on peut non seulement conclure que $\frac{4}{7}$ est plus petit que $\frac{3}{5}$ mais, de plus, on situe chacune des fraction par rapport à $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$, on a une bonne approximation de leur écart, etc.

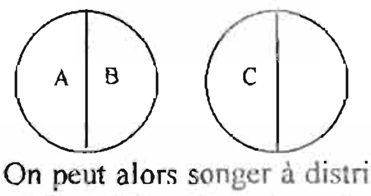
De même, lorsqu'il s'agit d'additionner, soustraire, etc., il est, le plus souvent, extrêmement commode d'opérer sur des valeurs approchées décimales, parce que les calculs ressemblent à ceux qu'on effectue sur les entiers.

Un projet présent dès l'invention des fractions.

Les nombres décimaux sont une invention récente (vers la Renaissance). En revanche, le projet auquel ils répondent (approcher d'aussi près que l'on veut la mesure d'une grandeur continue) est très ancien et remonte au moins à l'Egypte Antique, c'est-à-dire à l'invention des fractions unitaires. D'une façon générale, les seules fractions que les Egyptiens utilisaient à cette époque, étaient les fractions de numérateur 1, comme $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$ etc... c'est pour cela qu'on les appelle "unitaires". En fait, dans de nombreux contextes (mesures de capacités de céréales, d'agrumes ou de liquides), l'ensemble des fractions utilisées était encore plus restreint puisqu'il se réduisait à celles dont le dénominateur est une puissance de 2 : $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{32}$ et $\frac{1}{64}$ comme l'indique "l'œil d'Horus"(Musée de Besançon). Or, un tel système de fractions, lorsqu'on le prolonge, fonctionne de façon analogue au filtre décimal. Montrons par exemple, qu'il permet d'approcher d'aussi près que l'on veut le résultat du partage de 2 galettes entre 3 personnes A , B et C.

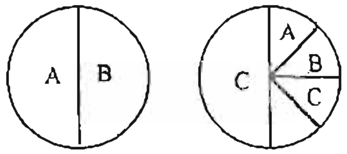
On commence par donner une demi galette à chacune des 3 personnes.

Comme $2=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}$ il reste encore une demi galette à partager.



On peut alors songer à distribuer des parts deux fois plus petites, correspondant donc à un quart de galette. Cependant, dans la demi galette restante, on ne dispose pas de trois parts de un quart de galette. En revanche, avec des parts deux fois plus petites encore (un huitième de galette), on peut en distribuer une à chacune des 3 personnes.

Comme $\frac{1}{2}=(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8})+\frac{1}{8}$ chaque personne possède alors $(\frac{1}{2}+\frac{1}{8})$ de galette et il reste encore $\frac{1}{8}$ de galette à partager.



Le même raisonnement peut être poursuivi, montrant qu'en distribuant :
$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+ \ldots$ de galette à chaque personne, en "sautant" un dénominateur possible sur deux, on s'approche de plus en plus de la valeur cherchée. On vient de montrer qu'en utilisant le filtre de fractions unitaires $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$ ...,on peut approcher, d'aussi près que l'on veut la fraction $\frac{2}{3}$ qui n'est pas unitaire.

D'un point de vue théorique, ces fractions unitaires et les décimaux ont la même fonction.

Le concept de fraction a beaucoup évolué depuis son invention

Les fractions unitaires des Egyptiens antiques sont très simples à comprendre. En revanche, la notion de rationnel est devenue aujourd'hui extrêmement complexe parce qu'un même nombre rationnel permet de rendre compte d'opérations mentales très diverses. En fait, les chercheurs en didactique des mathématiques font des analyses différentes des divers sens d'un rationnel[2].

Avançons une analyse possible en considérant par exemple la fraction $\frac{13}{4}$ et en distinguant les sortes de grandeurs que 13 et 4 sont susceptibles de représenter[3].

1°) Soit les nombres 13 et 4 renvoient à des grandeurs de natures différentes et alors $\frac{13}{4}$ se lit le plus souvent "13 pour 4"

Dans ce cas, la fraction désigne ce qu'on appelle habituellement une *proportion* (13 cas de maladie pour 4 milliers d'habitants, par exemple), proportion qui permet souvent de définir ce qu'on appelle une "grandeur quotient" : une vitesse (13 kilomètres en 4 heures), un rendement (13 hectolitres d'alcool pour 4 tonnes de raisins), etc.

2°) Soit les nombres 13 et 4 renvoient à des grandeurs de même nature et la fraction $\frac{13}{4}$ désigne alors un *rapport*. Dans le triangle ci-dessous, par exemple, le rapport 13 mm sur 4 mm est un rapport trigonométrique (la tangente de l'angle $\widehat{A}$).

Dans ce cas, $\frac{13}{4}$ se lit souvent "13 divisé par 4". Cette fraction renvoie à une "division-quotition" : "En 13 mm, combien de fois 4 mm ?"

3°) Soit le nombre 13 renvoie à une grandeur alors que le nombre 4 est sans dimension. Dans ce cas, la fraction $\frac{13}{4}$ (pour 13 mm partagés en 4, par exemple) se lit

---

[2]On trouve une synthèse récente dans :
Carpenter T., Fennema E. & Romberg T. (1993) Rational Numbers. An integration of Research. Hillsdale, N.J. : Lawrence Erlbaum.

[3]On procède ainsi à ce qu'on peut appeler une "analyse suivant les dimensions". Il est étonnant que ce type d'analyse ne soit pas plus souvent utilisé parce qu'il mène à une classification qui ne distingue pas trop de cas et, surtout, elle conduit à une classification qui semble pertinente d'un point de vue psychologique.

également "13 divisé par 4" mais elle renvoie au partage de la totalité des 13 mm en 4 parties égales. Il s'agit d'une "division-partition de la pluralité".

4°) Soit, enfin, le nombre 13 est sans dimension et il opère sur $\frac{1}{4}$ (13 fois un quart de mm, par exemple). La fraction $\frac{13}{4}$ se lit alors "13 quarts" et il s'agit d'une "partition de l'unité suivie d'une multiplication" que nous appellerons, de manière abrégée, "fractionnement de l'unité".

Quatre significations sont ainsi distinguées : proportion, rapport, partition de la pluralité et fractionnement de l'unité. La situation apparaît donc singulièrement complexe. A terme, les élèves doivent s'approprier ces différents sens de $\frac{13}{4}$.

Nous verrons qu'au CM1, l'accès aux deux premiers sens ne nous semble pas constituer un objectif raisonnable. Seule une "sensibilisation" à ces usages des fractions est d'actualité.

En revanche, nous montrerons qu'il est très important que, dès ce niveau de la scolarité, les enfants s'approprient l'équivalence : "13 partagé en 4" (division partition de la pluralité), c'est aussi "13 quarts" (fractionnement de l'unité).

Ce que nous a appris ce "détour épistémologique"

D'un point de vue conceptuel, l'intérêt fondamental des nombres décimaux est intrinsèquement lié à leur nature de fractions : ils permettent d'approcher la mesure de n'importe quelle grandeur continue d'aussi près que l'on veut (au cent-millième près, par exemple). Si l'invention des décimaux est récente, le projet auquel ils répondent est, lui, très ancien, et il existe une façon élémentaire de réaliser ce projet : l'utilisation des fractions unitaires $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; etc. Mais les décimaux ne sont pas des fractions unitaires et dès qu'une fraction n'est pas unitaire, sa complexité conceptuelle s'accroît. Concernant la fraction "3 sur 4", par exemple, nous verrons qu'il ne va pas de soi que "3 divisé par 4" est égal à "3 quarts".

Finalement, toute pédagogie des décimaux dépend de façon cruciale de la réalisation de deux objectifs, que nous allons examiner successivement :

1°) Aider les élèves à s'approprier le projet auquel répondent les décimaux.

2°) Les aider à surmonter les difficultés de conceptualisation inhérentes aux fractions qui ne sont pas unitaires.

Un obstacle important à la réalisation du premier objectif est le fait que les décimaux s'écrivent souvent sous la forme de nombres à virgule et qu'alors, les élèves peuvent être victimes d'une sorte d'effet "Canada Dry"[4].

LES DECIMAUX ECRITS AVEC UNE VIRGULE : ÇA RESSEMBLE A DES ENTIERS, ÇA SE MANIPULE COMME DES ENTIERS, ALORS QUE CE NE SONT PAS DES ENTIERS

D'un point de vue conceptuel, on vient de le voir, l'intérêt fondamental des nombres décimaux est intrinsèquement lié à leur nature de fractions : ils permettent d'approcher la mesure de n'importe quelle grandeur continue d'aussi près que l'on veut (au cent-millième

[4]Rappelons qu'il s'agit d'une marque de boisson dont la publicité, à un moment, disait que :
"Elle a la couleur de l'alcool, elle a le goût de l'alcool, mais ce n'est pas de l'alcool.".

près, par exemple). Or cette nature de fraction est masquée par l'écriture sous forme de nombres à virgule. En effet[5] :

- Quand on écrit les décimaux sous forme de nombres à virgule, ils ressemblent à des entiers et non à des fractions. Remarquons par exemple que dans cette forme d'écriture, comme dans celle d'un entier, il existe toujours un "chiffre des unités", alors que ce n'est pas le cas dans l'écriture des fractions.

Dans 358 m, par exemple, c'est le chiffre "8" qui désigne directement des mètres (les autres désignent des dizaines, etc.). Dans 42,56 m, c'est le chiffre "2". En revanche, dans $\frac{4256}{100}$ m, aucun chiffre ne renvoie directement à des mètres parce que le dénominateur indique un fractionnement de cette unité (il s'agit de centièmes de mètre) et le numérateur le nombre de tels fractionnements retenus : le "6" de 4256 désigne donc des centièmes et non des unités.

- De même, quand on calcule avec les décimaux écrits sous forme de nombres à virgule, qu'il s'agisse d'une addition, d'une soustraction ou d'une multiplication, la façon d'opérer est très proche de celle qu'on utilise avec les entiers et éloignée de celle qu'on utilise avec les fractions.

Pour l'addition et la soustraction, dans les cas des écritures à virgule comme dans celui des entiers, on commence par positionner les chiffres en colonnes. Dès lors, dans le maniement de ces écritures à virgule, il ne reste plus de trace visible de la "réduction au même dénominateur" ($\frac{14}{100} + \frac{3}{10} = \frac{14}{100} + \frac{30}{100}$) qui est caractéristique de l'addition ou la soustraction des fractions.

Pour la multiplication, avec les écritures à virgule, on commence par "faire comme s'il n'y avait pas de virgule" ; on a donc très vite l'impression d'opérer sur des entiers.

- Enfin, un adulte qui oralise un nombre à virgule (13,62 par exemple), énonce successivement deux entiers : il dit le plus souvent "treize virgule soixante deux" et non "treize virgule soixante deux centièmes". Dans la première façon d'oraliser, la plus courante vraisemblablement parce qu'elle est la plus courte, le mot "centièmes" a disparu, il ne subsiste aucun indice du fait qu'on désigne ainsi une fraction. Là encore, la façon d'oraliser les nombres à virgule est proche de celle des entiers, éloignée de celle des fractions.

En résumé, les nombres décimaux, dès qu'ils sont écrits avec une virgule, ressemblent à des entiers, ils se manipulent comme des entiers, ils s'oralisent le plus souvent comme des entiers alors que, fondamentalement, d'un point de vue conceptuel, ce sont des fractions. L'écriture à virgule est un système économique de notation des décimaux qui facilite les calculs mais qui masque leur véritable nature.

UN PREMIER CHOIX FONDAMENTAL : ENSEIGNER D'ABORD LES DECIMAUX SOUS FORME DE FRACTIONS DECIMALES

Toute progression pédagogique concernant les décimaux conduit d'abord à s'interroger sur le mode d'écriture qu'il convient d'enseigner en premier : faut-il commencer par les nombres à virgule ou les fractions décimales ?

Nous avons choisi d'enseigner d'abord les décimaux sous la forme de fractions décimales. Ce choix résulte en premier lieu d'analyses que G. BROUSSEAU a été le premier à

[5]L'analyse des nombres à virgule qui suit est très inspirée de : Hiebert J. (1992) Mathematical, cognitive and instructional analyses of decimal fraction. In Leinhardt, Putnam & Hattrup (Eds) : *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*. 283-322. Hillsdale, N.J. : Lawrence Erlbaum.

développer[6].

Longtemps, les décimaux ont été enseignés comme un recodage de mesures entières. Dans une telle approche 3,25 mètres, c'est, par définition, 325 cm. Ou encore : 3,25 est défini comme l'écriture de 325 "en prenant la centaine comme unité". Du coup, l'idée de fractionnement disparaît. Ce système de notation fonctionne comme celui des heures et des minutes, à la différence près que le groupement se fait par 10. On parle souvent à propos d'un tel système de "nombres complexes". Il se différencie de celui des décimaux du fait qu'on y groupe des unités, sans jamais les fractionner.

Les nombres décimaux ont été inventés pour permettre d'approcher la mesure d'une grandeur continue d'aussi près que l'on veut, grâce à des fractionnements de plus en plus fins (dixièmes, centièmes, etc.), c'est leur raison d'être ! Faire disparaître l'idée de fractionnement dans une progression didactique concernant les décimaux, c'est donc "passer à côté" de son objet d'étude, c'est quasiment décider de ne pas enseigner les décimaux, de laisser les élèves qui le peuvent, les inventer eux-mêmes[7].

Une autre progression pédagogique est évidemment souhaitable : celle où l'on commence par présenter aux élèves les fractions, dont les fractions décimales, en utilisant la barre de fraction comme système de notation ; puis, dans un deuxième temps, l'écriture à virgule de ces fractions décimales.

Rappelons que l'écriture à virgule des nombres décimaux est une conquête récente de l'humanité (elle date de la Renaissance). Vouloir que les enfants conceptualisent d'emblée les décimaux avec cette sorte d'écriture, alors qu'elle masque leur véritable nature, ne peut qu'échouer pour la plupart d'entre eux. Il est important que les enfants travaillent longtemps avec des nombres décimaux représentés par des fractions décimales.

Ce parcours est, à notre sens, le seul qui laisse un espoir de voir un jour les élèves conceptualiser les décimaux à l'école élémentaire dans une proportion supérieure aux résultats actuels.

Cependant, ce premier choix n'est pas suffisant. La disparition de l'idée de fractionnement n'est pas le seul risque qu'encourt une progression. Il faut, de plus, s'intéresser à la manière dont on enseigne le fractionnement.

UNE EQUIVALENCE FONDAMENTALE POUR CONCEPTUALISER LES FRACTIONS : PARTITION DE LA PLURALITE ET FRACTIONNEMENT DE L'UNITE

Nous avons vu qu'une écriture telle que $\frac{3}{4}$ peut avoir quatre sens :

- *3 pour 4* (proportion) ;

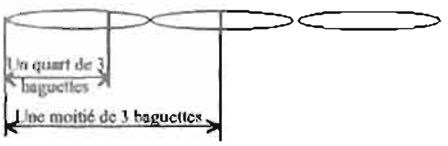
[6]Brousseau, G. (1980), Problèmes de l'enseignement des décimaux, Recherches en didactique des mathématiques, Vol 1, 1, 11-58.

Brousseau, G. (1981), Problèmes de didactique des décimaux, Recherches en didactique des mathématiques, Vol 2, 1, 37-128.

[7]Il est dommage que certains pédagogues continuent de parler systématiquement de décimaux à propos d'écritures telles que 3,25 F ou 3,600 km, ils n'aident guère les enseignants à y voir clair dans les enjeux de l'enseignement des décimaux. La notation à virgule, si elle ne s'accompagne pas de l'idée de fractionnement, ne désigne pas des décimaux. Les élèves de CE1 savent manier les écritures à virgule pour désigner des francs et des centimes alors qu'ils sont encore loin de connaître les dixièmes et les centièmes. Lorsqu'on adopte résolument le point de vue de la conceptualisation chez les élèves, face à une écriture telle que 3,25 F, il faut être prudent et parler *a priori* d'un *nombre à virgule* et non d'un décimal. Pour un élève donné, un nombre à virgule ne désigne un nombre décimal que s'il est capable d'en expliciter la notation en termes de dixièmes, centièmes, etc.

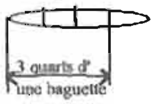
- *3 divisé par 4* dans le cas du rapport (c'est-à-dire de la division-quotition) ;
- *3 divisé par 4* dans le cas de la division-partition de la pluralité ;
- *3 quarts* (fractionnement de l'unité).

Montrons que même lorsqu'on s'intéresse seulement aux deux derniers sens, qui sont les plus simples, leur équivalence ne va pas de soi. Il n'est guère évident que "3 divisé par 4" (partition de la pluralité) et "3 quarts" (fractionnement de l'unité) conduisent au même résultat.



S'il s'agit de partager une quantité de 3 baguettes de pain en 4 parts égales, par exemple, pour procéder à la partition de cette totalité, "3 divisé par 4", on peut prendre la moitié de la moitié de 3 baguettes.

Il ne va guère de soi que la grandeur d'une part corresponde à 3 quarts de baguette ($\frac{3}{4}$), c'est-à-dire qu'elle s'obtienne aussi de la manière suivante :



on prend une seule baguette (et non plus 3) ; on la partage en 4 et l'on considère la partie formée par 3 de ces morceaux.

C'est seulement dans le cas des fractions unitaires, que les deux sens coïncident de manière évidente : 1 divisé par 2, c'est, par définition, 1 demi ; de même, 1 divisé par 3, c'est, par définition, un tiers, etc.
Dès qu'on n'est plus dans le cas de fractions unitaires, l'équivalence entre la partition de la pluralité et le geste mental consistant en un fractionnement de l'unité, ne va plus de soi.

Or, cette équivalence est celle qui "fonde" le concept de fraction[8] : elle justifie le fait que les deux gestes mentaux précédents soient désignés de la même façon, par la barre de fraction, et qu'on puisse lire indifféremment $\frac{13}{4}$ comme "13 divisé par 4" ou comme "13 quarts", c'est-à-dire, à loisir, substituer un geste à l'autre[9].

UN DEUXIEME CHOIX FONDAMENTAL : DONNER D'ABORD DU SENS A $\frac{a}{b}$ DANS UN CONTEXTE DE PARTITION DE LA PLURALITE

Une progression pédagogique où l'on enseigne d'abord les décimaux sous forme de fractions décimales n'est pas suffisante pour que les enfants conceptualisent ces nombres. En effet, depuis une dizaine d'années, il est courant que les maîtres procèdent ainsi et rien n'indique que, de façon globale, les élèves, aujourd'hui, conceptualisent mieux les décimaux qu'auparavant.

[8] Le concept de fraction (ou plutôt de rationnel) se "fonde" évidemment dans plusieurs équivalences : celles-ci "jettent des ponts" entre les différents sens d'un rationnel que nous avons distingués. L'équivalence abordée ici est quand même plus "fondamentale" que les autres parce que c'est la première qui est accessible aux élèves : sans elle, il n'y a plus de conceptualisation.

[9] Nous n'aborderons pas ici l'équivalence suivante : "En 3, combien de fois 4 ? Réponse : 3 quarts de fois " Et pourtant, c'est seulement lorsqu'on a établi la double équivalence entre d'une part "3 partagé en 4" (aspect partition) et "En 3, combien de fois 4 ?" (aspect quotition) et d'autre part "3 quarts", qu'on peut prétendre avoir établi l'équivalence entre "3 *divisé* par 4" et "3 quarts". Cependant cette autre équivalence ("En 3, combien de fois 4 ? Réponse : 3 quarts de fois." est plus complexe et relève, selon nous, plutôt du programme du CM2 et du collège. D'où le choix fait ici.

L'explication de ce phénomène est vraisemblablement la suivante : les enfants conceptualisent mal les décimaux (et ceci bien qu'on les leur présente comme fractions décimales) parce que, plus généralement, ils conceptualisent mal les fractions. En effet, dans la quasi-totalité des progressions, lors de la séance d'introduction des fractions, le sens dont on favorise l'appropriation est celui qui est lié au fractionnement de l'unité :

$\frac{11}{4}$ est d'abord défini comme "onze quarts".

Or un tel choix rend extrêmement difficile l'appropriation de l'équivalence :
"onze quarts" c'est aussi "onze divisé par 4".

Nous allons montrer qu'il est bien préférable de donner du sens à $\frac{11}{4}$ dans un contexte de partition de la pluralité (11 divisé par 4) avant de le faire dans un contexte de fractionnement de l'unité.

Ce qui advient lorsqu'on introduit $\frac{11}{4}$ comme 11 quarts

La question importante est la suivante : comment les pédagogues qui introduisent ainsi les fractions amènent-ils les enfants à s'approprier l'équivalence fondamentale, c'est-à-dire à comprendre que 11 quarts, c'est 11 divisé par 4 ?

Les enfants sont censés le découvrir lors de la recherche de la partie entière de $\frac{11}{4}$ en raisonnant comme suit : à chaque fois qu'il y a 4 quarts dans 11 quarts, cela fait une unité ; il faut donc chercher : "En 11 quarts, combien de fois 4 quarts ?", c'est-à-dire faire la division de 11 par 4.

En apparence un tel raisonnement semble établir l'équivalence fondamentale. Mais en apparence seulement. En effet, être capable de mobiliser la division comme outil pour trouver la partie entière d'une fraction n'assure nullement que, réciproquement, on sache que toute division peut être considérée comme la recherche de la partie entière d'une fraction.

Si on demande à quelqu'un d'inventer un problème correspondant à l'opération 11 : 4 , il est très probable que le problème proposé sera du type "partiton de la totalité" :
4 objets de même prix valent 11 F. Quel est le prix d'un objet ?
peut-être sera-t-il du type "quotition" :
1 m de fil électrique vaut 4 F, j'en ai acheté pour 11F. Quelle longueur de fil ai-je acheté ?.
Il n'y a pratiquement aucune chance que le problème inventé soit du type :
11 personnes mangent chacune un quart de pizzas. Quelle est la quantité de pizzas nécessaire ?

Ainsi, on peut savoir que pour chercher la partie entière de $\frac{11}{4}$, il convient de calculer "11 divisé par 4" sans savoir que $11 : 4 = \frac{11}{4}$.

Fondamentalement la raison en est que 11 : 4 évoque une pluralité d'*unités* alors que $\frac{11}{4}$ évoque une pluralité de *quarts d'unités*. Ce ne sont pas les mêmes objets psychologiques sur lesquels on opère : lors de la recherche de la partie entière, le "monde de la division" et "le monde des fractions" ne sont que très localement reliés. Pour l'essentiel, ils restent des "mondes séparés".

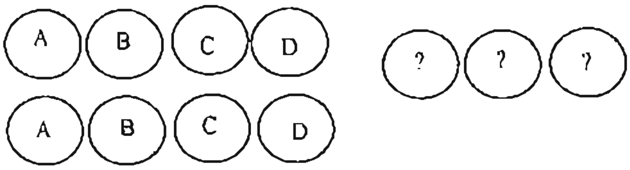
Lorsque $\frac{11}{4}$ est introduit comme 11 quarts, il donc très difficile d'établir l'équivalence $11 : 4 = \frac{11}{4}$. Mais la situation est pire concernant 3 : 4 (cas des fractions inférieures à 1). En effet, lorsqu'on cherche la partie entière de $\frac{11}{4}$ ainsi : "Dans 11 quarts, il y a 2 fois 4 quarts et il reste 3 quarts", à aucun moment on ne cherche à connaître "3 divisé par 4". Le sens "3 quarts" est le seul qui soit mobilisé dans ce raisonnement. En somme, si la recherche de la partie entière de $\frac{11}{4}$ n'établit pas l'équivalence $11 : 4 = \frac{11}{4}$.

Concernant l'équivalence $3 : 4 = \frac{3}{4}$, c'est bien pire : elle n'est pas même abordée !

Il ne faut pas s'étonner qu'une moitié seulement des élèves sachent que $67 : 100 = \frac{67}{100}$ à l'entrée en 6[e] (Evaluation nationale 1997). Le seul moment pédagogique censé les aider à comprendre cette équivalence n'a pas pu fonctionner.

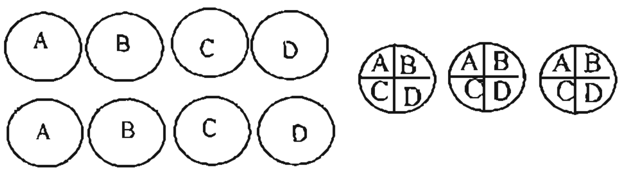
Ce qui advient lorsqu'on introduit l'écriture $\frac{11}{4}$ comme "11 divisé par 4" dans un contexte de partition de la pluralité

Supposons qu'il faille partager équitablement 11 pizzas entre 4 personnes notées A, B, C et D. On commence par donner 2 pizzas à chacun.



Mais il faut de plus donner du sens à "3 partagé en 4".

Le partage de 3 pizzas entre 4 personnes notées A, B, C et D conduit le plus souvent au schéma suivant :



L'écriture qu'on introduit pour rendre compte du partage des 11 pizzas est la suivante :

$\frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4}$

Elle se lit : 11 divisé par 4 est égal à 2 (quotient de la division euclidienne) plus le reste 3, lui-même divisé par 4. Le schéma précédent montre qu'on va pouvoir faire le lien entre "3 divisé par 4" et "3 quarts" (la suite de la progression est exposée plus loin).

Par ailleurs, une différence importante avec la progression qui vient d'être analysée, est la suivante : dès son introduction, la barre de fraction acquiert l'un des deux "grands sens" de la division, celui qui est prototypique : la partition. Il n'y aura donc aucune difficulté, le moment venu, à faire le lien avec l'usage de touche ε de la calculette : la barre de fraction, comme cette touche, sert à résoudre cette large classe de problème. Le "monde de la division" et "le monde des fractions" ont en commun tous les problèmes dont la sémantique évoque une partition. Ils sont donc très largement reliés alors que dans la progression qui commence par "11 quarts", il y a toutes les chances pour que ces mondes ne le soient que très localement.

Par ailleurs, quand il s'agira, au CM2, d'apprendre à "pousser la division après la virgule" pour faire une approximation décimale du résultat d'une division comme $17 : 3 = 5{,}666...$

le fait de connaître une expression exacte du résultat ($5 + \frac{2}{3}$) aidera les enfants à comprendre la notion même de valeur approchée : quand on peut exprimer ce vers quoi on tend, on comprend mieux la nature même du geste d'approximation.

Finalement, le choix d'introduire la barre de fraction dans un contexte de partition de la pluralité plutôt que dans un contexte de fractionnement de l'unité, aide d'une part à l'appropriation de l'équivalence fondamentale qui fonde la notion de fraction et d'autre part à comprendre que les décimaux permettent d'approcher d'aussi près que l'on veut la mesure d'une grandeur continue. En résumé, ce choix aide doublement à la conceptualisation des décimaux.

Commencer par le sens le moins "naturel" ?

Abordons une dernière objection possible. On peut considérer que la partition de la pluralité est un sens moins "naturel" que celui qui est lié au fractionnement de l'unité. Pour partie, ce sentiment résulte du fait que l'oralisation la plus fréquente de $\frac{a}{b}$ est a "$b^{\text{ièmes}}$"

Du coup, cela peut sembler paradoxal de commencer par le sens le moins naturel (a divisé par b). Ce paradoxe repose en grande partie sur une confusion. En effet, le sens divisé, bien que peu naturel, n'en est pas pour autant plus difficile : "peu naturel" et "difficile" ne sont pas synonymes. Il y a bien des choses auxquelles on ne pense pas "naturellement" et qui, quand on les découvre, paraissent simples (Comment n'y ai-je pas pensé plus tôt ?). Plus haut, nous avons commencé à présenter une façon simple d'introduire une "nouvelle division", celle où l'on partage le reste, de la noter $\frac{a}{b}$ tout en disant aux élèves que cette écriture se lit "a divisé par b". Nous verrons que la suite de cette progression n'offre pas plus de difficultés.

Allons même plus loin : lorsque le sens le moins naturel n'est pas plus difficile à acquérir que l'autre, il faut résolument aborder ce sens le moins naturel en premier. En effet, au CM1, la séquence où l'on étudie pour la première fois les fractions, est, pour les élèves, un évènement. La nouveauté du sujet abordé, crée une sorte de "prime à l'apprentissage" pour le sens qui est privilégié lors de cette situation d'introduction. Il est donc judicieux de réserver cette "prime à l'apprentissage" au sens des fractions qui est le moins naturel : la partition de la pluralité. Sinon, on l'attribue au sens le plus naturel et on ne fait que renforcer la difficulté d'accéder à l'autre sens. En l'affaire, il n'y a pas de symétrie !

Notre choix, en l'occurrence, est identique à celui que nous avons avancé dans le cas de la division euclidienne. Celle-ci, en effet, repose sur l'équivalence entre la partition et la quotition. C'est la quotition, c'est-à-dire le sens le moins naturel, celui qui n'est pas véhiculé par le mot "partage", que nous avons choisi de privilégier lors de la situation d'introduction de cette opération.

LA NOTION DE CONFLIT ENTRE L'ECONOMIE DE LA REPRESENTATION ET CELLE DU CALCUL POUR ENSEIGNER L'EQUIVALENCE QUI FONDE LE CONCEPT DE FRACTION

Lorsque le pédagogue a choisi de donner du sens à $\frac{a}{b}$ dans un contexte de partition de la pluralité, comment peut-il s'y prendre pour que la même écriture, $\frac{a}{b}$, acquière l'autre sens ? Comme dans le cas de la soustraction ou de la division euclidienne, le concept central que

nous utiliserons pour penser la progression est celui de *conflit entre l'économie de la représentation et l'économie du calcul.*
L'utilisation de ce concept amène, comme dans le cas de la soustraction et de la division euclidienne, à distinguer 4 sortes de problèmes qu'il va nous falloir ordonner parce qu'ils constitueront autant de jalons sur le parcours des enfants.
Ces problèmes sont obtenus en croisant deux facteurs :
- La sémantique de l'énoncé qui détermine *l'économie de la représentation* :
l'énoncé décrit-il une situation de partition de la pluralité ou de fractionnement de l'unité ?
- La taille relative des nombres qui détermine *l'économie du calcul* :
a est-il supérieur à b (la fraction est supérieure à 1) ou bien a est-il inférieur à b ? Dans ce dernier cas, en effet (par exemple, pour 3 pizzas partagées en 4, ce qu'on écrit $\frac{3}{4}$), le calcul économique est celui qui consiste à opérer sur une seule pizza plutôt que d'en utiliser trois, c'est-à-dire à utiliser le geste mental du fractionnement de l'unité. Dans le cas de $\frac{153}{4}$, en revanche, la recherche de la partie entière invite à calculer la division de 153 par 4, c'est-à-dire à utiliser le geste de la partition de la pluralité.

Les deux facteurs qui déterminent l'économie de la représentation et du calcul

- **Premier facteur : *la sémantique de l'énoncé.***

On partage a unités en b parties égales. Quelle est la valeur d'une part ?

Représentation économique : partition de la pluralité

On prend a fois un $b^{ième}$ d'une unité. Quelle est la valeur totale?

Représentation économique : fractionnement de l'unité

- **Second facteur : *les valeurs numériques.***

$a = 153$ et $b = 4$ $\qquad \frac{153}{4}$

Calcul économique : partition de la pluralité (153 divisé par 4)

$a = 3$ et $b = 4$ $\qquad \frac{3}{4}$

Calcul économique : fractionnement de l'unité (3 fois un quart)

Les 4 énoncés obtenus en croisant ces deux facteurs, sont rapportés ci-dessous.

Quatre problèmes qui jalonnent le début de la progression

Problème A

On partage 153 unités en 4 parts égales. Quelle est la valeur d'une part ?

Représentation économique : partition de la pluralité

Calcul économique : partition de la pluralité

Problème B

On partage 3 unités en 4 parts égales. Quelle est la valeur d'une part ?

Représentation économique : partition de la pluralité

Calcul économique fractionnement de l'unité

Problème C

On prend 3 fois un quart d'une unité. Quelle est la valeur totale ?

Représentation économique : fractionnement de l'unité

Calcul économique : fractionnement de l'unité

Problème D

On prend 153 fois un quart d'une unité. Quelle est la valeur totale ?

Représentation économique : fractionnement de l'unité

Calcul économique : partition de la pluralité

Dans les problèmes B et D, il y a donc un *conflit entre l'économie de la représentation et l'économie du calcul* au sens où le geste mental qui conduit à une représentation économique est différent de celui qui conduit à un calcul économique. Ces problèmes favorisent la substitution d'un geste mental à l'autre qui est lui est équivalent. Ils joueront donc un rôle important dans la progression.

Dans les problèmes A et C, on peut parler au contraire de *concordance entre l'économie de la représentation et l'économie du calcul*, au sens où le geste mental qui conduit à une représentation économique est le même que celui qui conduit à un calcul économique.

Première étape : $\frac{a}{b}$ est défini comme "a divisé par b"

Pour la leçon d'introduction, nous avons donc choisi de privilégier le "geste mental" de la partition de la pluralité. C'est évidemment un **problème de type A** (situation de partage d'une quantité continue *a* en *b* parts, quand *a* est supérieur à *b*) qui servira de support pour une telle séquence parce que, dans un tel problème, l'économie de la représentation, comme celle du calcul, invitent à mettre en œuvre le geste mental de la partition de la pluralité, ce qui en facilite l'enseignement.

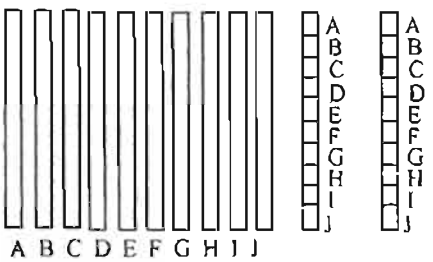
Au cours de cette séance, les enfants ont, par exemple, à résoudre les problèmes suivants :

- 7 verres de jus d'orange sont à partager entre 3 enfants.
  Quelle sera la part de chaque enfant ?

- 12 barres de chocolat sont à partager entre 10 enfants.
  Quelle sera la part de chaque enfant ?"[10]

Dans le cas du premier problème, sa résolution conduit à introduire la barre de fraction, symbole d'une nouvelle division "où l'on partage le reste" : $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$ qui se lit "7 divisé par 3 est égal à 2 plus le reste, c'est-à-dire 1, lui-même divisé par 3".

Le deuxième problème conduit à l'égalité : $\frac{12}{10} = 1 + \frac{2}{10}$ qui se lit "12 divisé par 10 est égal à 1 plus le reste, c'est-à-dire 2, lui-même divisé par 10".
La schématisation qui accompagne la résolution de ce second problème est moins évidente que celle du premier. Elle est reproduite ci-dessous (chacun des 10 enfants est représenté par les lettres A, B... J) :



On voit que lorsqu'il s'agit de partager le reste de 2 tablettes de chocolat entre 10 personnes, les enfants proposent la plupart du temps que chaque tablette soit partagée en 10 et que chaque personne forme sa part en prélevant "un divisé par dix" sur chacune des tablettes.

Ce mode de résolution est en effet le plus accessible (il s'agit du "premier niveau de résolution" de ce type de problème).

Remarque :

Devant des écritures du type $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{10}$; etc., il est important de les oraliser, à ce moment de la progression, "3 divisé par 4"; "divisé par 10", etc. Cela ne sera pas facile pour l'enseignant, car ses habitudes sont plutôt de dire "3 quarts", "2 dixièmes", etc. Mais c'est l'objectif de l'étape suivante d'établir l'équivalence entre ces deux façons de s'exprimer.
La seule exception à cette recommandation est celle où le numérateur est 1 car alors, "1 quart" est de manière évidente synonyme de "1 divisé par 4". Dès lors, quand des élèves utilisent la formulation "1 quart", il est normal de la retenir tout en lui donnant le synonyme "1 divisé par 4".

Deuxième étape : "3 partagé en 4" c'est "3 quarts"

La barre de fraction a été introduite dans un contexte où elle renvoie à la partition de la pluralité. Notre objectif est maintenant que les élèves s'approprient l'équivalence entre ce geste mental de partition de la pluralité et celui du fractionnement de l'unité. Les **problèmes de type B** (la sémantique est du côté de la partition de la pluralité, mais le calcul économique du côté du fractionnement de l'unité), sont évidemment adaptés à un tel objectif : les enfants commencent par se représenter le geste de partition de la pluralité, l'économie du calcul les conduit à l'autre geste.

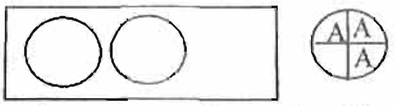
Dans la séquence correspondante, les élèves sont confrontés à une activité où ils doivent partager équitablement 3 pizzas entre 4 personnes (Anne, Betty, Céline et Diane), mais dans deux contextes différents.
Dans le premier de ces contextes, les élèves ont la possibilité de partager chacune des pizzas

[10]Une situation où il s'agirait de partager 123 barres entre 10 enfants serait préférable parce que favorisant mieux la division du point de vue du calcul (*a* est très supérieur à *b*), mais le souci d'autoriser le dessin d'un schéma qui représente la situation, nous a conduit à commencer par une valeur numérique plus petite et à interroger ensuite dans le cas de valeurs numériques plus grandes.

alors que dans l'autre contexte, il n'est plus possible de procéder ainsi parce qu'une seule des pizzas est sortie du four et Anne doit prélever sa part sans toucher aux autres.
Nous avons déjà présenté la procédure que la plupart des enfants adoptent dans le premier de ces contextes (chaque enfant est désigné par son initial A, B, C ou D) :

Pour partager équitablement 3 pizzas entre 4 personnes, le premier niveau de procédure que des enfants (ou même des adultes) emploient, consiste en effet à partager chacune d'elle en 4.

Or il n'est plus possible de procéder ainsi dans le second contexte. En effet, une seule pizza est sortie du four et Anne doit prélever sa part sans toucher aux autres pizzas.



C'est à ce moment que les élèves sont susceptibles de prendre conscience que lors d'un partage équitable de 3 pizzas entre 4 personnes, la valeur d'une part est de 3 fois un quart.

Remarque :
On pourrait croire que l'enfant qui partage chaque pizza en quarts et qui prélève un quart sur chacune d'elle (1er niveau de procédure) utilise l'équivalence fondamentale (3 partagé en 4, c'est 3 quarts). En fait, l'apparence est trompeuse parce que lorsqu'il s'y prend ainsi, l'enfant utilise la même procédure que pour partager équitablement un ensemble composé d'une pizza, d'une quiche et d'une tarte. Rien n'assure que les quarts prélevés sur chacune des trois pizzas soient considérés comme égaux. En revanche, le prélèvement de chaque quart sur la même pizza atteste de cette égalité et, finalement, de l'équivalence entre "3 divisé par 4" et "3 quarts".

Troisième étape : équivalences d'écritures et comparaison de fractions

Dans la troisième étape, notre objectif est d'aider les enfants à s'approprier le geste mental qu'ils viennent tout juste de découvrir : celui du fractionnement de l'unité. Nous utilisons pour cela, des situations comme celle du **problème C** : *"On prend 3 fois un quart d'une unité. Quelle est la valeur totale ?"*, parce que la représentation économique et le calcul économique sont tous les deux associés au fractionnement de l'unité.
Une question se pose cependant : avec un tel énoncé, le maître sollicite un schématisation (prendre les $\frac{3}{4}$ d'une pizza, par exemple) mais ne pose pas réellement un problème. En fait, cette partie de la progression correspond au travail sur les équivalences d'écritures comme, par exemple, $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$ et les comparaisons de fractions, par exemple, comparer $\frac{1}{2}$ et $\frac{4}{10}$.
En effet, certaines équivalences d'écritures doivent nécessairement être enseignés dès le CM1, bien qu'elles n'apparaissent pas explicitement au programme. C'est le cas de l'équivalence du type $\frac{3}{10}=\frac{30}{100}$ car elle justifie qu'avec les écritures à virgule, on puisse écrire : 0,3 = 0,30 (on peut "écrire un zéro" à droite des chiffres après la virgule !).
Il est par ailleurs souhaitable d'enseigner dès le CM1 que : $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}=\frac{50}{100}$
ou encore que : $\frac{1}{4}=\frac{25}{100}$ et $\frac{3}{4}=\frac{75}{100}$. Ces égalités sont fondamentales parce qu'elles fixent

des repères entre 0 et 1. Par exemple, savoir que $\frac{5}{10}$ est la moitié de 1 et que $\frac{7}{10}$ est plus petit que $\frac{3}{4}$ aide à situer $\frac{6}{10}$ entre 0 et 1. Elles joueront par ailleurs un rôle fondamental dans l'étude des pourcentages au CM2.

Un tel enseignement peut prendre deux formes :

- soit on enseigne la règle de la réduction au même dénominateur dans sa plus grande généralité ("On ne change pas la valeur d'une fraction lorsqu'on multiplie le numérateur et le dénominateur par un même nombre") puis on applique cette règle aux cas particuliers tels que $\frac{3}{10} = \frac{?}{100}$;
- soit on enseigne directement les seules équivalences qui "sont au programme", en s'appuyant sur une représentation imagée, sans se soucier si les enfants abstraient ou non la règle générale.

C'est cette seconde solution que nous avons évidemment retenue parce que, pour justifier la règle générale, il faut utiliser l'argument de la compensation[11] qui est difficile à comprendre pour des élèves de cet âge.

Quatrième étape : 155 tiers, c'est aussi "155 divisé par 3"

L'équivalence entre le geste mental de la partition de la pluralité et celui du fractionnement de l'unité a déjà été étudiée lors de la deuxième étape : il s'agissait de prendre conscience qu'un problème dont l'énoncé parle d'une partition de la pluralité, peut se résoudre par un fractionnement de l'unité.

Dans l'étape présente, l'équivalence sera établie "en sens inverse" : il s'agit de prendre conscience qu'un problème dont l'énoncé parle d'un fractionnement de l'unité, peut se résoudre par une partition de la pluralité, c'est-à-dire en faisant une division.

Nous utiliserons évidemment l'autre type de problèmes dans lequel l'économie de la représentation est en conflit avec celle du calcul : les **problèmes de type D** : *"On prend 155 fois un tiers d'une unité. Quelle est la valeur totale ?"*.

La dynamique d'une telle séance va de soi : on dispose de 155 tiers ; à chaque fois qu'on a 3 tiers, cela correspond à une unité ; on est donc amené à chercher : "En 155 tiers, combien de fois 3 tiers ?". D'où la mobilisation de la division euclidienne.

LES AUTRES CHOIX FONDAMENTAUX ET LA FIN DE LA PROGRESSION

A ce moment de la progression, les enfants se sont appropriés les deux sens de l'écriture $\frac{a}{b}$; ils savent produire des écritures équivalentes à $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{2}{10}$ et ils savent comparer ces fractions simples.

Ils n'ont toujours pas *additionné* ces fractions simples. Cela relève d'un choix délibéré.

Ne pas introduire d'emblée l'addition des fractions

Même lorsqu'on limite l'apprentissage de l'addition aux quelques fractions simples du programme (demis, quarts, dixièmes et centièmes), une difficulté surgit lorsque les enfants la

[11]Un fractionnement étant donné, si on décide de fractionner chaque partie en parties n fois plus petites, il suffit de retenir n fois plus de ces nouvelles parties pour que la quantité globale soit conservée. Ce type de raisonnement relève de ce que Piaget appelait les opérations formelles.

rencontrent pour la première fois. Face à $\frac{3}{4} + \frac{57}{100}$, par exemple, les élèves voient des nombres "3, 4, 57, 100", ils voient le signe "+", symbole de l'addition entre les entiers, et ils doivent absolument se garder d'additionner ces nombres sous la forme $\frac{60}{104}$, ce qui correspond à la somme des numérateurs et à celle des dénominateurs.
La façon dont les enfants ont l'habitude d'opérer avec le signe "+" et les écritures d'entiers, ne doit pas "contaminer" l'usage des mêmes symboles lorsqu'ils désignent des fractions !

Pour les maîtres, il ne s'agit pas seulement d'enseigner un nouveau savoir-faire, il s'agit de l'enseigner dans un contexte où les enfants peuvent avoir l'impression (fausse !) qu'ils savent déjà faire. Le problème qu'on leur pose, ressemble à un problème qu'ils savent résoudre depuis longtemps.
Dans leur future scolarité, ils auront évidemment bien d'autres occasions de se retrouver dans une telle situation. Dès le CM2, ils seront conduits à calculer 52 x 0,25 , par exemple, et à trouver un résultat plus petit que 52 !
Alors que pendant plusieurs années, la multiplication a toujours donné un résultat plus grand que les deux nombres de départ, ce ne sera plus le cas !

L'addition de deux fractions est leur première rencontre avec ce type de situation. Cet obstacle au calcul de $\frac{3}{4} + \frac{57}{100}$ sera mieux surmonté si les enfants ont une bonne maîtrise conceptuelle des entités représentées par $\frac{3}{4}$ et $\frac{57}{100}$.
C'est pourquoi nous avons choisi d'introduire le signe "+" après que les enfants se soient appropriés les deux sens de l'écriture $\frac{a}{b}$, aient appris à en produire des écritures équivalentes et à comparer les fractions simples du programme.

Utiliser d'abord des unités de mesure non conventionnelles, pour favoriser l'appropriation de l'idée de fractionnement

Les élèves disposent de règles en carton qui sont graduées en stylos :
$\frac{1}{2}$ stylo, $\frac{1}{4}$ de stylo, $\frac{1}{10}$ de stylo et $\frac{1}{100}$ de stylo.

- Les différentes activités qu'ils mènent avec ce matériel consistent à :
  - Repérer une longueur, soit à partir de l'origine de la règle, soit entre deux points, et se rappeler, à cette occasion que $\frac{12}{100} = \frac{1}{10} + \frac{2}{100}$ ou encore que $\frac{20}{100} = \frac{2}{10}$.
  - Comparer la longueur de deux lignes brisées : pour cela il faut mesurer les lignes brisées (tous les résultats sont fractionnaires), puis sommer les mesures obtenues (par exemple, calculer $\frac{93}{100} + \frac{7}{10}$) et comparer les résultats qui, évidemment, sont des nombres fractionnaires.
  - S'ils ont obtenu $1 + \frac{63}{100}$ et $2 + \frac{4}{10}$ comme longueur respective de chaque ligne brisée, on leur demande laquelle de ces longueurs est la plus proche de 2 stylos ? Ils sont donc amenés à se représenter des écarts de longueurs, en s'aidant de leur règle en carton : entre le repère $1 + \frac{63}{100}$ et le repère 2, sur la règle, il y a $\frac{37}{100}$; or ce nombre est plus petit que $\frac{4}{10}$.
- Ils ont à résoudre ce même type de problèmes, mais hors contexte :
  Quel est le nombre le plus proche de 2 : $1 + \frac{85}{100}$ ou $2 + \frac{2}{10}$?

Le lecteur aura reconnu, dans ce type de problèmes, celui dont nous avons souligné l'importance en introduction, parce qu'il constitue un bon test de la conceptualisation des décimaux chez l'enfant (Cf. J. BOLON, 1996).

Ils doivent enfin ordonner des nombres donnés tantôt sous forme de "division-fraction", tantôt par leur décomposition en entiers, dixièmes et centièmes.

Supposons que les premières de ces activités soient menées avec le double-décimètre plutôt qu'avec une règle graduée "en stylos". Les enfants utiliseraient alors leurs schèmes familiers de mesure en millimètres et centimètres et n'utiliseraient d'aucune façon le fait que le millimètre est le centième du décimètre ou encore que le centimètre en est le dixième.
Le pédagogue n'a pas le choix : s'il veut que ses élèves procèdent à des activités de mesure en reportant mentalement un étalon et ses fractions décimales, il ne faut pas que cet étalon entre dans un système conventionnel de mesure que les enfants utilisent depuis plusieurs années dans lequel le $\frac{1}{10}$; le $\frac{1}{100}$; etc. de l'unité, ont des noms spécifiés (le décimètre, le centimètre, par exemple) et fonctionnent eux-mêmes comme unités entières à l'intérieur de ce qu'on a appelé précédemment un système de "nombres complexes". Sinon, il n'y a que les très bons élèves qui feront l'effort d'essayer de traduire leurs connaissances anciennes (mm, cm, dm) dans le vocabulaire nouveau que le maître leur propose ($\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10}$ et unité).
La grande majorité des élèves résolvent ces problèmes avec leurs connaissances anciennes et toute idée de fractionnement disparaît. L'idée de décimal disparaît avec elle.

Certains pédagogues seront peut-être étonnés de l'usage que nous faisons des pizzas, verres de jus d'orange, tablettes de chocolat ou règles graduées en stylos, mais l'usage préalable de ces unités non conventionnelles, nous semble incontournable.

Enseigner l'écriture à virgule comme un simple changement de notation

L'écriture à virgule des nombres décimaux est introduite en utilisant la calculette. Les élèves savent que la "division-fraction" $\frac{143}{10}$ a pour résultat $14 + \frac{3}{10}$ et la "division-fraction" $\frac{7893}{100}$ pour résultat $78 + \frac{93}{100}$. En revanche, quand on tape ces deux opérations sur une calculette (avec la touche ε), on voit apparaître 14.3 pour $\frac{143}{10}$ et 78.93 pour $\frac{7893}{100}$
En examinant d'autres cas et notamment des "divisions-fractions" par 2 et 4, les élèves découvrent facilement le principe de l'affichage de la calculette : elle sépare la partie entière et la partie fractionnaire par un point, le chiffre immédiatement à droite du point est celui des dixièmes et le chiffre encore à droite est celui des centièmes (les millièmes seront étudiés au CM2).
L'écriture avec le point ou avec une virgule est donc introduite comme un simple changement de notation. Au moment de cette introduction, les enfants savent déjà coordonner les deux sens de l'écriture $\frac{a}{b}$, ils savent comparer, additionner les fractions simples, déterminer des écarts, etc. Toutes les connaissances nécessaires sont ainsi déjà là. C'est parce que l'écriture à virgule masque la véritable nature de ces nombres, que, délibérément, nous avons choisi de favoriser leur appropriation en utilisant la barre de fraction comme système de notation.
Au CM1, terminer la progression sur les décimaux, c'est, pour l'essentiel, continuer à faire fonctionner les mêmes connaissances dans un contexte où les exercices sont proposés avec des nombres à virgule plutôt qu'avec des fractions. Or, pour favoriser le transfert des

connaissances d'un contexte à l'autre, nous allons montrer qu'il est essentiel de faire oraliser les nombres à virgule, en explicitant les dixièmes, centièmes, etc.

Remarque sur l'utilisation de la calculette lors de ces séquences :

Un premier objectif de ces séquences est évidemment le changement de notation (des fractions décimales vers les nombres à virgule) que nous avons qualifié de "simple" parce qu'aucune connaissance nouvelle n'est introduite à cette occasion. Cependant, l'enjeu de ces séquences, grâce à l'usage de la calculette, est plus important qu'il n'y paraît de prime abord : ce n'est pas seulement l'équivalence entre la notation fractionnaire et la notation à virgule des nombres décimaux qui est en jeu ici ; c'est aussi l'équivalence entre le signe "ε" de la calculette, porteur de tous les usages sociaux de la division, et la barre de fraction. Ces séquences font partie de celles qui contribuent à relier étroitement le "monde de la division" à celui des fractions.

Ainsi, à ce moment de la progression, l'égalité $67 : 100 = \frac{67}{100} = 0{,}67$ d'habitude si difficile à comprendre pour les élèves, apparaît comme allant de soi. La raison en est que, dès le début de la progression, on s'est donné les moyens de relier entre elles les différentes significations en jeu dans ces écritures : "67 divisé par 100", c'est "67 centièmes" (équivalence dont nous avons montré qu'elle fonde le concept de fraction).

Faire oraliser systématiquement les nombres à virgule, en explicitant les dixièmes, centièmes, etc.

Considérons l'exercice suivant que les enfants ont appris à résoudre lorsqu'il est posé avec des fractions :

Quel est le nombre le plus proche de 2 : 1 + 85/100 ou 2 + 2/10 ?

Après l'introduction des écritures à virgule, le même exercice est posé sous la forme :

Quel est le nombre le plus proche de 2 : 1,85 ou 2,2 ?

Si le pédagogue est soucieux d'obliger les élèves à oraliser 1,85 sous la forme "1 virgule 85 centièmes" et 2,2 sous la forme "2 virgule 2 dixièmes" plutôt que "1 virgule 85" et "2 virgule 2" comme le font souvent les adultes, il suffit que l'élève oralise la consigne pour que l'énoncé du deuxième exercice apparaisse immédiatement comme renvoyant à la même tâche que le premier.
L'élève est alors en mesure de le résoudre immédiatement : "A partir de 1 virgule 85 centièmes, il faut 15 centièmes pour aller à 2. En revanche, 2 virgule 2 dixièmes est à 2 dixièmes de 2, c'est-à-dire à 20 centièmes de 2. C'est 1 virgule 85 centièmes, le plus proche de 2".

C'est seulement lorsqu'on procède à une telle oralisation "signifiante", que la tâche avec les nombres à virgule n'offre pas plus de difficulté que la même tâche avec les écritures fractionnaires
L'enseignant qui adopterait la progression que nous avons élaborée, sans exiger une telle oralisation, ferait un beau gâchis : il aurait consacré beaucoup de temps pour que les enfants s'approprient le concept de décimal lorsque ces nombres sont représentés par des fractions et, par la suite, il ne se donnerait pas les moyens que les enfants réinvestissent toutes ces connaissances quand les nombres sont représentés sous leur forme la plus fréquente mais qui fonctionne comme un leurre : celle des écritures à virgule.

CONCLUSION

Pour enseigner un contenu tel que les fractions simples et les décimaux, un grand nombre de progressions sont évidemment possibles. Pour situer celle qui a été présentée ici dans cet ensemble de possibles, esquissons une comparaison avec les deux progressions qui servent le plus souvent de références : celle de R. DOUADY[12] d'une part et de G. BROUSSEAU[13] d'autre part.

Ces progressions se présentent comme des suites de situations qui permettent que les élèves aient une responsabilité importante dans le processus d'élaboration des connaissances. L'enchaînement des significations y est par ailleurs minutieusement étudié. Ces auteurs ont été parmi les premiers à se donner le projet d'élaborer ce genre de progressions qui relèvent d'une sorte d'"épistémologie expérimentale". Leur travail a donc été pionner.

De plus, il convient de souligner leur rôle précurseur quant au choix fondamental, qui a été aussi le nôtre, d'enseigner les fractions avant les décimaux.

Mais au-delà de ce choix, il existe des différences importantes entre les progressions qu'ils ont élaborées et celle qui a été avancée ici.

Une comparaison avec les deux progressions de référence (DOUADY, BROUSSEAU)

R. DOUADY introduit les fractions en s'appuyant sur le modèle du fractionnement de l'unité ($\frac{7}{4}$ est défini comme 7 fois un quart de l'unité). De notre point de vue, faire un tel choix, c'est renforcer le modèle le plus "naturel", celui qui est véhiculé par le langage quotidien, et donc faire obstacle à l'appropriation par les élèves de l'autre modèle (celui de la partition de la pluralité). Dans la progression avancée par R. DOUADY, "pousser" la division a : b trois chiffres après la virgule, par exemple, revient à situer la fraction $\frac{a}{b}$ au millième près. Elle pose donc comme évidente l'équivalence de a : b et de $\frac{a}{b}$, ce qui est loin d'être le cas pour les enfants lorsque l'écriture fractionnaire est introduite avec le sens a $b^{\text{ièmes}}$. Comme nous l'avons montré, il y a là un "glissement de sens" qui, de notre point de vue, est très gênant.

G. BROUSSEAU, lui, introduit les fractions dans la situation suivante : il faut trouver un moyen de désigner l'épaisseur d'une feuille de papier alors que cette épaisseur est trop petite pour qu'on la mesure directement. Les enfants établissent donc que si 19 feuilles mesurent 2 mm, alors 38 feuilles mesurent 4 mm, etc.

Dans la situation où 50 feuilles ont une épaisseur totale de 4 mm, la fraction est introduite de la façon suivante (p. 17) :

"On dit que (ce) papier a une épaisseur de 4 mm pour cinquante feuilles ou encore 4 pour cinquante millimètres et, le plus souvent, de 4 cinquantièmes de mm et on écrit ceci à l'aide de la fraction $\frac{4}{50}$."

A première vue, une telle formulation est critiquable puisque, de manière purement verbale, on passe subrepticement du modèle de la partition de la pluralité (4 mm pour cinquante) à

[12] Douady R. (1980) Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans), *Recherches en didactique des mathématiques*, 1, 1, 77-110.

[13] L'exposé le plus complet se trouve dans Brousseau, G. & Brousseau, N. (1987), *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, Bordeaux Irem de Bordeaux. Les références de pages qui suivent concernent cet ouvrage.

celui du fractionnement de l'unité (4 cinquantièmes de mm).
En fait, les enfants ne mobilisent ni l'un, ni l'autre de ces deux modèles. En effet, en ce début de progression, à aucun moment l'enseignant ne parle ni de fractionnement, ni de partage. Ainsi, pour savoir si $\frac{57}{35}$ est plus petit ou plus grand que 1, les enfants (p. 36 – 7[e] séance de la progression) n'utilisent ni la partition de la pluralité (57 mm partagés en 35, ça fait combien ?), ni le fractionnement de l'unité (57 fois un trente-cinquième de mm, c'est combien ?). Ils raisonnent ainsi : 1 mm, c'est quand on a une épaisseur de 35 mm pour 35 feuilles ; quand on a 57 mm pour 35 feuilles, c'est plus que 35 mm pour 35 feuilles. Les enfants raisonnent donc sur des couples d'entiers et non sur le fractionnement ou la partition d'entiers.

Remarquons que la situation qui sert à G. BROUSSEAU pour introduire les fractions et la nôtre sont similaires, mais elles sont utilisées de façons très différentes : alors qu'il aurait pu mettre d'emblée les enfants dans une situation de mesure en leur faisant déterminer la mesure "absolue" d'une feuille (si une épaisseur totale de 2 mm est obtenue avec 19 feuilles, quelle est l'épaisseur d'1 feuille ?), il a choisi de faire raisonner les enfants avec des "mesures relatives" (2 pour 19, c'est comme 4 pour 38, etc.), c'est-à-dire de traiter cette situation sur le modèle des proportions[14]. Quand le maître introduit la barre de fraction, c'est d'ailleurs l'oralisation de la proportion ("a pour b") qui est privilégiée. Le mot "divisé" est soigneusement évité, peut-être parce qu'il conduirait les enfant à chercher une "mesure absolue" (2 mm divisé par 19). Remarquons que le choix de la grandeur à mesurer est cohérent avec cette option théorique : une épaisseur de 2 mm pour 19 feuilles est si petite qu'elle semble *a priori* peu accessible à la seule mesure que connaissent les enfants, c'est-à-dire la "mesure absolue"[15].

Examinons maintenant comment des enfants qui raisonnent ainsi sur des couples d'entiers, s'approprient l'équivalence entre la partition de la pluralité et le fractionnement de l'unité. Considérons, par exemple, l'équivalence "3 divisé par 4", c'est "3 quarts". Comme nous l'avons vu, la difficulté résulte du fait que la première expression renvoie à une pluralité d'unités tandis que la seconde renvoie à une pluralité de fractions de l'unité et qu'on ne raisonne donc pas sur les mêmes objets psychologiques.
Dans la progression de G. BROUSSEAU, avec le vocabulaire qu'il utilise, cette relation s'exprime : "3mm pour 4" est une épaisseur 3 fois plus grande qu'une autre de "1mm pour 4". Or, le fait de raisonner ainsi sur des couples d'entiers fait disparaître la difficulté car les objets psychologiques sont alors homogènes. Mais la difficulté est-elle réellement surmontée ou ne l'est-elle qu'en apparence ? Est-elle surmontée conceptuellement, les enfants s'étant appropriés une équivalence entre des *gestes mentaux*, ou bien s'agit-il seulement d'une équivalence "formelle" qui renvoie uniquement à des *règles de manipulation d'écritures* ?
La suite de la progression permet de répondre à cette question. En effet, après la somme et la différence de deux fractions, les élèves apprennent à multiplier puis à diviser une fraction par un entier. Pour calculer $\frac{11}{3} : 9$, ils apprennent qu'il faut multiplier par 9 le dénominateur de cette fraction soit $\frac{11}{27}$ ou multiplier par 9 le dénominateur de n'importe quelle fraction qui lui est égale. Cependant, à la 39[e] séance (p. 145), pour trouver le résultat de 11 : 9, les enfants ont besoin que le maître fasse un rappel collectif : "$11 = \frac{11}{1}$ et pour diviser une fraction, on multiplie son dénominateur".

---

[14]Brousseau parle de "commensuration de l'unité".

[15]A l'opposé, dans notre progression, on commence par un "problème de type A", c'est-à-dire où on partage 153 unités en 4 parts égales !

La suite des écritures est donc la suivante :

$11 = \frac{11}{1}$ $\qquad 11 : 9 = \frac{11}{1} : 9$ $\qquad 11 : 9 = \frac{11}{1 \times 9}$ $\qquad 11 : 9 = \frac{11}{9}$

Autrement dit, les enfants sont plus à l'aise pour calculer $\frac{11}{3} : 9$ que $11 : 9$[16]. Dans cette progression, le moins qu'on puisse dire est que l'égalité $11 : 9 = \frac{11}{9}$ ne va pas de soi !

Plus généralement, ce type de raisonnement sur des classes de couples d'entiers[17] nous semble hors de portée d'un grand nombre d'élèves du Cours Moyen. Piaget appelait cette sorte d'opérations intellectuelles "au second degré" (parce que ce sont des opérations sur des opérations) des "opérations formelles". Il considérait que ce genre d'opérations intellectuelles n'est guère accessible avant 12 ans. Ainsi, certains enfants, dans la progression de G. BROUSSEAU, éprouvent longtemps des difficultés à tout simplement comprendre que $\frac{4}{50}$ est *un* nombre qui mesure *une* épaisseur et non seulement un couple de nombres qui désigne un tas de feuilles (Cf. p. 18).

Cela n'est guère étonnant. Il ne s'agit pas, selon nous, de difficultés liées à tel ou tel point marginal de la progression. Il convient de s'interroger sur la pertinence de ce type de progression pour des élèves de Cours Moyen.

Quels résultats dans les classes expérimentales ?

La progression présentée ici est donc très différente de ces deux progressions de référence. Elle est tout aussi différente des progressions classiques (aucune, à notre connaissance, n'enseigne, comme nous le faisons, la partition de la pluralité avant la partition de l'unité).

Au delà de ces comparaisons, que dire des résultats obtenus dans les classes expérimentales ? Considérons à nouveau l'exercice suivant :

Quel est le nombre le plus proche de 7 : 6,9 ou 7,08?

Nous avons vu que la réussite à cet exercice témoigne vraisemblablement d'une bonne conceptualisation des décimaux et qu'il n'est habituellement réussi que par 30% environ des élèves en CM2, 6ème et même 5ème .

Dans les classes expérimentales qui ont testé une première version de la progression présentée ici, nous avons observé 75% environ de réussite en fin de CM1, y compris dans des écoles situées en ZEP. Un tel résultat doit évidemment être apprécié dans son contexte. D'une part les populations expérimentales réussissent toujours mieux que les populations d'élèves qui travaillent dans des conditions plus ordinaires. D'autre part, à travers les activités présentées ici, le lecteur aura perçu que la réussite à cet exercice faisait partie de nos objectifs alors que d'habitude, ce type de tâche n'est guère travaillé en classe. Qu'on nous permette cependant de souligner un point important : les 75% de réussite ont été obtenus sans jamais enseigner aux élèves la moindre règle du type : "Je ne change pas la valeur d'un nombre décimal en écrivant des zéros à droite de la virgule." La réussite observée résulte de connaissances conceptuelles et non de "trucs" qui permettent d'obtenir la solution sans avoir compris.

Il est clair cependant que seul un emploi plus généralisé de ce type de progression permettra d'en apprécier plus justement la valeur.

---

[16](Cf. p 148) Un tel phénomène est révélateur de ce qu'on peut appeler une "dérive formaliste" de la progression.

[17]Exemple de raisonnement sur des classes de couples : comme je ne sais pas diviser 11 par 9, je divise une fraction qui appartient à la même classe par 9

Cornouaille Ouest-France 15-Mai 98

130 matheux au colloque des enseignants à Loctudy

Un robot pour initier les petits aux maths

Durant trois jours, au centre de vacances du Dourdy, 130 personnes venues de toutes les régions de France se sont retrouvées pour un colloque organisé par la Copirelem (Commission permanente des Irem sur l'enseignement élémentaire) avec le soutien de l'Irem de Brest et de l'IUFM de Bretagne.

Éric Greff présente « son robot ».

Ce sont des enseignants chercheurs, des professeurs engagés dans des recherches en didactique, des conseillers pédagogiques, quelques professeurs de lycées et collèges et des professeurs de mathématiques formateurs en IUFM qui étaient présents à Loctudy. Ateliers divers et conférences étaient au programme.

Éric Greff y a présenté le robot Valiant construit par des Anglais et encore non-utilisé en France. **« C'est un robot plancher, à l'intérêt ludique indéniable »**, confie Éric Greff, qui a fait une thèse sur le sujet **« C'est un moyen d'introduire les nouvelles technologies éducatives dans le monde de l'école maternelle. L'informatique dépend de l'écrit, pas le robot... »**

Un « Smarties »

Le robot a l'apparence d'une sphère aplatie tout comme les bonbons « Smarties » bien connus des enfants. Un clavier souple, dont les touches correspondent à des instructions, permet sa programmation.

Il peut ainsi se déplacer, pivoter, mémoriser ce qui lui est demandé et même faire de la musique.

« On peut ainsi travailler sur la mesure, la construction du nombre, de l'espace et du temps avec les 4-5 ans », précise Éric Greff.

Une innovation parmi toutes celles proposées lors du colloque.

LE ROBOT "ROAMER", UN EXEMPLE DE MATERIEL EXPLOITABLE A L'ECOLE PRIMAIRE

Eric Greff Versailles

De nombreuses expériences pédagogiques ont été menées autour des « tortues de sol » dans les années 80. Ꮳ l'heure actuelle, les robots de plancher ne sont, malheureusement, que peu utiliser dans les écoles primaires. Le robot « Roamer » de la société anglaise Valiant présente certaines des caractéristiques qui nous semblent importantes pour devenir, moyennant quelques aménagements, un de ces fameux objets « pour penser avec » exploitables à l'école primaire.

INTRODUCTION

L'objet de cet article n'est pas de présenter les possibilités d'expériences pédagogiques liées à l'utilisation d'un robot de sol dans une classe de l'école primaire. Celles-ci ont été largement relatées dans de nombreux comptes-rendus [BAS 81], [PIL 84], [CAL 85], [HEN 85], [LET 86], [PER 87] et nous sommes persuadés de leur intérêt. Nous souhaitons simplement ici décrire un matériel éducatif accessible pour une école maternelle ou élémentaire permettant une première approche de la robotique pédagogique.

Un des rôles essentiels de l'école consiste à former les citoyens de demain. Donner à nos jeunes élèves une idée précise du fonctionnement de certaines techniques, c'est à la fois leur apporter des connaissances et leur donner les moyens de réfléchir sur le monde qui les entoure. Etre informé précisément de certains fonctionnements, c'est déjà pouvoir les contrôler et, en tous cas, ne pas en être esclave.
Outre son aspect ludique et informatique, le robot constitue un excellent outil pour acquérir des connaissances sur notre environnement technologique. Il se révèle, également, un auxiliaire idéal pour les exercices concernant les parcours car il permet de visualiser nettement et facilement le travail accompli.

LES ROBOTS

Réalité et mythes

Le mot « robot » a été créé en 1921 par l'écrivain tchèque **Karel Tchapek** pour désigner, dans sa pièce de théâtre d'anticipation intitulée R. U. R., Les Robots Universels de Rossum, un être mécanique capable, comme un humain, de voir, d'agir, d'exécuter des ordres. Il provient du mot slave « robota » qui signifie « travail », « corvée ».
Le dictionnaire Hachette de 1991 donne du robot les définitions suivantes :

- Machine à l'aspect humain capable de se mouvoir, de parler et d'agir.
- Machine automatique dotée d'une mémoire et d'un programme capable de se substituer à l'homme pour effectuer certains travaux.
- Personne agissant comme un automate.

Ces trois définitions mettent en évidence le lien unissant au concept de robot la notion de machine associée à l'humain. Le lien peut être l'apparence, l'assimilation mais aussi la distribution des rôles entre l'homme et la machine pour certaines actions.
L'apparition de robots inquiète et fascine. La machine exécute des tâches que seul l'homme était autrefois capable de réaliser. Cependant, leur répétitivité les rend automatisables et l'être humain fabrique des êtres cybernétiques pour le remplacer. De là à imaginer que les robots pourraient construire eux-mêmes d'autres robots qui eux-mêmes... L'homme, tout en admirant la prouesse technique, s'interroge sur le contrôle qu'il possède réellement sur la machine ainsi que sur la part d'utilité et de travail qu'elle lui enlève. Le robot travaille de manière plus rapide, plus fiable, plus sûre, il exécute inlassablement son programme de jour comme de nuit...
« Le mythe du robot résume toutes les voies de l'inconscient dans le domaine de l'objet. C'est un microcosme symbolique à la fois de l'homme et du monde, c'est-à-dire se substituant à la fois à l'homme et au monde. C'est la synthèse entre la fonctionnalité absolue et l'anthropomorphisme absolu [...] automatisme et personnalisation ne sont pas du tout contradictoires. L'automatisme n'est que la personnalisation rêvée au niveau de l'objet » [BAU 88].
Les robots effectuant des soudures dans les chaînes de montage automobile ne provoquent plus désormais d'étonnement et leur ressemblance physique avec l'homme est bien lointaine.
« La notion de robot est très souvent parasitée par l'image qu'en donnent certaines littératures, et qui a plus souvent pour effet d'en accroître le mystère que de la rendre intelligible » [BOU 88]
Dans le monde très vaste des robots nous nous intéresserons essentiellement, pour notre travail avec les jeunes élèves, autour du « jeu de l'enfant-robot » [GRE 96a], aux 2 aspects suivants :

- Le monde imaginaire des albums pour enfants est rempli d'êtres cybernétiques farfelus, de « copains » en fer ou d'androïdes nommés « robots ». Nous tenterons de rétablir la vérité et de montrer qu'un robot est une machine qui n'agit qu'en fonction du programme qui lui est fourni.
- Les actions effectuées par les robots correspondent à une pensée impérative séquentielle. Nous avons mis au point, pour le « jeu de l'enfant-robot », un langage de commande entièrement graphique. Ce travail servira de prétexte à introduire, en plus de l'algorithmique, certaines notions liées à l'environnement de programmation, à la taille des programmes, à leur efficacité, à la dépendance des robots par rapport à l'homme...

LA ROBOTIQUE PEDAGOGIQUE

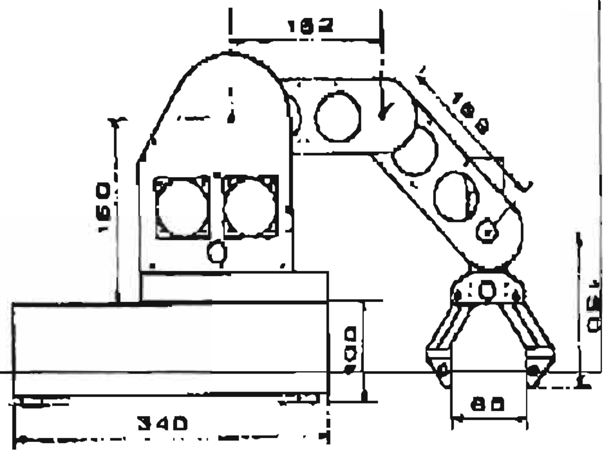
Nous nous intéressons plus particulièrement aux robots conçus pour initier l'apprenant à la démarche algorithmique. Parmi ces machines, la tortue de sol de **Seymour Papert** fait figure de pionnier. Les buts de cette expérience initiale sont clairs : « en apprenant à la tortue à agir ou à « penser », on en arrive à réfléchir sur sa propre action et sa propre pensée » [PAP 81].
Le premier congrès francophone de robotique pédagogique du Mans en Août 1989 marque une reconnaissance officielle pour ce type d'activité. Les centres d'intérêt sont plus particulièrement :

- Les robots de sol répondant à des commandes similaires à celles de la tortue LOGO.

- Les grues, semblables aux grues de chantier, c'est-à-dire se déplaçant dans un espace à 3 dimensions et faisant intervenir les rotations (au niveau de la tour), les translations horizontales (déplacement du chariot sur la flèche) et verticales (palan).

- Les bras manipulateurs 3 axes pourvus à leur extrémité d'une pince à 2 ou 3 doigts. Ces robots peuvent effectuer des rotations, selon un axe vertical, à partir de la base au sol. Leur bras est articulé en 2 parties. L'élément vertical raccordé à la base est légèrement orientable. La partie supérieure reliée à l'articulation effectue, à partir de celle-ci, un mouvement situé dans le même plan que celui du demi-bras inférieur

Image du bras manipulateur



À l'extrémité du demi-bras supérieur se situe la pince mobile pouvant s'ouvrir et se fermer.
La reconnaissance officielle de la robotique pédagogique permet de la définir comme une activité de conception, création, mise en œuvre, à des fins pédagogiques, d'objets techniques physiques qui sont des réductions aussi fidèles et signifiantes que possible de procédés/outils robotiques réellement utilisés dans la vie courante, en particulier en milieu industriel.
Le robot pédagogique est essentiellement fait, comme son nom l'indique, pour comprendre et apprendre [VIV 82]. Sa ressemblance avec les robots industriels constitue donc une contrainte moins prioritaire que ses visées didactiques. Il permet néanmoins d'aborder l'informatique par un autre biais et selon d'autres contraintes que celles imposées par l'ordinateur, son écran et son clavier. « La manipulation de robots introduit la notion de logique de commande pour atteindre un objectif ou un but » [BOS 87]. La robotique pédagogique fait, en particulier, intervenir des notions techniques concrètes (vitesse d'un moteur, branchement, câblages...) qui permettent d'éliminer certaines « boîtes noires » entre la programmation et le mouvement. Entre l'instruction « Avance de 10 » et le mouvement « magique » de la tortue, il y a désormais un moteur possédant certaines caractéristiques, répondant à certaines sollicitations et fonctionnant de certaines manières. On met alors à jour de nouvelles « boîtes noires » qu'on décidera ou non d'ouvrir successivement selon les buts pédagogiques que l'on se fixe.
L'utilisation de robots fait notamment émerger deux notions particulièrement intéressantes et originales :

- Les « capteurs » qui renseignent le robot sur son environnement extérieur. La notion d'information prend ici tout son sens. Le programmeur devra veiller à ce que le robot soit « à l'écoute » des données transmises par ses propres capteurs (l'axe arrive en butée, le fardeau est trop lourd pour la flèche de la grue...) afin de modifier ses mouvements en conséquence. « Un vrai robot est capable d'obtenir par lui-même des renseignements sur son environnement et d'en tirer parti » [BOU 88].

- La place de « l'intelligence » du robot. Celle-ci peut être extérieure à la machine mécanique et alors reliée à l'ordinateur par un réseau câblé ou une télé-commande. Elle peut également être « embarquée » lorsque le robot lui-même est porteur de capacités logiques sophistiquées et peut donc se mouvoir de manière autonome.

Les travaux de robotique concernent la programmation de la machine (qui fait intervenir la modélisation géométrique, l'algorithmique, le repérage dans l'espace, l'anticipation, la structuration temporelle d'événements) mais aussi les activités de montage des robots dans lesquelles prédominent, en plus de l'adresse gestuelle, la modélisation physique, l'organisation séquentielle, la lecture de plans techniques, la rigueur.

À l'heure actuelle, les chercheurs s'intéressent plus particulièrement aux « colonies de robots ». Il s'agit de plusieurs robots, en général identiques et programmés de la même façon, dont on étudie le comportement de groupe. Citons, par exemple, ces robots de sol émettant de la lumière à leur arrière et possédant un capteur photo-sensible à leur avant. Ces mobiles se déplacent de manière aléatoire jusqu'à ce qu'ils captent une lumière qu'ils se mettent alors à suivre prioritairement. Une farandole se crée qui se terminera finalement en ronde.

Nous espérons pouvoir, grâce à notre méthode, bénéficier de tous les avantages qu'offre l'initiation à la robotique. Nous délaisserons cependant, à l'école maternelle, la phase de construction de robots opérationnels.

En 1996, nous écrivions [GRE 96b] que si nous avions à concevoir un robot de sol idéal permettant de compléter le travail entrepris avec le « jeu de l'enfant-robot », celui-ci posséderait les caractéristiques suivantes :

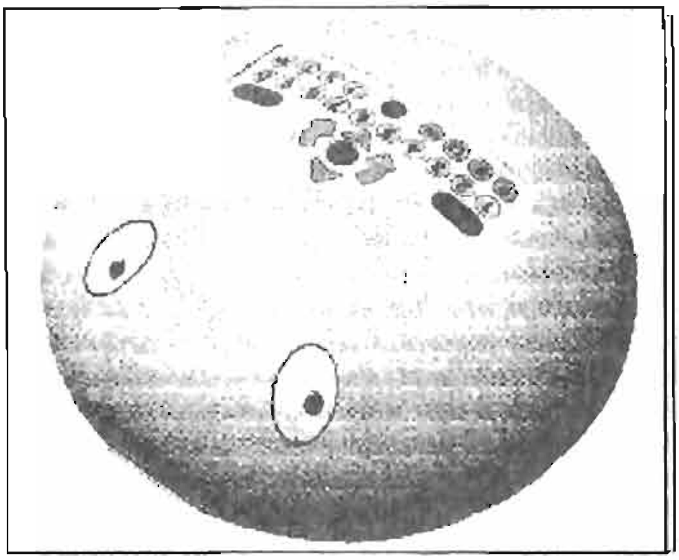
- Etre un robot de plancher mobile, à intelligence et énergie embarquées (pas de fil, pas d'infra-rouge).
- Etre fiable, solide, précis, bien orienté et facile d'emploi.
- Utiliser exclusivement les mêmes cartes-instructions que la méthode d'apprentissage.
- Accepter d'exécuter globalement un paquet d'instructions (programme) et pas seulement les cartes individuellement.
- Etre commercialisé à un prix accessible pour une école (environ 1000F), donc de conception simple.

Depuis lors, nous avons pu constater que fabriquer un robot de plancher « ex nihilo » n'était pas tâche facile, notamment en ce qui concerne la partie mécanique. Lors de notre travail de recherche, nous avons été mis en contact[1] avec la société Valiant Technology de Londres qui fabrique en Angleterre, depuis 1988, un robot pédagogique dénommé « Roamer ». Si celui-ci est largement diffusé en Grande-Bretagne ainsi qu'au Québec, il est encore quasiment inconnu en France. Le robot « Roamer » nous a semblé présenter des similitudes intéressantes avec notre travail et de réels atouts pédagogiques. Il correspond à notre cahier des charges sauf en ce qui concerne la lecture globale des cartes-instructions. Une collaboration future permettra, sans doute, de gommer cette différence.

---

[1] grâce à Benoît Limbos de l'Université Libre de Bruxelles

LE « ROAMER » VALIANT



Ce robot a l'apparence d'une sphère aplatie qui, à l'origine, est trop symétrique pour montrer l'orientation du robot mais qui peut être librement décoré (grâce à des « kits d'habillement » distribués par le fabricant), ce qui permet à la fois de l'orienter et de le personnaliser. Sur sa face supérieure, il possède un clavier souple dont les touches correspondent à des instructions.

Celles-ci permettent la programmation du robot qui pourra ainsi se déplacer, pivoter, faire de la musique, temporiser et également mémoriser des procédures.

Un certain nombre de modules additionnels sont proposés par le fabricant tels une console de contrôle, un module de dessin permettant au robot de laisser une trace au sol, un kit d'éclairage ou de capteurs...

Notons que le terme employé par le fabricant pour désigner ce produit est « Roamer », ce qu'on pourrait traduire par « randonneur » ou « bourlingueur »...Le robot Valiant est commercialisé au prix de 94£ (≈ 900 FF).

ROAMER : MODE D'EMPLOI

Le système de programmation par le clavier consiste en une instruction de déplacement suivie d'un nombre à un ou deux chiffres indiquant une mesure pour l'exécution de l'ordre. Par exemple :

$\boxed{\text{CM}}\ \boxed{\uparrow}\ \boxed{3}\ \boxed{\nearrow}\ \boxed{1}\ \boxed{5}\ \boxed{\text{GO}}$

pour lequel :

$\boxed{\uparrow}\boxed{3}$ indique qu'il faut avancer de 3 pas.

$\boxed{\nearrow}\boxed{1}\boxed{5}$ indique qu'il faut pivoter de 15°à droite.

On notera cependant que son pas peut également être prédéterminé. Il peut être réglé, à l'avance, dans un intervalle de 1 à 99 cm.. De même, l'angle de pivotement, généralement fixé à 90°, peut prendre comme valeur tout nombre compris entre 1 et 999°. Une fois leur valeur déterminée, les touches de déplacement s'utilisent sans être associées à des nombres.

Brève explication des touches :

- **CM** : on a un droit à l'erreur. Si on appuie sur CM une fois, il suffit d'attendre 10 secondes et le programme est intact
- **CM CM** : efface le programme en mémoire
- ↑n avance de n pas $1 < n < 99$ 1 pas = 30 cm
- ↓n recule de n pas $1 < n < 99$ 1 pas = 30 cm
- ↘x pivote à droite de x degrés $1 < x < 999$ 1 unité = 1 degré
- ↙x pivote à gauche de x degrés $1 < x < 999$ 1 unité = 1 degré
- Wt attend (Wait) t secondes $1 < t < 99$
- ♩ x y joue une note où : x représente la durée de la note $1 < x <8$
  y représente la hauteur de la note $1 < y < 13$
  y=1=Do y=2=Do# ...... y=14=silence

⇒ **On peut modifier les unités de distance, d'angle, de temps et d'octave**

- Pour modifier l'unité de distance

ex : Pour que Roamer fasse des pas de 50 cm
↑ [50] ce pas reste valide jusqu'à extinction du robot

- Pour modifier l'unité d'angle

ex : Pour que Roamer fasse des angles de 90°
↘ [90] cet angle reste valide jusqu'à extinction du robot

- Pour modifier tempo et octave

♩ [23] met le tempo à 2 (1 rapide → 5 lent)
met l'octave à 3 (1 bas → 3 haut)

- **CE** efface la dernière instruction

ex : ↑ 30 ↑ **CE** efface ↑

ex : ↑ 30 ↓ 20 **CE** efface ↓ 20

- **Rn** permet de répéter un bloc d'instruction n fois

ex : **R** 4 [↑2 ↘90]
on peut « encapsuler » jusqu'à 5 répétitions
R 2 [↓ 3 **R** 4 [↑2 ↘90]]

- **Pn** permet de définir la procédure n

ex : **P** 2 [↓ 3 ↑2 ↘90] permet de définir la procédure 2
Attention, si on fait **GO**, rien ne se passe. On a juste défini la procédure 2. On peut désormais l'utiliser dans un programme. Ex : ↑3 **P** 2 ♩ 21
Une procédure peut « appeler » des procédures de **numéro supérieur**
ex : P 3 [↓ 1 ↘90 *P* 8]
Pour effacer une procédure, on peut :
la refaire. **P** 3 [........]
l'effacer **P** 3 [ ]

Attention : On ne peut pas appeler des procédures de numéro inférieur.
Les procédures ne sont pas récursives.

CONCLUSION

Si le robot « Roamer » ne constitue pas encore tout à fait le « promobile idéal », il a néanmoins le mérite d'être l'une des rares machines commercialisées en Europe, fiable, solide, facile de prise en main et diffusée à un prix tout à fait abordable pour une école maternelle ou élémentaire. Son mode de programmation est simple et surtout paramétrable et l'on regrette essentiellement de ne pas pouvoir « relire » les programmes que l'on a entrés. Hormis ce handicap, Roamer peut devenir un de ces fameux objets « pour penser avec » qui ouvre la voie de nombreuses applications pédagogiques. **Eric Greff**

BIBLIOGRAPHIE

[BAS 81] BASTIDE Pierre, LE TOUZÉ Jean-Claude, *Prototype d'un dispositif autonome programmable par de jeunes enfants, Revue Française de pédagogie n° 56*, INRP, 1981

[BAU 88] BAUDRILLARD Jean, *Le système des objets*, Tel, Gallimard, 1988

[BEA 85] BEAU DE MOULIN S., *Tortue de sol et apprentissage de symboles en grande section de maternelle*, Colloque "l'enfant et l'ordinateur". Rouen, 1985

[BOS 83] BOSSUET Gérard, *L'ordinateur à l'école*, L'éducateur, PUF, 1983

[BOS 86] BOSSUET Gérard, *L'accord LOGO, Vol. 2*, Université Paris VI, 1986

[BOS 87] BOSSUET Gérard, *L'accord LOGO, Vol. 3*, Université Paris VI, 1987

[BOU 88] BOULE François, *L'informatique, l'enfant, l'école*, Armand Colin-Bourrelier, 1988

[CAL 85] CALMY-GUYOT Gisèle, *Informaticiens en herbe*, Ecole La Fontaine, Meudon, 1985

[COM 84] COMBES-TRITHARD Françoise, *Enregistrer, lire, programmer à l'école maternelle*, Armand Colin-Bourrelier, 1984

[COM.84] COMBES-TRITHARD Françoise, *Enregistrer, lire, programmer à l'école maternelle*, Armand Colin-Bourrelier, 1984

[DEL 92] DELANNOY Paul, *Les « Mathémocrates » ont-ils tué le Langage LOGO ? Les « Technocrates » le sauveront-ils ?*, Revue de l'EPI n°66, Juin 1992

[DEN 94] DENIS Brigitte, *Agir avec la tortue LOGO, agir avec l'ordinateur à l'Ecole Maternelle*, Centre technique de l'Enseignement de la Communauté française, Frameries, Belgique, 1994

[GRE 95a] GREFF Éric, *Une année de logique et algorithmes avec les 5/6 ans,* Nathan Éducation, 1995

[GRE 95b] GREFF Éric, *Comment introduire la pensée algorithmique auprès de jeunes enfants à travers le jeu de l'enfant-robot, Journée sur la recherche à l'IUFM de l'Académie de Versailles,* 1995

[GRE 95c] GREFF Éric, *Une année de logique et algorithmes avec les 5/6 ans,* Nathan Éducation, 1995

[GRE 96a] GREFF Éric, *Le jeu de l'enfant-robot : une démarche et une réflexion en vue du développement de la pensée algorithmique chez les très jeunes enfants,* Thèse de Doctorat de l'Université Pars VII, Juin 1996

[GRE 96b]GREFF Éric, *Les apports du jeu de l'enfant-robot à la didactique de l'informatique, Actes du 5ème Colloque Francophone de Didactique de l'Informatique,* Monastir, 1996

[HEN 85] HENAFF Françoise, BASTIDE Anne, *Informaticiens en herbe*, École Maternelle Jean de la Fontaine, Meudon, 1985

[LEG 85] LE GUYADER-BOSSUET Christiane, *La pédagogie LOGO en maternelle : camions et spatio-globe*, Université Paris VI, 1985

[LET 86] LE TIRILLY Marc, *Quelques visées éducatives : l'enfant programmeur*, CNDP, CRDP de Marseille, 1986

[PAP 81] PAPERT Seymour, *Jaillissement de l'esprit,* Flammarion, 1981

[PER 85] PERES Jacques, *Recherches en didactique sur l'utilisation de la tortue de sol. Compte rendu d'une préexpérimentation,* Université de Bordeaux, 1985

[PER 87] PERES Jacques, *Recherches menées à l'IREM de Bordeaux sur l'utilisation de la tortue de sol LOGO à l'École Maternelle*, Université de Bordeaux, 1987

[PIL 84] PILLOT Jacqueline et Christian, *L'ordinateur à l'école maternelle*, Armand Colin-Bourrelier, 1984

[TAN 87] TANGUY R., *Un réseau de mobiles autonomes pour l'apprentissage de la communication*, Thèse d'Université Paris VI, 1987

[VIV 82] VIVET Martial, *LOGO : un environnement informatique pour la formation d'adultes*, Colloque national LOGO, Clermont-Ferrand, 1982

LA DEMONSTRATION EN ALGEBRE

Francis Reynès - IREM d'Aquitaine

La géométrie est, depuis «un certain temps» (depuis Euclide ?), considérée comme le terrain privilégié où l'on doit semer la rigueur, cultiver la déduction et récolter la démonstration. La tentative malheureuse des "Maths modernes" a montré l'impossibilité didactique d'une transposition de la méthode axiomatique ; plus modestement — mais un peu moins inefficacement semble-t-il — on se contente à présent de tenter de construire des «îlots déductifs». On connait les difficultés d'une telle entreprise, les écueils auxquels elle se heurte (statut de la figure, prégnance de la perception, connexions logiques, résistance à l'expression écrite, etc.). Mais par quel étrange abus de pouvoir la géométrie est-elle devenue une sorte de "chasse gardée" ? Pourquoi l'algèbre est-elle tant déconsidérée dans notre enseignement et (mal)traitée comme une collection de recettes et de réflexes conditionnés privés de leur sens ? Ouvrez n'importe quel manuel : vous n'y trouverez qu'un recueil de "règles" sans justification, sans articulation logique. L'algèbre est quasiment abordée comme une science expérimentale : on constate un résultat sur quelques exemples (éventuellement avec l'aide d'une calculatrice), on admet la généralisation et on l'institutionnalise en "règle" sans coup férir. «Pourquoi tant de haine ?» ... Y a-t-il moins de rigueur en algèbre ? Certes non ! N'y pratique-t-on pas la déduction ? Assurément, on ne cesse pas de le faire ! Alors pourquoi feindre de l'ignorer, pourquoi faire croire aux élèves qu'on ne joue pas au même jeu et que le fameux et redoutable "justifier !" est l'apanage de la géométrie ?

*A travers l'étude de la **génèse** des "règles de calcul", je tenterai de vous inciter à envisager que non seulement il est possible de faire des démonstrations algébriques, mais encore que c'est plus facile qu'en géométrie (car il n'y a plus cette satanée "figure" pour brouiller les pistes), et qu'enfin - last but not least - cela est générateur de sens et porteur d'une méthodologie transférable.*

En géométrie, un pas de déduction suppose :

1) une **représentation** mentale (verbale et/ou graphique) à la fois des **infor-mations** décrivant la situation et des **outils** utilisables (définitions, propriétés, théorèmes ...)

2) un **choix** d'informations et d'outil guidé par la recherche d'une **adéquation** entre ces informations et cet outil,

3) la mise en œuvre de cette adéquation pour aboutir à une **conséquence**.

La conséquence obtenue devient ainsi une nouvelle information et peut alors à son tour être utilisée.

Tout cela s'opère dans un langage certes "technique" mais néanmoins assez proche, par sa forme et son fonctionnement, du "langage courant".

En algèbre il n'y a pas de figure mais un langage formalisé, "symbolique", **qui est à la fois l'objet même du traitement opératoire et l'outil du sens.**

«On dit souvent que le symbolisme logico-mathématique n'a pas de sens. La formule est équivoque. Elle ne veut pas dire que tout se réduit à quelque bruitage insignifiant accompagné d'usure de salive et de craie. Mais elle veut dire deux choses : d'une part qu'il n'y a pas de signification matérielle ou d'intuition empirique mais seulement une signification formelle ou conceptuelle qui réside dans la cohérence des rapports ; d'autre part, elle veut dire que l'on opère directement sur les symboles en vertu des valeurs syntaxiques qui leur ont été conférées par définition au départ, symboles qui constituent comme de nouveaux objets maniables suivant certaines règles opératoires ».

«*Contrairement à certaines apparences*, le symbole a pour fonction essentielle de rendre inséparable la forme et le sens. *C'est par là qu'il se distingue du mot, puisque l'essence du mot ou en général du discours consiste à rendre séparables la forme et le sens* ».

«*Il est vrai que le symbolisme mathématique tend à dégager les structures formelles de tout contenu matériel, de toute intuition empirique. Mais, ce faisant, il tend à ramener toute la question du sens à une question de syntaxe, d'expression bien formée, de telle sorte qu'au simple examen d'une formule on puisse juger de sa validité. Il n'en est pas du tout ainsi dans le langage courant : on peut très bien respecter la grammaire et raisonner de façon incohérente, confuse, équivoque ; les règles de la grammaire et les règles de la logique représentent deux juridictions différentes. Les règles de l'expression symbolique au contraire constituent direc-tement une grammaire logique, une syntaxe logique. Il n'y a plus qu'une seule juridiction.* »
(Edmond **Ortigues** : Le discours et le symbole).

«*Quant à l'algèbre, l'idée même de cet art est qu'elle présente des formules que l'on peut manipuler et que par observation des effets de cette manipulation on découvre des propriétés qu'on n'aurait pas discernées autrement* ». (Charles S. **Peirce** : Ecrits sur le signe).

Ainsi la syntaxe du langage algébrique est à la fois le moteur et l'instrument de contrôle du sens : une écriture a un sens lorsque sa "forme" est conforme à la syntaxe. Les "outils opératoires" sont alors ici des "**théorèmes de réécriture**" permettant d'obtenir des changements de forme — écritures égales ou propositions logiquement équivalentes — Ils sont sans doute un peu trop facilement appréhendés comme un code pénal (on a le *droit* de faire ceci mais pas le *droit* de faire cela), d'où le risque de dérive d'un fonctionnement d'"automathe".

La résolution d'un problème par l'algèbre commence donc obligatoirement par une phase de **traduction en langage symbolique** permettant l'élaboration d'un **modèle algébrique** dont le fonctionnement conduira à la solution. Il y a donc ici un **changement de champ conceptuel** (passage d'un objet à un signe) et par conséquent une **transformation du sens** liée à ce changement.

Voici deux exemples d'utilisation de la méthode que j'ai baptisée N.T.R.C. pour mes élèves : **N**ommer, **T**raduire, **R**ésoudre, **C**onclure.

Premier exemple : *Une bouteille et son bouchon pèsent ensemble 110 grammes ; la bouteille pèse 100 grammes de plus que le bouchon. Quel est le poids du bouchon ?*

Nommer : avant de pouvoir traduire les données il faut en quelque sorte "préparer le terrain" en affectant des signes aux nombres susceptibles d'intervenir : ici il faut évidemment nommer le poids du bouchon, puisque c'est ce que l'on cherche, mais aussi celui de la bouteille car il intervient dans les deux phrases donnant les informations. Soit b le poids du bouchon, B celui de la bouteille.

Traduire : la première phrase ne pose pas de problème : B + b = 110. En revanche un certain nombre d'élèves de quatrième ont du mal à traduire la deuxième par l'égalité :
B = 100 + b (certains tentent une traduction par une inégalité à cause du "*de plus que*").

Résoudre : la maîtrise de la **substitution par égalité** est une condition nécessaire à la résolution du "système d'équations" obtenu : puisque B = 100 + b, alors je peux **remplacer** "B" **par** "100 + b". Ainsi l'égalité B + b = 110 devient 100 + b + b = 110 . Reste à utiliser une factorisation — b + b = 2 x b —, la réciprocité entre addition et soustraction — 2 x b = 110 – 100 — enfin la réciprocité entre multiplication et division — b = 10 / 2 —.

Conclure : le bouchon pèse cinq grammes.

Cet exercice fait partie des "résolutions de problèmes concrets liés à l'en-vironnement de l'élève"... Les exemples abondent : je ne m'étendrai pas car ce n'est pas l'essentiel de mon propos. Notons que la première difficulté est la "mise en équation(s)", le passage au langage algébrique, bref l'accès au symbolique.

Le second est "intra-mathématique" et nous intéresse davantage ici.

Second exemple : *La somme de trois entiers consécutifs est-elle toujours divisible par trois ?*

Une demi-douzaine d'exemples suffit à susciter cette conjecture. Le problème réside évidemment dans le "toujours", c'est-à-dire dans la généralité de la propriété. L'utilisation de lettres pour désigner des nombres "imprécisés" est alors incontournable ; ce passage à la lettre est à la fois une rupture et un prolongement : rupture car on ne calcule pas avec des lettres comme avec des nombres écrits en chiffres, prolongement car les règles de calcul sont toujours les mêmes et c'est donc **l'interprétation des écritures** qui guide la résolution jusqu'à sa conclusion : par exemple "b est le successeur de a" doit pouvoir être traduit par "b = a + 1" ou "a = b – 1" et "s = 3xa" doit pouvoir être interprété en "s est un multiple de 3". Notons qu'il y a ici un saut dans la généralité par rapport à l'utilisation d'une lettre pour désigner un nombre provisoirement inconnu mais "quelque part" bien déterminé, comme ce fut le cas précédemment.

D'autres résultats arithmétiques peuvent être obtenus ainsi (par exemple avec la parité : la somme de deux entiers impairs, le produit de deux entiers impairs, la différence des carrés de deux entiers consécutifs, etc.)

L'étape, "résoudre", requiert de mettre en œuvre des théorèmes algébriques. C'est sur la **construction** de ces derniers que je vous invite à porter un nouveau regard pour que les «règles de calcul» ne soient pas vécues par les élèves comme des pratiques magiques ou des diktats sur la pertinence desquels il est, de toutes façons, parfaitement vain de s'interroger. **Car ces fameuses règles ont une genèse et une cohérence** et ma pratique m'a convaincu que l'exploration par les élèves de la logique interne du «calcul algébrique» a une influence bénéfique sur sa mise en œuvre : elle est en effet porteuse de sens et permet ainsi de reformuler de façon rigoureuse et opératoire des questions de prime abord ineptes, du genre "le signe moins de 7/(−12), est-ce que j'ai le droit de le faire passer devant ?".

D'autre part les méthodes utilisées pour établir les diverses propriétés ne sont pas anecdotiques mais plutôt "canoniques", donc transférables, — essentiellement : fonctionnement opératoire d'une définition, transformation d'une écriture par égalités enchaînées et méthode N.T.R.C.— et les démonstrations ne sont pas, loin s'en faut, plus difficiles que celles de n'importe quel exercice de géométrie dès que l'on a compris la **substitution par égalité** et l'intérêt de la **reformulation des phrases**. Enfin leur nombre est raisonnable, ce qui ne grève pas le «budjet» temps dans des proportions rédhibitoires et constitue plutôt, à mon sens, un investissement déjà rentable à moyen terme.

Entendons-nous bien : il n'est pas question de faire de ces démonstrations des "connaissances exigibles". Il s'agit plutôt de les intégrer à ce que l'on appelle la "mémoire de classe" de façon que l' élève soit convaincu que toute "règle" a sa raison d'être, sa nécessité : avoir participé à sa démonstration en est un bon moyen, et, au besoin, on pourra ainsi faire appel à cette "mémoire collective" pour rappeler une bonne formulation ou la méthode d'une preuve. Faut-il aussi préciser qu'il est indispensable d'adapter les exigences aux spécificités de la classe avec laquelle on travaille ? D'après certaines remarques qui m'ont été faites, il semble que oui. Cependant il ne me semble pas utopique de faire appel à l'intelligence des "élèves en difficulté" pour tenter avec eux quelques unes de ces découvertes dans une approche ludique n'excluant ni la rigueur, ni l'efficacité, ni le plaisir ...

Voici donc un cheminement suivi depuis plusieurs années en classe de quatrième. S'il ne fait assurément pas de miracles il est plutôt bien reçu par les élèves et aide à développer une rigueur comparable à celle pratiquée en géométrie.

DOMAINE ADDITIF

Nous commençons par **le domaine additif** et rappelons les propriétés, admises depuis longtemps, d'associativité et de commutativité de l'addition, ainsi que le rôle particulier de zéro. Nous ne précisons pas outre mesure l'ensemble de nombres concerné, vu que c'est hors programme, mais nous demandons d'admette que "ça marche pour tous les nombres", ce qui ne choque personne ... Nous définissons ensuite la différence de deux nombres t et m (pris dans cet ordre !) comme le nombre "d" qu'il faut additionner au deuxième cité, m, pour égaler le premier, t, ce qui est une simple extension de la définition connue avec les nombres positifs. Utilisant la notation connue « t − m », on obtient ainsi l'équivalence des égalités « d = t − m » et « d + m = t ». La soustraction est alors définie comme l'opération qui fait correspondre à deux nombres t et m pris dans cet ordre la différence t − m.

Ainsi la soustraction est appréhendée comme l'opération réciproque de l'addition, ce que nous visualisons par un schéma qui permet de traduire un certain aspect dynamique de cette réciprocité :

$d = t - m$ *équivaut à* $d + m = t$ Schéma : $d \underset{-m}{\overset{+m}{\rightleftarrows}} t$

Utilisant le fait que $d + m = m + d$, on en déduit que $m = t - d$.

On retrouve alors la notion d'opposé comme un cas particulier : deux nombres sont opposés lorsque leur somme est égale à zéro, *autrement dit* l'opposé d'un nombre est la différence de zéro et de ce nombre. Cette approche permet ainsi de **faire des liens** entre addition, soustraction et opposé, d'abord deux à deux puis entre les trois en **démontrant** la propriété : «soustraire un nombre revient à additionner son opposé», propriété absolument capitale pour le calcul algébrique et dont la démonstration ne fait que reprendre la méthode de résolution d'une équation du type $x + a = b$ par addition de l'opposé de a aux deux membres :

Traduction de la définition d'une différence : $(t - m) + m = t$
Substitution par égalité : $[(t - m) + m] + (-m) = t + (-m)$
Utilisation de l'associativité : $(t - m) + [m + (-m)] = t + (-m)$
Définition des opposés : $(t - m) + 0 = t + (-m)$
Propriété de zéro : $t - m = t + (-m)$.

Du point de vue de la démarche, on voit ici les analogies avec la géométrie ainsi que les … différences : à chaque "situation" on associe bien un "outil" choisi en référence aux informations délivrées. Mais ici on opère sur les signes, on manipule les écritures au fil d'une chaîne d'opérations formelles.

Tout aussi fondamental est le fait qu'il faudra dorénavant être capable de **penser** l'écriture « $-m$ » comme «l'opposé de m», c'est-à-dire autrement qu'on la lit : c'est une gymnastique d'esprit qui est rien moins qu'évidente mais qui est indispensable à la compréhension du calcul littéral.

Un exercice très utile et très révélateur est alors du type suivant :
écrire toutes les écritures égales à $27 - 15 - 8$ sans faire aucun calcul mais en changeant uniquement des termes de place.

Les élèves travaillent par deux. Ils écrivent une réponse par ligne. Le nombre de possibilités est vite évoqué. Au bout d'un moment, même si tout le monde n'en a pas trouvé cinq, on s'arrête et on prend une calculatrice pour vérifier ses réponses. L'étude des erreurs commises est alors extrêmement instructive ! La difficulté est bien sûr de réintroduire un signe +, par exemple pour trouver $-15 + 27 - 8$. Il est impératif de **transformer l'écriture** en somme de façon à pouvoir utiliser la commutativité de l'addition.

On peut utiliser les erreurs précédemment relevées pour proposer de comparer les propriétés de l'addition et de la soustraction. Quelques exemples font facilement émerger la conjecture : $t - m$ et $m - t$ sont-ils opposés ? La démonstration est "élémentaire". Le risque de blocage se situe au départ, dans l'utilisation de la "propriété caractéristique" : «deux nombres sont opposés» signifie «leur somme est égale à zéro».

J'ai repéré deux comportements majoritaires : ou bien l'élève ne peut pas démarrer et n'écrit rien, ou bien il écrit . $t - m + m - t = 0$.

Or il faut comprendre :

1) qu'il y a question ;
2) que la question doit être traduite, exprimée en langage algébrique, sans préjuger de la réponse : à quoi est égal $t - m + m - t$ **?**

Il est indispensable de traduire le résultat par « $\mathbf{t - m = -(m - t)}$ ou $\mathbf{-(t - m) = m - t}$ » car d'une part ce changement d'écriture sera utile au calcul littéral, d'autre part il faut bien voir que, dans la pratique, toutes les "soustractions impossibles" avec les nombres positifs se résolvent de cette façon : pour calculer $7 - 12$, on calcule de fait $-(12 - 7)$.

On peut alors passer à l'opposé d'une somme. Ou bien on conjecture le résultat, auquel cas on n'a plus qu'à vérifier la conjecture comme précédemment, ou bien on ne sait pas, et c'est alors une excellente occasion de montrer comment on est conduit à une réponse par la seule "logique interne" du système algébrique en répondant à la question : $-(a + b) =$ **?**, c'est-à-dire qu'est-ce que l'opposé de $a + b$?

Le résultat doit bien sûr être connu sous ses deux formes :
opératoire formelle : $\mathbf{-(a + b) = -a + (-b)}$, et explicitée : « **l'opposé d'une somme est la somme des opposés de chacun de ses termes** ».

Une application immédiate est : $\mathbf{a - (b + c) = a - b - c}$.

<u>Traductions</u> : **soustraire une somme revient à soustraire successivement chaque terme de cette somme,** ou : **soustraire successivement plusieurs nombres revient à soustraire leur somme**, énoncés dont le sens "opératoire concret" est assez flagrant (par exemple avec des dépenses), ce qui permet de se convaincre du fait que l'"abstraction" n'est pas incompatible avec le "bon sens" ...

Parvenu à ce stade, on est déjà armé pour résoudre des équations du genre :
$43 - (9 - x) = 17$ ou $19 - (x + 25) = -8$ ou $-27 - (x - 19) = 5$, qui plus est de diverses manières, ce dont on aurait tort de se priver, d'une part pour "goûter et comparer", d'autre part pour sensibiliser à la cohérence des résultats.

DOMAINE MULTIPLICATIF

On passe alors au **domaine multiplicatif**, que l'on va traiter de façon à essayer de faire percevoir l'"analogie de forme" — pour ne pas dire : l'isomorphisme ... — avec le domaine additif, modulo une correspondance sur laquelle nous reviendrons.

On définit donc **le quotient de a par b** , noté a/b, comme le nombre par lequel il faut multiplier b pour égaler a, et l'on obtient ainsi :

q = a / b ***équivaut à*** **a = q x b** **Schéma :**

Utilisant le fait que qxb = bxq, on en déduit que b = a / q.

Nous introduisons alors la notion d'inverse comme un cas particulier : **deux nombres sont inverses lorsque leur produit est égal à un**, *autrement dit* **l'inverse d'un nombre "m" est le quotient de 1 par ce nombre "m"**, formulation importante à retenir car l'expression "un sur m" occulte quasi complètement la présence de la division ! On passe alors aux **liens entre division, multiplication et inverse :**

1. *Lien entre division et multiplication* : **a x b = p** ***équivaut à*** **b = p / a**
2. *Lien entre multiplication et inverse* : **k et u sont inverses** ***équivaut à*** **k x u = 1**
3. *Lien entre division et inverse* : **u est l'inverse de k** ***se traduit par*** **: u = 1 / k**
4. *Lien entre division , multiplication et inverse :*

A. Exemples numériques :

13 / 4 =	Quel est l'inverse de 4 ?	Alors 13 x (1 / 4) = 13 x	=
23 /5 =	Quel est l'inverse de 5 ?	Alors 23 x (1 / 5) = 23 x	=

B. Cas général : <u>Conjecture</u> : diviser par un nombre revient-il à......

La démonstration est calquée sur celle effectuée dans le domaine additif.

<u>TRADUCTION</u> : T / M = T x (1 / M)

<u>Exemple</u> : trouver toutes les écritures égales obtenues, sans faire de calcul, uniquement en changeant l'ordre d'écriture :

63 x 4 / 9 =

(cf. l'exercice analogue du domaine additif)

72 / 6 / 3 =

* * *

On connait les confusions "classiques" entre les deux domaines d'opérations, en particulier entre opposé et inverse. On sait aussi que ce n'est pas en séparant les deux objets que l'on fait disparaître la confusion mais en travaillant le "nœud" (exemple emblématique : aire et périmètre). Il n'est donc pas interdit de tenter ici une semblable approche.

On peut en effet "convertir" toutes les définitions et propriétés du domaine additif par la correspondance :

addition → multiplication, + → x , somme → produit , terme → facteur , zéro → un , différence → quotient , soustraction → division , – → / , opposé → inverse.

Remplacer une confusion par un lien n'est pas inintéressant. Les élèves sont favorablement étonnés de constater que, via cette "transposition", «ça marche pareil ...». **Presque** : il y a le cas pathologique de zéro : j'y reviendrai.

A quel moment "placer" cela ? Chacun est libre ! On peut le faire d'emblée ou attendre d'avoir un peu avancé ... Quoi qu'il en soit on arrive alors à :

Comparaison de t / m et m / t. Ils sont inverses

Traduction algébrique du résultat : t / m = 1 / (m / t).

Inverse d'un produit : 1 / (t x m) = 1 / t x (1 / m).

<u>Applications très utiles</u> :

1) **a / (b x c) = a / b / c. Traductions : diviser par un produit revient à diviser successivement par chaque facteur de ce produit (et "à l'envers" ...).** Ici aussi le lien avec l'opératoire concret est à ne pas manquer : pour partager un gâteau en douze morceaux on peut d'abord le couper en quatre puis partager chaque quart en trois. Le tiers d'un quart, c'est un douzième : 1 / 4 / 3 = 1 / (4 x 3) = 1 / 12. Lorsqu'on veut calculer le rayon d'un cercle connaissant sa circonférence "C" on doit effectuer C / (2 x π) à la calculatrice pour obtenir une valeur approchée : il est plus rapide de taper : C / 2 / π. ..etc...

2) **Simplification d'un quotient : k x a / (k x b) = a / b ou "complication" d'un quotient : a / b = k x a / (k x b).**

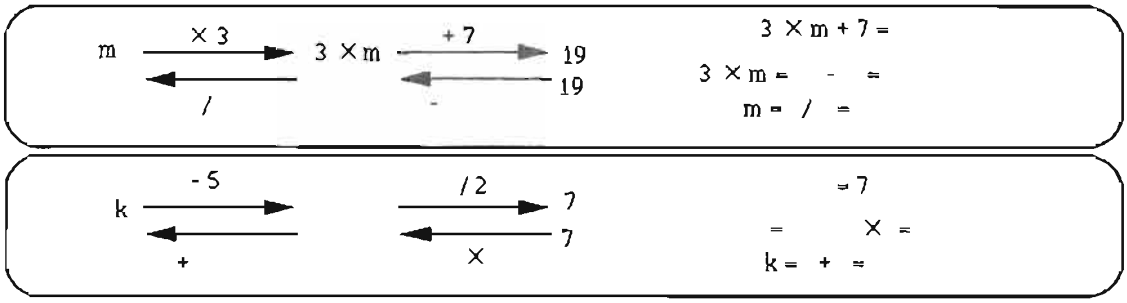
Arrivé là, on va commencer à "mélanger" les domaines d'opérations.

Il faudra d'abord être capable de reconnaître dans quel domaine d'opération on se trouve. Les résolutions d'équations constituent un champ d'exercice particulièrement propice à cela. Dans un premier temps on s'aide de schémas, puis, peu à peu, on apprend à s'en passer en analysant les écritures pour savoir si elles désignent des sommes, des produits, des différences ou des quotients et en utilisant la réciprocité des paires d'opérations :

+ ←→ – et x ←→ /.

Exemples :

Complète les schémas puis les égalités suivantes :



Ensuite on s'entraîne à faire cela progressivement avec "le schéma seulement dans la tête". Cela oblige à une analyse de la structure des écritures, cela renforce l'assimilation des priorités opératoires et du rôle des parenthèses.

On peut aller jusqu'à quatre étapes.

Encore une fois je me sens tenu de préciser, afin qu'on ne me fasse pas dire ce que je n'écris pas, que ce genre d'exercices ne constitue évidemment pas une fin en soi. Les manuels regorgent de problèmes à support concret aboutissant à des équations de ce type et mon propos n'est pas de faire dans la redondance. Je pense simplement qu'il n'est pas inutile, pour pouvoir interpréter correctement un morceau, d'avoir auparavant fait quelques gammes ...

On constate trop souvent, en particulier en troisième (pour ne parler que du Collège ...), que beaucoup d'élèves butent sur des questions techniques et du coup perdent le fil de ce qu'ils font, perdent le sens de la question initiale, bref que l'arbre cache la forêt.

<u>LE SEUL PONT</u> ENTRE LES DEUX DOMAINES D'OPERATIONS :

la distributivité de x sur +.

On a ici un exemple simple et révélateur du mode de fonctionnement algébrique ; je pense donc qu'il mérite que l'on s'y attarde quelque peu.

La compréhension dans le domaine numérique ne pose aucun problème mais l'utilité est plus que limitée ... La généralisation à une écriture littérale se fait sans difficulté. Mais c'est évidemment l'utilisation — et donc le sens — de cette formule littérale qui en génère car elle suppose un décryptage qui conditionne son usage correct. Je choisis le sens de la factorisation car c'est celui qui est le plus "à risques" : le théorème énonce que, **quelles que soient les écritures de nombres : m, a, b, alors : m x a + m x b = m x (a + b).**

Qu'est-ce à dire ? Que certaines sommes peuvent être réécrites sous forme de produit. Lesquelles ? **L'analyse de l'écriture $m \times a + m \times b$** montre très explicitement quelles **contraintes** doivent satisfaire de telles sommes : en premier lieu chaque terme doit être écrit sous forme d'un produit, et si cela est effectivement réalisé, en second lieu chacun de ces produits doit présenter un facteur commun. Ces deux conditions sont nécessaires et suffisantes, et le deuxième membre de l'égalité donne alors la forme du produit qui est égal à cette somme.

Ainsi il doit être clair que l'écriture $7 \times a + 21$ n'est pas factorisable car 21 n'est pas l'écriture d'un produit. Cela n'est en rien incompatible avec le fait qu'elle puisse être égale à une autre écriture qui, elle, sera factorisable ... Que l'on ne se méprenne surtout pas : il ne s'agit pas là de je ne sais quelle subtilité — pour ne pas dire : d'un "pinaillage" — qui serait hors de portée de la grande masse des élèves ; il s'agit au contraire du fond du problème : l'algèbre opère sur des signes, des écritures, et les théorèmes fournissent des manipulations d'écritures licites. Comme je me plais à le répéter à mes élèves : on fait ce qu'on peut, pas ce qu'on voudrait !

Voilà pourquoi, quand on veut factoriser par 7 l'écriture $7xt + 7$, on n'a pas le choix :

1°) telle quelle, elle n'est pas factorisable ;

2°) le seul produit égal à 7 et dont l'un des deux facteurs soit 7 est 7×1 ;

3°) on a toujours le droit de remplacer une écriture par une écriture égale.

Lorsqu'on a compris cela il n'y a plus de problème, je le constate tous les ans.

Parvenu à ce stade je pense à un type d'exercice qui met bien en évidence le processus de manipulation de signes et son intérêt :

Un article soldé avec un rabais de 40% est vendu 299F. Quel était son prix initial ?

L'erreur classique est le calcul du rabais par : $0,4 \times 299$. Or le rabais se calcule "évidemment" à partir du prix initial ... inconnu ici ! — sans quoi on ne demanderait pas de le trouver.

Nommer : désignons par "p" le prix initial.

Traduire : le rabais est alors représenté par : $0,4 \times p$, donc le prix soldé est représenté par : $p - 0,4 \times p$. Compte tenu de la question posée, l'information fournie se symbolise donc dans l'"équation" : $p - 0,4 \times p = 299$.

Résoudre : il est extrêmement éclairant de réfléchir au fait que, pour parvenir à la solution : «p = un certain nombre», il faut disposer d'une <u>écriture</u> compor-tant une seule occurrence de la lettre p. Et pour cela on n'a guère le choix car la seule "manipulation" d'écriture connue qui réalise cela est la factorisation.

Peut-on factoriser par p ? Oui car $p = p \times 1$, donc $p - 0,4 \times p = p \times 1 - 0,4 \times p$, et alors il n'y a plus d'obstacle pour terminer.

CONSEQUENCE FONDAMENTALE : le rôle très spécial que joue le nombre "zéro" dans la multiplication (et donc aussi dans la division).

On sait que $1 + 0 = 1$. Donc, **quel que soit le nombre m**, on a : $m\times(1+0) = m\times 1$
En développant le produit, on obtient : $m \times 1 + m \times 0 = m \times 1$
et puisque $m\times 1 = m$, on obtient : $m + m \times 0 = m$
ce qui est équivalent à : $m \times 0 = m - m = 0$.

FINALEMENT :
POUR N'IMPORTE QUEL NOMBRE m, $m \times 0 = 0$.

Cette démonstration est facile et elle a, une fois de plus, le mérite de **faire des liens** entre des "*grumeaux de savoir*" car, trop souvent, les élèves savent des choses mais ... sans savoir pourquoi ni comment, ce qui explique en partie pourquoi ils ont tant de mal à mobiliser leurs connaissances (cf. Gérard Kuntz).

Alors questions connexes : 1) zéro a-t-il un inverse ? POURQUOI ?
2) peut-on diviser par zéro ? POURQUOI ?

LES AUTRES CONSEQUENCES DE LA DISTRIBUTIVITE

On arrive là dans la "dernière ligne droite", qui va permettre d'établir les relations entre addition et division, multiplication et opposé, division et opposé.

1. Somme de quotients

A. de même dénominateur

$\mathbf{a / m + b / m} = a \times (1 / m) + b \times (1 / m) = (a + b) \times (1 / m) = \mathbf{(a + b) / m}$ (C'est très facile)

B. de dénominateurs différents

On se ramène au cas précédent grâce à : $a / b = k \times a / (k \times b)$.
Il y a toujours au moins un dénominateur commun : le produit des dénominateurs en présence.

REMARQUE : Lors de calculs du genre $3 / 7 + 2$ on voit beaucoup d'élèves passer par l'intermédiaire : $3 / 7 + 2 / 1$. D'aucuns trouvent cela inutile car ils confondent comportement d'expert avec comportement d'apprenant. Pour ma part je pense que cet intermédiaire est une bonne étape, révélatrice du souci légitime de conserver en ligne de mire la structure d'écriture la plus explicite pour trouver le dénominateur commun : il est patent de constater que les élèves qui opèrent ainsi ne commettent presque jamais l'erreur bien connue : $3 / 7 + 2 = 5 / 7$ (pas plus que $3 / 7 + 2 = 3 / 9$).
On retrouve ici la même démarche que pour la factorisation, déjà citée, de $7 \times t + 7$: le passage par $7\times t + 7 \times 1$ est inévitable, même s'il est sous-entendu, puisqu'il n'est que la manifestation de la conformité avec la syntaxe algébrique ! Et, en phase d'apprentissage, je reste convaincu qu'il doit être explicite.

2. Opposé et multiplication

A. **t x (–m) désigne le produit de t et de l'opposé de m.**

– **(t x m) désigne l'opposé du produit de t et de m.**

–

Avant même de connaître la "règle des signes", des exemples simples amènent la conjecture.
En effet 3x(–5) s'interprète "naturellement" comme trois fois moins cinq,
et –5 + (–5) + (–5) = –15 = –(3x5).

Une fois de plus, le premier blocage, se trouve dans la "demi-traduction" : **t x (–m) est-il l'opposé de t x m ?** et le second dans la reformulation par la médiation de la définition : **est-ce que t x (–m) + t x m = 0 ? L'erreur majoritaire est : est-ce que t x (–m) + –(t x m) = 0 ?**
Il faut inlassablement reposer la question : de quels "nombres" — on devrait dire : de quelles **écritures** de nombres — est-il question ?
Et, une fois encore, il faut commencer par écrire : **t x (–m) + t x m =**

La suite ne pose alors aucun problème.

B. **On recommence avec les écritures (–t)xm et txm.**

C. **<u>Convention d'écriture</u> : les trois écritures (–t) x m , t x (–m) et –(t x m) étant égales, on pourra les remplacer par : –t x m.**
<u>Interprétation</u> : L'opposé d'un produit s'obtient en prenant l'opposé d'UN facteur.

D. *CONSEQUENCES :*

1. **La "règle des signes".**

2.Un cas particulier important : le signe du carré d'un nombre.
C'est bien connu, je n'y reviens pas.

ATTENTION A L'USAGE DES PARENTHESES !

-12^2 désigne par convention l'opposé du carré de 12, donc $-12^2 = -144$
$(-12)^2$ désigne le carré de –12, donc $(-12)^2 = 144$

3. (–1)xm = –(1xm) = –m, ***autrement dit***
multiplier un nombre par –1 revient à prendre son opposé.

4. Deux nombres inverses sont "de même signe" puisque ...

5. <u>Distributivité de x sur –</u> :

On a ici un exemple simple et révélateur de la façon dont les propriétés se relient, s'enchaînent pour amener à un résultat :

k x (a – b) = k x [a + (–b)] car soustraire b revient à additionner –b
= k x a + k x (–b) car x est distributive sur +
= k x a + (–k x b) d'après la propriété démontrée au 2°)
= k x a – k x b car additionner l'opposé revient à soustraire.

3. Opposé et division

Dans le même esprit que ce que l'on avait fait avec la multiplication.
Avec, bien sûr, des approches numériques pour faire émerger les conjectures.

A. **(–t) / m désigne le quotient de l'opposé de t par m.**
–(t / m) désigne l'opposé du quotient de t par m.

Question : ces deux écritures sont-elles égales ?

Toujours la même méthode ... et la même traduction :
(–t) / m + t / m = (–t + t) / m = 0 / m = 0 x (1 / m) = 0, donc ...

B. **t/(–m) désigne le quotient de t par l'opposé de m.**
–(t/m) désigne l'opposé du quotient de t par m.

Question : ces deux écritures sont-elles égales ?

A priori, toujours la même méthode : t / (–m) + t / m = ?
Comment factoriser ? On fait ce qu'on peut, pas ce qu'on veut :
t / (–m) + t / m = t x [1 / (–m)] + t x (1 / m) = t x [1 / (–m) + 1 / m]

Mais alors question : 1 / (–m) + 1 / m = ? On tourne en rond ...
A posteriori il semble que cette méthode ne soit pas la meilleure !

Alors reprenons la question au début et cherchons un autre moyen : pour trans-former l'écriture d'un quotient on a une propriété : a / b = k x a / (k x b), et il faut se rappeler que prendre l'opposé revient à multiplier par –1. Alors t / (–m) = (–1)x t / [(–1) x (–m)] = (–t) / m.

C. **<u>Convention d'écriture</u> : les trois écritures (–t) / m, t / (–m) et –(t / m) étant égales, on pourra les remplacer par : –t / m.**

L'enseignement de l'algèbre est-il uniquement destiné à acquérir des "savoir-faire" dont on n'aura quasiment plus le moindre besoin dans la "vraie vie" ou à tenter d'initier à une méthodologie, un mode d'appréhension de certains problèmes, bref une amorce de formation d'esprit scientifique pour lequel : « *Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit* .»
(G. Bachelard) ?

Que ce soit pour la qualité de son propre rapport au savoir ou pour les "armes" qu'il peut se forger pour affronter les futurs problèmes de sa vie d'adulte, vaut-il mieux que l'écolier, le collégien, le lycéen ingurgite des recettes et régurgite des procédures plus ou moins lacunaires ou qu'il tente de construire des capacités de réflexion, d'analyse, de cohérence logique, de compréhension, de création, d'esprit critique ?

C'est bien dans cette conception « *les mathématiques, une aventure de l'esprit* » que Gérard Kuntz écrivait, dans son remarquable article du n° 18 de Repères :

« *Travailler de façon approfondie sur les objets et les situations élémentaires et tisser de façon explicite des liens entre eux, constitue une ligne de conduite pour tout enseignant* ». « *Beaucoup d'élèves se contentent de "grumeaux" de savoirs épars, et s'étonnent de ne pas progresser* ». « *Une connaissance non structurée s'étoffe difficilement* ».

« *Seule une tête bien faite peut se remplir utilement* » et « *Force est de constater que sur bien des plans, l'école s'attache à la réussite immédiate, aux dépens de la compréhension en profondeur* ».

C'est bien dans cette visée résolument humaniste que Philippe Rousseaux avait présenté et tenu son atelier "Enseigner les mathématiques : un engagement éthique et citoyen" au XXIVème colloque de la COPIRELEM, posant d'emblée «*la question première du **pourquoi*** », déclarant que « *Encore une fois, nous voyons clairement que ce qui est en jeu, en lumière, c'est notre rapport au savoir mathématique plus que le contenu mathématique stricto sensu* ». Je ne sais pas s'il "**faut**" enseigner, au collège ou ailleurs, comment "résoudre des équations" ou "développer et réduire", mais je suis convaincu que, si on doit le faire, alors il ne faut pas faire semblant mais il faut jouer le jeu à fond et jusqu'au bout, honnêtement et sans "tour de passe-passe" car il y a des tas de choses à comprendre, à savoir relier, organiser pour qui veut intégrer intelligemment ces "savoir-faire".

Pour vous en convaincre, et en guise de … point d'orgue à cette réflexion, je vous propose de "décortiquer" un exemple de la seconde de ces activités afin de réaliser combien elle est riche de contenu et de sens pour peu qu'on veuille bien ne pas la réduire au mode de fonctionnement d'un logiciel bien programmé.

Et je ne résiste donc pas, moi non plus, à l'envie de citer Guy Brousseau :

« *Une des fonctions de la didactique pourrait être alors, contrairement à ce que certains ont insinué, de contribuer à mettre un frein, enfin, à un processus qui consiste à transformer le savoir en algorithmes utilisables par des robots ou des humains sous-employés et à diminuer la part de réflexion noble dans toutes les activités humaines pour en faire dévolution à quelques uns (les chercheurs !). Pour sacrifier au dieu de la soi-disant efficacité, l'enseignement prête son concours aujourd'hui à la réduction algorithmique et à la démathématisation. J'espère profondément que la didactique pourra combattre cette dépossession et cette déshumanisation* ».

Un dernier exemple : développer et réduire

Pour aborder la "distributivité généralisée" on commence par développer (a + b) x (t + m) et pour ce faire on a plusieurs "entrées" possibles dont il ne faut pas se priver, le sens se construisant par la circulation des liens entre ces diverses représentations.

Il y a l'entrée purement algébrique, par substitution :
Je sais développer k x (t + m) en k x t + k x m, alors je n'ai qu'à remplacer k par a + b et à redévelopper.

Il y a le changement de cadre géométrique qui prend son sens au début avec des nombres positifs considérés comme des mesures de longueurs de segments, mais que l'on peut étendre facilement, **en tant que représentation**, à des écritures quelconques, moyennant le toujours indispensable A – B = A + (–B) :

	t	m
a	$a \times t$	$a \times m$
b	$b \times t$	$b \times m$

	$2 \times u$	-1
$4 \times u$	$4 \times u \times 2 \times u$	$4 \times u \times (-1)$
-3	$(-3) \times 2 \times u$	$(-3) \times (-1)$

Il y a l'image de la multiplication "ordinaire" :

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & 4 \times u & + & (-3) & \\
 & & & 2 \times u & + & (-1) & \\
\hline
 & & & -4 \times u & + & (-1) & \times (-3) \\
2 \times u \times 4 \times u & + & (-6 & \times u) & & & \\
\hline
8 \times u^2 & - & 10 & \times u & + & 3 &
\end{array}$$

Reste que, pour parvenir à l'expression convenablement "réduite", il faut utiliser un certain nombre de théorèmes algébriques que l'on sous-entend allègrement dans la majorité des cas — je pense en particulier à : (–a) x b = a x (–b) = –(a x b) — et que, un jour ou l'autre, il faudra bien en arriver à rédiger tout cela de façon "linéaire".

Voila pourquoi, et quoi qu'en pensent certains, je ne crois pas du tout inutile — et je ne suis pas le seul — de passer une fois ou deux par une phase "analytique exhaustive", histoire de prendre un peu conscience de tout ce qui entre en jeu dans ce "*développer et réduire*".

Après cela je laisse l'élève libre de choisir les raccourcis qui lui conviennent : certains sont très rapidement à l'aise avec les signes "–" et ne se trompent pas. D'autres éprouvent plus longtemps le besoin de garder le "+ (– ...)" : ce n'est pas grave ! L'important n'est pas de "gagner la course à la bêtise", mais d'arriver au bon résultat par un cheminement sûr.

Calcul	Justification
$\boxed{(4 \times u - 3) \times (2 \times u - 1)}$	soustraire un nombre revient à additionner son opposé : $t - m = t + (-m)$
$[4 \times u + (-3)] \times [2 \times u + (-1)]$	Développement d'un produit : $(k+u) \times (t+m) = k \times t + k \times m + u \times t + u \times m$
$4 \times u \times 2 \times u + 4 \times u \times (-1) + (-3) \times 2 \times u + (-3) \times (-1)$	$a \times b = b \times a$; $m \times m = m^2$ multiplication des relatifs
$8 \times u^2 + (-4) \times u + (-6) \times u + 3$	Regroupement des termes "semblables"
$8 \times u^2 + [(-4) \times u + (-6) \times u] + 3$	Factorisation d'une somme : $t \times k + m \times k = (t+m) \times k$
$8 \times u^2 + [-4 + (-6)] \times u + 3$	Addition des relatifs
$8 \times u^2 + (-10) \times u + 3$	$(-a) \times b = -(a \times b) = -a \times b$
$8 \times u^2 + (-10 \times u) + 3$	additionner l'opposé, c'est soustraire : $t + (-m) = t - m$
$\boxed{8 \times u^2 - 10 \times u + 3}$	

On peut proposer cet exercice en "thème" et/ou en "version" en laissant en blanc soit la colonne de droite, soit celle de gauche, puis ... laisser le champ libre mais en exigeant, au début, les justifications du passage d'une ligne à la suivante.

* * *

Le calcul algébrique fournit, on le constate clairement, un bel exemple de la « **synergie outil-objet** ». Et ma pratique d'enseignant m'a convaincu du fait que **l'étude du calcul algébrique en tant qu'objet retentit favorablement sur son acquisition en tant qu'outil.**

Variables didactiques et géométrie

Luce Dossat Clermont-Ferrand
Jean-Luc Brégeon Moulins
André Myx Lyon

RESUME :

Nous nous plaçons dans le cadre de l'enseignement de la géométrie plane à l'école primaire, particulièrement au cycle 3, sans en discuter ni son statut, ni son contenu. Le but que nous recherchons est de contribuer à une amélioration de son enseignement - et, par voie de conséquence, du moins l'espérons-nous, à une amélioration des performances des élèves - grâce à une mise en évidence plus précise de différentes variables didactiques présentes dans les activités géométriques. Ce travail débouche sur une typologie de problèmes utilisée systématiquement dans les situations proposées aux élèves. Cela nous semble particulièrement pertinent lors de la mise en œuvre de dispositifs d'évaluation dans un but de diagnostic ou d'aide aux difficultés.

La présentation de ce thème au séminaire de Loctudy n'a pas permis de mener à bout la tâche envisagée : le lecteur trouvera en annexes certaines réflexions portant sur l'égalité de figures planes (annexe 1) et un rappel du rôle des instruments de dessin à partir d'une étude particulière (annexe 2).

Introduction

Comme le montrent les nombreuses publications de travaux de recherche depuis plusieurs années, l'enseignement de la géométrie, notamment à l'école primaire, est revenu sur le devant de la scène. Pour expliquer ce fait, on peut avancer plusieurs raisons. La qualité fréquemment médiocre de cet enseignement, parfois son absence, sont un sujet réel de préoccupation. Il semble aussi qu'apparaît un débat, plus profond et plus complexe, sur le statut de cet enseignement géométrique à l'école. Doit-il consister en la résolution de problèmes spatiaux, traduction sur un micro-espace de situations présentes dans un méso-espace ou un macro-espace [1] ? A l'opposé, doit-il être résolument placé dans un cadre visant à donner à l'élève un statut de la figure géométrique et approcher ainsi la géométrie hypothético-déductive rencontrée au collège? Nous laisserons aux didacticiens émérites le soin de trancher, par leur travaux.

Pour ce qui nous concerne, nous nous plaçons dans le cadre de la géométrie plane enseignée à l'école primaire, sans épiloguer sur son contenu, ni sur son statut. Dans cet état, il nous semble qu'il est possible d'améliorer grandement les performances des élèves et de donner à l'enseignant les moyens de faire ses choix pédagogiques avec plus de lucidité. Pour ce faire, nous avons listé les éléments remarquables présents dans des productions d'élèves, à partir de plusieurs critères : 1) la sensibilité plus ou moins grande à divers aspects d'une figure ; 2) la présence (ou non) d'éléments perturbateurs dans la perception d'une figure ; 3) la reconnaissance d'éléments perçus en premier par l'élève.

A partir de ces constats - qui paraîtront triviaux à des didacticiens chevronnés mais qui sont, à l'usage, peu utilisés en situation scolaire- notre démarche a consisté à faire ressortir un certain nombre de **variables didactiques** [2] dans le but de créer une plus grande richesse de situations de géométrie plane, particulièrement au cycle 3 de l'école primaire.

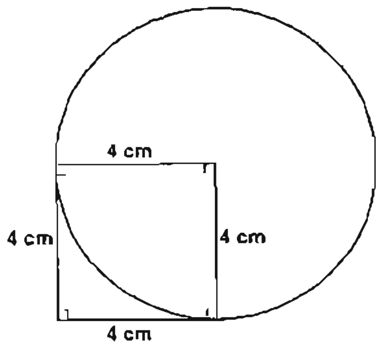
[1] Pour la définition de ces termes, se reporter aux travaux de G. Brousseau. On pourra aussi consulter la thèse de M.H. Salin et R. Berthelot : « L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire » 1992

[2] Nous ne prenons pas la peine ici de définir la notion de variable didactique. Nous l'utilisons dans son sens usuel, largement répandu dans les publications.

I. Mise en évidence de variables didactiques à partir de productions d'élèves.

Situation n°1 (évaluation 6ème 1997)

Ecris un texte pour permettre à quelqu'un qui ne voit pas la figure de la tracer en respectant les dimensions indiquées :



Production n°1 :

Trace un cercle de rayon 4 cm. Trace
dans le cercle un rayon de 4 cm à
l'horizontal et un rayon de 4 cm à la
vertical. Trace en dehors du cercle une ligne
de 4 cm à la vertica qui rejoint le cercle et qui est
parallèles au rayon tracer dans le cercle à la vertical
Trace une autre ligne de 4 cm à l'horizontal
qui rejoint le cercle et qui est parallèles
au rayon tracer dans le cercle à l'horizontal.

Production n°2

trace un carré ABCD de 4cm qui forme des angles droits
Place la pointe de ton compat sur le point B
Ensuite trace un cercle passant par le point A et D.

On note tout d'abord que la tâche demandée à l'élève est la production d'un **T**exte à partir d'une **F**igure (ce que nous noterons [**FT**]). C'est une activité très riche, autant sur le plan géométrique que dans le domaine de l'expression écrite, qui révèle de nombreux indices sur la perception d'une figure par un élève.

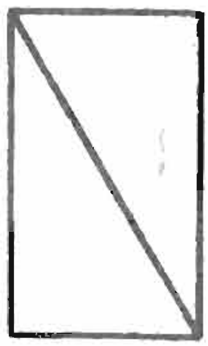
Schématiquement, deux types de textes peuvent être distingués :

- un texte descriptif qui a pour intention de fournir les propriétés de la figure suffisantes pour en permettre la reproduction à l'identique ;
- un texte donnant les différentes étapes de la construction (c'est-à-dire établissant un *scénario de construction*)

Dans la réalité des productions des élèves, ces deux types de texte se présentent sous une forme mixte et mélangée, avec un penchant certain pour le scénario de construction. Par ailleurs, on constate que certains élèves font appel aux directions privilégiées - que nous appellerons, selon l'usage, l'horizontale et la verticale - définies par les bords rectangulaires de la feuille de papier. L'utilisation de ces directions revient à placer la figure originelle dans une sur-figure contenant le rectangle orienté de la feuille.

En résumé, la variable didactique principale qui ressort de cette situation est **l'orientation de la figure**, selon deux modalités :

- la position du carré par rapport au cercle ;
- la position du carré par rapport aux bords de la feuille de papier.



Situation n°2

Aucun instrument ne mesure n'est autorisé.

Décris cette figure à un camarade qui ne la voit pas :

Production n°1 :

Trace un rectangle avec une de ses diagonale

Production n°2 :

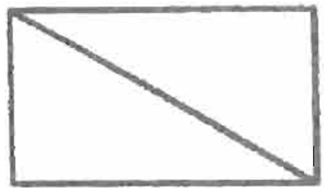
C' est un rectangle debout
avec, la diagonale de en haut à gauche
jusqu'en bas à droite.

OU

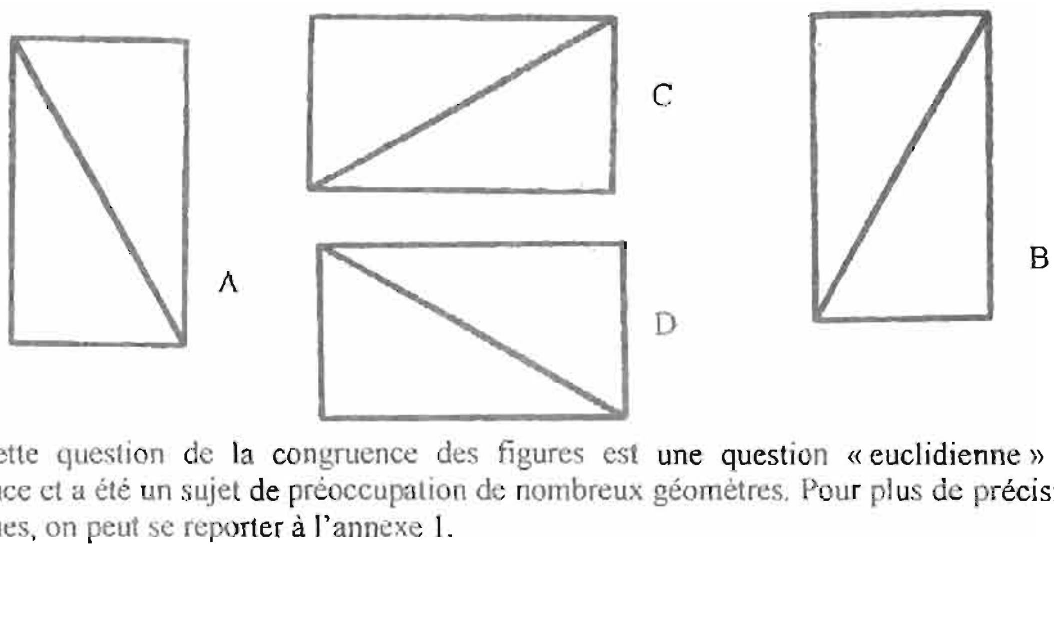
C'est deux triangles réctangles posés l'un
sur l'autre faisant un rectangle.

Nous sommes à nouveau dans le cas de le production d'un **T**exte à partir d'une **F**igure (**[FT]**). Dans cette situation, l'accent est mis sur la description des propriétés de la figure (il n'est pas dit qu'elle doit être reproduite à l'identique et aucun instrument de mesure n'est mis à la disposition de l'élève). On retrouve les deux types de textes et l'influence de l'orientation de la figure, évoqués dans la situation n°1. Nous ne reviendrons pas sur ces faits.

Nous préférons insister ici sur un point apparemment anodin mais qui se révèle essentiel si nous voulons exploiter avec les élèves ce type de situation. Il ne nous viendrait pas à l'idée de refuser la production n°1. Et pourtant, cela implique que, dans un tracé à main levée par exemple, un autre élève puisse produire la figure suivante correspondant à la description faite :



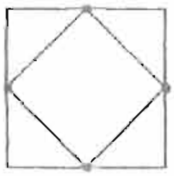
En d'autres termes, cela nous conduit à accepter que les figures suivantes sont congrues (nous dirons aussi égales) alors qu'une observation des pratiques enseignantes montre qu'il est fréquemment refusé que les figures A et B, par exemple, le soient.



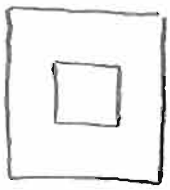
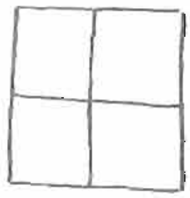
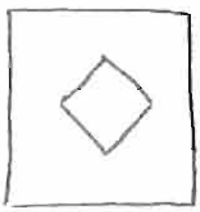
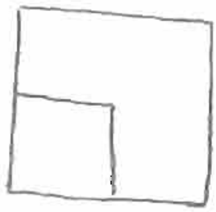
Cette question de la congruence des figures est une question « euclidienne » par excellence et a été un sujet de préoccupation de nombreux géomètres. Pour plus de précisions théoriques, on peut se reporter à l'annexe 1.

En conclusion, la pratique d'activités géométriques semblables à celle de la situation 2 (plus généralement la mise en relation d'un texte décrivant les propriétés d'une figure et d'un tracé) conduisent à nous interroger sur le statut d'une figure matérialisée par un dessin géométrique et sur les conditions de congruence de plusieurs figures.

Situation n°3

Texte donné oralement	Figure attendue	Indication de dimensions pour un tracé aux instruments
La figure est formée de deux carrés : un grand et un petit. Les sommets du petit carré sont les milieux des côtés du grand carré.		Grand carré : 10 cm de côté ou 10 carreaux

Exemples de productions obtenues par les élèves lors du tracé à main levée :

Production n°1 :	Production n°2 :
	
Production n°3 :	Production n°4 :
	

La situation proposée consiste en la production d'un **D**essin à partir d'un **T**exte (ce que nous noterons [**TD**]). Le texte est donné oralement et, dans un premier temps, le dessin est tracé à main levée. Ces conditions initiales sont évidemment importantes et constituent des variables didactiques. En outre, on notera que le texte est une description globale des propriétés de la figure (on dit qu'il s'agit d'une définition « en compréhension »).

L'observation des productions des élèves révèle des obstacles de même nature que dans les situations précédentes : problème de position relative d'un élément de la figure par rapport à un autre (ici le petit carré par rapport au grand) ; rôle des directions privilégiées définies par les bords rectangulaires de la feuille de papier. Il s'y rajoute une difficulté à prendre en compte simultanément la totalité des indications fournies dans le texte initial.

Au passage, on appréciera tout l'intérêt de faire tracer par les élèves une figure à main levée, avant de les conduire à la construire avec des instruments de dessin. Cela les oblige à créer une image mentale de la figure sans avoir le parasitage de la manipulation des instruments.

Situation n°4

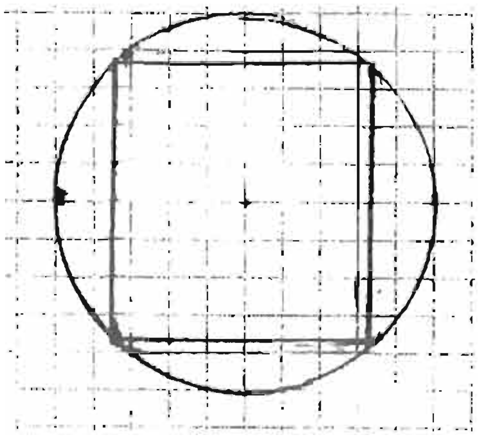
Cette situation se découpe en deux cas distincts. Certains élèves disposent d'une feuille blanche ; d'autres ont en leur possession une feuille quadrillée. Tous peuvent utiliser la règle graduée, l'équerre et le compas.

La figure est formée d'un cercle et d'un carré. Le cercle de 5 carreaux de rayon (resp. 5cm de rayon) passe par les quatre sommets du carré.

Consignes :

1. Construire la figure
2. Rédiger le scénario de construction.

Production n°1 :



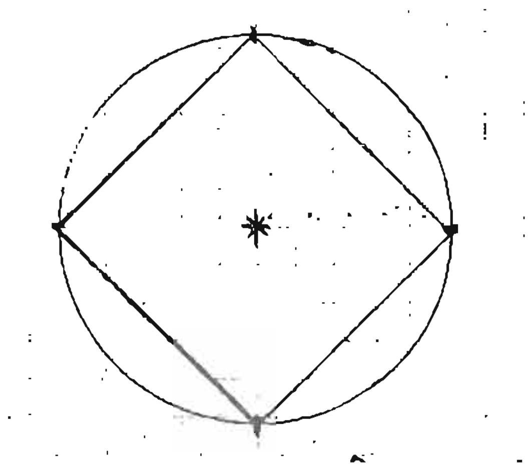
1 j'ai tracé un cercle de 10 carreaux aux milieu

2 dans le cercle j'ai fait des petites marque ~~pour~~ voir si sa marché.

3 je 'ai trouvé que sa marché

4 je les relie

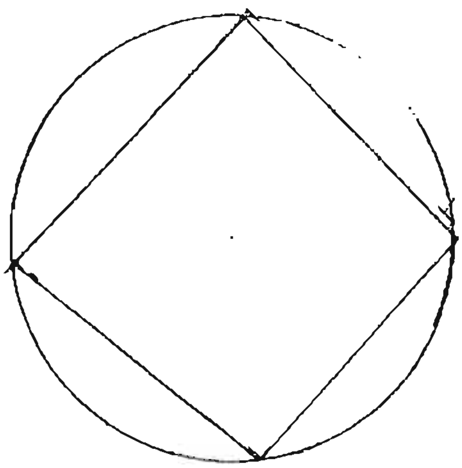
Production n°2 :



1, avec un compas j'ai tracer un cercle de 5 carreaux de rayon
2, j'ai mis une croix a centre du cercle
3, avec ma regle j'ai fait le carre
4, du centre je suis aller tout droit en bas, Haut, droite, gauche
5, j'ai verifié les angle droit

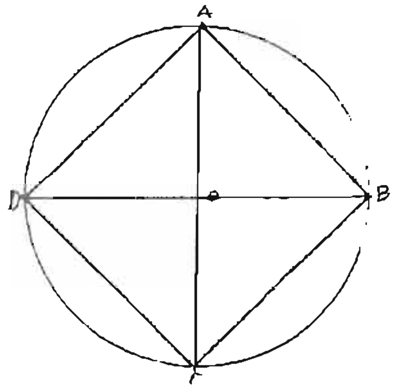
Production n°3 :

Les dimensions réelles
ont été réduites



1- avec mon compas j'ai
tracé un cercle de 5 cm de rayon
2- après j'ai tracé un carré avec ma règle
3- ce cercle passe par les 4 sommets du carré

Production n°4 :



Les dimensions réelles ont été réduites

1 - J'ai tracé un cercle de 5 cm de rayon et de 10cm de diamètre.

2 - J'ai tracé le centre du cercle du nom de O.

3 - A partir de O je trace horizontalement un segment de 10 cm appelé [DB].

4 - A partir de O je trace verticalement un segment de 10cm appelé [AC].

5 - Le segment [DB] est perpendiculaire au segment [AC].

6 - Je rejoins A-B-C-D.

Dans cette situation, la première tâche demandée à l'élève est la production d'un **D**essin à partir d'un **T**exte (noté **| TD |**), ce texte décrivant les propriétés de la figure. La seconde tâche est la production d'un **T**exte à partir d'une **F**igure, ce texte décrivant les étapes de la construction de la figure (rédaction d'un Scénario de construction). C'est pourquoi nous noterons plus précisément **| FS |**. A l'observation des productions des élèves, on notera que celles-ci dépendent fortement du type de support utilisé. La détermination des sommets du carré (production n°2) se fait directement, sans tracé supplémentaire, en utilisant les directions privilégiées renforcées par le quadrillage. Cependant, cela oblige l'élève à percevoir le carré dans une position inhabituelle, ce qui semble impossible pour l'élève qui a réalisé la production n°1. Sur le papier blanc, le tracé de deux diamètres perpendiculaires devient nécessaire pour une construction correcte (production n°4, à opposer à la production n°3).

En conclusion, cette situation met en évidence **une nouvelle variable didactique : le type de support proposé** (papier blanc, papier seyes, papier quadrillé, papier pointé, etc.).

II. Point de vue synthétique sur l'organisation des activités de géométrie plane.

Le texte qui suit est extrait de la partie « géométrie» du Moniteur de Mathématique [1]. Cet ouvrage comprend une vingtaine de familles d'exercices que l'on peut proposer aux élèves. Tous les exercices d'une même famille répondent à des caractéristiques semblables. Ces caractéristiques relèvent d'une part du domaine géométrique concerné, d'autre part des divers angles d'attaque du problème. Chacune d'elles donne lieu à la définition d'un *index*. Ainsi, à chaque famille (ou série) est associée une suite de trois *entrées* (constituant son indexation). Pour indexer ces séries d'exercices, nous avons retenu les critères suivants :

1. le domaine géométrique concerné ;
2. les variables didactiques liées à la nature des productions demandées ;
3. les variables didactiques liées aux choix du support de la feuille de dessin et à celui des instruments de dessin

(un récapitulatif de cette indexation se trouve en annexe 3)

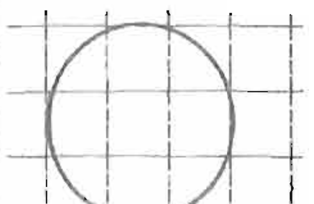
A. LES DOMAINES GÉOMÉTRIQUES CONCERNÉS

Nous avons fait le choix de ne considérer que le domaine de la géométrie plane. Il n'est pas simple de proposer des épreuves où doivent être présentés des objets de l'espace. Toutefois, l'enseignant ne doit pas oublier que géométrie plane et géométrie de l'espace ne constituent pas deux domaines séparés : tout objet géométrique s'appréhende en général dans ce rapport plan-espace. Ne citons, pour mémoire, que l'approche simultanée des rectangles et des carrés en liaison avec l'étude des pavés et des cubes.

En ce qui concerne les domaines pris en compte, nous en avons retenu trois qui recouvrent l'ensemble de toutes les activités géométriques planes du cycle 3:
- le domaine des **figures** simples ou complexes ; indexé **[F]** ;
- le domaine du **repérage** des positions ; indexé **[R]** ;
- le domaine des **transformations** géométriques ; indexé **[T]**.

1. Le domaine des figures [F]

Ce domaine est important à l'école élémentaire. À la fin du Cours Moyen, l'étude comparée des quadrilatères par les propriétés de leurs côtés, de leurs angles, de leurs diagonales et de leurs axes de symétrie éventuels permet d'organiser les quadrilatères sous des formes à propos desquelles peuvent émerger quelques raisonnements simples de nature déductive.



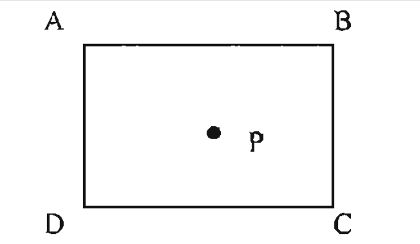
Reproduis ce cercle sur le quadrillage de ton cahier en respectant ses dimensions

Il faut adjoindre à cet ensemble de figures l'étude du cercle et de quelques polygones réguliers comme le triangle équilatéral et l'hexagone régulier par exemple. Des figures complexes dans lesquelles sont associées ces différentes figures élémentaires sont également en jeu.

[1] Moniteur de Mathématique J.L. Brégeon, L. Dossat, F. Huguet, A. Myx, H. Péault et G. Vergnaud, Editions Nathan

2. Le domaine du repérage des positions [R]

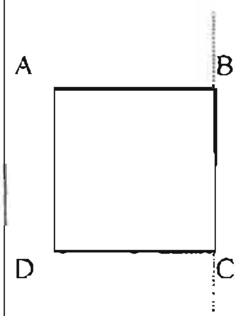
L'idée de repérage en géométrie plane est souvent liée à la géométrie sur quadrillage mettant en jeu les coordonnées d'un point ou d'un déplacement. Pourtant, cela va bien au-delà. Par exemple, situer un objet parmi d'autres sous la forme d'un énoncé en langage naturel relève aussi de ce que l'on entend par repérage [4].



Cette figure est un rectangle.
Explique comment tu peux prouver que le point P est à la même distance des quatre sommets.
Raye le nom de chaque instrument que tu n'as pas utilisé : double décimètre – équerre - compas

3. Le domaine des transformations géométriques [T]

Les problèmes mettant en jeu des transformations géométriques constituent un autre point de vue de l'étude de figures (par exemple, recherche des axes de symétrie d'une figure). L'usage de transformations géométriques simples pour décrire des objets géométriques plus complexes tels que des frises ou des pavages peut également être envisagé.



En te servant de l'équerre et du compas, dessine le carré symétrique du carré ABCD par rapport à BC

B. LA NATURE DES PRODUCTIONS DEMANDÉES AUX ÉLÈVES

Nous avons réparti en quatre grands types les différentes manières de « poser le problème » aux élèves. Ce paramètre important se traduit par l'élaboration d'un texte précis, à destination de l'élève, rassemblant l'essentiel des consignes et demandant soit de :

- produire un **dessin** (un tracé) à partir d'une **figure** donnée ; indexé **[FD]**
- produire un **dessin** (un tracé) à partir d'un **texte** donné ; indexé **[TD]** ;
- produire un **texte** décrivant des propriétés d'une **figure** ; indexé **[FT]**
- produire un texte (un « **scénario** ») donnant les étapes de la construction d'une **figure** ; indexé **[FS]** .

---

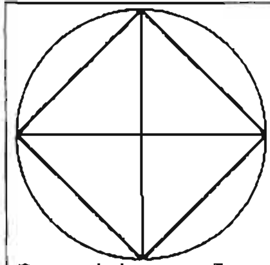
[4] « Repérage » est synonyme d'étude de « positions relatives » de divers objets géométriques

D'une façon générale, un problème de géométrie peut être conçu en juxtaposant deux ou trois de ces types élémentaires de productions. Le Moniteur[5] (partie géométrie) propose des énoncés « plus restreints » destinés à mener une analyse plus fine des possibilités de l'élève dans chacun de ces quatre types d'activité.

1. La production d'un dessin à partir d'une figure [FD]

Les exercices ayant cette caractéristique sont ceux où il s'agit de reproduire une figure donnée « à l'identique » ou non. La consigne la plus courante consiste à demander simplement à l'élève de reproduire une figure donnée.

On juge essentiellement ici de l'aptitude de l'élève à reproduire un dessin, ce qui nécessite en général d'user d'instruments de dessin pour prélever des informations sur la figure et pour réaliser la tâche demandée. Cette option ne veut donc que mesurer l'aptitude de l'élève à reproduire une figure et à choisir implicitement des informations et des instruments pertinents.



Reproduis cette figure en respectant ses dimensions

2. La production d'un dessin à partir d'un texte [TD]

Pour réaliser les exercices présentant cette caractéristique, l'élève doit être capable d'analyser un texte, d'en prélever les indices nécessaires pour réaliser une figure. Là encore, nous n'exigeons pas la rédaction du scénario de la construction de la figure.

Construis un carré ABCD de 4 cm de côté et le cercle passant par les quatre sommets du carré.

Instruments autorisés :
Double décimètre – équerre - compas

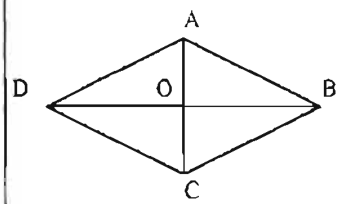
3. La production d'un texte décrivant les propriétés d'une figure [FT]

Les exercices possédant cette caractéristique demandent à l'élève de trouver et d'exprimer des propriétés pertinentes d'une figure (par exemple de quels éléments elle est constituée, comment ces éléments sont reliés entre eux, etc.)

On s'aperçoit que le texte produit peut être plus ou moins élaboré et qu'il peut ou non définir de façon univoque la figure.

Ce type d'épreuve permet d'apprécier l'aptitude de l'élève à réunir, dans un texte, des éléments d'analyse d'une figure complexe ou non, et d'en rendre compte par un texte de nature géométrique. Cette épreuve met l'accent sur la capacité à rédiger un compte rendu d'observation en termes géométriques adéquats. Nous serons parfois amenés à distinguer deux types de textes :

- des textes comportant une analyse « argumentée » de la figure proposée ;
- des textes permettant au lecteur d'imaginer[6] la figure ainsi décrite.



Cette figure est un losange.

Explique ce que tu dois faire pour en être sûr.

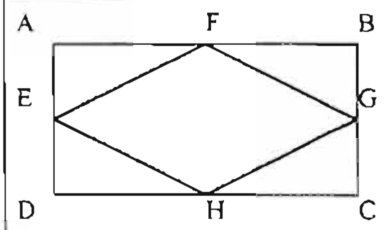
[5] Rappelons que le Moniteur de Mathématique est essentiellement un outil d'évaluation. Les items proposés sont de ce fait des problèmes géométriques simples ne mettant pas en jeu un nombre trop important de compétences.

[6] C'est à dire capable d'en réaliser une épure à main levée sans « erreur de sens »

Dans le second cas, il ne s'agit pas (obligatoirement) de décrire (avec précision) la figure en donnant les phases successives de sa construction car ceci relève de la prochaine compétence.

4. La production d'un texte donnant les étapes de la construction d'une figure [FS]

Les exercices possédant cette caractéristique invitent l'élève à une analyse de la figure en vue d'établir un « scénario » donnant les différentes phases de sa construction. Observons que ce type d'exercice n'exige pas, en principe, de réaliser la figure ; toutefois, cela peut être parfois demandé explicitement. Pour faciliter la tâche de l'enfant, et afin d'alléger la charge cognitive, certains scénarios peuvent être amorcés.



Pour décrire la figure ci-dessus, un élève a commencé à rédiger le scénario de sa construction. Termine son scénario.

1. j'ai dessiné un rectangle ABCD *de 6 cm par 3 cm*
2. ....

C. LES VARIABLES DIDACTIQUES

Ainsi que nous venons de l'exposer, nous avons retenu trois grands domaines pour recouvrir l'ensemble des activités géométriques, puis quatre types de productions possibles.

Deux paramètres spécifiques (ou variables didactiques) aux problèmes de géométrie intéressant le cycle 3, ont également été pris en considération :

- la position de la figure sur le support et le choix de ce support indexé [**SP**];
- le choix des instruments de dessin pour prélever des informations sur une figure ou pour effectuer un dessin indexé [**CI**].

1. Position de la figure sur le support et choix de ce support [SP]

Dans la classification des problèmes, nous avons regroupé l'observation des paramètres liés à la position de la figure sur le support et ceux liés à la nature même du support [7].

S'agissant de la perception que l'on a d'une figure, la position de cette figure par rapport aux bords de la feuille de papier est une « variable didactique » fondamentale. On peut donc agir sur cette variable dans la rédaction d'un énoncé de problème de géométrie faisant appel à une figure.

2. Le choix des instruments de dessin [CI]

L'observation des paramètres liés au choix des instruments de dessin est au centre de l'activité de l'élève lors de la réalisation de problèmes associés à une construction ou à l'achèvement d'une figure déjà amorcée.

Le choix des instruments de dessin peut être *libre*, même s'il s'inscrit dans un choix préalable fait par l'enseignant. Ce dernier peut tout aussi bien *imposer* tel ensemble d'instruments, donc *en exclure* d'autres.

[7] Une analyse plus fine nécessiterait de différencier ces deux cas ; cela peut être envisagé pour certaines indexations.

Reproduire un carré à l'identique avec une règle graduée et une équerre, ou avec une règle non graduée (bord d'une feuille de papier blanc pliée en deux) et une équerre, constituent deux approches différentes d'une même construction.

Chaque instrument a une double fonction :

- **prélever** des informations sur une figure ;
- **produire** des informations supplémentaires sur une figure.

Rappelons brièvement les instruments de dessin en usage à l'école élémentaire :

- la *règle* : non graduée, graduée (le double décimètre)

On utilise parfois une bande de papier (le bord d'une feuille de papier vierge ou une feuille pliée en deux) pour prélever ou reporter une longueur. Dans ce cas, on n'obtient pas une mesure (un nombre) mais cet "instrument" est suffisant pour pouvoir reporter une longueur ou la comparer à une autre longueur. Dans ce cas, cette bande de papier a la même fonction qu'une règle non graduée ou qu'un compas à pointes sèches.

- le *compas*
- *l'équerre*

Dans certains cas, nous utiliserons également des *gabarits* (comparaison ou report d'angles, réalisation de pavages, etc.). Enfin, il peut être fait appel à des *pliages* pour compléter des tracés (par exemple, axes de symétrie d'une figure) ou pour contrôler une propriété d'une figure.

Des éléments complémentaires sur l'utilisation des instruments pour la détermination du milieu d'un segment se trouvent en annexe 2.

Conclusion

A partir d'angles d'attaque multiples, les activités de géométrie plane à l'école doivent favoriser chez l'élève une évolution du statut de la figure géométrique. L'enseignant doit être conscient de la nécessité de cette évolution et doit mettre en place au cycle 3 des conditions favorables pour amorcer ce passage du dessin géométrique à la figure géométrique.

Nous faisons l'hypothèse que c'est à travers un large spectre de situations, consciemment établies par l'enseignant, que les concepts géométriques vont progressivement s'organiser dans la tête de l'élève. Il est clair qu'on ne peut pas se contenter d'une approche empirique et intuitive. Par nos différents travaux, il nous apparaît qu'il est possible d'établir une typologie des situations géométriques planes en s'appuyant particulièrement sur la notion de variable didactique.

Annexe 1 Egalité de figures

Nous allons observer, à grands traits, quelques étapes de la reconnaissance de l'égalité de deux figures planes par le survol de quelques exemples éclairants.
Cette notion reste étroitement attachée à la « démonstration » des cas d'égalité des triangles quelconques.
Il est important de rappeler que ces cas d'égalité ont été enseignés jusque vers les années 70.

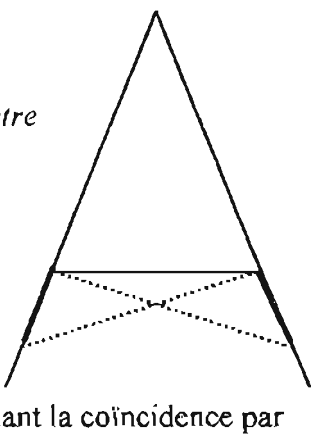
● Les cas d'égalité chez Euclide :

⇨ **Proposition n°4** : *Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun*[8].
(livre I ; proposition 4)

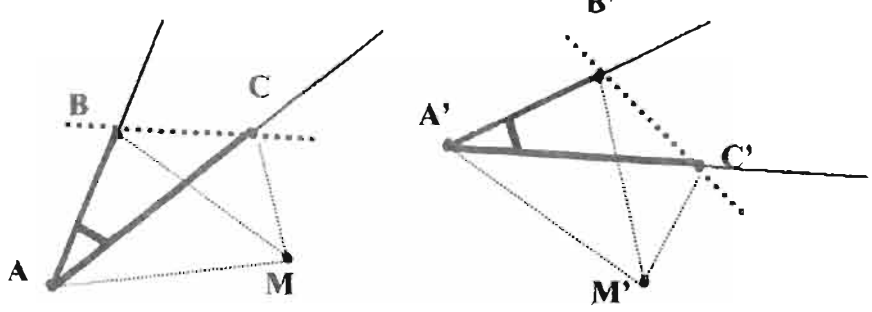
« Axiome fondateur de la géométrie, le **principe de l'égalité par superposition** s'appuie essentiellement sur la **notion de mouvement**, et c'est la coïncidence par transport d'un corps sur un autre qui permet de conclure à l'égalité des deux corps[9] ».

⇨ Axiome 8 : *les grandeurs qui s'adaptent entre elles sont égalent entre elles.*
Ensuite, Euclide peut démontrer cette proposition.

⇨ La **proposition n° 5** met en pratique ce cas d'égalité pour démontrer que :
Dans les triangles isocèles, les angles sur la base sont égaux entre eux, et les côtés égaux étant prolongés, les angles sous la base seront aussi égaux entre eux.
Le problème de la géométrie est alors d'énoncer, à priori des conditions d'égalité, ce qui permettra d'éliminer le mouvement, remplacé par un raisonnement s'appuyant sur les critères d'égalité ainsi définis.



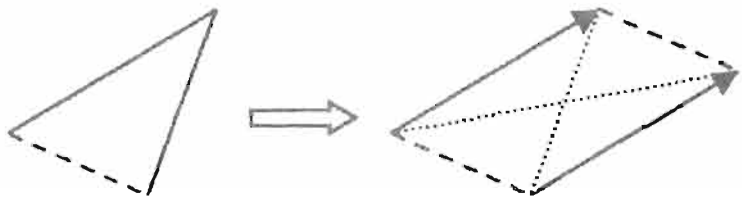
● Legendre (1752-1833) continue ce point de vue en y adjoignant la coïncidence par symétrie ; on peut citer aussi les propos de d'Alembert (1717-1783) : « *cette manière de démontrer (par coïncidence) a donc l'avantage, non seulement de rendre la vérité palpable, mais d'être encore la plus rigoureuse et la plus simple qu'il est possible, en un mot de satisfaire l'esprit en parlant aux yeux* ».



[8] Traduction de F Peyrard ; A. Blanchard
[9] Jules Houel cité par R. Bkouche

●**La géométrie hilbertienne** va se libérer de ce principe de la coïncidence et se libère de toute intuition...
Avec les mêmes hypothèses, on sait qu'il existe une unique application affine du plan telle que f(A) = A' ; f(B) = B' et f(C) = C'...etc.

Note : Et si Euclide avait choisi le **parallélogramme** au lieu du triangle...
il aurait privilégié la *structure vectorielle*..[10]



● Pour achever ce rapide tour d'horizon, consultons le cours de géométrie élémentaire par **F. G-M**[11] :
⇨Une figure peut être fixe ou en mouvement ; on s'intéresse aux figures mobiles et invariables (on ne change ni sa forme, ni sa grandeur en la déplaçant).
⇨ **Postulat d'invariabilité**

- On admet qu'une figure peut occuper successivement dans l'espace une <u>infinité de positions différentes</u>, sans changer de <u>forme</u> , ni de <u>grandeur</u>.

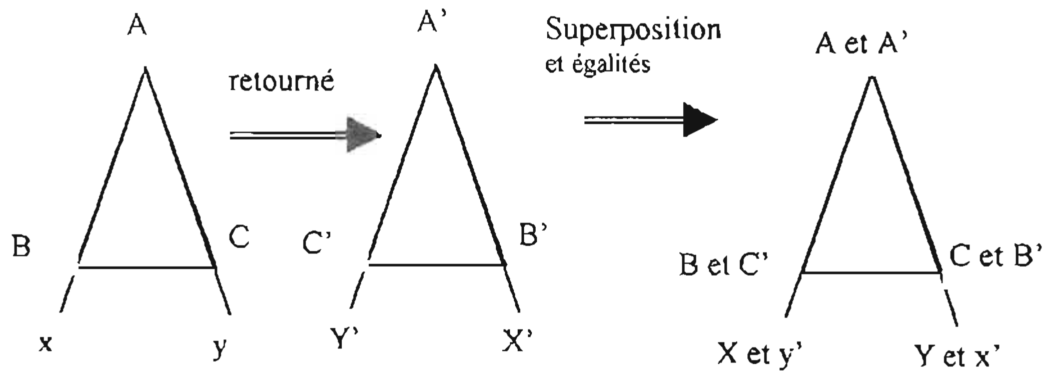
- On dit qu'une figure mobile est **invariable** ou qu'elle reste identique à elle-même dans toutes ses positions successives, lorsqu'on la déplace sans changer sa forme ni sa grandeur.
- D'après cela :
- • une figure invariable est indépendante de sa position dans l'espace
- • deux figures invariables qui coïncident dans une position donnée, peuvent coïncider dans toute autre position.
-

● Dans <u>l'enseignement contemporain</u>...
Pendant toute la période où l'enseignement des cas d'égalité des triangles était à l'honneur, les auteurs de manuels ont essayé d'adapter pédagogiquement les thèses d'Euclide.
Pour illustrer ce fait sur un exemple, examinons « une solution » apportée par M. Thiberge vers 1950[12].
La présentation de la notion repose sur une observation du monde sensible et sur un choix pédagogique retenu pour des méthodes de démonstration.
⇨ Le monde sensible : une vitre, une feuille de papier peut donner l'image d'un plan ; le plan a deux faces (le recto et le verso) ; un dessin peut donc être vu de deux manières différentes.
Pour comparer des segments, des angles, des triangles, on peut essayer de les superposer par un moyen quelconque (le papier calque est suggéré).
⇨ Les propositions : les deux premiers cas d'égalité sont présentés dans une version « isométrie positive » si l'on observe les triangles proposés.
Note de l'auteur : « Pour l'un ou l'autre des deux cas étudiés, nous avons considéré deux triangles ABC et A'B'C'. Certaines suppositions étant faites, nous avons montré que le triangle A'B'C' (ou sa copie A''B''C'') pouvait être superposé au triangle ABC. Il est à remarquer que nous ne nous sommes pas contentés de *voir* que les deux triangles étaient superposables mais nous avons établi que la superposition devait se faire. Nous avons fait une *démonstration* et non une *vérification* ».

---

[10] in Michel Serres ; Origines de la géométrie
[11] Cours de Géométrie Elémentaire par F. G-M ; Editeurs Mame et Poussielgue ; 1899
[12] Cours de géométrie , classe de 4ème ; Thiberge et Gilet ; Editions Masson

⇨ L'auteur consacre alors un chapitre entier sur le thème « Les deux faces d'une même figure » où angle et angle retourné, triangle et triangle retourné, etc. sont envisagés [13]. M. Thiberge parle alors *d'égalité directe* et *d'égalité inverse*.
⇨ Le chapitre suivant est consacré au triangle isocèle (deux côtés égaux) afin de démontrer l'égalité des angles à la base. On connaît l'importance de ce théorème chez Euclide et dans tous les manuels qui vont s'en inspirer...
On calque ABC selon A'B'C' et l'on superpose...

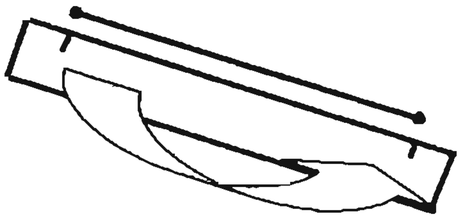
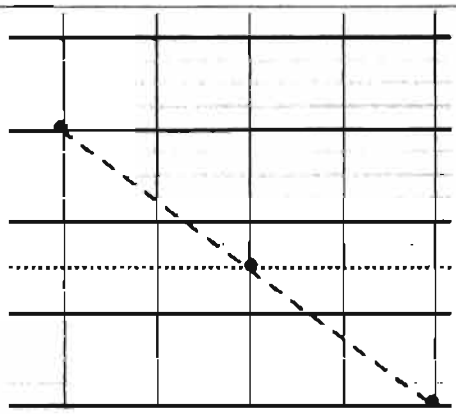
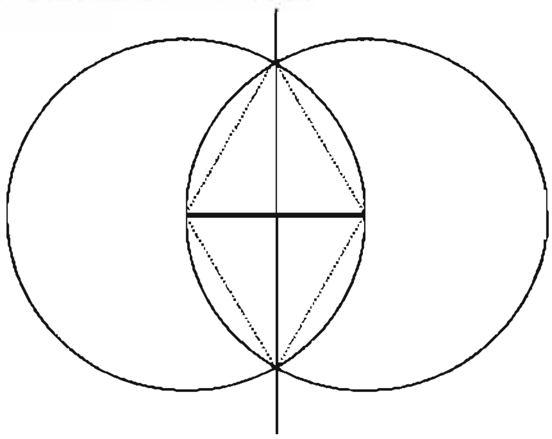


[13] Dans sa préface l'auteur regrette que la symétrie soit passée sous silence dans les programmes (1943)...

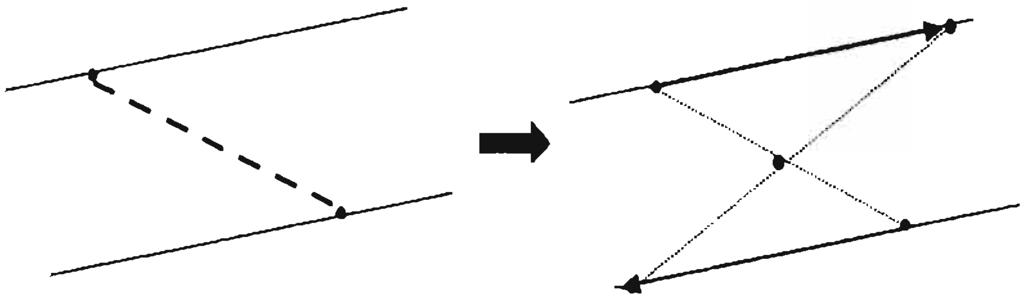
Annexe 2 **Recherche du milieu d'un segment**

Choix des instruments

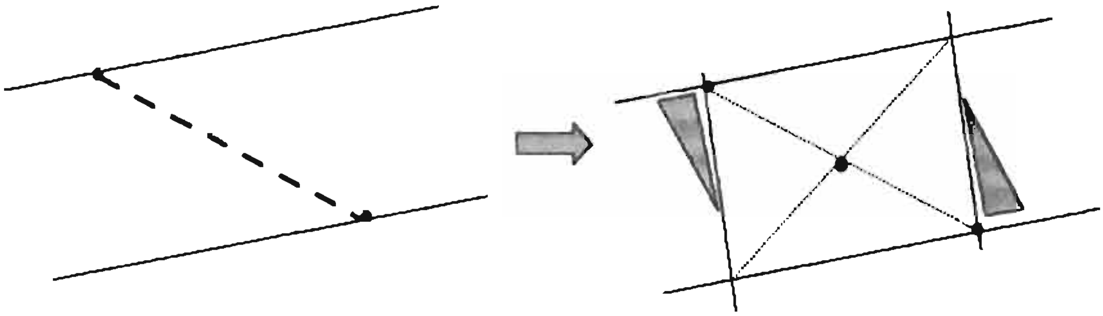
Sur cet exemple de la recherche du milieu d'un segment, observons quelques techniques permettant à un élève de trouver ce point.

● **Pliage** d'une bande papier amenée sur le segment	
● Mesurage avec le double décimètre ; calcul de la moitié, etc.	
● Utilisation d'un réseau de droites parallèles équidistantes comme le réseau seyes du cahier.	
● Utilisation de la règle et du compas ; détermination du lieu par la médiatrice.	

● A la donnée des deux points, on adjoint la donnée de deux droites parallèles passant par ces points .

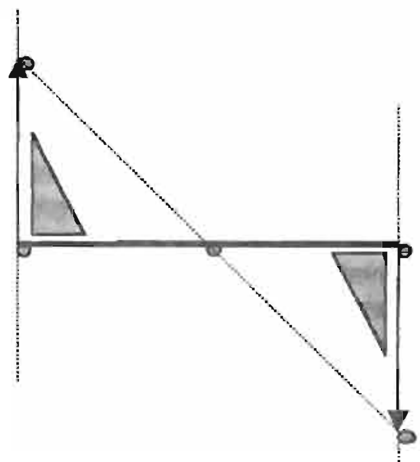


(avec la règle non graduée ; inscription d'un parallélogramme entre les deux parallèles))



(avec la règle et l'équerre ; inscription d'un rectangle entre les deux droites parallèles)

● Avec l'équerre et la règle non graduée



(construction induite par l'étude et l'exploitation du cas précédent)

Annexe 3

Rappel de la typologie adoptée ; indexation

1. Variables liées au domaine spécifique

1.1 Domaine des **figures** **[F]**

Figure simple ou composée : les *éléments simples* sont essentiellement des segments, des droites (plus rarement), des cercles ou arcs de cercle (quart ou demi cercle),

1.2 Domaine du **repérage** **[R]**

Domaine constitué des situations où l'on repère un objet géométrique par rapport à un ou plusieurs autres. Etude de positions relatives d'objets ; repérages, codages, etc.

1.3 Domaine des **transformations** **[T]**

Domaine des figures envisagées sous l'angle transformationnel : symétrie-droite ; agrandissement ou réduction.

2. Variables liées à la forme de l'énoncé

2.1 production d'un **dessin à partir d'une figure** donnée **[FD]**
- dessiner à l'identique une figure donnée
- compléter une figure

2.2 production d'un **dessin à partir d'un texte** **[TD]**

2.3 production d'un **texte descriptif d'une figure** (analyse de propriétés ; etc.) **[FT]**

2.4 production d'un texte relatant les étapes de la réalisation d'une figure (écriture d'un **scénario**) **[FS]**

3. Variables liées au support du dessin **[SP]**

3.1 choix du **support**

dessin sur une feuille blanche
dessin sur une feuille munie d'un réseau (quadrillage, seyes, etc.)

3.2 **orientation** de la figure par rapport aux bords de la feuille

4. Variables liées au choix des instruments de dessin **[CI]**

4.1 choix libre
4.2 choix imposé

PREUVE ET ARGUMENTATION

Roland Charnay et Dominique Valentin INRP[1]

Compte-Rendu de Nadia Douek

PREMIERE PARTIE (Animation : Roland Charnay)

Introduction

Dans l'ensemble de l'atelier, il s'agira d'étudier les moments de débats en classe, la prise de parole de l'élève, la place de la vérité (en particulier qui en est responsable), les modes d'interactions qui favorisent le débat (avec et dans le groupe).
Les questions de gestion de classe et les choix les concernant sont des outils construits et produits au cours de travaux de recherche-développement (sur l'enseignement du domaine numérique et la résolution de problèmes au cycle 3) dans le cadre constitué par les deux questions :

1- Comment construire de nouvelles connaissances, ou en détruire de fausses, en argumentant ?
2- Peut-on apprendre aux élèves à argumenter ?

Cadre théorique

Argumenter, c'est justifier ce qu'on affirme, chercher à étayer un énoncé par un autre, convaincant pour autrui.
Débattre, c'est échanger des arguments, les discuter, dans le cadre d'une démarche de preuve.
Débattre en mathématiques nécessite d'accepter des règles non communes (comme l'adhésion aux règles d'utilisation des exemples et des contre-exemples).

L'approche choisie dans ce travail est de type socio-constructiviste : on considère que les phases de mise en commun sont un moment décisif dans le processus de construction / appropriation des connaissances. Celles-ci sont toutefois difficiles à conduire. Les discussions sur la validité des procédures, des vérifications, sur la vérité, se font à ces moments. Les mises en commun sont suivies de synthèses.
Il existe d'autres moments d'échanges, lors de travaux en groupe. On les considère de l'ordre du privé dans la mesure où le maître en est généralement absent.

Le problème consiste donc à construire une ingénierie, pour produire et apprendre des connaissances, qui permette d'engager les enfants dans des processus de preuve, et de telle sorte que la responsabilité de la preuve soit bien du côté de l'élève.

---

[1] L'atelier s'appuie sur des travaux conduits par l'équipe de didactique des mathématiques de l'INRP. Une publication INRP (à paraître en 1999) est en cours de préparation : "Vrai ou faux ? On en débat ! De l'argumentation en mathématiques au cycle 3".

Présentation des expérimentations

Dans les deux exemples qui suivent, les enjeux de la situation et les enjeux de l'apprentissage étaient quasiment identiques, donc les enjeux d'apprentissage étaient visibles par les élèves.
Un point important à travailler : distinguer la valeur de vérité de l'énoncé et celle de l'argument. En effet, par exemple, des réponses correctes peuvent être étayées par des arguments faux !

Un exemple : COMPARAISON DE DÉCIMAUX ET ARGUMENTATION

Rappelons rapidement les difficultés des élèves dans ce domaine : dans un exercice de l'évaluation 6^{e} (septembre 1997) portant sur le sens de l'écriture décimale (fractionnement de l'unité) seulement 12,8 % des élèves ont donné la bonne réponse. Dans un autre qui demande six façons d'écrire 7 comme produit de deux nombres, 52% ont donné au plus deux réponses.

Dans les classes de CM1 où l'expérience décrite ci-dessous a été menée, la progression a consisté à introduire les décimaux comme écritures des fractions décimales (comme dans ERMEL et chez R. Douady pour le début).
Devant le choix entre travailler dans un contexte expérimental (par exemple celui des longueurs, où le problème de la comparaison des longueurs implique la comparaison des nombres) et travailler directement sur l'écriture des décimaux, c'est la deuxième solution qui a été retenue car :

- dans le contexte "matériel" la validation expérimentale n'explique pas la pertinence de la comparaison des nombres (et surtout de la procédure de comparaison), la comparaison des longueurs ne nécessitant pas le recours aux nombres ;
- dans le contexte des écritures à virgule, les élèves peuvent toujours réinventer un contexte matériel.

Les élèves avaient donc d'abord travaillé sur les fractions binaires (comme 3/4) où l'on partage l'unité en 4 dans le cadre des longueurs (3/4 est donc équivalent à 3 fois 1/4). Les unités ont été choisies grandes pour permettre la réitération du processus de fractionnement, pour aller vers la densité des rationnels dans les réels comme ensemble des mesures.
Aucun algorithme formel n'est mis en place à ce niveau, le travail se fait sur le sens (par exemple pour la comparaison de fractions).
Ensuite les fractions décimales ont été introduites, mais là moins soutenues matériellement.
Les décompositions du type 12/100 = 10/100 + 2/100 on été vues.
Le tableau de numération des entiers a été prolongé vers la droite (avec les 1/10, 1/100, ...).
Les décimaux sont alors venus comme un autre codage, conventionnel, prolongeant celui des entiers.

Voir en annexe 1 une description rapide de la séquence « comparaison de décimaux »

Lors de cette séance d'atelier, le groupe a naturellement cherché à faire une analyse a priori des procédures possibles qui apparaîtraient pour résoudre le premier exercice de comparaison :

- recours à l'encadrement par des entiers ;
- difficulté de recourir à la droite numérique, mais possibilité de situer les décimaux avant ou après les entiers ;

- changement d'écriture : 312/100 et 520/100 et comparaison de fractions ou encore 3 + 1/10 + 2/100 et 5 + 2/10, mais comparaison des sommes difficile ;
- utilisation du tableau numérique, avec la difficulté qu'il impose par la séparation entiers / parties décimales.

Il est clair que les élèves doivent faire face à des problèmes de complexité et garder leur cap.

Commentaires sur le déroulement de l'expérimentation

Ces exercices nécessitent des connaissances solides sur la signification des écritures décimales, tout en contribuant à la consolidation de ces connaissances.
A ce moment de la progression, la recontextualisation (dans la mesure des longueurs) ne se produit pas. Il semble que cela soit trop coûteux, et c'est peut être parce que le choix "matériel" n'a pas été très soutenu institutionnellement.
Le tableau de numération ne réapparaît pas non plus.
Les élèves semblent travailler directement sur ce qui se présente sans changer de représentation (*voir travaux d'élèves en annexe 2*).

Remarques et questions soulevées par le groupe dans l'atelier :

- Y a-t-il un risque d'installer des procédures fausses ? L'algorithme de comparaison est peut-être suffisant, pourquoi chercher à lui "donner du sens" ?
- N'y a-t-il pas difficulté à argumenter quand la question est évidente ?
- Comment résoudre le problème de l'exhaustivité (qui se présente en général pour l'argumentation) ?

<u>Réponse générale</u> :

On a voulu que la "conviction personnelle" et la "conviction acceptée par la classe" soient séparées, et de fait la confusion entre convaincre et « faire plaisir au maître » peut être réduite presque totalement, il y a donc bien possibilité de prise en charge, de la part des élèves, de la responsabilité de la preuve. Le contrat de recherche des preuves peut être établi.

Rôle du professeur :
Le travail en deux étapes aide les élèves à s'engager dans la responsabilité de l'argumentation.
L'enjeu du travail est bien plus sur l'argumentation que sur les réponses.
Le maître doit recenser toutes les réponses sans se précipiter sur celles qui sont bonnes.
Il y a une situation délicate : celle où la réponse est erronée et l'argumentation "semi-fausse", et sur laquelle tous les élèves sont d'accord. L'enseignant doit relancer l'argumentation soit par une nouvelle question soit en donnant sa propre position.

Encore des remarques et questions du groupe dans l'atelier :
- quelles normes accepter socialement pour recevoir ou non un argument sans dévoiler les objectifs à moyens termes ?
- importance du contrat avec les élèves.
- qu'est-ce qui va fonder la légitimité d'une référence ? Comment passer de la conviction à la co-référence mathématique extérieure à la classe sous la direction du maître ?

Réponse générale :
La plupart des élèves deviennent capables de distinguer la valeur de vérité d'une réponse et celle d'un argument.
Les références des élèves peuvent être des connaissances personnelles (éventuellement jamais formulées auparavant) et des connaissances officielles, et il a été mis en place un répertoire de connaissances officielles.
Les élèves ont eu besoin de recourir à des exemples génériques.
Les situations de recherche proposées ne sont pas suffisantes en elles-mêmes pour donner lieu aux argumentations. Un enjeu de preuve doit être explicitement fixé à un certain moment de la situation.

La limite de ce travail est qu'il n'est pas facile à mener par un maître dont les connaissances en mathématiques sont trop limites pour qu'il puisse analyser rapidement les arguments produits par les élèves.

Un travail semblable, portant sur le produit d'un décimal par une puissance de dix, a été mené dans une classe de CM2 (*exemple de travaux d'élèves en annexe 3*).

DEUXIEME PARTIE (Animation : Dominique Valentin)

Cette expérience a été menée dans des classes de CM1. L'objet du travail est la structuration des nombres, entre autres en les regardant de différents points de vue. En particulier on a cherché à nourrir l'idée de l'infini en utilisant la table de Pythagore, qui pouvait être prolongée indéfiniment.
Dans ce travail, les élèves se construisent parfois de faux théorèmes.
Les élèves devaient mettre à jour tous les moyens qu'ils se sont construits pour savoir si un nombre appartenait à la table de 4 prolongée (alors que la connaissance des critères de divisibilité par 4 n'est pas au programme).
Les objectifs généraux étaient :

- le débat et la levée des faux théorèmes ;
- la notion de multiples ;
- à cette occasion de débat, commencer à pointer les règles du débat en amenant vers la conviction au niveau de la rationalité mathématique (qui s'appuie sur des connaissances mathématiques) et non à la conviction fondée sur le statut social de l'autre (maître, bon élève).

On trouvera en annexe 4 le planning de la situation « divisibilité ».

Quelques points sur lesquels on a cherché à changer les conceptions :

- Il y a confusion chez les élèves, comme chez certains maîtres, entre définition et critère de reconnaissance des nombres pairs, le critère "se termine par 0, 2, 4, 6, 8" joue le rôle de définition presque tout le temps.
- On a cherché à favoriser les expressions du type 4xn plutôt que 4 + 4 + 4 +...+ 4

Les mises en commun sont généralement délicates. Il faut arriver à éliminer les fausses règles, mais non les tordues !

(exemples de travaux d'élèves en annexe 5)

Quelques commentaires :

classe de M.H. Lallement

réponse 5: la condition nécessaire est exprimée par "déjà".

classe Chaville 1

R3 encadrement

R4 règle culturelle apprise en famille

R5 appui sur la numération.

classe Chaville 2

R5 règle culturelle appelée "règle de la maman de Laurent", apparue dans le groupe de Laurent. Cette règle a été très difficile à admettre par le groupe du garçon qui lui, a beaucoup insisté pour l'imposer. Aucun enfant du groupe ne l'avait donc comprise ni n'a voulu l'utiliser, mais à long terme seuls les enfants du groupe de Laurent se sont approprié cette règle dans la classe !

On trouve dans l'ensemble, des règles du type "moitié de moitié", elles sont liées au travail de calcul réfléchi.

Il est à remarquer que les "argumentations locales" (proches des procédures de résolution du problème) étaient, dans les débats collectifs, abandonnées au profit d'arguments généraux (plus formels : multiples de 4), sans doute parce que mieux exprimés.

Quelques éléments d'analyse de l'ensemble du travail sur la divisibilité

Les pré-et post-tests sont identiques, on cherche à savoir si les élèves différencient réponses et argumentations, s'ils considèrent que les arguments sont discutables, mais aussi s'ils reconnaissent l'inclusion des tables.

Une typologie des règles a été dressée et suivie le long de l'expérimentation pour chaque élève (annexe 5).

Les acquis :

Acquis importants au niveau des connaissances numériques.

Les élèves ont bien adhéré à la nécessité d'argumenter (visible dans le post-test) et sont même devenus plus exigeants sur la qualité des arguments.

Les élèves ont correctement utilisé les contre-exemples (ceci est apparu dans des travaux de groupes).

Ils ont eu recours aux exemples génériques, non comme un exemple qui suffit à prouver, mais comme un exemple qui fait voir comment marche la règle.

En général conditions suffisantes et conditions nécessaires n'étaient pas distinguées, mais il y a eu des interventions du type "ça suffit pas!"

Quelques points tangents :

Il y a eu des règles justes, construites par les élèves, que l'on n'a pas pu reprendre, bien qu'on les aient acceptées.

L'emboîtement des tables n'a pas été acquis.

La succession de justifications est hors de portée des enfants du CM1.

DEBAT, QUESTIONS ET COMMENTAIRES DANS LE GROUPE DE L'ATELIER

- La conscience de la nécessité d'argumenter s'est-elle étendue à d'autres domaines de savoirs ?

D'une façon oui, parce qu'ils ne s'appuyaient plus sur des dessins pour résoudre des problèmes de multiplication mais sur des procédures multiplicatives en formulant des "parce que".

La production d'argumentation est intervenue tant à l'écrit qu'à l'oral par la suite. De plus les élèves faisaient appel à des arguments mathématiques.

- Quel rôle et quelle neutralité du maître dans la gestion des mises en commun ?

Ne faut-il pas créer des jeux pour installer une dynamique de confrontation dans la classe et réduire les interventions du maître ?

Pour qu'il y ait débat il faut qu'il y ait un enjeu fort, et l'enjeu mathématique l'est. Le jeu évite l'enjeu de construction de connaissance, et laisse parfois la motivation interne au second plan.

Généralement, en CM, le travail sur les entiers est minimisé alors qu'il permet de garder une fluidité arithmétique utile dans de nombreux chapitres.

- A propos de l'exemple générique, on peut reprendre l'idée de Vygotsky de pré-concept : on se trouve dans un stade intermédiaire entre l'exemple et la règle formalisée.

- La régularité peut être approchée d'une façon personnelle, expérimentale ou sensorielle, comme un pas vers la règle, puis vers le théorème.

- Concernant le rôle du maître : ce genre de séquence est difficile à mener, mais le dispositif prévoit des temps de réflexion, utiles aussi à l'enseignant. Par ailleurs ce genre de dispositifs, inscrit dans la durée (3 à 4 mois), permet aux élèves lents de travailler progressivement.

ANNEXE 1 : DESCRIPTION RAPIDE DE LA SEQUENCE « COMPARAISON DE DECIMAUX »

Il s'agit du premier travail systématique sur la comparaison des décimaux. Les enfants vont devoir successivement :

- Comparer des nombres décimaux.
- Justifier chaque comparaison en explicitant leurs arguments.
- Évaluer et comparer les arguments produits.

Objectif

Élaborer des procédures de comparaison des nombres décimaux en s'appuyant sur la signification des différents chiffres de leur écriture à virgule.
Il ne s'agit pas de faire utiliser d'emblée les règles de comparaison des décimaux, mais de permettre aux élèves d'effectuer des comparaisons en s'appuyant à la fois sur le sens et sur les images mentales qu'ils ont construits pour les écritures à virgule.

Variables

- La taille de l'écart entre les deux nombres à comparer, leur position par rapport aux entiers.
- Pour des nombres de même partie entière : l'égalité ou non du nombre de décimales, la présence ou non de zéros dans les parties décimales, la place des zéros dans les parties décimales.

DEROULEMENT

PREMIÈRE PHASE

Les enfants remplissent individuellement la feuille n° 1 ci-dessous.

Feuille n° 1
Prénom **Date**

Si tu penses que les deux nombres sont différents, entoure le plus grand.
Si tu penses qu'ils sont égaux, souligne les deux nombres.
Explique pourquoi tu donnes cette réponse dans la case "explication".

		Explication
3,12	5,2	
2,4	2,8	
12,4	12,40	
5,37	4,37	
12,3	12,26	
13,01	12,99	
5,3	5,20	

DEUXIÈME PHASE

Le maître prépare une feuille n° 2 à partir de réponses obtenues pour la comparaison de 3,12 et de 5,2. Il peut éventuellement injecter des arguments non fournis par les élèves et qu'il souhaite faire discuter.

	Arguments proposés dans la classe	D'accord	Pas d'accord	On ne sait pas	On ne comprend pas	Remarques
3,12 5,2	argument 1					
3,12 5,2	argument 2					
etc...						

Quelle explication donnerais-tu à un camarade qui se trompe ? Pourquoi ?

Étape 1

Par deux, les enfants remplissent la feuille n° 2. Lorsqu'il y a désaccord, ils doivent expliciter leurs arguments.
Le jugement porte sur la vérité de propositions du type : « *x est plus grand que y car.......* »
Le désaccord peut porter sur la comparaison, sur la justification, sur la formulation de la justification. Ceci est précisé aux élèves.

Étape 2

Deux équipes de deux élèves se regroupent. Elles comparent leurs feuilles et doivent se mettre d'accord pour remplir une feuille définitive pour quatre.
En examinant les deux feuilles remplies à deux et la feuille définitive de chaque groupe de quatre enfants, le maître peut observer l'impact éventuel de la discussion au sein des groupes.

Étape 3

Pour chaque ligne de la feuille n° 2, le maître organise un débat après avoir recensé les réponses et les arguments produits lors de l'étape 2.

Le débat ne vise pas l'institutionnalisation d'une procédure de comparaison particulière, mais il doit conduire à l'élimination des propositions fausses, à la validation des propositions justes, et éventuellement à la non-décision pour des arguments sur lesquels le groupe classe ne peut pas trancher.

Des situations embarrassantes peuvent se présenter :
a) Tous les groupes sont d'accord, mais l'argument est faux ou incomplet ou comporte une partie inutile.
Exemple « 5,2 est plus grand que 3,12 car 2/10 est plus grand que 12/100 et 5 est plus grand que 3 ».

b) Tous les groupes sont d'accord, l'argument est juste mais il est mal formulé. Exemple : "5,2 est plus grand que 3,12 car 5 est plus grand que 3 et comme le nombre entier n'est pas pareil, on n'a pas besoin de comparer les nombres décimaux "
c) Tous les groupes sont d'accord, l'argument est juste du point de vue de la comparaison mais comporte des erreurs.
Exemple : "Le plus grand est 5,2 parce qu'il est 2,1 plus grand que 3,12"
d) Le désaccord manifesté est approuvé par tous bien qu'il ne soit pas justifié.
Si ces situations se présentent le maître devra nécessairement intervenir.

Cette mise en commun se termine par la formulation de plusieurs procédures de comparaison correctes dans le cas étudié.

TROISIÈME PHASE

Les trois étapes de la deuxième phase sont reprises avec une feuille du même type préparée à partir des réponses obtenues pour la comparaison de 12,3 et 12,26.

QUATRIÈME PHASE

Les enfants remplissent à nouveau une feuille n° 1. La comparaison des feuilles n° 1 à l'issue des phases 1 et 4 permet d'observer l'impact sur chaque enfant des phases 2 et 3.

ANNEXE 2

Feuille n° 2 a

Noms : Jeanne Adeline Isabelle Claire B Fabien Date : 5.04.96 ME

Examinez chaque réponse. Dites ce que vous en pensez en plaçant une croix dans la case prévue.

				D'accord	Pas d'accord	On ne sait pas	On ne comprend pas	Remarques
1	3,12	5,2	Déjà dans 3,12 il y a 2 u de moins que dans 5,2 donc 5,2 est le plus grand en plus il y a 6 centièmes de plus dans 5,2.			X		parceque le 1er argument est vrai et le 2ème est faux donc on ne sait pas.
2	3,12	5,2	$5{,}2 = \frac{52}{10}$. $3{,}12 = \frac{312}{100}$. En centièmes, $\frac{52}{10} = \frac{520}{100}$				X	parceque on ne fait pas la comparaison.
3	3,12	5,2	3,12 < 5,2 parce que le nombre des unité est le plus grand	X				mais ce n'est pas complet.
4	3,12	5,2	Parceque il y a 5 unités et 2 dixiemes et dans l'autre il y a 3 unités et 12 centiemes			X		ce n'est pas claire
5	3,12	5,2	c'est parce que cinq unités deux dizaines est plus grand que trois unités douze centièmes.	X				C'est clair.
6	3,12	5,2	je regarde le chiffre avant la virgule. Je vois que 3 est plus petit que 5. Alors 5,2 est le plus grand 5,2 > 3,12	X				C'est clair.
7	3,12	5,2	Sur la droite, 3,12 est avant 4 et 5,2 est après 4.	X				C'est clair mais pas complet.
8	3,12	5,2	Dans 5,2 il y a 5 unités tandis que dans 3,12 il n'y en a que 3.	X				C'est clair mais pas très complet.
9								

Quelle explication donnerais-tu à un camarade qui se trompe ? Je donnerais l'explication 6.

Pourquoi ? Parce qu'elle est claire

ANNEXE 2 (SUITE)

Feuille n° 2 b

Noms : Joanna, Lucie, Raphaël et Romain Date :

Examinez chaque réponse. Dites ce que vous en pensez en plaçant une croix dans la case prévue.

	Réponse	Explication	D'accord	Pas d'accord	On ne sait pas	On ne comprend pas	Remarques
1	12,3 ~~////~~ 12,26	12 et 12 c'est le même chose, 3 et 26 ce n'est pas la même chose.		X			12,26 n'est pas le plus grand car 12,3 et en vrai 12,30.
2	12,3 · 12,26	Parce que il y a 12 unités et 3 dixièmes et l'autre il y a 12 unités mais 26 centièmes.	X				C'est bon mais c'est mal expliqué
3	12,3 · 12,26	Le 3 de 12,3 est on fait $\frac{30}{100}$ et le 26 de 12,26 $\frac{26}{100}$. $\frac{26}{100}$ $\frac{30}{100}$	X				C'est bien dit car ils ont tout transformé en centième donc ils ont trouvé le bon nombre
4	12,3 . 12,26	26 est plus grands que 3 j'ai entouré 12,26.		X			C'est faux car 12,3 est en vérité 12,30 donc il est le plus grand.
5	12,3 · 12,26	J'ai converti tout en centième ce qui donne 12,30 et 12,26 donc 12,30 est plus grand.	X				C'est bien expliqué !
6	12,3 · 12,26	Sur la droite, 12,26 est entre 12,2 et 12,3.	X				A finir.
7	12,3 · 12,26	Comme 3 dixièmes est plus grand que 2 dixièmes 12,3 est le plus grand.	X				Bien !
8	12,3 · 12,26	Dans 12,3 il y 4 centièmes de plus que dans 12,26 donc 12,3 est le plus grand.	X				C'est bien fait !
9	12,3 · 12,25	Les chiffres des unités sont les mêmes, 0,3 < 0,26.		X			0,3 < 0,26 ce n'est pas bon mais 0,3 > 0,26 est bon.

Quelle explication donnerais-tu à un camarade qui se trompe ? Qu'ils ont mal compri le sistème de la virgule et ils devraient prendre exemple sur le 3.

Pourquoi ? Parce qu'il est bien formulé.

ANNEXE 3

CM2 - Chav - fev 1997: 23,45 x 10

Chantle

23,45 X 10: 234,50

		234,5	23,450	230,450	230,45	procédure utilisée		
ACHOUI	Farida			x		C		
ALBOUZE	Stéphane			x		E		
ALLO	Véronique	x				B_2	JUSTE	On a multiplié par 10 en encadrant le zéro. Elisa, Laetitia, Julien. *Ce groupe a trouvé 23,450 juste pour les mêmes raisons*
BAHIEDDINE	Samia				x	E		
BEHAR	Jessika			x		D	JUSTE	Ils ont eu l'idée de déplacer un chiffre vers la gauche, et ils ont mis un zéro. Damien, Grégory
BEN AMARA	Rimel				x	E		
CADIOU	Julien				x	?	JUSTE	Nous avons calculé et nous avons trouvé ce nombre. Farida, Sarah, Maxime
CHAMBIRON	Remy		x			C		
DANO	Eve-Line				x	E	JUSTE	Ils ont déplacé la virgule d'un chiffre et nous pensons que cette réponse est bonne. On sait aussi que ce n'est pas ce qui prouve qu'elle est juste. Léa,Marie
DA SILVA	Grégory		x			C		
DELBASTY-LEGRU	Sarah	x				B_1	FAUX	Quand un nombre est multiplié par 10, 100, il prend des zéros. Leila, Patricia, Samia
DEMANGE	Sylvain	x				[illegible]		
FIGUEIREDO	Patricia			x		D [illegible] C	JUSTE	car la virgule est bien placée et le zéro aussi. Véronique, Rimel, Jessika
GIRAUD	Maxime	x				[illegible]		
KERDRAON	Laureen				x	E	JUSTE	parce que c'est un nombre à virgule et qu'on multiplie par 10; on pousse la virgule d'un cran à droite. Après le numéro 5 on peut mettre plusieurs zéros, ça ne compte pas. Eve-Line et Laureen
LAFOND	Damien		x			B_1		
LE NEE	Maxence	x				B_1		
LEMBEYE	Léa	x				B2	VRAI	Il a bien calculé les 2 nombres. Guillaume, Maxence
MARCHAL	Guillaume	x				B1		
NOUHI	Sylvain	x				[illegible]	JUSTE	parceque si on multiplie par 10 et qu'on met un zéro à droite de 45 centièmes, c'est comme si on faisait x 0,10. Alors on décale les nombres 23,45 ⟶ 234,5 et on peut rajouter un zéro; ça ne change rien. Sylvain Nouhi et Sylvain Demange
OTTAVIANI	Elisa	x				B1		
PETIT	Vincent	x				[illegible]		
SILVOLA	Laetitia			23,45		[illegible]	FAUX:	parce qu'on ne peut pas décaler le 4. Rémy et Stéphane *(Ils considèrent 23,450 comme juste)*
TARRIEU	Leila				x	E		
VIDAL-ALAIZ	Marie	x				A		

A: règle classique vue ailleurs qu'en CM2
B1: en posant la multiplication
B2: en mettant un zéro et en décalant la virgule
C: par extension de la règle de multiplication par 10 dans les entiers naturels
D: en considérant le nombre comme deux entiers juxtaposés
E: en multipliant uniquement la partie entière

ANNEXE 3 (SUITE)

Chevible

23,45 X 10: "230,45"

JUSTE ou FAUX: Nous n'avons pas trouvé
Elisa, Laetitia, Julien

FAUX: Ils ont cru qu'il fallait rajouter un zéro au nombre rond (entier)
Damien, Grégory

FAUX: Quand on multiplie par 10, on doit avancer la virgule d'un cran.
Farida, Sarah, Maxime

FAUX: Ils ont fait une multiplication sans prendre en compte les chiffres décimaux. (23 x 10) = 230 + ,45
Léa, Marie

JUSTE: car 23,45 x 10 = 230,45 parce que pour multiplier un nombre par 10, 100, 1 000 le nombre prend un, deux, trois zéros.
Leïla, Patricia, Samia

FAUX: car le zéro se met à la fin du nombre.
Véronique, Rimel, Jessika

FAUX: parceque quand c'est un nombre à virgule et qu'on multiplie par 10, on pousse la virgule d'un cran à droite.
Eve-Line et Laureen

FAUX: parceque si on calcule 23,45 x 10 on trouve 234,50
Guillaume, Maxence

FAUX parcequ' on ne décale pas les nombres
23 x 10 = 230 mais pas dans 23,45 qui est un nombre à virgule.
Sylvain Nouhi et Sylvain Demange

FAUX: On ne peut pas mettre de 23
Rémy et Stéphane
(Ils considèrent 23,450 comme juste)

23,45 X 10: "230,450"

FAUX: autant multiplier avec plein plein de nombres décimaux
Elisa, Laetitia, Julien

FAUX: même explication que pour 230,45
[Ils ont cru qu'il fallait rajouter un zéro au nombre rond (entier)]
Damien, Grégory

FAUX: Il doit y avoir 2 décimaux après la virgule.
Farida, Sarah, Maxime

FAUX: Ils ont fait une multiplication sans prendre en compte les chiffres décimaux et comme une multiplication normale et ils ont rajouté un 0 à la droite du nombre.
Léa, Marie

FAUX: parceque sinon, ce serait multiplier 10, 10; mais ce n'est pas le cas. Il faut ajouter un zéro seulement à 23.
Leïla, Patricia, Samia

FAUX: car on doit ajouter un zéro et par deux, et en plus la virgule est mal placée.
Véronique, Rimel, Jessika

FAUX: mêmes raisons que pour 230,45
après le numéro 5 on peut mettre plusieurs zéros, ça ne compte pas..
Eve-Line et Laureen

FAUX: Il a ajouté des nombres.
Guillaume, Maxence

FAUX parce que c'est x 10 et pas x 10, X 10
Sylvain Nouhi et Sylvain Demange

FAUX: parce qu'il n'y a qu'un zéro.
Rémy et Stéphane
(Ils considèrent 23,450 comme juste)

ANNEXE 4

Règles de divisibilité par 4

• Les règles du type **0a** regroupent tout ce qui concerne l'étude du seul **chiffre des unités**

00: **"règle spontanée"** concernant la parité **implicite** (si un nombre se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8, il est dans la table de 4)

01: ou **explicite** ("il faut qu'il soit pair" pris pour "il suffit qu'il soit pair")

02: le nombre doit se terminer par 0, 4, 8, 2, 6

03: le nombre doit se terminer par 0, 4 ou 8

04: le nombre doit se terminer par 0, 4, 8, 12, 16

05: les nombres se terminent par 0, 4, 8, 2, 6 **une fois sur deux**

06: on regarde **la moitié du chiffre des unités**

• Règles **1a**: **procédure de base** à partir du comptage de 4 en 4;

10: comptage à partir de 0;

11 comptage (ou décomptage) à partir d'un multiple de 4 connu (40, 60, ne faisant l'objet d'aucun calcul visible);

12: comptage (ou décomptage) à partir d'un multiple de 4 obtenu par un produit explicité (ex 4x25 = 100 et 104, 108,...)

13: comptage ou décomptage à partir d'un non multiple de 4

19: comptage/décomptage erroné: erreur de ccomptage de 4 en 4 mais départ sur un multiple de 4;

• **2a**: "n est dans la table de 4 si c'est 4 fois un entier"

20: **recours à la définition** de la table de 4: "96 est dans la table de 4 parce que c'est 4x24 "ou bien "c'est quatre fois 24";

21: idem mais erreur de calcul

utilisation de théorèmes implicites portant sur la linéarité:

24: la somme de multiples de 4 est un multiple de 4 (1032 est dans la table de 4 parce que 1000 y est et 32 aussi).

25: si un nombre est multiple de 4, ses multiples sont aussi multiples de 4;

26: si a et b sont multiples de 4, na + mb est multiple de 4;

29: théorèmes implicites **faux utilisant la linéarité.**

Exemples: "pour qu'un nombre soit dans T4, il suffit qu'il soit somme de nombres dont **certains** sont dans T4" ou "si un nombre est somme de nombres dont **certains** ne sont pas dans T4 alors il n'est pas dans T4".

• **3a: évocation de la moitié, du quart du nombre** à étudier ou d'une **division par 4**

30: "96 est dans la table de 4 parce qu'il a un quart"

31: calcul de la moitié et constat que cette **moitié est paire**;

32: calcul effectif du quart;

33: calcul de la moitié sans référence à la parité "58 est dans la table de 4 parce qu'il a une moitié 29";

34: la moitié est dans la table de 4 (pris comme condition nécessaire);

35 : on divise par 4 et on regarde si ça tombe juste;

39: **évocation de la moitié ou du quart mais erreur calcul**

• **4a**: on s'intéresse aux **deux derniers chiffres**

40: "pour savoir si un nombre est un multiple de 4, on regarde si le nombre formé par les deux derniers chiffres du nombre est un multiple de 4";

41 : "pour savoir si un nombre est dans la table de 4 on regarde le chiffre des unités: si le chiffre est: 0, 4 ou 8 le chiffre des dizaines doit être pair; si le chiffre des unités est 2 ou 6, le chiffre des dizaines doit être impair";

• **70**: tautologie "parce qu'il est dans la table de 4";

71: il est dans la table de 4 parce qu'il est **multiple** de 4

• **80**: réponse inclassable; • **90**: pas de réponse.

ANNEXE 5
Planning de la situation "Divisibilité" au CM1

Pré-Test

Phase 1: construction d'équivalences

Etape 1: production d'un M4 entre 55 et 100 — *Règle 1*

Etape 2: mise en commun

Phase 2: un vrai problème mathématique

Etape 1: étude de 158, 102, 112 et 176 — *Règle 2*

Etape 2: confrontation d'arguments — *Règle 3*

Etape 3: élaboration d'une règle générale — *Règle 4*

Phase 3: confronter des arguments

Etape 1: mise à l'épreuve des règles sur 342 — *Règle 5*

Etape 2: mise en commun

Etape 3: choix d'une règle à réutiliser — *Règle 6*

Etape 4: travail différencié

Phase 4: les nombres de la table de 4 s'écrivent 4xn

Etape 1: production de cinq M4 supérieurs à 5545

Etape 2: mise en commun

Etape 3: recherche de règles économiques

Etape 4: réinvestissement à propos de 5286 — *Règle 7*

Post-Test

Dominique Valentin
29 Avril 1998

INRP
Argumentation

ANNEXE 6

Règles 3
élaborées dans un CM1 d'Avignon, suivi par M. H. Lallement en Novembre 1995

• **R 1**: pour qu'un nombre soit dans la table de 4, il faut qu'il soit pair et qu'il ait un quart.

• **R 2:** tous les nombres qui se terminent par:
00-04-08-12-24-28-36-40-44-48-52-56-60-64-68-72-76-80-84-88-92-96 sont dans la table de 4.

• **R 3:** tous les nombres qui se terminent par 0, 4, 6, 8, et 2 mais seulement une fois sur deux.
ex: 2 n'est pas dans la table de 4 mais 12 l'est.

• **R 4:** pour savoir si un nombre est dans la table de 4, il faut regarder le dernier chiffre. S'il y a un nombre pair, c'est qu'il est dans la table de 4.

• **R 5:** déjà parce que c'est des nombres pairs. Aussi parce qu'ils se terminent par 4, 8, 2, 6, 0, une fois sur deux.

• **R 6**: pour savoir si un nombre est dans la table de 4 ex. 6224, ce nombre est dans la table de 4 parce qu'il se termine par un nombre pair. Ex: 0, 2, 4, 6, 8.

ANNEXE 6 (SUITE)

Règles 3

élaborées en Nov 96 CM1 de C. Griveau, Paul Bert, Chaville 92

• **R 1:** Pour qu'un nombre soit dans la table de 4, il faut que la moitié de ce nombre soit paire.
ex: 36. La moitié de 36 est 18 qui est un nombre pair; donc on peut faire encore la moitié de 18 qui est 9; et si on multiplie 9 par 4, on obtient 36. 36 est dans la table de 4.

• **R 2:** tous les nombres de la table de 4 ont un quart. Les autres ne sont pas dans la table de 4, ils n'ont pas de quart.
ex 1: 60 : 4 = 15 ou bien 15 est le quart de 60
ex 2: 25 : 4 =... on ne peut pas le faire sans virgule

• **R 3:** on prend un nombre quelconque plus petit que celui qu'on cherche. On multiplie ce nombre par 4. On avance ou on recule de 4 en 4 selon le résultat et le nombre que l'on cherche.

• **R 4:** si c'est un grand nombre, on prend les d et les u et on regarde la table de 4 prolongée; si le petit nombre (d et u) y est, cela veut dire que le grand nombre est dans la table de 4.
ex: 12 013 n'y est pas parce que 13 n'est pas dans la table de 4.
ex: 50 224 y est parce que 24 est dans la table de 4.

• **R 5**: pour savoir qu'un nombre est dans la table de 4 il faut partager ce nombre:
ex: 176 100 est dans la table de 4: 4x20=80+20=100
et 76 est dans la table de 4: 2x40=80 80-4=76
100 + 76 = 176

ANNEXE 6 (SUITE)

Règles 3

élaborées en Nov 95 CM1 de C. Griveau, Paul Bert, Chaville 92

• **R 0**: on regarde le chiffre des unités et si c'est 0, 2, 4, 6, 8, il est dans la table de 4.

• **R 1:** on compte de 4 en 4 à partir de 0 mais c'est long.

• **R 2:** pour trouver si un nombre est dans la table de 4, on essaye de se rapprocher le plus du nombre en multipliant 4 par 10.

• **R 3:** pour savoir si un nombre est dans la table de 4, il faut savoir que 40, 100, 200, 300, 500, 1 000, 10 000, etc. sont dans la table de 4 et on compte de 4 en 4 à partir de ces nombres là.

• **R 4:** on cherche la moitié du nombre et si la moitié du nombre est paire, le nombre est dans la table de 4.

• **R 5**: pour savoir si un nombre est dans la table de 4 on regarde le chiffre des unités;
- si le chiffre est: 0, 4 ou 8, le chiffre des dizaines doit être pair;
- si le chiffre des unités est 2 ou 6, le chiffre des dizaines doit être impair.

Règle 4 (26 élèves présents):

R 1	R 2	R 3	R 4	R 5
0	3	1 0	1	1 2

Utiliser l'histoire des mathématiques dans la formation initiale des professeurs d'école

Hélène Gispert[1]

La proposition de l'atelier a pour origine un travail collectif mené à l'IUFM de Versailles au cours de l'année universitaire 1997-98. Les différents stages annuels d'histoire des mathématiques des formateurs de l'IUFM ont suscité l'envie, l'intérêt, le besoin d'un travail sur l'identification et la mise en œuvre des potentialités d'une démarche historique dans la formation mathématique des professeurs des écoles en première et en deuxième année.

Conscients de la diversité des types possibles d'intervention intégrant l'histoire, nous avons lors du stage de 1997 cherché à préciser nos objectifs et nos ambitions. Il est devenu aujourd'hui fréquent que les formateurs de mathématiques fassent, à l'occasion, des rappels ponctuels — correspondant à un minimum de perspectives historiques — sur l'origine, dans les programmes, des objets enseignés et du vocabulaire professionnel. On peut de même avoir recours, y compris dans la littérature scolaire, à des éléments parfois tout aussi ponctuels ou anecdotiques sur l'histoire d'une notion ou d'un auteur. Notre ambition est autre et nouvelle, désirant intégrer un travail historique explicite à une progression mathématique sur une question ciblée de la formation des professeurs d'école. C'est en terme d'acquisition de compétences professionnelles pour les PE2 ou d'obtention du concours pour les PE1 que nous cherchons à préciser l'intérêt de démarches historiques dans des progressions que nous travaillons à mettre au point.

Notre problématique de départ proposait ainsi d'identifier chez les stagiaires des points de blocage qu'on pourrait faire évoluer par un travail intégrant une composante historique. Nous avons alors défini deux axes dans le registre des représentations que les stagiaires peuvent avoir des mathématiques et de leur enseignement. Le premier, la démonstration en géométrie concerne les étudiants de première année confrontés à l'épreuve du concours ; le second traite des programmes scolaires, leurs enjeux, leurs contenus, leurs acteurs, et s'adresse aux stagiaires de seconde année. Plusieurs collègues ont proposé de procéder à un état des lieux des obstacles et blocages, de définir des objectifs puis des modalités d'intervention afin de « passer à l'acte » dans les groupes de PE [2].

C'est le compte-rendu de ces séances, le travail réalisé en amont pour les préparer, les réflexions qu'elles nous ont inspirées qui ont fait l'objet de cet atelier à Loctudy. Depuis le colloque de la COPIRELEM nous avons continué à travailler pour concevoir nos interventions pour l'année 1998-99. J'ai donc choisi de ne pas me limiter ici à l'état de nos réflexions et des échanges qu'elles ont suscités lors du colloque de Loctudy mais d'intégrer également la suite de nos travaux.

---

[1] Hélène Gispert, maître de conférences en histoire des sciences à l'IUFM de Versailles. Contact : GHDSO, bât 407, centre universitaire 91405 Orsay cedex ; email : hélène.gispert@ghdso.u-psud.fr

[2] Il s'agit, pour la géométrie, de Josiane Helayel qui a participé à l'animation de l'atelier à Loctudy et de Jacques Douaire et, pour les programmes scolaires, de Françoise Bourhis-Lainé et de Michèle Déprez qui a rédigé plusieurs des documents distribués pendant l'atelier.

1. LA DEMONSTRATION EN GEOMETRIE en première année

Le thème choisi pour la première année correspond à un des obstacles les plus importants de l'épreuve mathématique du concours. Il s'agit de travailler sur les exigences requises par les démonstrations des problèmes de géométrie et de les confronter, par le biais de l'histoire, aux représentations que les PE1 peuvent avoir de l'activité géométrique. Notre objectif est de dépasser le seul cadre de l'exigence scolaire et du principe d'autorité qui l'accompagne, qui sont trop souvent les seules légitimités que connaît l'étudiant.

Etat des lieux

Nous avons cherché à préciser les types d'erreurs dans les raisonnements et leur origine dans le cursus préalable des étudiants, le degré d'arbitraire qu'ils peuvent attacher à l'usage des règles de démonstration qui, souvent, leur semble prouver des propositions apparemment évidentes. Nous avons regroupé quelques unes de ces difficultés autour de trois thèmes : le raisonnement, la rédaction des démonstrations, les contraintes et les exigences des épreuves du concours.

Ainsi, à propos des raisonnements, citons le recours à la mesure à partir de règle ou de rapporteur pour donner une réponse, le recours à la construction pour tracer et montrer à partir d'un exemple, l'obstacle de l'évidence (on voit sur la figure) à la nécessité de prouver, l'oubli de l'énoncé-tiers dans un pas de déduction, la confusion entre hypothèse et conclusion.

En ce qui concerne la rédaction des démonstrations, dans le registre des représentations de ce qu'est le fait de démontrer, on trouve très souvent le questionnement centré sur « comment écrire ? », « est-ce que j'ai le droit d'écrire ? » plutôt que sur « quoi écrire ? », le fait de donner deux démonstrations différentes pour mieux convaincre, de dire tout ce que l'on sait sur une figure en lieu et place d'une démonstration, le passage par le langage naturel.

Quant aux contraintes et exigences du concours, il faut d'abord souligner que certaines des difficultés rencontrées par les PE1 sont quelque fois partagées par les formateurs à la vue de problèmes de géométrie qui ont pu être donnés dans certaines académies[3]. Comprendre ce qui est admis pour le concours et ce qui doit être démontré, gérer l'incertitude sur le caractère relatif des normes attendues, sont deux difficultés majeures pour les PE1. Des difficultés d'un autre ordre surgissent pour les PE1 à propos des exigences différentes sur le raisonnement en géométrie entre la partie mathématique de l'épreuve (démontrer, construire à la règle et au compas) et l'analyse de production d'élèves (constater, recours à l'équerre).

Notre objectif étant de chercher à modifier les compétences des PE1 dans ces domaines de la démonstration en géométrie, il s'est avéré nécessaire d'aller au delà de l'établissement de cette liste et de mettre en place des dispositifs d'évaluation, initiale dans un premier temps, des représentations que les PE1 peuvent avoir de la démonstration en géométrie. C'est la tâche que les collègues entreprennent à la rentrée 1998 en mettant au point des situations permettant cette évaluation.

Au cours de l'année 1997-98, sur la base de cet état des lieux encore « empirique », avec les objectifs énoncés plus haut, nous avons réalisé en co-intervention (enseignant de mathématiques de la filière et moi-même) dans deux groupes de PE1 une séance à caractère historique qui a eu lieu après un premier stage sur le terrain. Construites à partir de point de départ différent, les deux séances ont insisté, chacune, sur des volets complémentaires de notre projet.

[3] Voir par exemple le sujet de Versailles 98.

Deux exemples d'intervention historique

Qu'est ce que la géométrie ? : une pluralité de réponses

Dans le premier groupe de PE1, la séance fut introduite par un tour de table par lequel la trentaine de stagiaires dut répondre en deux ou trois mots à la question posée « la géométrie, c'est quoi ? ». La quarantaine de termes ou d'expressions de sens distinct que nous avons collectés peut être classée en trois registres correspondant à des champs de représentations différents. L'un est celui de la mesure (renvoyant à la fois à instrument de mesure et à modélisation, représentation, mesure du monde réel), un autre est celui du dessin, enfin le troisième est celui de la démonstration et de la rigueur. La confrontation de ces différents champs, et plus particulièrement des deux premiers par rapport au troisième, a mis en évidence deux modes de représentations fondamentalement distincts, l'un ancré, ou tout du moins lié, à l'expérience qu'ils ont pu avoir de la géométrie à l'école lors du premier trimestre de leur formation, l'autre renvoyant à leur passé de collégien, de lycéen (et beaucoup plus rarement d'étudiant) et à leur préparation des problèmes du concours.

Devant ce « grand écart », les deux questions : « Laquelle de ces représentations est la bonne ? » et « Qu'est-ce que la géométrie ? » ont été explicitement posées. Elles le furent dans un contexte où la (les) réponses, même si elles ne pouvaient être que d'ordre très général, étaient attendues par les stagiaires.

C'est par l'histoire que nous avons abordé ces deux questions, reprenant les divers termes et expressions que les stagiaires venaient de donner et les rattachant, par famille, à des traditions géométriques ayant vécu à différents moments et dans divers lieux de l'histoire des hommes et des mathématiques. Je ne reprendrai pas ici cet exposé historique, me contentant de renvoyer à une bibliographie classique d'histoire des mathématiques à partir de laquelle on peut construire un tel travail[4]. Je voudrais seulement insister sur quelques unes des idées historiques qui ont soutenu notre intervention et qui ont fait débat lors de notre atelier de Loctudy.

L'histoire ne nous a pas servi à légitimer une conception plutôt qu'une autre de la géométrie. Les stagiaires n'ont donc pas eu de réponse radicale et simpliste à leurs questions. Nous avons au contraire montrer les origines culturelles, sociales, économiques, des différentes conceptions intellectuelles attachées à la géométrie, à sa pratique et à son enseignement : géométrie pratique, liée au monde des hommes, à la mesure de la terre avec ses cadastres et ses dessins cotés, mais aussi géométrie liée à la mesure du ciel, les objets géométriques ayant alors une toute autre échelle ; géométrie abstraite, déductive dont le rôle social est fixé en Grèce avec Platon, ou, toujours en Grèce, géométrie logistique ; géométrie chinoise avec ses propres critères de preuves et ses propres pratiques, géométrie indienne, etc.

[4] La bibliographie est présentée en fin du compte rendu dans la partie consacrée à la géométrie en PE1. Plusieurs titres ont déjà été indiqués dans le compte rendu de l'atelier que j'avais animé au colloque COPIRELEM de Douai et dans celui de Josiane Helayel pour le colloque de COPIRELEM de Saint Etienne. Les trois articles de Maurice Caveing dans le *Matin des Mathématiciens* sont une bonne introduction générale, l'article de Catherine Goldstein sur l'histoire du cercle permet un travail précis sur un objet particulier du monde géométrique des PE1 (ce que nous avons d'ailleurs réalisé pour le second groupe de PE1).

Enfin, revenant à l'opposition apparue entre les deux registres de la géométrie, « géométrie savante » liée à la partie mathématique du concours et « géométrie scolaire » liée aux productions d'élèves et à la pratique des maîtres, nous sommes intervenus sur les notions de figures et de dessins, sur les exigences liées à l'exercice d'une démonstration de concours en reprenant et analysant l'épreuve du concours de Bordeaux 1994 dans laquelle la figure, faite à main levée, semble traduire une propriété géométrique qui s'avère fausse par démonstration ... à condition que le candidat ait jugé utile de recourir à une démonstration.

La discussion dans l'atelier à propos des réponses des stagiaires a conduit à une remarque dont nous avons tenu compte pour cette année 1998-99. Il serait en effet plus intéressant de commencer à évaluer les représentations des PE1 dès leur arrivée à l'IUFM, avant même qu'ils n'aillent dans les classes, cette évaluation devant alors être poursuivie au cours de leur formation.

Un autre point de discussion a porté sur la question de l'origine de la géométrie, de la nature de la géométrie, de l'existence même d'une géométrie en dehors des critères de la pratique et de la preuve euclidienne[5]. Question qui revient à savoir si on fait ou non de la géométrie à l'école primaire et qui, nous avons insisté là dessus, convoque des conceptions épistémologiques, historiques qu'il est absolument indispensable de mettre à jour et d'expliciter[6] tant chez les formateurs que chez les PE.

Comment prouver ? : une diversité d'exigences

L'intervention dans le deuxième groupe de PE1, faisant l'économie du travail d'explicitation mené dans le groupe précédent à propos des représentations que les PE1 ont de la géométrie, s'est focalisée sur la question du statut des démarches de preuve en géométrie. C'est donc sur l'évolution, la diversité des moyens de preuves dans l'histoire que la séance a été organisée. Une des contraintes posées par le formateur, faire chercher et travailler les stagiaires pendant la séance même, a fortement influé sur le type de questions et de textes que nous avons pu utiliser. Les ambitions, qui se traduisent en partie dans la bibliographie[7], n'ont pas pu toutes être tenues. Un des axes de notre travail de cette année 1998-99 est la recherche de textes adéquats pour construire des séances à partir de différentes résolutions d'un même problème au cours de l'histoire.

Dans un premier temps nous nous sommes, là aussi, servi du sujet de Bordeaux. Espérant faire surgir « en acte » leurs différentes représentations de ce que c'est que démontrer en géométrie, nous avions demandé aux stagiaires de chercher et rédiger ce problème pour une séance préalable. Le résultat, moins spectaculaire et divers que nous l'attendions, fut exploité comme dans le premier groupe en deuxième partie de la séance, après les développements historiques.

---

[5] Il ne s'agit évidemment pas d'entrer dans la question géométrie euclidienne / géométries non-euclidiennes, mais, par exemple, des critères euclidiens de démonstration et de rédaction versus le non-dit des géométries babyloniennes ou égyptiennes (voir [Caveing], [Goldstein], [Ritter]).

[6] Voir à ce sujet le mémoire de DEA de Josiane Helayel [Helayel, 1998] qui traite de cette question pour le XIXe et le début du XXe siècle.

[7] Les différents articles d'Evelyne Barbin, les articles de Karine Chemla sont des articles de fond adressés aux formateurs et qui, sauf exception, sont peu utilisables à notre avis auprès des PE. Par contre nous avons présenté à partir du texte de Catherine Goldstein sur le cercle des activités au PE1 sur le tracé de perpendiculaires, à partir du texte de Jean Claude Martzloff des activités sur le théorème de Pythagore, convoquant à chaque fois à côté de la version euclidienne une ou plusieurs autres versions d'un théorème.

C'est au travers de l'histoire du cercle que nous avons cherché à atteindre les objectifs suivants :

1. faire comprendre que les mathématiques ont évolué dans leur contenus (objets, finalités), dans leurs moyens de preuves,
2. faire appréhender certaines caractéristiques de la démonstration (fonction de preuve, structure du raisonnement déductif, analyse-synthèse, éclairer-convaincre) qui sont fonction des règles internes à une communauté scientifique.

Ainsi, nous avons exposé le statut non explicite et non défini du cercle comme objet mathématique alors même qu'il est utilisé dans des problèmes (traités du cordeau en Inde, calculs de volumes en Egypte et à Babylone), le traitement euclidien et la critique qui en est faite par les géomètres du XVII^e siècle plongés dans un nouveau monde avec la géométrie de Descartes où le cercle et les moyens de preuve sont profondément différents de ce qu'ils sont chez Euclide.

La (des) démonstration(s) du théorème de Pythagore (Euclide, Chine) ont servi de support aux activités proposées aux étudiants et permis de poser la question de l'évidence que nous avons approfondie à partir de l'analyse de leurs solutions au problème de Bordeaux. Le travail sur Bordeaux a permis d'expliciter certaines des exigences propres au concours, en les identifiant comme telles et en les rattachant à des critères contemporains de l'activité et de l'enseignement secondaire mathématique, face à d'autres choix d'exigences formulés en d'autres temps, pour d'autres communautés scientifiques (ou scolaires).

Et après ?

Ces deux séances, construites à partir d'un travail commun entre spécialistes d'histoire des mathématiques et formateur de mathématiques, ont manifestement été l'occasion de lancer dans de bonnes conditions une réflexion des stagiaires sur la démonstration et la géométrie au concours. Elles sont cependant demeurées ponctuelles et n'ont pas permis un travail et une réflexion approfondis sur cette efficacité du recours historique dans la modification éventuelle des conditions de préparation du concours. S'il est vrai qu'ils resteront confrontés à un problème qui demeure difficile (celui de la démonstration géométrique), nous voudrions qu'ils parviennent à positionner leurs difficultés et à dépasser une attitude d'imitation face à une attente dont ils ne perçoivent pas d'autre légitimité que la parole du formateur.

Nous allons, pour l'année 1998-99, cherché à mieux définir les différents dispositifs que nous devons mettre en œuvre. Il s'agit tout d'abord de mettre au point un dispositif d'enseignement en géométrie intégrant les étapes relatives à nos objectifs sur la démonstration. Il nous faut donc affiner et sélectionner nos objectifs liés au concours et nourrir, de façon spécifique, ce dispositif de situations d'histoire des mathématiques. Il s'agit également de mettre au point des dispositifs d'évaluation — tant des représentations initiales que de leur évolution en fonction de nos interventions — en définissant préalablement les points sur lesquels peuvent porter l'évaluation. Ce travail est en route et la bibliographie donnée ici en tient compte.

2. LES PROGRAMMES SCOLAIRES (enjeux, contenus et acteurs) en deuxième année

C'est sur la lecture des programmes scolaires que nous avons choisi d'axer notre intervention en deuxième année. Il nous semble en effet que cette dimension de la formation professionnelle est le plus souvent traitée de façon réductrice, les formateurs s'intéressant plus au « comment » qu'au « pourquoi » de programmes qu'on apprend à appliquer plutôt qu'à questionner.

Suivant la démarche que nous avons déjà exposée, il nous faut dans un premier temps préciser les conceptions que les PE2 peuvent avoir des programmes en début de cursus. Il s'agit ensuite de rendre explicite, grâce au recours à l'histoire, l'interaction entre l'école, ses programmes, et la société, de modifier ainsi la lecture que les PE2ont des programmes scolaires, et d'en faciliter l'appropriation comme outil professionnel. Comme dans le premier thème, l'objectif de cette mise à distance par l'histoire est de dépasser la seule référence à l'arbitraire — dont on aura chercher à préciser dans ce cas le mode de fonctionnement chez les PE — pour la compréhension de la loi scolaire et des contenus des textes officiels contemporains.

Etat des lieux et démarche

Un premier état des lieux des représentations que les stagiaires peuvent avoir des programmes scolaires a été obtenu grâce à un questionnaire posé dans deux groupes de PE2 (correspondants à deux formateurs différents) en début d'année. Ce questionnaire, dont la visée dépassait le seul objectif de cette recherche, interrogeait plus globalement les PE sur leurs conceptions ou leurs souvenirs concernant les mathématiques et leur enseignement ; une dernière question, plus spécifique, leur demandait ce qu'évoquait pour eux le mot « programmes ».

L'idée d'une pérennité des savoirs enseignés et de leur organisation s'est exprimée avec force : les notions mathématiques enseignées ont toujours la même forme, le découpage disciplinaire (algèbre, géométrie ...) apparaît permanent. Quant aux programmes proprement-dit, les collègues ont relevé les éléments suivants qui renvoient chacun à des registres différents :
- vision technique et morcelée des programmes,
- vision coercitive, l'accent étant mis sur leur dimension administrative et institutionnelle,
- programmes conçus en terme de loi, la loi pouvant apparaître comme relative (« les programmes changent tout le temps »), ou comme non appliquée (« les programmes ne sont pas respectés ») vu la lourdeur des programmes,
- adaptation (contemporaine) des programmes à une baisse de niveau due à la massification de l'enseignement.

Cet état des lieux, bien sommaire encore, ne renvoie pas de façon spécifique au champ disciplinaire mathématique. Il montre l'absence de toute référence à quelque valeur d'ordre social, économique, politique, disciplinaire, pédagogique, etc. A la différence de nos interventions en PE1, c'est donc autour de questions que les stagiaires ne se posent pas encore que nous avons à construire des séances. C'est par un travail sur des programmes de mathématiques des deux derniers siècles et leur mise en regard avec les contextes politiques, culturels et sociaux dans lesquels ils ont été discutés et élaborés[8]. que nous avons cherché à

[8] Il ne saurait être question ici de présenter cette mise en regard historique. Si la bibliographie est moins fournie en histoire de l'enseignement des mathématiques — et même, plus généralement, en histoire des contenus d'enseignement — qu'en histoire des mathématiques, il existe quelques ouvrages de base qui permettent de prendre la dimension de cette interacion entre l'école, les contenus scolaires et la société. Ces ouvrages sont cités dans la bibliographie à la fin de cet article. Dans le cas de l'enseignement primaire des mathématiques (primaire élémentaire, primaire supérieur, écoles normales) une recherche est en cours à l'IUFM de Versailles, en collaboration avec le Service d'histoire de l'éducation de l'INRP, et un article est à paraître dans une publication de l'IUFM [Gispert et al. à paraître]

provoquer un questionnement des stagiaires qui relève à notre avis tout autant de la composante disciplinaire que de la composante dite générale de leur formation professionnelle.

L'objectif premier étant de privilégier ce questionnement, nous avons choisi de faire réfléchir les stagiaires à partir de l'analyse de textes d'époque reflétant des débats de leur temps sur des contenus de l'enseignement mathématique primaire. Ce principe, qui nous semble essentiel, présente une difficulté à laquelle nous avons été confrontés. S'il est hors de question de transformer ces séances en cours d'histoire de l'enseignement et d'axer le travail sur une étude comparative de contenus précis de programmes de mathématiques au cours des deux derniers siècles, il est cependant utile, et nécessaire nous en avons fait l'expérience, d'apporter un minimum de connaissances historiques sur ces périodes pour permettre la pleine compréhension des textes présentés et des enjeux qui les traversent. Nous avons donc décidé, pour l'année 1997-98, de faire suivre la séance de travail sur les textes d'une séance « magistrale » consacrée à une conférence d'histoire de l'enseignement. Il n'est pas certain que nous reproduirons exactement ce choix en 1998-99.

Modalités de formation

Les principes de cette approche historique étant établis, il restait à préciser plusieurs points cruciaux : à quelle période de l'année l'introduire, sur quels textes la structurer, autour de quelles questions les travailler pour assurer le transfert aux problématiques et interrogations de la formation professionnelle.

Le choix du moment de la séance était plutôt simple. Les collègues formateurs ont jugé préférable de mener cette séance après le premier stage en responsabilité, les stagiaires ayant alors été confrontés « pour de vrai » à l'exercice de leur métier et à l'« application » des programmes.

Le choix des textes et des questions s'est appuyé sur le travail que nous avions réalisé depuis plusieurs années dans nos stages d'histoire des mathématiques de l'IUFM[9]. Nous avons cherché des textes correspondant à trois moments forts des débats sur l'école et ses contenus (en particulier mathématiques) au cours des XIX^e et XX^e siècles. Il s'agit de textes contemporains de la loi Guizot (1833) qui fixe les contenus détaillés de l'enseignement primaire élémentaire et supérieur, des débuts de la Troisième République (textes de la deuxième édition de 1911 du *Dictionnaire pédagogique* de Ferdinand Buisson), et enfin de la période de la réforme des mathématiques modernes (milieu des années 1960 - début des années 1970). Nous avons voulu d'une part que les liens avec les conditions politiques, économiques, sociales, culturelles du moment y soient explicites et que, d'autre part, il y aient des développements justifiant certaines logiques de structuration de programmes.

Ces textes ont été travaillés par groupe dans une séance construite en trois temps. Dans un premier temps consacré à la lecture de deux textes par groupe, les stagiaires ont du répondre à des questionnaires conçus pour les aider à s'en approprier le contenu. Dans un second temps, il leur était demandé d'en dégager les idées fortes à propos des conceptions des auteurs sur les mathématiques, sur l'enseignement et sur l'enseignement des mathématiques. Une dernière

[9] Les références des textes présentés aux stagiaires sont données dans la bibliographie. Certains ont été proposés lors de l'atelier sur l'histoire de l'enseignement de la géométrie animé par Josiane Helayel et moi-même au colloque COPIRELEM de Saint Etienne (voir l'article de Josiane Helayel dans les *Actes*).

question leur demandait en quoi les textes lus pouvaient les concerner. On a procédé enfin à une mise en commun des réponses et réflexions de chaque groupe, les rapporteurs devant veiller à situer le texte pour l'auditoire.

Nous reviendrons plus loin sur le bilan de ces séances qui a fait l'objet d'une discussion dans l'atelier de Loctudy. Je voudrais juste mentionner ici les conclusions que nous avons dressées à l'issue de cette première étape pour préparer la conférence historique (commune aux deux groupes de PE) qui a suivi.

D'une part, nous avons été impressionnées par l'importance et la pertinence des éléments que les stagiaires ont su tirer de la lecture des textes historiques qui leur étaient proposés. Ces séances, qui les ont manifestement intéressés, ont été riches. Dans le même temps, d'une façon qui nous a paru paradoxale dans un premier temps, ce sont les textes des années 1970 qui ont soulevé le plus de difficulté de mise en contexte. Nous avons ainsi réalisé la jeunesse du public PE2 pour lequel ce moment de l'histoire est aussi étranger que ceux de la loi Guizot ou des réformes Jules Ferry. Cette constatation — qui nous a conduit à axer une grande partie de la conférence sur l'histoire de la réforme des mathématiques modernes — nous a fortifié dans la conviction qu'il est nécessaire de permettre aux stagiaires, qui auront très probablement à l'échelle de leur propre carrière à faire face à des mutations très importantes des rôles et des fonctions de l'école et de ses savoirs, de prendre la mesure des transformations qu'a déjà connues l'institution.

D'autre part, nous avions cherché, par le choix de nos textes, à faire surgir la question de l'évolution des contenus des branches mathématiques au niveau de l'enseignement primaire, en particulier, pour la géométrie, l'articulation géométrie plane / géométrie dans l'espace. Ce fut également un des axes de la conférence dont le premier objet fut cependant de présenter un exposé chronologique de l'évolution de l'école (buts, contenus, acteurs, enjeux) depuis le début du XIX^{e} siècle afin de resituer clairement dans leur contexte les textes travaillés précédemment. Cet exposé (y compris ce qui a concerné la période des années 1950-1970 du mouvement de réforme des mathématiques modernes) a été construit autour des questions suivantes :

Quelle(s) légitimité(s) pour les contenus mathématiques ?
Quels sont les mobiles pour restructurer des programmes ?
A quoi sert l'école ?
A quoi servent les mathématiques enseignées à l'école ?
Quelles sont les fonctions des mathématiques à l'école ?

Premiers éléments pour un bilan

Nous avons présenté lors de l'atelier de Loctudy quelques éléments partiels de bilan que nous avaient fourni, outre les réactions des étudiants pendant les séances,

- les réponses écrites des stagiaires à trois questions que nous leur avions posées à l'issue de la conférence sur l'intérêt, l'utilité et l'apport éventuel dans leur formation de ces séances à caractère historique,
- l'investissement qu'ont constaté les formateurs lors de la suite du travail au cours de l'année sur les instructions officielles.

Ces séances, placées après le premier stage en responsabilité, précédaient en effet un travail spécifique sur les programmes et les instructions officielles actuels pour la géométrie à l'école primaire.

Les formateurs ont constaté un écho plus fort que d'ordinaire de la part des PE plus intéressés à les discuter et les analyser. En quoi, et dans quelle mesure, le recours à l'histoire de l'enseignement en est-il responsable, c'est évidemment une question importante mais à laquelle nous n'étions pas armés pour répondre.

Quant aux réponses au questionnaire, elles ont fait part à la fois de réactions positives et de réactions négatives. Les réactions positives confirmant nos attentes, je ne les développerai pas ici. Je citerai seulement un argument, rencontré plusieurs fois, qui met en avant la conscience acquise des transformations et de la nécessité de se situer en tant qu'enseignant dans un processus de remise en cause et d'évolution. Les réactions négatives ont par contre fait l'objet de débat à Loctudy.

Certaines des critiques des stagiaires ont porté sur la forme des interventions, en particulier sur la séance de conférence (trop longue, trop dense ...) et les redondances qu'il y a pu avoir avec la séance de travail sur les textes. Nous nous interrogeons nous-mêmes, je l'ai dit plus haut, sur l'articulation entre ces deux moments et le contenu à donner à la conférence qui nous semble de toute façon nécessaire. Sur le fond, les critiques mettent en cause l'intérêt ou l'utilité de cette formation trop peu axée sur les démarches, les méthodes pédagogiques, les outils concrets, les préoccupations immédiates du « terrain » alors qu'ils manquent tant de temps durant cette deuxième année. Ce type d'intervention, vécu comme élément de culture, est soit repoussé à plus tard, quand ils seront en poste et auront plus d'expérience, soit purement et simplement rejeté car sans lien avec la pratique professionnelle qui consiste à « appliquer les I. O. et pas à réfléchir sur les subtilités des programmes ».

Il a semblé à l'atelier que ce lot de réactions ne s'adressait pas de façon spécifique à l'intervention de l'histoire dans ces séquences de formation, mais que nous avons recueilli à cette occasion des critiques qui visaient l'ensemble de leur formation. Le soucis du terrain, de la pratique, de leur pratique, est en effet la préoccupation majeure des stagiaires, et parfois aussi des formateurs, durant cette deuxième année. Nous inscrivant également dans une logique de professionnalisation de la formation, une double question nous est alors posée : faire que ces séances apparaissent de façon convaincante comme un outil dans la formation des PE2 et leur trouver un temps et un espace approprié.

Quelques pistes ont été proposées lors de l'atelier, s'appuyer sur la critique de manuels scolaires pour faire sortir les questionnements, travailler plus particulièrement l'articulation école / collège resituée dans l'histoire et les héritages communs des deux ordres d'enseignement primaire (à vocation utile et pratique) et secondaire (à vocation désintéressée et élitiste).

Dans la perspective de la poursuite de nos interventions en 1998-99 nous avons dégagé plusieurs tâches pour la mise au point de nos séquences de formation : expliciter les représentations des PE2 à plusieurs moments de l'année en fonction de leur stage en responsabilité ; préciser le lien entre les représentations et les pratiques d'enseignants qui peuvent en découler ; faire apparaître, au préalable, des premiers questionnements à propos des programmes d'aujourd'hui qui trouveront alors un écho dans les textes historiques ; proposer d'ancrer une partie de cette séquence de formation dans la formation générale et de prolonger éventuellement par des modules optionnels.

3. CONCLUSION

Ce travail exposé lors de notre atelier a fait l'objet d'une réponse à un appel d'offres lancé dans notre IUFM dans le cadre de la création d'un observatoire de la formation dont la finalité principale est l'aide à l'amélioration des plans de formation par la production d'outils, de données, de connaissances et d'analyses. Nous avons inscrit notre réponse dans le premier des axes proposés, l'aide au positionnement des étudiants et des stagiaires en début de formation.

Dans cette optique, il nous a paru nécessaire non seulement de continuer à mettre au point nos outils d'évaluation et le déroulement de nos séances, mais aussi de se servir de cette pratique pour développer une réflexion plus théorique sur l'opportunité, l'importance et l'intérêt du recours à l'histoire des mathématiques dans quelques points clefs de la formation initiale des futurs enseignants. Cela devrait être l'objet d'une partie de notre travail dans l'année 1998-99 et déboucher sur une publication dans laquelle nous présenterions également plus complètement les réflexions et les documents-sources d'ordre historique sur lesquels nous avons fondé notre travail.

L'atelier de Loctudy, par la préparation qu'il a supposé, les échanges qu'il a permis, et la synthèse qu'a demandé ce compte rendu aura été une étape précieuse dans la réalisation de ce projet.

4. ELEMENTS POUR UNE BIBLIOGRAPHIE HISTORIQUE

A propos de la démonstration en géométrie

E. Barbin, "La démonstration mathématique ; significations épistémologiques et questions didactiques, *APMEP* n°366, déc 88, p. 591-620.

E. Barbin, "Quelles conceptions épistémologiques de la démonstration, pour quels apprentissages,", *Repères IREM* n°12, 1993 p. 93-113.

E. Barbin, "Les éléments de Clairaut : une géométrie problématisée", Repères IREM n°4, 1991

R. Bkouche, "Autour de la réforme de 1902/1905", in H. Gispert (ed), *La France mathématique*, p. 181-213.

M. Caveing, "Les Grecs avant Euclide" in E. Noël (éd), *Le matin des mathématiciens* (Belin).

K. Chemla, "Résonnances entre démonstration et procédure. Remarques sur le commentaire de Liu Hui (3e siècle) aux *Neufs chapitres sur les procédures mathématiques* (1e siècle), *Extrême Orient / Extrême Occident*, 14 (1992), p. 91-129.

K. Chemla, "What is at Stake in Mathematical Proofs from Third Century China ?", *Science in context*, 10 (1997), p. 227-251.

C. Goldstein, "L'un est l'autre, pour une histoire du cercle" in M Serre (éd), *Les éléments d'histoire des sciences* (Bordas).

J. Helayel, *La géométrie à l'école primaire : textes et contextes de son enseignement dans la société française de 1800 à 1938*, DEA, publication IUFM Versailles

J. C. Martzloff, "Quelques exemples de mathématiques chinoises" in *La démonstration mathématique dans l'histoire*, IREM Besançon, p. 131-153.

J. Ritter, "Chacun sa vérité : les mathématiques en Egypte et Mésopotamie" in M Serre (éd), *Les éléments d'histoire des sciences* (Bordas).

A propos des programmes scolaires (enjeux, contenus et acteurs)

P. Albertini, *L'école en France, XIXe et XXe siècles*, Hachette

B. Belhoste, H. Gispert, N. Hulin , *Les sciences au lycée, un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*, INRP-Economica

B. Belhoste, *L'enseignement secondaire des sciences, textes officiels (1792-1914)*, INRP-Economica

C. Bourlet, "Mathématiques" in Buisson (éd), *Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire*, 2e édition (1911), p. 1259-1273.

C. Bourlet, "La pénétration réciproque des mathématiques pures et des mathématiques appliquées dans l'enseignement secondaire", *L'Enseignement mathématique*, 10 (1908), p. 372-387.

A. Chervel, *L'enseignement du français à l'école primaire, textes officiels* (3 tomes pour toute la période 1792-1960), INRP-Economica

V. Cousin, "Rapport à la Chambre des pairs sur len projet de loi de l'instruction primaire », 21 mai 1833, publié dans Chervel, *L'enseignement du français à l'école primaire, textes officiels*

L'Ecole et la Nation, dossier mathématiques modernes, janvier 1971, p. 15-74.

H. Gispert, "Culture scientifique dans la formation des maîtres" in COPIRELEM (éd), *Actes du XXIIe colloque des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres (Douai)*.

H. Gispert, "Quels contenus pour l'ensiegnement scientifique dans les différentes réformes du siècle ? Des légitimités scientifique, économique, idéologique, pédagogique" *in Colloque défendre et transformer l'école pour tous*, Marseille 1997, CDRom édité par l'IUFM d'Aix-Marseille.

H. Gispert et al, "Contenus mathématiques dans l'enseignement primaire, textes et contextes. recherche historique et formation des maîtres", in *Actes des journées recherche de juin 1998*, IUFM de Versailles, à paraître.

J. Helayel, *La géométrie à l'école primaire : textes et contextes de son enseignement dans la société française de 1800 à 1938*, DEA, publication IUFM Versailles

J. Helayel, "La géométrie à l'école élémentaire : textes et contextes de son enseignement dans la société française aux XIXe et XXe siècles" in COPIRELEM (éd), *Actes du XXIVe colloque des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres (Saint Etienne)*, IREM Paris VII, 1998, p. 179-182.

LES MATHEMATIQUES EN MATERNELLE : COMMENT Y PREPARER LES PE ?

Marie-Alberte Johsua Marseille

Cet atelier proposait trois axes de réflexion :

1) **Une introduction historique** qui voulait, à travers l'analyse des textes officiels, montrer une **évolution des contenus « prescrits » pour la maternelle**.

On trouve d'abord une époque lointaine où les apprentissages automatisés étaient la règle et où les contenus répétitifs d'apprentissages numériques dominent, avec un domaine bien repéré comme apprentissage du « calcul ». Plus proche et ayant marqué fortement les mémoires, on trouve une période où ce qui domine, sous le paradigme constructiviste piagétien des apprentissages, ce sont les situations de découverte et de manipulation d'objets, situations supposées produire la construction des structures mentales de la logique. Cette période est marquée par l'idée qu'on repousse à plus tard l'enseignement des mathématiques « traditionnelles » et des nombres, et que ce qu'on recherche c'est l'initiation à des notions logico-mathématiques, soubassement indispensable à l'ancrage futur des apprentissages. C'est pourquoi s'estompent les références à des formes traditionnelles de programmes d'enseignement et même à des titres de chapitres signifiants d'un enseignement mathématique, au profit de la création de nouveaux signifiés : tri, classification, sériation, par exemple, définissant ces opérations mentalo-manuelles.

Avec les programmes de 1985 et 95, on trouve à la fois un remodelage des champs disciplinaires traditionnels autour de grands domaines d'activités et de découverte, et un retour à des apprentissages plus formalisés d'outils pour les futurs apprentissages, dont la maîtrise de la langue et les outils numériques : apprentissage du nombre. Cette remise en cause des champs disciplinaires tels qu'ils sont définis par les institutions scolaires et universitaires, semble bien être une caractéristique incontournable de l'évolution de la maternelle qui correspond aux nécessités psychocognitives d'appréhension du monde par les enfants. Si elle conforte les tenants de la polyvalence des professeurs des écoles, en revanche elle déstabilise les repères culturels des débutants et des observateurs qui ne voient pas où se cachent les mathématiques dans les activités de la maternelle.

2) Le deuxième volet essayait donc **d'analyser les représentations habituelles des apprentissages en maternelle.**

D'abord l'idée qu'une des finalités de l'école maternelle est de « socialiser » les enfants ; cette fonction serait prioritaire, au moins indépendante, des finalités de scolarisation et donc des apprentissages. Or les contenus et les formes à partir desquels se construit cette socialisation scolaire sont déterminants quant à ses finalités et pour donner du sens à l'acte scolaire. C'est pourquoi la reconnaissance des savoirs appris, dès la maternelle, avec les spécificités propres à ce type d'institutionnalisation, doit rester la finalité des apprentissages et ne doit pas être soumise à des objectifs comportementalistes.

Une autre spécificité des apprentissages en maternelle est l'importance, dans le temps d'activité des élèves, des apprentissages « transversaux ». Devons nous continuer à considérer que ces compétences techniques sont indignes de l'attention des didacticiens des mathématiques et les laisser à la charge des maîtres et des pédagogues, ou au contraire devons nous considérer qu'ils font partie de l'acculturation des élèves aux « gestes de l'étude » et y préparer les PE ? Dans ce cadre, il nous faudrait (re)penser une intégration de l'enseignement de ces compétences, en particulier l'articulation de leur chronogénèse avec celle des contenus de savoirs mathématiques.

L'importance du langage en maternelle est déterminante : les « mots-notions » sont la forme essentielle de l'institutionnalisation des apprentissages et de l'avancée du temps didactique. Mais la maîtrise de la langue, et en particulier l'entrée dans la culture de l'écrit, élément déterminant de lutte contre l'échec scolaire, sont des choses trop importantes pour les laisser entièrement à la responsabilité des formateurs de français en IUFM. Pour des PE polyvalents, nous devons, nous aussi, affiner les contenus mathématiques que nous proposons en maternelle en y insérant cette dimension.

3) C'était le troisième axe de réflexion proposé à cet atelier **: débattre d'une progressivité des activités et des apprentissages de la petite section à la grande section**, pour chacun des domaines repérés dans les IO : Approche globale de N, reconnaissance et agencement de formes géométriques, classer, ranger, logique, notion de fonction, algorithme, symbolisme.

En fait la troisième séance n'a pas pu avoir lieu, et le débat dans les deux premières a porté sur deux points préalables : - la question de la finalité propre de l'école maternelle et la remise en cause de la nécessité d'un enseignement structuré pendant ce cycle ; - la remise en cause de l'intérêt de prendre en compte des apprentissages qui ne sont pas repérables dans les savoirs mathématiques, comme les compétences transversales.

Enfin le débat a eu lieu à partir d'une présentation par François. Boule de l'intérêt de considérer des variables didactiques comme la taille, la proximité du modèle, la complexité de la lecture d'une mosaïque en ligne puis en colonne, pour faire construire des messages et des argumentations par les élèves.

ANALYSE DE PRATIQUES PROFESSIONNELLES EN PE2.

Denis Butlen Gabriel Le Poche

RÉSUMÉ : Il s'agit, au cours de cet atelier, d'échanger autour de la conduite de l'entretien d'analyse d'une situation de classe menée par un PE débutant.
L'atelier se déroule en deux parties.
Première partie : présentation d'un dispositif de formation centré sur l'analyse de pratiques puis analyse - à partir du document vidéo -, par les participants, d'une séance conduite par une stagiaire PE2 en classe de CP dans le cadre de ce dispositif.
Deuxième partie : étude - à partir du document vidéo et de la chronique de l'entretien - de l'analyse de cette séance telle qu'elle a été réellement menée par un formateur et exposé portant sur l'analyse des gestes professionnels de PE débutants.

L'atelier s'est déroulé selon le schéma suivant :

1. Présentation du dispositif de formation de l'IUFM de Bretagne centré sur l'analyse des pratiques professionnelles des professeurs d'école débutants (contribution n°1)

2. Analyse d'une séance : les participants vont regarder quelques passages d'une cassette vidéo d'une séance conduite par une stagiaire PE2 lors d'un atelier d'analyse de pratiques. Chaque membre de l'atelier dispose des fiches de préparation. Ils doivent ensuite préparer individuellement une analyse à chaud de la séance organisée autour de la question :
" *quels sont les remarques et conseils à apporter au stagiaire après cette séance ? Sur quels points doit-on centrer l'entretien ?* ".

3. Mise en commun des contributions individuelles, débat et échanges de points de vue.

4. Etude de l'analyse "à chaud " conduite par le formateur (Gabriel Le Poche) à la suite de la séance : les participants visionnent la bande vidéo relatant cet entretien et disposent également du protocole de l'entretien (voir texte ci-joint).
Echanges autour du contenu de l'entretien et la stratégie mise en œuvre par le formateur : points forts de l'analyse à chaud, thèmes abordés lors de l'entretien.

5. Exposé de Denis Butlen portant sur l'analyse des gestes professionnels des PE débutants, sur leurs modes de construction et d'acquisition. Nous renvoyons le lecteur à lecture de la communication de D. Butlen (Actes du colloque de Montpellier, mai 98) et au compte-rendu de l'atelier animé par D. Butlen et G. Le Poche sur l'analyse de pratiques de PE stagiaires lors du stage national de la COPIRELEM de formation des nouveaux formateurs de Perpignan (Actes du stage national, Perpignan, décembre 1998).

6. Analyse de l'entretien de G. Le Poche (exposé de D. Butlen) s'appuyant sur une recherche en cours sur ce thème (voir contribution n°2).
7. Echanges sur le cadre d'analyse explicité lors des deux exposés précédents.

I.PREMIERE CONTRIBUTION
Présentation d'un dispositif de formation de l'IUFM de Bretagne (G. Le Poche)

Un dispositif pour une tentative d'intégration théorie-pratique

A - Une inscription de modules spécifiques dans le projet pédagogique de l'IUFM

Un cadre horaire

un module **d'initiation à la pratique pédagogique** de 30 heures en **PE1**
un module **d'analyse de pratiques** en **PE2** de 50 heures

Des finalités et des objectifs:

L'initiation à la pratique pédagogique :

- elle s'inscrit dans la logique d'une formation professionnelle développée sur les deux années d'IUFM.
- elle permet de donner tout son sens à la logique d'approfondissement en première année par le biais de l'articulation avec les pratiques de classe : elle développe chez l'étudiant la réflexion attendue de lui dans les épreuves du concours et concernant "les approches didactiques et les démarches pédagogiques".
- elle permet de finaliser les .apports théoriques dans les disciplines ou en sciences sociales et humaines, par la préparation, l'observation et l'analyse du travail dans la classe.
- elle facilite l'implication de l'étudiant dans les stages de pratique accompagnée.

L'analyse de pratiques :

- fonder la construction de l'identité professionnelle sur une pratique réflexive.
- contribuer à la construction de la polyvalence par une analyse des pratiques susceptible de favoriser la cohérence dans les modes d'intervention de l'enseignant auprès des élèves.

Compléter le cadre de l'analyse didactique privilégiée dans les enseignements disciplinaires, par l'importance accordée à la dimension pédagogique et la diversité des points de vue et des modes d'analyse d'une séquence d'apprentissage.

- développer l'autonomie dans l'analyse de sa propre pratique au service de la capacité à faire évoluer et à transformer cette pratique.
- renforcer la dimension formative des stages.

Des moyens d'encadrement :

en PE1 un professeur formateur pour 15 étudiants
en PE2 un professeur formateur pour 8 professeurs stagiaires

B. Une organisation particulière au site de Rennes (exemple de l'année 97-98)

1- Les **professeurs stagiaires** sont répartis par **groupes en fonction de leurs stages en responsabilité** : deux segments de 4 semaines dans deux cycles différents.
(annexe 1 contribution 1)

Dès le début de l'année scolaire, **les stagiaires connaissent leurs cycles d'affectation en responsabilité**. Au niveau du plan départemental de formation continue, **l'IUFM a la maîtrise de la programmation** des périodes de ces stages.

- trois groupes, trois cursus

G1 : cycle 3 en responsabilité, cycle 2 en responsabilité puis cycle 1
G2 : cycle 2 en responsabilité, cycle 1 en responsabilité puis cycle 3
G3 : cycle 1 en responsabilité, cycle 3 en responsabilité puis cycle 2

- exemple du groupe 1 :

Première période autour du cycle 3 : **16 heures** d'enseignement **articulé** avec la **méthodologie**, l'**ancrage** et la **pratique accompagnée** qui débouche sur un stage en responsabilité.

Deuxième période autour du cycle 2 : **20 heures** d'enseignement **articulé** avec **l'ancrage**, **deux modules d'analyse de pratiques professionnelles** (AP1 : 3 séances de mathématiques ou de français en liaison avec la discipline d'approfondissement[1], AP2 : 3 séances de mathématiques et de français) et **le stage en responsabilité conjointe** (2 à 3 stagiaires) dans la classe d'ancrage entre les deux séries d'analyse des pratiques. La période se termine par un stage en responsabilité.

Troisième période[2] en juin autour du cycle 1 : **10 heures** d'enseignement.

Les **enseignements** dispensés **en mathématiques** sont donc **orientés** exclusivement et **successivement autour des trois cycles** durant les trois périodes. Le formateur fait face à une communauté d'intérêt des professeurs stagiaires : **l'enseignement** dispensé **prépare** directement au **futur stage en responsabilité**.

2- **Le site de Rennes** organise une **prise en charge progressive** de la classe **sur les deux années** et fait bénéficier les **PE2** d'un **module particulier** (car non inscrit dans le projet de l'IUFM) appelé **Méthodologie.**

- **le module IPP**[3] de première année (annexe 2 contribution 1) :

Dans ce cadre, les étudiants prennent en charge les élèves selon les deux modalités: 1 étudiant face à deux élèves ou trois étudiants, dont un prestataire, face à 6 élèves.

Il s'agit de **gommer au maximum l'aspect animation** d'un groupe classe, non prise en compte dans l'épreuve du concours et qui n'est donc pas, pour l'instant, l'intérêt premier des étudiants.

- **le module Méthodologie**[4] de seconde année

[1] Dans le cadre du projet pédagogique de l'IUFM de Bretagne, les stagiaires choisissent une discipline dite d'approfondissement à horaire renforcé (50h), à égalité avec le français et les mathématiques (50h) et en opposition avec les disciplines du complément de polyvalence (30h).
[2] Dans le projet 98-99 cette période sera allongée pour permettre l'organisation d'un ancrage.
[3] IPP : initiation à la pratique professionnelle.
[4] Méthodologie : 50 heures, horaire pris sur la formation générale de 100 heures.

(annexe 3, annexe 1 pour la place dans l'année scolaire) :

Le professeur stagiaire s'initie progressivement à la prise en charge d'un groupe d'élèves : **un prestataire pour un nombre réduit d'élèves** (10 environ)

L'**objectif** est de s'approprier une **méthodologie de construction, d'analyse et d'évaluation** des situations de classe.

Au cours de ce module **est développé**, en particulier, **l'utilisation des moyens vidéo** comme **outil d'observation** des séances.

Le choix d'un **même objectif** avec trois mises en oeuvre différentes permet d'expérimenter, puis de **comparer différentes approches.**

- les deux modules AP [5] (annexes 1 et 4) :

Une **prise en charge** de la **totalité du groupe classe par un seul stagiaire**.

Les objectifs sont :

- de permettre une liaison effective entre didactique disciplinaire et pratique de classe.
- d'acquérir des gestes professionnels de base au cours d'essais contrôlés.
- d'assurer la mise en cohérence de la formation générale et de la formation en didactique.

Le dispositif est le suivant :

Pour un module : 4 séquences de 9 h par semaine sur 4 semaines consécutives.

Une séquence consiste en trois phases de 3 heures chacune (pour 2 disciplines couplées)

- première phase : détermination des objectifs, hypothèses moyens pédagogiques et didactiques, critères d'évaluation, plan et dispositif d'observation... début de la préparation matérielle et de la fiche de préparation.

- deuxième phase : réalisation des deux séances par deux prestataires différents et observation[6] *par les collègues et les formateurs, "analyse à chaud*[7] *" après chaque séance.*

- troisième phase : analyse approfondie, en différé, de la séance avec utilisation, à bon escient, du film. Participation active des formateurs (IMF et PIUFM), retour sur les hypothèses et éléments de préparation de la séance suivante.

---

[5] AP : Analyse de pratiques professionnelles. Pour situer ces modules au cours de l'année scolaire se reporter à la légende de l'annexe 1.

[6] Au cours de cette observation j'utilise 2 caméras : le premier film servira de support à l'analyse différée, le second recueillera mes commentaires voix off sur la séance et restera la propriété privée du prestataire (le second film n'est donc pas destiné à être visionné collectivement)

[7] L'analyse "à chaud" se déroule selon le protocole suivant : impressions de la prestataire et questions des observateurs, point de vue des collègues stagiaires et éventuellement de l'IMF.

L'AP1 : une **innovation** en 97-98

Nous avons essayer de travailler l'interdisciplinarité dans le cadre d'une analyse de pratique **associant les mathématiques et la discipline d'approfondissement** au cours de **trois séances** de classe (ex : l'espace en cycle 1 en mathématiques et EPS).

Toutes les disciplines ne se prêtent pas facilement à cette entrée mais, dans tous les cas, il a été possible de **comparer** des conceptions des **apprentissages** et des **méthodologies de construction de séquences** de classe (transdisciplinarité).

Nous espérons ainsi avoir **développé** davantage **l'aspect polyvalence** du professeur des écoles.

L'AP2 (annexe 4)

Ce module d'analyse de pratiques associe **les deux disciplines maths et français** dans la réalisation par semaine de deux séances de 45 mn de mathématiques et de français au cours d'une matinée de classe.

Il **ne s'agit pas de trouver des liens artificiels** entre les deux disciplines **si ceux-ci n'existent pas.**

Je garde toujours la **maîtrise** du choix de la séquence qui sera traitée (**choix des objectifs et de la situation**), et lorsque je suis présent au travail de préparation, **je propose une mise en oeuvre** qui est généralement acceptée.

Le **scénario** proposé est en général **difficile** pour **un débutant** mais a déjà fait ses preuves.

J'espère ainsi **minimiser** les **problèmes d'ordre didactique** pour me **focaliser sur le côté pédagogique** et **accentuer les défauts** des stagiaires en ce qui concerne **leurs gestes professionnels** de débutants.

Remarque : cette année l'innovation liée à l'AP1 ne nous a pas permis de réaliser les 4 séquences consécutives (3 simplement) et nous a conduit à supprimer la phase 3, pourtant indispensable, du dispositif. (Moyens horaires stagiaires insuffisants : un choix douloureux).

Ces **deux modules** de formation font **l'objet d'un compte-rendu** où figurent la préparation et l'analyse des séances.

Dans ma pratique de formateur, **j'annote les comptes-rendus** des stagiaires, séquence après séquence, en y insérant des **questions et des commentaires**.

Cette insertion est rendue possible grâce au réseau informatique très performant de l'IUFM.

L'**ensemble** de ces comptes-rendus annotés constitue une **brochure** qui **"mutualise" le travail** réalisé . Celle-ci est **disponible avant** le départ en **stage en responsabilité.**

3 - L'ancrage : chaque professeur stagiaire dispose d'une **classe d'IMF** à raison de **6 heures par semaine** (le jeudi, 2 stagiaires par classe) pour **observer** ou **réaliser** des séances.
(Voir annexe 1)

Cette classe cible est également le **lieu privilégié** pour conduire les séances réalisées dans le cadre du **mémoire professionnel** et du **projet**[8] **interdisciplinaire**.

Dans ce cadre, il m'est **possible de proposer** aux professeurs-stagiaires **d'expérimenter, semaine après semaine**, des **situations vues** durant les **cours du module mathématique** (50 heures, **2 heures le mardi**).

L'**essentiel** de ces cours de seconde année consiste donc à **proposer des situations d'apprentissage** issues de la bibliographie, à **simuler,** entre adultes, **certaines** d'entre elles et à les **analyser** après réalisation dans les classes le jeudi. Le **travail de mise en oeuvre** reste ici **à leur charge** contrairement aux modules d'A.P.

Les **stagiaires** me **fournissent** bien volontiers **leurs fiches de préparation** qui sont disponibles sur le réseau informatique de l'IUFM.

[8] Le projet vient en plus des compléments de polyvalence pour un horaire de 35 heures.

2.Analyse d'une séance de classe
Fiches de préparation des deux premières séances
(seule la première séance a été étudiée dans l'atelier)

PE2 Groupe 1 Mme Mallassis CP : La Cartoucherie Mars 1998

Discipline : Mathématiques **Séquence** : La cartoucherie (La mercerie)	**Séance** n°1 **Durée:** 45 minutes	**Date :** 19/03/98 **Classe :** CP

Matériel et support	**Objectifs notionnels** : Calculer, c'est-à-dire transformer une écriture symbolique en d'autres écritures symboliques.
250 cartouches et 50 étuis 6 affiches blanches ind. 2 coupons grd. format jaunes 2 coupons réponses grand. format jaunes 2 étuis agrandis 2 boîtes compartimentées agrandies 12 grandes cartouches 7 boîtes compartimentées 4x22 fiches ind. blanches 4x7 coupons jaunes 4x7 fiches collectives jaunes	**Objectifs méthodologiques** : Comprendre un jeu difficile Respecter les règles dans le groupe **Tâche des élèves** : Fabriquer des paquets de 5 à partir de plusieurs chiffres Commander des boîtes de 5 **Type de situation** : Apprentissage: aspect groupement écriture Type sémantique procédural

Tps	Forme travail	Déroulement	Observations
3'	Coll	**Situation de référence** : Une colonie de vacances a décidé de récupérer des cartouches afin de gagner de l'argent pour monter un spectacle à la fin du mois. Les enfants, divisés en 4 groupes : les chats, les lapins, les escargots et les canards, vendent alors leurs cartouches tous ensemble à un magasin qui n'accepte que des cartouches rangées dans des boîtes de 5. Votre rôle aujourd'hui sera de trouver comment ranger ces cartouches dans les boites de 5 ?	Le maître explique la situation et répond aux questions éventuelles
8'	Par 3.	**Phase 1 : *Familiarisation avec le matériel*** Composition de groupes hétérogènes Raconter la situation Distribution de quelques boîtes et cartouches Ramassage du matériel	Chaque groupe formé reçoit un numéro de groupe
7'	Coll.	**Phase 2 : *Appropriation collective :*** Pour comprendre le jeu vous allez jouer une fois Les 7 élèves appelés au tableau seront les chefs de groupe : 6 enfants feront 2 équipes de 3 et le 7ème contrôlera si les commandes sont correctes Chaque enfant reçoit une fiche individuelle et ceux du tableau ont une fiche agrandie (format A2) Lecture collective des affiches Tous les élèves écrivent leur prénom Le maître affiche les nombres de cartouches trouvées par les 4 groupes Les élèves assis écrivent les mêmes chiffres que leur chef	Affichage des 6 feuilles blanches Affichage des 2 coupons jaunes au-dessus des fiches Individuelles 3 3 0 0 1 3 1 1

5'	Ind.	Maintenant vous cherchez combien de boîtes il vous faut et combien de cartouches il vous reste ? Vous pouvez dessiner ou écrire sur la feuille (recherche) Mise en commun dans le groupe : les 3 élèves de l'équipe se mettent d'accord	Affichage de 2 coupons réponses <u>jaunes</u>
5''	Coll.	Tous les enfants posent leur crayon et regardent leur chef. Les 3 enfants de l'équipe mettent leur prénom Le chef de ce groupe désigné par le maître écrit les réponses choisies Le 2ème va chercher les boites avec le coupon-réponse jaune Le 3ème prend le coupon de départ, la boîte compartimentée et va prendre les cartouches trouvées par les 4 équipes Validation en disposant les cartouches dans les boîtes Le chef entoure gagné ou perdu sur la fiche collective ainsi que chaque enfant sur sa fiche individuelle	Le 7ème vérifie Rôle important du contrôleur Le maître fait remarquer que l'équipe peut avoir perdu mais qu'un enfant pouvait avoir raison l'équipe peut avoir perdu mais qu'un enfant pouvait avoir raison
15'	Par 3	**<u>Phase 3 : *Appropriation individuelle*</u>** Distribution de coupons à chaque groupe Faire 2 tours : 3 0 2 2 2 3 2 1 éventuellement : 1 2 2 2 si difficulté pour certains groupes	Quand l'élève vient chercher un nouveau coupon il rapporte les 3 fiches ind. et le coupon-réponse, agrafés par le maître Pour les groupes avancés
	Par 3	**<u>phase 4 : *Jeu* avec *obstacle*</u>** Coupons 6 7 8 3 5 8 9 7 4 8 6 9	
3'	Coll.	**<u>Histoire de la classe</u>** Qu'a-t-on fait aujourd'hui ? Etait-ce difficile, amusant... ?	

Voici le compte rendu de l'analyse rédigée par le professeur stagiaire après avoir vécu le moment de formation.

Analyse de la séance

Du point de vue du matériel : Les affiches ont été faites en jaune par erreur
Les grands formats des étuis et des boîtes pour récolter les cartouches se ressemblent trop d'où confusion des enfants.

Du point de vue de la prestation : Trop de paroles, pas de temps de pause
Pas de reformulation par les enfants pour mettre en avant la consigne
La situation de la colonie de vacances n'est pas assez exploitée : il fallait insister sur la différence entre le directeur qui récoltait les cartouches dans les boîtes équipes et la marchande qui achetait les cartouches dans les étuis de 5. La simulation collective est mauvaise car les enfants spectateurs sont sans arrêt sollicités alors que le maître ne s'occupe pas assez des 6 enfants acteurs
En fin de séance les fiches récoltées montrent que beaucoup d'enfants n'ont pas compris la règle du jeu : 9/21

*Conseil :*Mettre les traces écrites dans le dossier des enfants en expliquant la situation par quelques mots aux parents

voici la fiche de préparation de la deuxième séance
PE2 Groupe 1 Mme Mallassis CP : La Cartoucherie Mars 1998

<table>
<tr><td>Discipline : Mathématiques
Séquence : La cartoucherie
(La mercerie)</td><td>Séance n°2
Durée: 45 minutes</td><td>Date : 26/03/98
Classe: CP</td></tr>
<tr><td><u>Matériel et support :</u>
250 cartouches et 50 étuis
1 affiche <u>blanche</u> ind.
1 coupon grd. format <u>jaunes</u>
1 coupon réponse grand.
Format <u>jaune</u>

7 boîtes compartimentées
4x22 fiches ind. blanches
4x7 coupons jaunes
4x7 fiches collectives jaunes</td><td colspan="2"><u>Objectifs notionnels</u> : Calculer, c'est-à-dire transformer une écriture symbolique en d'autres écritures symboliques.

<u>Objectifs méthodologiques</u>. Comprendre un jeu difficile
Respecter les règles dans le groupe
<u>Tâche des élèves :</u> Fabriquer des paquets de 5 à partir de plusieurs chiffres
Commander des bottes de 5

<u>Type de situation :</u> Apprentissage: aspect groupement écriture
Type sémantique procédural</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Tps</th><th>Forme travail</th><th>Déroulement</th><th>Observations</th></tr>
<tr><td>10'</td><td>Coll.</td><td><u>Rappel de situation de référence :</u> Une colonie de vacances a décidé de récupérer des cartouches afin de gagner de l'argent pour monter un spectacle à la fin du mois. Les enfants, divisés en 4 groupes : les chats,
Votre rôle aujourd'hui sera de trouver comment ranger ces cartouches dans les boîtes de 5 ?</td><td>Le maître explique la situation et répond aux questions éventuelles</td></tr>
<tr><td>15'</td><td>Par 3</td><td><u>Phase 3</u> : <u>Reprise de l'appropriation individuelle</u>
Distribution de coupons à chaque groupe
Faire 1 tour : 2 3 2 1
éventuellement : 1 2 2 2 si difficulté pour certains groupes</td><td>Quand l'élève vient chercher un nouveau coupon il rapporte les 3 fiches ind. et le coupon-réponse, agrafés par le maître</td></tr>
<tr><td></td><td>Par 3</td><td><u>Phase 3 : Jeu avec obstacle</u>
Coupons 6 7 8 3
5 8 9 7
4 8 6 9
<u>Histoire de la classe</u></td><td>Pour les groupes avancés</td></tr>
<tr><td>3'</td><td>Coll.</td><td>Qu'a-t-on fait aujourd'hui ?
Etait-ce difficile, amusant... ?</td><td></td></tr>
</table>

Analyse de la séance :
Du point de vue de la prestation : Trop de paroles, pas de temps de pause
L'objectif principal : remplir le maximum de boîtes a été noyé dans les flots de paroles.

Du point de vue du déroulement :
Les enfants, après une semaine, avaient oublié complètement la situation, compliquée à expliquer. Beaucoup de matériel, un vocabulaire portant à confusion : équipe, groupe, coupon, bon de commande.
Le prestataire employant indifféremment équipe et groupes (c'est tout de même voisin). Nous avons trouvé que les enfants avaient trop de choses à gérer, : trop de feuilles, trop de mouvement, chaque enfant devait se déplacer (sauf le chef), pour aller chercher le matériel. Il a donc été décidé de réduire le nombre de feuilles, et qu'un seul élève serait chargé d'aller chercher le matériel.

En fin de séance les fiches récoltées montrent que beaucoup d'enfants n'ont pas compris la règle du jeu.
Conseil :Mettre les traces écrites dans le dossier des enfants en expliquant la situation par quelques mots aux parents
Le jeu avec obstacle nous a montré que l'objectif principal : remplir le maximum de boites avait été oublié par les enfants : ils ont rempli pour la plupart, une boîte et il leur restait 19 cartouches seules...
Le prestataire a fait un rappel collectif pour recentrer les enfants sur cet objectif, mais a arrêté sa séance là. Il aurait fallu redistribuer le matériel pour les faire rejouer immédiatement La séance a duré beaucoup trop longtemps : 1h30.
Une autre séance est nécessaire pour recentrer l'objectif : remplir le maximum de boîtes. Ce sera l'objectif de la troisième séance.

<u>Etude de "l'analyse à chaud"</u>
<u>PROTOCOLE D'ENTRETIEN</u>
<u>" Analyse à chaud ", Rennes, 19/03/98, Gaby LE POCHE</u>

Séance CP : 33 mn 58 s ;
1 h 3 7 mn 15 s : analyse à chaud

G : On me verra de dos, ça ne fait rien !
S : Tu préfères te mettre là ?
G : Non...
G : Ca va aller !
S : Je n'ai pas spécialement besoin d'être là.
G : J'ai oublié de faire...
S : C'est un geste professionnel, matériel...
G : Oui, le mien...
S : Bien.
G : Bon ! Comme c'est la première fois que vous faites des analyses de pratiques, je vous donne le protocole pour que ce soit très clair.
Donc, ce qui compte, c'est que tes collègues fassent l'analyse sur toi et que tu commences par la faire. Explicite ce que tu as ressenti... Donc on va commencer par toi ; puis on demandera à tes trois collègues. Moi, j'interviendrai éventuellement.
Le maître formateur n'est pas là aujourd'hui ; elle aurait pu intervenir, madame M... En même temps que moi... Mais comme elle n'est pas là, je vais le faire.
Donc je n'aurai pas le temps matériel à mon avis de dire quelque chose. Je vais dire l'essentiel... En fonction de ce qui aura été dit. Tu auras les commentaires, voix off, en utilisant la cassette. Donc ce sera l'analyse à chaud.
Ce qui manque cruellement dans notre dispositif de formation mais nous ne pouvons pas le retrouver : c'est une analyse différée avant de préparer la séance numéro 2. A une certaine époque, on avait 1 heure et demi d'analyse ; non pas pour regarder la cassette comme à la télévision mais grâce à...
Où est ta camarade ?
S : pas là !
G : Voilà, grâce à ta camarade, à ta collègue qui a filmé. Elle sait, elle connaît mes commentaires ; elle est donc capable de retrouver sur la cassette à quel moment un événement s'est produit. A dix heure 30. Tac ! On retrouve sur la cassette ! Normalement, elle aurait dû noter ça si le module de méthodologie a été fait correctement. Cela a été peut-être le cas cette année, je n'en sais rien...
S : Il y a eu des heures...
G : Oui des heures... Comment cela se passe-t-il ?
S : Bien, on était là mais...
G : Bien... C'est ça que vous faites quand vous filmez.
S : On n'a pas été habitué à...
G : Vous n'avez pas été habitué à ça ?
S : Bien non...
G : Avec quel formateur avez-vous fait le module méthodologie ?
S : Si pourtant, on a eu des heures.
G : Oui, mais quand même ; celui qui filme vous a dit cela... Surtout pour retrouver sur le caméscope...
S : On a utilisé le petit caméscope... Non.

G : Mais la moindre des choses, c'est ça. Quand vous filmez, il faut passer...

S : Regarder, faire afficher les heures et...

G : Bien, oui, faire afficher l'heure. On regarde à quel moment ça se produit. Il n'est pas question de regarder la télévision, encore pendant une heure. Nous n'allons pas perdre notre temps à l'analyse différée.

Bon ! C'est bon ? Vous aviez qui, par curiosité ? Je sais déjà...

S : Monsieur B..

G : En méthodologie, monsieur B.. Oui, c'est monsieur B.. Votre formateur.

S : Oui...

G : Bon alors Michèle. A toi de jouer, Bon ! Question...

M : Déjà j'ai une extinction... Mal à la gorge, ce n'est peut-être pas normal ?

G : Oui, mal à la gorge ! Hum... Moi aussi !

M : J'ai dû crier, parler fort...

S : T'as parlé extrêmement fort...

G : Attends ! Tu ne dis rien ! Protocole, d'accord !

M : Les choses à gérer, je pense vraiment qu'il faut le calme, sinon ce n'est pas possible ; j'ai parlé très fort, je pense ; j'ai mal à la gorge.

Je pense que l'appropriation, c'était trop long. Parce que, bon, je voyais bien à la fin que, je rajoutais du matériel. Bon, bon, bien la situation elle est un peu difficile mais enfin je veux dire, il y a tellement de matériel qu'à la fin, ils en avaient marre. Les boîtes, ça n'allait pas trop. Puis il y avait un groupe de chefs là ; je voyais bien qu'ils n'avaient pas forcément tout compris. Je me disais si eux ils n'ont pas compris, tout à l'heure ça va cafouiller. Ceux qui voulaient trois boites là. C'est vrai, je n'avais pas bien expliquer qu'ils étaient en équipe. Comme ils étaient chefs, je ne sais pas, ils pensaient sûrement qu'ils groupaient tout quand même. Il n'y avait pourtant qu'un coupon pour les cartouches. Mais je n'avais pas dû bien expliquer qu'on laissait bien les cartouches ensemble.

G : Tu vas vite parce que le temps de gratter et tout... Il y a quand même des choses à dire...

M : Bien à la fin...

G : Mais que penses-tu finalement après avoir réalisé le jeu de l'appropriation dite collective ? La simulation collective - j'emploie mon vocabulaire - a passé à peu près quand même. Que peut-on faire comme bilan ?

M : A peu près mais...

G : Oui, non ?

M : Pas pour tous, il y en a qui se trompaient...

G : Bon !

M : Et qui ne venaient pas avec le mauvais, le bon coupon et chercher...

G : D'accord !

M : Il y en avait qui avaient bien compris, mais d'autres qui se trompaient de coupons, je les ramenais...

G : Et quelle est la proportion de la classe qui n'a pas compris la situation ?

M : Oh là ! Dans l'ensemble les groupes ont réussi puisqu'il y en avait toujours un qui tirait les autres je pense.

G : Oui ?

M : Moi, je dirais, là... 8, 9 élèves sûrement qui n'ont pas compris.

G : 8, 9 ? Sur combien ?

M : 22

G : inaudible.

M : Oui. Ils voyaient bien que déjà, il fallait changer de boites mais ils confondaient ; j'ai l'impression, euh ! Surtout dans la simulation collective là. Mes boîtes de cartouches étaient trop grandes par rapport aux boites des... Je m'étais trompé, j'avais trop agrandi celles-là et

pas assez les autres, donc forcément les grosses boîtes pour eux, c'était les boîtes de cinq ; c'est logique, et les petits étuis, ils étaient mal rangés. Et en plus, les affiches étaient blanches, tout ça... Je crois ca n'a pas aidé. Et puis. Il y avait une erreur aussi... Comme on a fait un montage pour que tout tienne dans l'affiche. On a inversé les animaux et on n'a pas vu qu'on avait pas inverser. Donc après quand ils jouaient tout seul, c'était dans le bon ordre. Je ne leur ai pas dit que c'était pas dans le bon ordre quand on simulait.
G : Hum ! Alors une impression générale ? Tu as donné beaucoup de détails du côté de l'amélioration, mais une impression générale ? C'est possible, c'est réalisable ?
M : Ah, c'est dur à gérer ! C'est dur à gérer. Et est-ce que c'est possible ? Ce...
M : C'est possible ouais mais déjà tout le matériel ! A sortir...
G : Oui, mais vous avez bien préparé ; vous avez fait au mieux ; Regrettez-vous d'avoir préparé ce matériel, grand format ou non ?
M : Oui, c'est bien mais... Mais je ne sais pas si c'est réalisable quand on a une classe. Une fois qu'on a le matériel, on va s'en resservir mais le jour où il faut faire ça, il ne faut rien avoir à faire pour d'autres activités...
G : Non, mais dès le jour où le matériel est fait, il peut servir tout le temps.
M : Oui, oui... Oui, pas les affiches...
G : Oui, c'est un truc qu'on gérera après. On n'est pas obligé d'écrire dessus ou bien, on met quelque chose que l'on puisse enlever quand on...
M : Ce n'est pas les affiches le plus dur à faire, c'est les boites, c'est les...
G : Mais une fois que c'est fait, c'est fait...
M : Oui, c'est fait.
G : Bon là on était du côté du matériel... Mais maintenant, du côté de ta prestation, pour l'améliorer, le défaut que tu as mis en évidence.
M : Je parlais trop fort.
G : Il ne faut parler trop fort. Oui. Cela te fatigue ? Ou est-ce gênant pour la mise en œuvre de la situation ? Ou est-ce bien de parler comme ça ?
M : Là, je sentais que j'étais obligée car sinon...
G : Donc tu penses que tu es obligée de causer comme ça ?
M : Je pense qu'il faut s'adresser aux petits en mathématiques.
G : Mathématiques?.. pour passer des consignes... Mais, tu penses qu'il faut parler comme ça ? Tu ne peux pas faire autrement ?
M : Oh ! Si ! j'aurais pu parler moins...
G : Ah quand même ! Parce que là tu as dis que tu parles... Que tu as mal à la gorge. Mais tu ne peux pas faire autrement que d'avoir mal à la gorge...
M : D'habitude, je parle plus doucement. Je ne sais pas là... Je voulais bien faire sûrement.
G : Mais tu penses que c'est bon d'avoir parlé si fort ?
M : Non, je n'aime pas parler fort.
G : Non mais là ! Je n'aime pas ! Ce n'est pas... Est-ce que tu penses que c'est bien d'avoir parler fort ? C'est ça la question ! Par rapport aux enfants ?
M : Bien, peut être que ça les a tenu un peu plus...
G : Ah ! Tenu un peu plus ! Donc, c'est bien ? C'est positif ! C'est positif ? C'est bien de parler fort ?
M : Peut-être...
G : Peut-être.... Aidez-moi, vous avez le droit de lui poser des questions, Aidez-moi ! Soyez neutre ! Mais posez des questions quand même...
Par rapport à ce... Donc, elle pense que c'est bien de parler fort et que ça apporte aux enfants du côté : "on tient mieux la classe".
S : On sent bien que le niveau sonore...
G : Non, mais tu n'as pas le droit de donner ton avis !

S : Oui mais je pense que le niveau sonore n'était pas trop important à ce moment là. Oui mais peut être...
G : Toi, tu penses qu'il ne l'était pas ?
M : Si puisque j'ai mal à la gorge !
G : Oui, mais ce n'est pas cela la question...
S : Est-ce que tu t'en es rendu compte pendant que tu faisais la séance *(inaudible) ?*
M : Ouais ! C'est vrai, j'ai parlé beaucoup.
G : Et tu ne t'en rends pas compte vraiment ?
S : Est-ce que tu t'en es rendu compte ?
M : ...
G : T'en es-tu rendue compte ?
M : Pas vraiment non...
G : Donc un indice... Tu as un indice, tu as mal à la gorge.
M : Oui voilà ! C'est ça !
G : Mais tu ne t'en rends pas compte. C'est l'indice qui te permet de le dire.
M : Ouais ! J'ai dû trop dire, j'ai trop dit ce matin.
G : Je n'ai pas dit ce qu'il fallait faire.
M : J'explique trop. *(inaudible)*
G : maintenant, vous avez le droit de donner votre avis...
S : *inaudible*
S : C'est l'impression qu'on a eue. La simulation peut être faite plus rapidement...
G : Oh ! Bien non !
S : plus rapidement... Les laisser plus rapidement. On a l'impression qu'on allonge... Moi, j'ai relevé que tu t'occupais du groupe classe alors que tu fais normalement souvent
inaudible
... que les enfants vont chercher de leur place...
inaudible
....
La phase de recherche est juste au-dessus de ça.
M : oui mais on va en chercher d'autre quand même !
S : Ouais ! mais... *inaudible*
regarde le tableau
inaudible
C'est pour fixer leur attention...
inaudible
G : alors dans l'ordre. Ecoute bien le conseil qui est donné là, de ce côté là. Ce n'est pas moi qui vous le donne ! Je peux dire tout de suite que je suis d'accord - comme on n'aura pas le temps de l'analyse - ...
Je crois que ça faisait très fort ! Tu t'occupes trop du reste de la classe pendant ce qu'on appelle la simulation collective. C'est du théâtre, c'est tout et les autres assistent. Et toi tu t'occupes...
M : Ceux qui sont devant... *inaudible*
M : Je ne me sens pas à l'aise aussi *inaudible*
S : C'est dur à gérer *! inaudible*
G : Au lieu de gérer deux groupes, tu veux à tout prix gérer ton groupe classe. A quoi sert une situation collective ?
S : Le matériel, de grandeur agrandie, ça ne sert plus à rien
M : Mais, il fallait qu'ils écoutent quand même, ceux qui restent.
G : C'est clair ! Mais tu n'avais pas à leur parler !
S : Non mais moi je pense qu'au niveau... *inaudible...* Après, ce n'était pas vraiment une simulation collective parce qu'en fait, tu ne les as pas fait agir. Tu n'as fait que leur parler et

leur dire ce qu'il fallait faire. Alors c'est un peu l'impression qu'on avait, euh ! Tu ne leur disais pas alors : "voilà, vous avez ça, maintenant qu'est-ce que vous faites ?" Moi, j'aurais peut-être fait plus de questionnement par rapport à ça. Je leur aurais dit bon... Je ne sais pas, une fois que tu donnais le coupon ; bien maintenant, qu'est-ce que vous faites ? Alors qu'en fait, à chaque fois, tu étais en train de dire : bon vous avez fait ci, vous avez fait ça.
M : Mais je n'avais jamais expliqué.
G : Bon, tu étais bien obligée d'expliquer. On regardera...
S : Tu n'avais pas encore expliqué mais quand même poser des questions, quand même ! Les amener à faire !
inaudible
G : attends, attends, qui cause là ?
S : Ce n'est pas la devinette, c'est le fait que je trouve qu'ils n'ont pas assez agi de leur propre chef ! Il aurait fallu qu'il y ait un temps d'explication peut être plus court et après qu'il fasse...
inaudible
G : A tous et en particulier à.... Au deux groupes qui sont au tableau. Mais c'est bien ce qu'on vient de te dire là ! Des temps de pause.
S : Des temps de pause
G : Des temps de pause signifie que ... *inaudible...*
G : Mais ce n'est pas grave, alors il faut que... *inaudible...*
G : Donc on emploie des mots de vocabulaire ; comme tu avais dit tout à l'heure, tu... ?
M : Oui, on a pris un temps de parole trop important pour – *inaudible* - Les enfants n'ont pas assez euh !
Inaudible
Inaudible ..
Leur dire calmement ce que l'on veut faire.
S : Il n'y a pas eu de reformulation en fait
G : Reformulation de la part des enfants.
S : *Inaudible...*
G : Bon ! Que dois-tu retenir ? Tous les problèmes sont mis en évidence. Le premier concerne la simulation collective pendant laquelle, finalement, tu t'intéresses à la totalité de la classe. Alors on se demande à quoi sert une simulation collective ? A quoi servirait une simulation collective dès l'instant où... *Inaudible.*
Tu causes tout le temps. Il n'y a jamais de temps de pause ! C'est monocorde, tout ça.
S : Un moment donné, elle a baissé la voix, hein ?
G : Quelquefois, un petit peu.
S : elle a baissé la voix.
Inaudible
G : Un flot de paroles ! Maintenant, dire aux enfants : on se calme, demander de reformuler ! Mais alors en mettant en essentiel la consigne la plus importante.
S : En avant. La plus importante
G En avant ! En évidence...
Bon, mais c'est un défaut normal puisqu'elle est en train de parler de sa séance CAFIMF. C'est un défaut, peut-être pas seulement de débutant. Peut-être sommes-nous plus stressés quand nous sommes filmés ? Je n'en sais rien ! Tu fais moins d'habitude... Sans doute ?
S : Ouais ! Michèle, elle n'est pas du tout comme ça !
G : Non ? Donc c'est plus aujourd'hui que d'habitude ? Sans doute !
S : Elle est très calme ! Elle est très à l'aise, très...
G : Là aussi elle est à l'aise ! On ne peut pas dire qu'elle ne soit pas à l'aise.
S : Je l'ai trouvée différente, euh...
G : Différente ?

S : D'habitude, elle ne dit rien.

Inaudible

G : Inaudible

G : Beaucoup de matériel, mais tu penses que c'est possible à gérer quand même ? Tu as mis en évidence beaucoup de défauts au niveau de la préparation. Ce que tu as dit et que j'ai noté. Je suis d'accord.

M : C'est vrai, pour les boîtes, la confusion... Ce n'était pas évident.

G : Non !

S *: Inaudible*

G : Attends, on règle dans l'ordre. Confusion entre boîtes et cartouches, si on revient à ça. C'est vrai ! Elle a vu tout ça. Donc, c'est clair, tu as donné un peu...

M : *Inaudible*.. j'estime que si j'ai dit avant...

S : Mais oui, mais ce n'était peut-être pas utile de faire les boites en compartiment.

M : C'est vrai quelles sont très compartimentées !

G : Oh si ! C'est important ! As-tu vu que c'était important ?

S : Oui, mais peut-être les présenter différemment, avec des cases... ou des...

G : Voilà ! Ca ressemble trop. La boîte trop compartimentée ressemble trop à la boîte destinée à recevoir les cartouches. La confusion est très forte.

G : Non ? Denis, qui regardait, a-t-il compris la séance ? Parce que ce n'est pas évident à comprendre pour des enfants de six ans. Après, je dirai comment l'améliorer... Est-ce que je le dis tout de suite ? Puis-je le dire tout de suite ?

M : Oui.

G: Tu n'insistes pas assez... Bon, je le dis ! Ton habillage n'est pas mis en évidence ! Colonie de vacances ! il n'est pas assez travaillé. C'est l'histoire, très simple. C'est la colonie. Donc, c'est la boite du directeur : il est content de récupérer les cartouches, données par l'équipe de la colonie, appelée l'équipe des... escargots, par exemple. Puisque ça existe. On ne comprend rien au scénario là. Tu n'en parles même plus.

M : Oui d'accord.

G : Déjà, j'avais peur qu'ils se trompent parce que : " moi, je suis dans quel groupe ? Alors, euh... "

G : Oui mais tu savais bien... *Inaudible*... Tu l'as bien dit au début. Tu regarderas la cassette. Mais ce n'est pas assez net. C'est une colonie fictive, c'est tout ça qui fallait travailler. En tout cas, tu n'as pas joué beaucoup sur ton habillage. Il est préparé.

M : Il y a eu confusion entre le groupe de la colonie et les groupes de la classe. A un moment le groupe 2...

G : Voilà ! Donc tu as essayé de relever cette ambiguïté mais tu ne joues pas assez sur l'habillage. A priori, c'est une boite de directeur, tu comprends ? C'est le directeur qui remercie : allez l'équipe des... Des escargots... Combien de cartouches avez-vous trouvé dans les poubelles ? Ouaaahhh ! C'est génial ! Bon enfin, ce n'est pas moi qui ferais la leçon ! Bon et après... Ca c'est pour bien marquer la différence entre la boite du directeur de la colonie qui récupère les cartouches, et la commande que font les équipes de colonie pour expédier leurs cartouches par boîtes de 5. Et après ?

M : Oui...

G : Au niveau du matériel, effectivement ce que vous avez dit : les différencier au maximum. Ce qui n'était pas le cas !

M : Ouais... On peut continuer sur ça...

G : Oui tu peux, tu peux.

S : Oui alors moi, c'est vrai tu m'as enlevée, mais je voulais essayer de comprendre. Ce qui c'était passé.

G : Oui, mais tu n'as pas le droit de parler aux enfants, ça fait partie du...
S : J'ai posé simplement une question. Parce qu'en fait, il y a eu confusion entre euh... ; à mon avis, il a manqué une explication entre le bon de commande commun et le bon de commande individuel. Quand ils se sont mis d'accord, tous les enfants ont barré sur leur bon de commande individuel pour mettre comme sur le bon de commande. Tu vois ?
G : Et alors ?
S : Si Ismaïl, ça veut dire qu'ils avaient tous perdu là ! Là le groupe d'Ismaïl avait perdu, il restait deux cartouches et ils en avaient mis quatre sur le bon de commande et Ismaïl lui, sur son bon de commande, enfin sur sa feuille de recherche, il y avait deux qui était barré et il y avait 4 après. Donc, en fait là il y a eu une confusion... Il aurait fallu leur dire... Bon, vous votre feuille, vous la gardez. Car comme ça vous saurez si vous avez raison, quoi !
G : Vous suivez bien ce qu'elle dit ? Faudrait-il les fiches ? Comment peuvent-ils avoir bon sur leur bon de commande s'ils ont faux sur leur fiche ?
S : Si, Bien.
M : S'ils ont faux sur leur feuille, ils ont faux sur le bon de commande...
S : Bien non, parce que ils sont trois personnes. Si il y en a qui... il faut qu'il y en ait un qui ait bon, alors oui.
M : Il y en a un qui avait bon et ils ont pris l'avis de l'autre.
S : Ils ont pris l'avis de l'autre et ils ont tout barré sur leur truc. Bon, alors en fait là, il aurait fallu dire si vous n'êtes pas d'accord. Bien, vous laissez quand même votre feuille, qu'on puisse vérifier parce que peut être quand on s'est mis d'accord dans le groupe...
G : Là, je ne suis peut-être pas entièrement d'accord avec ce qui s'est dit... C'est un débat au sein d'une triplette ! Oui, oui, c'est discutable ce que je dis. C'est à vous de voir... Ca veut dire qu'au sein d'une triplette, les élèves ont des propositions individuelles. Ils sont amenés à parler de leurs propositions individuelles, en discutant à trois. Ils peuvent très bien barrer ce qu'ils ont écrit ! Mais je n'ai peut être pas bien compris ce que dit Laurence ? Ils peuvent barrer et rectifier.
L : Oui mais alors à ce moment à quoi ça sert, tu ne peux savoir si jamais si l'enfant a besoin de..
G : Si, sinon, tu vois sur les traces écrites...
L : S'ils ont pas gommé !
G : Non, il est interdit de gommer !
M : Normalement ils ont utilisé un bic.
G : Mais on reverra sur les traces. Vous regarderez de près ce que dit Laurence...
M : Là, je crois qu'il y avait trois traces en plus !
G : Ce que dit Laurence, bon. Vous verrez l'évolution des gamins, mais on a vu... Denis, je crois, l'a quelquefois filmé. Il y a parfois un leader qui dit aux autres - les autres ont faux - la réponse. C'est ce que l'on a filmé. Donc, c'est un phénomène.. c'est lui qui prend le pouvoir. Est-ce que les deux autres comprenaient bien ce qui se passait... Je n'en sais rien ? Mais là, tu as un moyen de contrôle, sur tes fiches, en regardant à tête reposée les productions des enfants.
L : Ouais ! Sauf que... Tu n'as pas la chronologie de l'ordre de...
G : Non évidemment, c'est dur... On ne voit pas tout mais au moins il y a les traces écrites que tu pourras regarder.
L : Ouais, mais enfin je, moi... Je trouve dommage que...
G : On reparlera de ça. Vous discuterez comment vous ferez lors de la deuxième séance.
G : Est-ce que ça s'est reproduit après ?
M : Non. .
G : Bon.
S : Je ne sais pas si. Est-ce que tu t'es rendue compte qu'il y a eu la même confusion lors de la simulation ? Tu sais, ils avaient chacun rempli leur fiche individuelle et après, pour la fiche collective, ils ont ajouté en fait les... ce qu'ils avaient trouvé...
M : C'est vrai du reste que c'était dur

G : C'est dur à expliquer.
S : Ils voient 3.
Collectif pour eux... *Inaudible.*
G : Oui, mais peut-être que les mots de vocabulaire employés, comme “ensemble”, conduisent à ce genre de comportement. Bon, ça c'est à retravailler. Et n'oublie qu'il y a un flot de paroles ! L'essentiel qui n'est peut-être pas mis en évidence.
S : Moi j'avais noté, est-ce que le matériel doit être distribué par Michel ou bien est que c'est à l'enfant de se déplacer pour chercher les bons de commande ?
G: Hum ?
S : On peut les mettre dans un coin pour que le chef aille chercher le bon de commande.
G : Bon, là vous voulez que je prenne position ? Je pense qu'elle a changé la séance. Le fait d'avoir le bon de commande, elle pouvait regarder s'ils avaient effectivement rempli leur fiche individuelle. Donc je crois qu'elle a régulé en situation et a priori je n'ai rien à dire sur ça. C'est comme ça que tu fais ?
M : Oui, oui.
G : Tu donnais le bon de commande. Regardez bien comment elle a insisté. S'ils avaient écrit quelque chose sur la feuille. Or s'ils avaient cherché la commande, ils l'auraient récupérée. Tout ça. Donc je prends position, je suis d'accord avec ce qu'elle a fait.
S : Ouais ! C'est mieux finalement.
G : Je pense que oui. Donc tu as régulé en situation... Tu le fais plusieurs fois d'ailleurs. Et c'est très bien. Tu verras sur la cassette. Tu es capable de rectifier en situation. Mais l'essentiel, c'est que tu parles trop ! Il faut que tu retienne ça ! Le flot de paroles ! C'est fort ! Cela frappe ! C'est fou !
M : Ouais ! C'est vrai. Il faut que je m'habitue, quoi.
S : Tu parlais fort aussi.
M : : Peut-être... pas si fort, je ne crois pas... *inaudible*
G : Tu n'as pas arrêté de parler. Combien de temps peut-elle s'arrêter de parler ? Quelquefois ? On ne sait pas ?
S : C'est vrai qu'on avait envie de... ouf ! Souffler parfois !
G : J'avais envie de dire : Calmos... Il faut se taire un peu, hein ! Je me suis dit, quand elle avait fini la simulation collective, qu'elle allait moins parler au cours de l'appropriation individuelle.
M : J'ai parlé ?
S : oh, oui.
G: Un peu !
G : Je me suis dit ouf ! Ils vont jouer, maintenant, elle va se taire.
S : Elle va lire son magazine !
G : Elle va lire son magazine, le Nouvel Obs ! N'oubliez pas ça ! Bon, c'est filmé, on dira l'express ou un journal de droite aussi ! Mais quand même, le but du jeu, c'est le Nouvel Obs ! Je dois mettre en évidence un bon placement physique. Quand même ! C'est à dire que tu es bien positionnée pour voir le reste de la classe ! D'accord ? Tu contrôles, tu es présente, tu ne bouges pas mais tu es bien présente. Tu es statique et tu regardes ce qui se passe... C'est mieux! C'était bien ! Tu voyais tout le monde, c'est bien ! C'était réfléchi ce placement ? Oui, sans doute ?
M : *rires*
G : Cela, c'est très bien ! Tu verras ça dans la cassette. Bon, ça ne sert à rien qu'on aille plus loin. On a dit l'essentiel.
S : Juste, une petite question. Ce n'est pas dans l'analyse. C'est pour la trace écrite...
G : Ouais !

S : Bon, donc Michelle va repasser, elle va nous dire où sont les difficultés. Mais après, elle leur rend leur feuille individuelle...

G : Oui, Bien oui. J'ai mis en référence madame B.... On a parlé de cela lors des séances consacrées à l'ancrage... La spécialiste des traces écrites... Je ne sais pas si Madame M... fait ça bien. Mais il faut que les traces écrites existent dans le dossier. Le summum serait que vous expliquiez la situation aux parents.

S : Mais le bon de commande...

G : (...) Par quelques phrases, c'est le mieux. Ah ! Mais le bon de commande doit être associé forcément.

S : Ouais ! Mais vu qu'il y en a qu'un pour trois. On le photocopie...

G : Oui, si vous êtes sérieux, vous faites une photocopie. Et que ce soit dans un dossier. Pas dans le cahier de maths parce que je suis contre ! Pas de cahier du jour ! Dans un dossier, mais bien préparé avec des sous chemises... C'est l'activité... Première séance de l'activité appelée la cartoucherie... Et si vous... Si le cœur vous en dit, vous expliquez par deux phrases ou par...

S : Encore une question, on peut ?

G : Oui !

S : Une feuille annexe, Madame P... fait ça très bien

G : Peut-être le ferez-vous ? Je ne sais pas ce que fait madame M... Et les parents sont très contents de suivre l'activité des enfants...

inaudible...

S : L'histoire de la classe, hein ! On a dit à Michèle qu'on lui dirait : hein ! Très bien Michèle pour...

G : Très bien d'y avoir pensé, c'est rarissime.

S : L'histoire de la classe !

G : Donc c'est bien ça dans mon esprit, l'histoire de la classe...

S : Et ranger en même temps !

G : Et ranger en même temps ! C'est bien ! Geste professionnel ! Voilà ! Plus, plus, plus, là. Tu as plein de compliments à la fin.

M : Oui, à la fin !

G : Oui à la fin mais, il faut mettre en évidence ce qu'il faut faire améliorer. On est là pour aider ! Donc c'est bien que ce soit les collègues qui le disent avant moi. Moi, je n'ai rien à dire ! Donc les deux remarques que je voulais faire, je les ai faites. Rappelle les pour conclure.

M : Trop flot de paroles et pas assez de temps de pause.

G : Oui, mais ça c'est la même remarque ! C'est du côté du flot de parole mais il y en a une deuxième...

S : Du matériel.

G : Boff ! Non ! Plus essentielle. Tu sais de quoi je parle ? Quel mauvais le formateur !

M : Pas de temps de pause...

G : Non, c'est la même chose

S : Euh ...

G : Tais-toi !

M : J'ai trop fait, mauvaise simulation collective...

G : Parce que ?

M : Parce que j'expliquais à la classe en même temps pendant que les autres jouaient.

G : Voilà, c'est les deux trucs essentiels... Pas dire autre chose... C'est ça... Si vous voulez faire des simulations collectives au sens où je l'entends. C'est sous forme de théâtre pour que les autres comprennent bien. Mais quand on est au théâtre - s'il te plaît - on regarde le théâtre... Et tu ne vas pas causer tout le temps au public dans la salle ! Tu imagines. Ils sont en train de jouer le théâtre avec toi et toi tu vas causer au public ! Oui, c'est bizarre ! Ca...

S : Tu ne t'en es pas rendue compte ?

M : Oui mais moi je vous voyais au fond montrer des grandes phrases.

G : Ce n'est pas moi qui intervenais au fond !

G : oui, vous aussi... Je montrais au groupe classe.

inaudible...

Une cartouche dans chaque truc et on ne voyait rien du tout... Et hop !

G : Ca c'est autre chose. C'est hors sujet ça. Elle en train d'expliquer qu'ils n'avaient pas compris le rôle des deux boîtes.

S : Oui, je veux dire, elle a trop dit ; il ne faut pas faire à leur place, quoi.

G : Oui, là je suis d'accord. La simulation ne marchait pas. Et comme tu t'intéresses aux autres, tu es en train de rectifier et ils n'avaient rien compris, eux, à propos de la petite boite ! Celle que j'appelle la boite du directeur de colonie pour fixer les idées. Ils croyaient que c'était la boîte pour ramasser les cartouches... Alors, ils n'avaient pas mis 3 dans le compartiment des escargots. Et toi, tu mets. Ah ! Là, tu vois bien que ça ne marche pas.

M : Mais moi je pensais qu'il fallait questionner quoi...

G : Oui c'est clair, ce que je dis, je suis d'accord avec elle, c'est la même chose... Faut faire reformuler, est-ce qu'ils comprennent bien ?

Mais non, c'est un monologue... Mais ça c'est traditionnel... Bon, on en restera là. Ca va ! Bon ! Mais est-ce que tu penses que c'est faisable,

M : Oh, oui !

G : Tu penses que oui, on améliorera.

M : Si, si c'est faisable. On fait ce qu'il faudrait faire c'est...

G : C'est faisable, il ne faut pas me dire ça, de toute façon, vous allez continuer en 2 et 3. En trois séances ça arrivera. Ca va rouler.

M : Il faudrait que ce soit deux fois plus gros, en fait les boîtes...

G : Non il ne faut que ça ait la même taille, plus grand ou des tailles, je n'en sais rien, différentes... Pas le même support, pas compartimenté de la même façon... Pourtant c'était bien, on avait penser à ça : coller les trucs des équipes devant mais ce n'est pas suffisant et puis c'est pas accompagner la boite du directeur... Ou alors avoir mis des boites de cartouche qu'on achète chez le marchand. Le directeur qui félicite... On verra la numéro 2, ce que je dis, la prestataire n°2... Travaillera-t-elle bien l'histoire de la colonie... Oui ? C'est toi, la n°2 ?

L : Je ne sais pas !

G : Mais si, c'est ce que tu voulais faire avant. Allez, c'est Laurence qui fera la deux ! Bon

inaudible...

S... Faire autre chose...

G : Ah non ! Maintenant tu n'es pas obligée, on est parti sur la colonie, on ne va troubler les clients.

S : Les clients ? Ah ?

G : Bien, les enfants ! Ah ! Ah ! .

Bon qu'en est-il du formateur ? Parce que j'oublie ça ! Denis, je suis désolé ! Alors c'est rituel chez moi, vous savez, je le fais toujours. Alors, critiquez-moi maintenant dans vos interventions.

S : Tu n'interviens pas pendant, c'est bon !

G : C'est bien que je n'intervienne pas ! Je suis vraiment en retrait, je ne dis rien.

S : Ça a été.

G : Il vaut mieux, ouais ! Et tu n'as pas entendu mes commentaires, ça ne t'a pas gêné ? Bon,

M : Non pas du tout...

G : Du côté de la séance je n'ai pas été gênant ?

M : pas du tout.
G : Je te remercie... Et autrement du côté de l'analyse à chaud, comment je conduis ça ? Est-ce que ?
S : C'est bien !
G : Finalement, ce n'est pas moi qui dit.
S : Ouais !
G : Ce sont les collègues...
S : Tu vas vite, quand même...
G : Oui je vais vite, je renforce ce qui a été dit par les collègues. Si je suis d'accord je le dis ; si je ne suis pas d'accord, je ne relève pas... Mais finalement si ça se dit, c'est aussi bien ! Bon, il n'y a rien de négatif ?
S : Non...
G : Profitez-en
S : Non, non... On apprend...
G : Bon, j'espère que nous ferons une analyse, un de ces...
S : Ce qui aurait pu être négatif, c'est qu'en fait euh... Bien que la critique soit : ce n'est pas bien ça,
G : Ce n'est pas bien ça.... Là c'est dit !
S : C'est positif !
S : Ouais ! C'est une critique positive...
G : C'est normal, on arrivera...
S : La séance était bonne aussi !
G : Oui, oui. Alors la séance était bonne. Ca veut dire quoi, le scénario était bon ?
S : *oui, inaudible*...
G : D'accord mais le scénario, est-ce que vous trouvez qu'il est bon ? Puisque c'est le mien en l'occurrence ! C'est moi qui vous ai imposé le scénario. Non mais, est-ce que vous pensez qu'il est bon ?
S : Je pense que c'est quand même assez complexe. Difficile à rentrer parce qu'effectivement peut-être qu'à ce moment là, il faut plus théâtraliser...
G: Oui
G : Mais actuellement vous ne critiquez pas trop mon scénario tel que je vous l'ai proposé ?
S : Oh ! Bien non...
Pas pour l'instant...
Il faut voir aussi
inaudible...
G : Mais a priori, vous n'êtes pas négatif, vous dites...
S : Mais bien sûr...
G : Vous dites, il faut que je n'en tienne pas compte, le gars Le Poche, ça va jamais marcher.
S : Oh ! non...
G : Non, vous pensez que ça va marcher...
Oui, toute seule, elle l'a fait toute seule ! Faut voir si on le refait mais ça me semble assez au ERMEL,
G : Ouais !
S : C'est dur de mettre en place.
G : Ca ressemble aux situations du ERMEL mais c'est plus développé quand même ! ERMEL ne développe pas tout, l'appropriation des tâches, par exemple, comme ici.
S : Oh ! non
G : C'est fait
inaudible
Bon, voilà, vous reprenez à une heure et demi et moi aussi...

DEUXIEME CONTRIBUTION

Nous allons appliquer sous une forme simplifiée les critères d'analyse de l'entretien définis dans une recherche en cours. En particulier, nous essayerons de distinguer les moments de l'entretien correspondant à une situation réflexive (auto-analyse du stagiaire ou analyse partagée avec les autres stagiaires), à la situation d'évaluation (ici formative, dépourvue de caractère institutionnel, compte tenue de la nature de l'activité), à la situation de formation (conseils, adaptation ou amélioration de la situation proposée par le formateur).

Nous ne prendrons pas en compte dans notre analyse les 50 premières ligne qui ont pour but de présenter (ou de rappeler) aux stagiaires le but de l'activité et le scénario de formation proposé.

1. La situation réflexive

Ligne 52 à 138.

Il s'agit ici d'une auto-analyse, plus ou moins sollicitée (voire induite) par le formateur, faite par la stagiaire de sa prestation.
Elle peut se décomposer en six parties :
- ligne 53 à 59 : la stagiaire, ayant mal à la gorge, en déduit qu'elle a parlé trop fort pendant la séance
- ligne 60 à 68 : la phase dite d'appropriation collective est jugée trop longue et mal gérée, car les élèves n'ayant pas bien compris la situation
- ligne 69 à 88 : sollicitée par le formateur, la stagiaire essaie d'évaluer le nombre d'élèves n'ayant pas compris cette phase (et peut-être l'ensemble de l'activité) ; elle pense qu'environ 40% des élèves de la classe sont dans ce cas
- ligne 89 à 98 : explicitation des défauts dans la préparation du matériel
- ligne 99 à 114 : après sollicitation du formateur, la stagiaire émet des doutes à propos de la faisabilité du scénario, jugé difficile à gérer et à reproduire car coûteux en matériel
- ligne 115 à 138 : interrogée par le formateur sur les raisons qui l'on conduit à parler fort, la stagiaire explique que c'est pour " tenir les élèves ".

2. Une seconde situation réflexive faisant intervenir les pairs du stagiaire

Il s'agit ici d'une autre phase de l'entretien. Afin d'affiner l'analyse du stagiaire, le formateur demande aux autres stagiaires de participer à l'analyse de la séance dans un premier temps de façon neutre en posant des questions à la prestataire, puis en donnant éventuellement leur avis.

Cette partie comprend les lignes 139 à 221 et peut se décomposer en 4 sous parties :
- ligne 39 à 160 : les stagiaires sollicitent la prestataire sur le degré sonore de ses interventions ; cela amène cette dernière à comprendre qu'elle a trop parlé. Cette partie est une transition entre l'auto-analyse précédente et une analyse collective de la prestation
- ligne 161 à 190 : analyse de la phase de simulation collective jugée trop longue et ne remplissant pas vraiment son rôle. En effet, aidée par le formateur, les stagiaires relèvent plusieurs défauts de gestion : pas assez théâtrale, pas assez de pauses, la stagiaire gère le

groupe classe au lieu de participer et de mettre en scène la simulation. La classe doit être divisée en deux groupes : quelques acteurs et un public constitué de la majorité des élèves
- ligne 191 à 206 : une stagiaire expose un autre point de vue : la gestion de la simulation collective est mauvaise car les élèves sont trop passifs. Cette opinion n'est pas reprise par le formateur qui ne la partage sans doute pas (à juste titre, le public doit être passif !)
- ligne 207 à 221 : une autre maladresse est explicitée : le manque de reformulation par les élèves de la tâche à effectuer.

2. La situation d'évaluation

Cette activité étant une situation d'apprentissage basée sur l'analyse de pratiques de débutants en milieu "protégé ", la prestation n'est évidemment pas évaluée à ce stade. Par contre, le formateur donne son opinion (positive comme négative) sur un certain nombre de gestes professionnels mis en œuvre par la prestataire. Il s'agit ici d'une évaluation formative qui permettra notamment d'affiner la mise en œuvre du scénario des séances ultérieures.

Il est parfois difficile de séparer situation d'évaluation et situation de formation (constituée de conseils). Nous avons toutefois pris le parti de distinguer certaines phases se situant plus du côté du jugement, d'autres se situant davantage du côté du conseil.

Dans tous les cas, comme dans la plupart des entretiens que nous avons pu analyser, nous assistons à une alternance entre évaluation et conseils ; les deux s'articulant de façon dialectique.

Cette première évaluation occupe l'espace compris entre les lignes 222 et 244.
Elle porte sur deux points : l'un n'est que rappelé : la gestion du groupe classe lors de la simulation collective ; l'autre est énoncé avec insistance : la stagiaire a trop parlé.

3. La situation de formation : conseils, amélioration de séance

Elle s'étend de la ligne 245 à la ligne 340 et comporte trois parties :
- ligne 245 à 264 : gestion du matériel, amélioration de celui-ci afin de distinguer la " boîte du directeur " de celle de chaque équipe
- ligne 265 à 290 : nécessité de soigner la mise en scène accompagnant la distinction ci-dessus : " il faut faire du théâtre, jouer la comédie... "
- ligne 291 à 340 : une stagiaire évoque un défaut du scénario : le travail de groupe masque les éventuelles difficultés rencontrées par certains élèves. Le formateur ne semble pas partager cette opinion, pensant au contraire que cette forme de travail permet de filtrer certaines erreurs : les élèves en question pouvant bénéficier des interactions avec leurs pairs.

4. La situation d'évaluation

Le formateur donne à nouveau son opinion sur certaines actions de la stagiaire : ligne 341 à 390.
Cette évaluation porte sur 4 éléments :
- ligne 341 à 350 : mauvais choix de certains termes de la consigne, en particulier le terme " ensemble "

- ligne 351 à 365 : évaluation nettement positive portant sur une prise de décision à chaud de la prestataire concernant la distribution d'une partie du matériel (bon de commande collectif)
- ligne 366 à 382 : le formateur reprend l'idée que la stagiaire a trop parlé et souligne, de façon imagée, la nécessité de prendre de la distance, du recul à certains moments
- ligne 383 à 391 : appréciation positive du formateur sur la gestion de l'espace et sur l'emplacement occupé par la prestataire lors des phases collectives.

5. La situation de formation

Ligne 391 à 412.
Suite à une question d'un stagiaire, le formateur apporte des conseils sur la nécessité de prévoir une institutionnalisation "douce" de l'activité sous forme d'une trace écrite et du recueil des documents produits par les élèves.

6. La situation d'évaluation

Ligne 413 à 421.
Evaluation positive faite conjointement par les stagiaires et par le formateur sur la gestion de la fin de l'activité, notamment sur la phase de bilan collectif (de prise de recul) appelée "histoire de la classe". Le but est de conclure la séance – rituel proposé par le formateur- par la réponse des élèves à la question : " qu'avez-vous fait durant la séance ? "

7. La situation de formation

Il s'agit en fait d'une institutionnalisation, sous forme de bilan, des remarques et conseils explicités précédemment. Elle comporte deux parties :
- ligne 422 à 459 : la prestataire doit expliciter les deux remarques les plus importantes qui ont été faites : temps de parole trop important de sa part, mauvaise gestion de la phase de simulation collective
- ligne 460 à 480 : le formateur "assure" la suite du scénario (séances suivantes) en essayant d'emporter l'adhésion des stagiaires à propos de la "faisabilité" du scénario.

8. La situation de projet

Cette situation comporte une partie commune avec la précédente : lignes 460 à 480 et comporte une analyse critique, sollicitée par le formateur, de la gestion de l'activité par le formateur de la part des stagiaires (ligne 481 à 538).
Ce jugement (très positif) porte sur plusieurs points : la critique de la prestation émise par le formateur est jugée positive, formative ; le formateur permet aux stagiaires d'analyser eux-mêmes la séance (point fortement induit par le formateur), la faisabilité du scénario global de la séquence (rappelé à nouveau par le formateur), la comparaison avec les situations du ERMEL (jugées par le formateur trop peu explicites, notamment les phases d'appropriation de la tâche).

Annexe 1 (première contribution)

MOIS	Septembre			Octobre				Novembre	
SEMAINE	L8 - V12	L15 - V19	L22 - V26	L29 - V3	L6 au V10	L13 - V 17	L20 - V24	M4 - V7	L10 - V14
Numéro de semaine	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Horaire — Cours : méthodologie (51), maths (45)		mé9, ma4lg	mé15, ma2lg	mé6	mé9	mé9, ma2lg	mé3, ma2lg	ma2 lg	(dispo : ma2)
ANCRAGE — Journée du jeudi dans les classes					CYCLE DU STAGE R1				PRATIQUE
STAGES									Accompagnée
PE2 — CURSUS (3 périodes - 3 cycles)									
Groupe 1 C3 - C2 - C1	CYCLE 3								
Groupe 2 C2 - C1 - C3	CYCLE 2								
Groupe 3 C1 - C3 - C2	CYCLE 1								

Légende : mé2 méthodologie 2 heures, ma4lg maths 4 heures tous les groupes.
AP1 : analyse des pratiques en lien avec l'approfondissement, AP2 maths-français
AP2g23p1r1: analyse de pratiques en maths et français pour les groupes 2 et 3,
préparation de la séance1 et sa réalisation.

		Décembre			Janvier			
L17 ---			---V12	L14 - V19	L5 - V9	L12 - V16	L19 - V23	L26 - V30
10	11	12	13	14	15	16	17	18
				ma2 lg	ma2lg /AP1p1	ma2lg/ AP1r1p2	ma2lg/AP1r2p3r3	
					CYCLE du STAGE R2			en ancrage
Responsabilité 1				Bilan				Res Groupe A
					CYCLE 2			
					CYCLE 1			
					CYCLE 3			

Annexe 1 suite (première contribution)

Février		Février	Mars				Avril
L2 - V6	Vacances	L23 - V27	L2 - V6	L9 - V13	L16 - V20	L23 - V27	L30 - V3 Avril
19		20	21	22	23	24	25
		ma2g1/AP2g23p1r1	ma2g1/AP2g23p2r2	ma2g1/AP2g23p3r3	ma2g23/AP2g1p1r1	ma2g23/AP2g1p2r2	ma2g23/AP2g1p3r3
ancrage				Ancrage Cycle du STAGE R2			
Res Groupe B							
		CYCLE 2					
		CYCLE 1					
		CYCLE 3					

	Avril		Mai				Juin				
Vacances	J 16 - M28	J30 Avril	L4 - J7	L11 - V15	L18 - M20	L25 - V29	L1 - V5	L8 - V12	L15 - V 19	L22 - V26	L 29 - M1
	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
	ma4tg						Validations	ma3tg	ma3tg	ma3tg	
	ancrage										
		Responsabilité 2					pas d'ancrage				
							Formation autre cycle				
		CYCLE 2					CYCLE 1				
		CYCLE 1					CYCLE 3				
		CYCLE 3					CYCLE 2				

Annexe 2 (première contribution)

Dispositif Initiation à la pratique professionnelle en PE1

pour un groupe de 30 étudiants

Formateurs : Prof Maths, Prof Français, 2 Profs SSH[9]
Horaire : 30h (10h SSH, 10h Français, 10h Math)
Durée : 2 périodes de 4 semaines consécutives, 3h en classe par semaine.

Deux groupes de 15 stagiaires et deux classes cibles par période.

Une semaine:
3h préparation de 2 moments en classe (maths et français) , 3h en classe (maths et français)

Objectifs en mathématiques par deux périodes ;
Première période : l'objectif est de recueillir des productions d'élèves aussi diverses que possibles (sur le thème de l'année)
Deuxième période : l'objectif est de tester par petits groupes des situations d'apprentissage (sur le thème de l'année)

Exemple pour G1 : 15 étudiants

Encadrement :

Période 1 Classe A
Semaines 1 et 2 : PIUFM maths, français
semaines 3 et 4 : 2 PIUFM SSH

Période 2 Classe B
Semaines 1 et 2 : PIUFM maths, français
semaines 3 et 4 : 2 PIUFM SSH

Une semaine :
préparation : 3h
1h30 : maths
1h30: français

réalisation :
1h moment de mathématiques + 30 mn d'analyse
1h moment de français + 30 mn d'analyse

Préparation et analyse
1h 30 de maths :
5 sous-groupes de 3 élèves
Réalisation :
moment de mathématiques
<u>une classe A de 30 élèves prise en charge par 15 adultes</u>

exemples d'organisation :

1 étudiant 2 élèves	pour collecter des productions
3 étudiants 6 élèves	pour réaliser un moment d'apprentissage en associant deux groupes de trois élèves

---
[9] SSH : sciences sociales et humaines.

Annexe 3 (première contribution)

Dispositif Méthodologie en PE2

pour un groupe de 30 professeurs stagiaires

Responsabilité : Professeur SSH[10]
Formateurs associés : 2 IMF, Prof Français, Prof Math
Horaire : 51 heures (17x 3h)
4 séances en classe (4x9h = 36h)
pour une séance en classe : 3h préparation, 3h réalisation et analyse à chaud, 3h analyse différée.
Deux groupes de 15 stagiaires et deux classes cibles d'IMF.

G1 : 15 Stagiaires, Classe A (ex MS)
l'IMF, un PIUFM
3 sous-groupes de 5 stagiaires associés à 10 élèves de la classe (les 3 sous-groupes ont le même objectif pour les 4 séances mais choisissent leur propre mise en oeuvre)

5 stagiaires
10 élèves

5 stagiaires
10 élèves

IMF, PIUFM

5 stagiaires
10 élèves

Préparation : 3 heures par sous-groupes

Réalisation : **<u>1 prestataire face à 10 élèves</u>**
- chaque sous-groupe 30 mn
- *Présence dans la salle* : le prestataire, 1 **stagiaire à la vidéo**, 3 élèves observateurs, 2 formateurs.

Les dix autres stagiaires observent à l'extérieur à travers le dispositif vidéo.
- Analyse collective à chaud :
  dans cet ordre : le prestataire, les observateurs en salle, les observateurs extérieurs.

Analyse :
un temps par sous-groupes (avec vidéo)
puis un échange collectif (appel éventuel à la vidéo)

G2 : 15 Stagiaires, Classe B (ex GS)
l'IMF, un PIUFM
3 groupes de 5 stagiaires

5 stagiaires
10 élèves

IMF, PIUFM

5 stagiaires
10 élèves

5 stagiaires
10 élèves

Préparation : 3 heures

Réalisation : 3 heures
3 fois 30mn + 1h30

Analyse : 3h
1h + 2h

[10] SSH : sciences sociales et humaines.

Annexe 4 (première contribution)

Dispositif Analyse de pratiques en PE2

pour un groupe de 24 professeurs stagiaires

Formateurs : Prof SSH, Prof Français, Prof Math, 6 IMF
Horaire : 30h (10h SSH, 10h Français, 10h Math) sur les 50h prévus au plan.
Durée : 4 semaines consécutives, 2 séances en classe par semaine.

4 réalisations de 2 séances en classe (1 de math, 1 de français) (4x8h = 32h)
une semaine pour 2 séances en classe : 3h préparation, 3h réalisation et analyse à chaud *-2h dans l'horaire stagiaire*, 3h analyse différée.

Cinq classes cibles d'IMF
Cinq sous-groupes de quatre ou cinq stagiaires

ORGANISATION d'une semaine
La première semaine

Exemple du groupe GA

Préparation : 3h
en 2 fois 1h30
- 1h 30 : Math
(4 stagiaires, IMF, PIUFM Math)
- 1h 30 : Français
(4 stagiaires, IMF)

Réalisation :
<u>1 prestataire face à toute la classe</u>
Moyens Vidéo
Séance de maths :
45 mn de réalisation + 30 mn analyse à chaud (4 stagiaires, IMF, PIUFM Math)
Séance de français:
45 mn de réalisation + 30 mn analyse à chaud (4 stagiaires, IMF)

Analyse :
avec vidéo
Maths : 1h30
(4 stagiaires, IMF, PIUFM Math)
Français : 1h30
(4 stagiaires, IMF)

4 stagiaires 1 IMF(GA)	PIFUM Math
5 stagiaires 1 IMF(GB)	
5 stagiaires 1 IMF	PIUFM Français
5 stagiaires 1 IMF	
5 stagiaires 1 IMF	PIUFM SSH

Occupation du PIFUM de Maths

Préparation : 3h
1h30 : Maths avec Groupe A
1h30 : Maths avec Groupe B
Réalisation : 3h
idem
Analyse : 3h
idem

ADAPTATION DE RECHERCHES ET QUESTIONS LIEES AU STATUT DE L'ESPACE DANS L'ENSEIGNEMENT

René Berthelot Pau

L'atelier s'est déroulé sur trois plages. Il rend compte d'un travail de R. Berthelot et MH Salin, sur les trois dernières années au COREM, avec la collaboration de l'équipe des enseignants du cycle 3.

A. Dans la première plage j'ai présenté les conclusions (annexe 1) auxquelles j'ai abouti après trois ans d'essai de transformation de l'enseignement de la géométrie et de l'espace au cycle 3, dans le cadre du COREM.

1) les obstacles théoriques que nous avons identifiés se révèlent incontournables dans les conditions actuelles d'enseignement :

- le milieu de la feuille de papier considéré comme support des activités spatiales et géométriques constitue un obstacle didactique à la relation entre connaissances spatiales et connaissances géométriques.
- les programmes privilégient l'enseignement sur « des objets géométriques simples » aux dépens des grandes structures fondant le rapport entre l'espace physique et la géométrie euclidienne, à savoir principalement la similitude. Ainsi, les questions de logique posées à l'occasion des propriétés des polygones se trouvent être quasiment le seul débouché mathématique de l'enseignement.
- les enseignements actuels installent la géométrie du primaire en obstacle à la géométrie mathématique du collège.

2) D'où notre nouvelle direction de recherche :

- Installer le méso espace au centre des préoccupations des élèves et des enseignants, dans des modalités qui soient considérées comme acceptables.
- Conjointement, les situations d'enseignement doivent permettre d'installer la feuille de papier comme outil privilégié de modélisation et laboratoire d'études spatiales, et un nombre significatif de notions de géométrie comme centrales.
- Un des moyens privilégiés sera l'introduction de dispositifs technologiques « machines géométriques » de mesure des angles et de distances, et leur modélisation géométrique.

Quelques uns des dispositifs dont l'implantation au cycle 3 est envisagée ont été présentés (voir annexe 2).

Nous nous orientons par là sur une refonte du choix et des hiérarchies entre les objets géométriques introduits à l'école primaire, où la similitude, le triangle, les droites et les plans prendront de la place à la géométrie des quadrilatères, sans pour autant les éliminer.
La collaboration avec des chercheurs dans le domaine de la technologie nous semble indispensable, et partiellement réalisable dans le cadre local du Ladist.

De telles conclusions ne vont pas sans poser de nombreuses questions que les participants n'ont pas manqué de poser : nature des difficultés nouvelles, nouvelles articulations avec le collège, etc.

B. Dans la seconde plage, le travail a été centré sur l'articulation entre l'espace réel et l'espace de la feuille de papier au travers d'un module sur les « plans » expérimenté au cycle 3. Le travail de recherche dont il a été rendu compte dans la thèse avait montré que les questions d'orientation d'un plan

- étaient l'objet de difficultés persistantes que l'on retrouvait dans les enseignements techniques et professionnels, y compris celle des adultes, et appuyaient l'hypothèse qu'il n'y a pas de différence significative entre l'état des connaissances en fin de primaire et l'état des connaissances de la population adulte.

- pouvaient faire l'objet d'apprentissages dès le CE2, dont les résultats pouvaient améliorer les connaissances à la sortie de l'école primaire, mesurées sur un long terme (plus d'un an après l'apprentissage) pour une proportion significative de la population étudiée.

Le nombre limité de séances d'apprentissage considéré (3-4) fait espérer que les résultats peuvent être améliorés notamment par une suite en CM.
Un tel travail réalisé en CM1 et CM2 en 97-98 au COREM a fait l'objet d'une présentation plus détaillée (annexe 3), sur la base du plan de l'école.
L'accent y a été mis sur les difficultés d'enseignement introduites par la modélisation d'un espace réel : prise en compte des incertitudes liées aux techniques (dans l'espace réel, comme dans celui de la feuille) et aux relations de modélisation entre ces deux espaces.
Les discussions et des interactions avec d'autres ateliers ont ici aussi enrichi le débat.

C. La troisième plage a été consacrée à la présentation du travail sur les angles et de la suite qui en a été donnée au CM, dans notre recherche.

Ce travail dont les bases ont été présentées dans N (n° 56) a été suivi ces dernières années par un enrichissement de la géométrie des quadrilatères enseignée (Annexe 4), intégrant les propriétés angulaires. Il apparaît en conclusion que les élèves de l'école primaire peuvent intuiter sur les propriétés angulaires des quadrilatères remarquables, dont le lien avec les propriétés usuelles des côtés (parallélisme, longueurs) peut être l'objet d'explorations.

Nous en avons néanmoins mesuré les limites, particulièrement du fait du caractère microspatial de l'angle ainsi développé : le transfert aux situations méso ou macro spatiales où c'est l'angle de deux directions qui est l'objet pertinent :

- reste bloqué pour plus de la moitié des élèves,

- est difficile à gérer pour les enseignants (tant pour eux-mêmes que pour les situations nécessairement tardives)

LES REPRESENTATIONS DE L'ESPACE ET L'ENSEIGNEMENT ACTUEL DE LA GEOMETRIE DANS L'ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Nous avons mis en évidence l'importance dans l'enseignement actuel de la géométrie de la représentation (spontanée) microspatiale, et du rôle d'obstacle que l'initiation à la géométrie à l'école primaire et au collège lui fait jouer du fait de ses choix didactiques. En effet, la solution actuelle consiste à « descendre » le plus bas possible (du point de vue des niveaux d'enseignements) les notions et les objets du « véritable enseignement de la géométrie » ou de ce qu'il en reste dans l'enseignement secondaire.
Ainsi, on va se limiter à la feuille de papier, et comme on ne peut démontrer à l'école primaire, on se contentera de tracer, et de constater les résultats qui feront plus tard l'objet du travail de démonstration.
La logique de cette transposition doit être interrogée de deux points de vue :

L'apport culturel aux élèves de l'enseignement élémentaire de la géométrie :

On peut le caractériser d'une manière un peu sommaire par :
- les disparition des vrais problèmes spatiaux spécifiques des rapports avec l'environnement des adultes comme des enfants dans notre société,
- la constitution d'un espace spécifiquement pédagogique de petits objets manipulables, tracés ou en 3D, censés ramener les questions spatiales d'enseignement aux possibilités de manipulation des élèves : ils seront d'ailleurs désignés de manière foncièrement ambiguë jusqu'au collège : *les objets géométriques*, sur lesquels une démarche de constats de propriétés est appliquée.
- le soin dans la réalisation de tracés sur la feuille est devenu un but en soi, conséquence de l'exclusion des vrais problèmes de l'espace et/ou (comme le remarque Chevallard) effet de ce qui peut être lu comme le désir d'éduquer à la propreté qui imprègne une certaine version moralisante de l'enseignement.

L'aide ou la constitution d'obstacle à l'enseignement ultérieur de la géométrie secondaire.

Les notions de base, comme les droites, les plans, les angles n'ont quasiment jamais fait l'objet de réflexion, et surtout d'expérience et de questions. Les notions pragmatiquement et technologiquement utiles, par exemple, les mesures d'angles sont exclues. Mais sont aussi exclus les utilisations effectives de plans et de cartes et les difficultés d'orientation ou d'exploitation de la relation entre l'espace et la représentation (imprécisions notamment, leurs sources et les moyens de les limiter).
Les figures sont analysées par rapport à leurs côtés, mais contraintes liées au caractère déformable ou non des figures polygonales connues par les seuls côtés demeurent totalement ignorées, alors que leur importance spatiale et technologique est très grande.
Le traitement des figures devra faire l'objet de deux types de révolution Coperniciennes

- Les constats sur feuille de papier, et a fortiori sur des représentations imprimées, rendent très difficile la distinction entre géométrie et espace, et par conséquence vont entraîner naturellement un transfert du rapport à l'espace vers le rapport à la géométrie. Le premier étant fondé sur des constats de propriété très précises, il disqualifie le second qui se fonde sur la nécessité de ces propriétés.

- Comme l'ont montré Chevallard et Jullien[1] « il est facile de voir (sur le rôle des figures) le paradigme du jeu géométrique que l'élève va devoir apprendre à maîtriser : manipuler avec pertinence les sur- et les sous- figures. Or la conception des figures comme représentations d'objets de l'espace est un obstacle à ce libre jeu avec les figures comme ensemble de points de l'espace, qui fait la fécondité de la géométrie »

Tentatives de redressement « pédagogique »

Le parcours de nombreux ouvrages d'enseignement permet de déceler à la fois les tentatives de problématiser et de fonctionnaliser les savoirs ainsi enseignés d'une part, et l'inefficacité relative inhérente aux tentatives.

- Au collège l'appel à la précision : c'est par exemple le choix de l'équipe de Lyon. La seule conséquence pédagogique qui puisse raisonnablement en être tirée est l'exclusion de l'espace du champ pédagogique, ou les raisonnements « faux » sur la précision, et parfois les deux. Etudier la question de la mise en question de la précision sur le problème de la surface des rectangles, montrer que le professeur transgresse le contrat du collège en ne vérifiant pas les valeurs tracées, puis celles qui sont mesurées ; il s'appuie en fait sur un non respect de certains éléments de base du contrat du collège (précision des reports et des lectures) pour disqualifier d'autres éléments de ce contrat (capacité à constater des propriétés vraies).

Mêmes remarques sur le triangle aplati. La seule logique du contrat précédent ne peut qu'aboutir au rejet de la solution mathématique.

Il faudrait alors que le professeur introduise le raisonnement en paradigme et contradiction pour poser un véritable problème, et s'appuyer sur son autorité institutionnelle pour créer le problème !

- A l'école primaire, l'appel à l'anticipation sur les propriétés (que le professeur connaît) est parfois fait, mais ne repose que sur des réponses conventionnelles. Ainsi, la vérification que deux lignes sont parallèles, quand elle est proposée, n'a-t-elle aucune chance raisonnable de s'appuyer sur la prise de conscience de la nécessité de tracer à deux endroits différents une perpendiculaire commune : une légère erreur de direction de quelques degrés, parfaitement observable et détectable, n'a-t-elle aucune conséquence observable sur les longueurs entre un point de l'une et un point de l'autre ligne...

Obstacles à un changement prenant en compte la dimension expérimentale

Relevons les niveaux de difficultés que nous avons identifiées, auxquelles se heurte toute évolution spatiale de l'apprentissage de la géométrie :

- Obstacles culturels du rapport péjoratif dans notre société et dans la tradition mathématique française à la technologie et à la réalité pragmatique, qui se traduit par une grande difficulté à faire vivre, même dans la scolarité obligatoire les mathématiques comme discipline de service. Ce niveau se traduit par les représentations des enseignants sur le rapport entre géométrie et espace.

---

[1] Petit x n°27

- Obstacles culturels et historiques, fossilisés dans une épistémologie platonicienne et élitiste, transmise jusque dans les universités et les IUFM

- Insuffisance du côté des enseignants des connaissances spatiales, y compris astronomiques, et de leur relation avec les connaissances géométriques

- Obstacles didactiques curriculaires : toute modification nécessite des conditions écologiques encore mal connues, mais auxquelles on peut rapporter la difficulté de modification de cet enseignement

- Contraintes pédagogiques spatiales : le travail doit se dérouler principalement dans l'espace de la classe, et les enseignants ne disposent actuellement essentiellement que du matériel lié au travail sur la feuille de papier.

- Obstacle des connaissances micro-spatiales aux connaissances géométriques dans les situations a-didactiques dans un micro-espace

ESPACE, REPRESENTATIONS, DISPOSITIFS SPATIAUX ET ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE DANS UNE PROBLEMATIQUE DE MODELISATION.

L'étude des conditions d'initiation à l'enseignement de la géométrie, de leurs effets, de leurs conséquences sur l'enseignement au collège, a été appuyée sur une identification de certaines contraintes macro-didactiques explicatives. Elle propose d'étudier la mise en place d'une problématique de modélisation dans cet enseignement. Notre thèse aboutissait à trois propositions :

Proposition 1

Introduire explicitement dans l'enseignement des mathématiques de la scolarité obligatoire, des objectifs relatifs à certaines connaissances spatiales utiles, en particulier pour le macro-espace et pour la maîtrise des représentations matérielles des objets.

Proposition 2

Différencier nettement auprès des élèves les problématiques spatio-géométrique et géométrique d'une part, la problématique pratique d'autre part, en mettant en valeur ce qui fait la spécificité de chacune d'entre elles.

Proposition 3

Introduire, dès l'école primaire, les savoirs géométriques de base comme outils pour résoudre effectivement des problèmes spatiaux.

Bien que nous ayons fondé théoriquement ces propositions dès 1993, nous avons tenté, pendant quelques années, des interventions minimalistes en cours moyen au COREM, utilisant les ressources des ingénieries disponibles,. A cette occasion, nous avons pu constater empiriquement la résistance structurelle de l'enseignement aux obstacles que nous avions identifiés ou confirmés. Les questions spatiales sont de fait, indépendamment de la bonne volonté des différents acteurs, repoussées hors du champ de l'étude de la classe, sans que la géométrie ne s'en trouve enrichie significativement.

Le projet que je présente aujourd'hui vise à explorer une voie plus radicale d'installation de l'espace, le méso-espace, au centre des préoccupations des maîtres et des élèves, dans des modalités qui soient considérées comme acceptables. Conjointement, les situations d'enseignement doivent permettre d'installer la feuille de papier comme outil privilégié de modélisation et laboratoire d'études spatiales, et un nombre significatif de notions de géométrie comme centrales.

Les situations didactiques sont toutes attachées à une notion mathématique qui se trouve placée en position centrale de notre projet, expérimentée sous divers aspects, mais ne sera pas explicitée à l'école primaire. Il s'agit, selon le cadre dans lequel on se situe, de la similitude ou d'un des axiomes de base de la géométrie euclidienne, sous une forme qui a été mise en évidence en 1663 par J Wallis[2] : « pour une figure quelconque, il y en a toujours une autre, de grandeur quelconque, qui lui soit semblable (dans le plan : angles égaux et longueurs correspondantes proportionnelles) ».

Cette propriété, admise en postulat, permet de démontrer le 5ème postulat d'Euclide, « la parallèle, passant par un point donné, à une droite donnée, est unique, ce qui distingue la géométrie euclidienne des autres.

Ce petit détour dans les mathématiques a pour objet de légitimer le projet d'un point de vue curriculaire et didactique.

---

[2] Extrait de Euclide, les éléments, PUF, P. 175-176

Cinquième postulat d'Euclide .

Et que toute droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.

Formes équivalentes :

a) Pour toute droite D et pour tout point P n'appartenant pas à D, il existe une unique droite D' parallèle à D dans le plan déterminé par D et P (axiome de Plaifair , proche retenue par Hilbert)

Si une ligne droite coupe une droite, elle coupe toute parallèle à cette droite (équivalence démontrée par Proclus)

Si deux droites sont parallèles, toute sécante produit avec ces deux droites, des angles alternes internes égaux (variante de Euclide I 29)

La somme des angles d'un triangle est égale à deux droits (Euclide I 32)

Étant donné un triangle ABC et un segment quelconque DE, il existe un triangle DEF construit sur DE et semblable à ABC (forme proche de Wallis)

Il existe un rectangle (recherches de G. Sacchieri et les quadrilatères comportant deux angles droits et deux côtés opposés égaux, et H. Lambert sur les quadrilatères ayant trois angles droits)

Étant donné un point P à l'intérieur d'un angle, il existe au moins une droite D passant par P qui coupe les deux côtés de l'angle (hypothèse utilisée par A. Legendre dans une de ses tentatives de démonstration du postulat des parallèles)

C'est d'autant plus important que :

- la similitude se trouve en marge des curriculums actuels
- ceci conduira à modifier le poids porté à l'étude de certaines figures dans le cadre de l'école primaire
- ceci voudrait conduire aussi à modifier la conception de la notion de figure de manière fondamentale

La dimension expérimentale de la géométrie pour l'enseignement du collège a fait l'objet d'une exploration par l'équipe de Chevallard[3], et nous exploiterons bien entendu ces travaux.
Cette équipe exploite la métaphore du laboratoire spatial lié à une science géométrique, et mettent en évidence la nécessité de concevoir un objet distinct de l'expérience et du domaine de réalité étudiée, le *schéma d'expérience*. Je résume ci-après quelques résultats de ces travaux.

> Un laboratoire scientifique permet d'interroger un domaine de réalité concerné, de concevoir et de réaliser des expériences dans un rapport privilégié avec une élaboration théorique.
> Le géomètre peut donc être comparé à un scientifique dont la matière expérimentale est constituée des faits spatiaux. Il serait amené, comme eux, à concevoir des expériences, à élaborer des théories (la géométrie mathématique).
> Comme la conception d'expériences scientifiques nécessite, outre le travail théorique, des dispositifs technologiques matériels, le scientifique fait appel pour leur conception, leur mise en œuvre et leur communication à la production de dispositifs graphiques, les **schémas d'expérience**.
> Mais, alors que pour cela les autres scientifiques les schémas d'expérience sont distincts par nature de l'expérience elle-même, le géomètre disposerait ses schémas sur le même support que son expérience, avec les mêmes matériaux, les mêmes objets que l'expérience elle même..
> Lorsqu'on vise dans ce contexte à produire une expérience graphique, il devient très difficile de distinguer le schéma d'une expérience et l'expérience elle-même

Il y a là matière à réflexion quant aux possibilités didactiques d'établir une dimension expérimentale dans l'initiation à la géométrie euclidienne.

Instruments de mesure dont l'introduction est envisagée au cycle 3

L'ensemble est composé de divers instruments de mesure et de topographie :

- niveau triangulaire à pendicule[4]
- tube de mesure de la hauteur du soleil
- une paire de piquets verticaux, dont l'un a pour longueur la moitié de l'autre, permettant de faire glisser une longueur
- un bâton d'Errard[3], permettant de faire tourner une longueur
- un bâton de Gerbert[3] permettant de déplacer une longueur verticale en position horizontale pour la mesurer.

---

[3] Consulter : Chevallard et Jullien (*Autour de l'enseignement de la géométrie au collège*, Petit x n°27, lire aussi la suite dans Mercier et Tonnelle, Petit x n°29, et Chevallard, *encyclopédie de didactique*, chap Géométrie)
[4] dénomination par Fourrey, curiosités géométriques, Vuibert, 1907 (édition 1994)

Ces instruments sont réalisables à peu de frais, avec un minimum de soin.
Les notions de géométrie impliquées sont diverses, mais s'appuient quasiment toutes sur une connaissance minimale des angles, qu'ils devraient aussi contribuer au moins à étendre.

Outre les angles, les principales notions de géométrie directement impliquées sont

la ligne droite, et ses prolongements, au travers des visées

la notion de triangle, comme modèle, et les « cas d'égalité des triangles » comme moyens de reproduire un triangle isométrique

la proportionnalité au travers des représentations à diverses échelles

A l'occasion de l'emploi de ces instruments, diverses notions de géométrie dans l'espace interviendront nécessairement, mais de manière contextuée, concernant les positions relatives de droites et de plans dans l'espace 3D :

plans, plans horizontaux, verticaux, parallèles et perpendiculaires

angle de plans

angle d'une droite et d'un plan

Ces instruments sont susceptibles de générer facilement des variantes, dont la production par les élèves peut être un des effets attendus du travail de modélisation.

Nous aurons donc à nous interroger sur les nécessités technologiques liées au choix didactique de l'introduction de dispositifs de mesure dans le travail de modélisation géométrique. C'est principalement l'objet de la recherche commune présentée.

Objectifs de la nouvelle recherche :

Un des buts de la recherche est de concevoir progressivement un curriculum adapté à l'approche de la géométrie dans une problématique de modélisation, qui puisse s'inscrire dans ce que notre système éducatif peut tolérer tant du côté des moyens didactiques, que de la formation des enseignants.

Ce curriculum devra

- Donner aux élèves les moyens d'atteindre les compétences spatiales nécessaires à la maîtrise des déplacements dans l'espace nécessités par la vie sociale actuelle

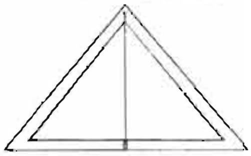
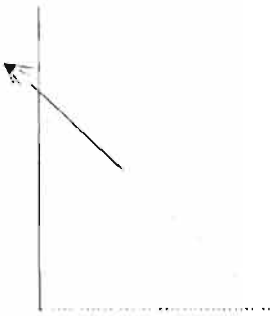
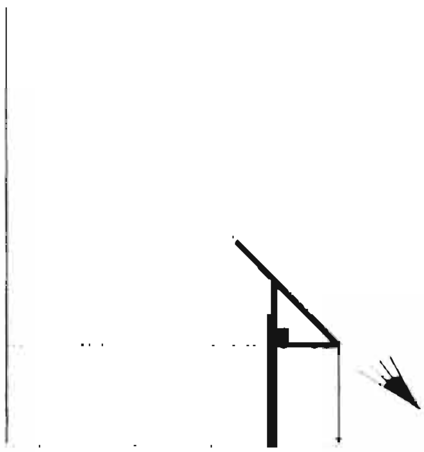
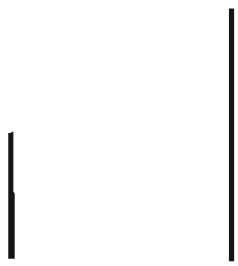
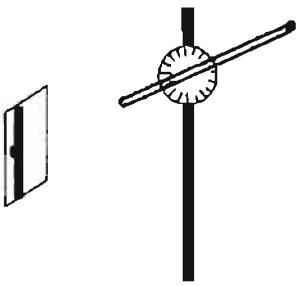
- Installer les élèves dans un rapport aux figures de géométrie qui s'appuie sur la modélisation de dispositifs spatiaux effectifs de maîtrise de l'espace, et non point dans un seul rapport figuratif d'objets physiques du micro-espace

- Installer le rapport des élèves à la feuille de papier comme à celui d'un laboratoire de l'espace,

- Développer particulièrement l'utilisation des propriétés de la similitude comme moyen d'anticipation spatiale et de « calcul géométrique » sur la feuille de papier

- Pouvoir être articulé avec les enseignements du collège

Schémas géométriques des dispositifs :

	Niveau à pendicule
	Bâton d'Errard Déplacement par rotation autour du pied vertical
	Bâton de Gerbert Mesure d'une hauteur
	Déplacement d'une longueur par glissement
	Mesure de la hauteur du soleil par l'ombre minimale d'un tube articulé sur une tige par un axe horizontal, qui peut être associé à un rapporteur

Leçons	Plan topologique	Plan métrique 1
Savoirs devant être institués (Milieu didactique)	**Vocabulaire**: repères sur le terrain, repères sur le plan. **Méthodes** de mise en congruence d'un plan et de la réalité: Rechercher sur le plan les repères que je connais sur le terrain, ou sur le terrain des repères identifiés sur le plan, envisager des parcours pour assurer l'identification des correspondances lieux-réalité	**Vocabulaire** : plan à l'échelle de 1cm pour 2 mètres. Diverses formulations de l'échelle, en correspondance entre unités sur le plan et unités sur le terrain **Relation :** Deux longueurs égales sur le plan correspondent à deux longueurs égales dans la réalité **Techniques** : calculs de mesures associées (plan, réalité), utilisant les décompositions en longueurs codées
Milieu matériel	Plan d'ensemble (architecte) du groupe scolaire Partie de ce plan (bien choisie), sur laquelle seul un élément bien connu est explicitement désigné par son nom habituel. École et son environnement immédiat	Partie du plan d'ensemble du groupe scolaire (échelle 1/200, formulée en 1cm pour 2m) .Ecole et son environnement immédiat Feuille de calculs Instruments de mesure sur le terrain et sur la feuille
Milieu objectif	*Avec cette partie du plan, pouvez-vous trouver quelle est la pièce représentée à l'endroit où il y a la lettre X ?*	*Que signifient les indications chiffrées ?* Règle de base : si on mesure à deux endroits différents sur le plan et qu'on trouve la même longueur, il correspond à ces deux endroits du plan, deux endroits sur le « terrain » qui ont aussi tous les deux la même dimension : Ex : 2cm sur le plan correspondent toujours à 4 m dans la réalité *Peut-on prévoir la largeur de la voie d'entrée de l'école ?* *Peut-on prévoir les dimensions des salles de classe ?*
Milieu de référence (situation d'action)	Repérer dans un plan quelques éléments de la réalité, identification dans les connaissances de parcours mettant en jeu ces éléments, faire le lien avec la représentation, identifier d'autres lieux par leurs positions topologiques Déplacements, capacité à y décrire des déplacements courants d'un lieu à l'autre, détermination d'un lieu à partir du point de départ et de déplacements représentés, confrontation avec les représentations du terrain	Différencier les mesures sur le plan et celles sur le terrain. Calculs de mesures de longueur ou de distance en décomposant en longueurs codées. Rapporter les longueurs à trouver aux longueurs codées. Manipuler la règle de base une fois qu'elle sera énoncée. (Après les échanges et le débat, mesures collectives sur le terrain pour vérification)
Milieu d'apprentissage (Situations réflexives : form. et val.)	Discussion et débats sur les réponses proposées, avant toute vérification par référence au plan d'ensemble qui ne sera dévoilé qu'à la fin. Explicitations des raisonnements topologiques sur les parcours évoqués, décrits, en relation avec le plan.	Transformer la règle de base en "une longueur sur le terrain est proportionnelle à la longueur sur le plan". Elaborer un tableau de correspondance plan-terrain Discuter du caractère proportionnel de la représentation.

	Plan métrique 2	Plan métrique 3
Savoirs devant être institués (Milieu didactique)	**Raisonnement :** Proportionnalité entre mesures en mm sur la feuille et mesures en m sur le terrain **Notion :** Précision calculée à partir des mesures sur le plan sur les anticipations de mesures sur le terrain. **Technique**: calcul de l'amplitude correspondant dans la réalité à l'imprécision de lecture sur le plan.	Rappels de savoirs (exercices) Tension du fil et incertitudes
Milieu matériel	Les mêmes que précédemment	Photocopie de plan d'architecte à l'échelle différente de 1cm pour 1m Instruments de mesure de longueurs sur le terrain et sur la feuille de papier Ficelle et éventuellement technique de contrôle de la tension
Milieu objectif	*Avec ce plan que puis-je dire des mesures sur le terrain, avant d'y aller ?*	*Calculer la mesure d'une ficelle tendue d'un coin à l'autre de la classe*
Milieu de référence (situation d'action)	Mesures sur la feuille, avec le plus de précision possible Calculs des distances représentées Mesures sur le terrain, la plus précise possible Calcul des longueurs qui se correspondent (Après les échanges et le débat, mesures collectives sur le terrain pour vérification)	Mesures sur la feuille avec le maximum de précision Calcul des longueurs avec la règle de correspondance. En fin de séance, réalisation de la vérification sur le terrain, et précision des mesures, contrôle de la tension
Milieu d'apprentissage (Situations réflexives : formulations et validations)	Calculs de la longueur sur le terrain correspondant à 1 mm sur le plan. Vérification des mesures sur la feuille, formulation sous contrôle de résultats différents. Débat sur les différences, les précisions	Débats sur les mesures et les calculs Calculs du correspondant sur le terrain de 1 mm sur le plan

Situations CM1		
Savoirs devant être institués (Milieu didactique)	***Voc :*** *Un angle a deux côtés et un sommet, le point où se rejoignent ses deux côtés. On peut avoir le même angle et des côtés de longueur différente.* ***Techn :*** *Pour communiquer un angle, on trace des côtés par superposition avec la pièce, et on peut prolonger les côtés.* ***Connaissance spatiale :*** *les longueurs ne déterminent pas l'angle*	**Egalité des angles** : *on superpose les sommets, on aligne un côté, et (les intérieurs du même côté), si l'autre est aussi aligné, les angles sont égaux.*
Milieu matériel	Un puzzle en pièces détachées, cf annexe Du papier (10cmx15cm)	Sur les deux côtés, recto et verso, de 2 feuilles agrafées, sont tracés 5 angles, chacun correspondant à un angle d'une pièce de puzzle. Papier calque
Milieu objectif	Règle de base : Compléter le puzzle au fur et à mesure, en ajoutant une pièce de manière à ce qu'elle s'encastre convenablement dans les pièces précédentes, c'est à dire que deux côtés de la nouvelle pièce soient en contact sur une partie de leur longueur avec les morceaux déjà placés.	Le P les montre. Parmi ces angles (de pièces de puzzle), vous allez vous exercer à savoir trouver quels angles du verso sont égaux à quels angles du recto.
Milieu de référence (situation d'action)	Le joueur 1 tire une pièce et doit prévoir à voix haute quelle partie de la pièce il va pouvoir encastrer et à quel endroit du puzzle elle se place.	Saisie d'informations, par calque, sur un angle d'un côté, comparaison avec l'autre côté par superposition correcte. Organisation des comparaisons.

Situations CM1		
Savoirs devant être institués (Milieu didactique)	*Technique de mesure au rapporteur rond :* *1. superposition du centre du rapporteur et du sommet del'angle* *2. maintien de la superposition précédente et alignement du trait repère et d'un côté* *3. l'intérieur de l'angle se trouve du côté des flèches et l'autre côté prolongé détermine une graduation.*	*Techniques de report au rapporteur* *Méthode nouvelle de validation des constructions de figures : faire glisser l'une sur l'autre en minimisant les distances entre les traits de l'une et ceux de l'autre. S'il y a plus de 2mm de distance quelque part, on peut faire mieux.*
Milieu matériel	matériel de la séance précédente, sans le calque, puis complément de même type	Un pentagone non convexe dont les longueurs des côtés sont comprises entre 3 et 12 cm dessiné sur papier calque. Matériel de géométrie papier blanc
Milieu objectif	Trouver une méthode pour se servir du rapporteur afin de savoir si deux angles sont égaux	L'élève doit reproduire le pentagone, la vérification se fera quand il pensera avoir terminé, par superposition des 2 figures.
Milieu de référence (situation d'action)	Comparaison des angles avec le rapporteur	Saisie des informations, report au fur et à mesure, et à la fin, tentatives de superposition.
Milieu d'apprentissage (Situations réflexives : form. et val.)	Explicitation de méthodes, débats sur les méthodes d'utilisation du rapporteur	Discussion sur les problèmes rencontrés, et sur la méthode de validation par superposition

Situation emblématique des communications de figures : communication de triangles, puis de quadrilatères particuliers (losanges et parallélogrammes)

Connaissances spatiales :

modes de détermination de triangles pour la construction, la vérification.

Modes de détermination de formes de quadrilatères et en particulier, la forme n'est pas déterminée par les longueurs. Il faut au moins connaître un angle

Construction de triangles sur la feuille de papier avec trois longueurs, et constructions des quadrilatères particuliers.

Situations CM2			
Savoirs devant être institués (Milieu didactique)	*Exercices de méthode de construction de triangles avec rapporteur (rappels)*	*Somme et différence de deux angles* *Techniques associées.* *Lecture des angles du rapporteur en termes de mesures (rapports).* *Le degré comme unité.*	*Repérage de 3 points par la direction de deux droites, de 4 points par un quadrilatère (côtés et angles) : "Il faut mesurer l'angle entre la ligne droite qui joint les 2 premiers points et la ligne droite qui permet de placer le troisième".* *Le professeur fait dire où est le sommet de cet angle, où sont ses côtés.*
Milieu matériel	6 messages d'informations sur côtés et angles de 3 triangles.	Un rond de plastique transparent, sans graduations (un rayon tracé), feutre, Un rapporteur gradué (juste pour l'introduction), deux quarts de feuilles de calque, portant chacune un angle, l'un de 50 d°, l'autre de 36 d°. Mesure des angles fournis, et on rend les rapporteurs gradués	Une feuille A4, avec 2 trous de 2mm de diamètre, très espacés. Une feuille A3, une zone dessinée en biais, en haut. Instruments de géométrie Faire 2 croix dans la zone, que l'on puisse voir au travers de la feuille A4 posée sur la feuille A3, par les trous.
Milieu objectif	2 messages sont relatifs à chaque triangle. Les retrouver	A l'aide de ces deux angles, sans rapporteur gradué, vous devez faire des angles d'autres valeurs, et placer d'autres graduations, le plus possible sur le rond en plastique pour en faire un rapporteur.	Placer 4 croix sur la feuille A3, pour que puisse les voir au travers de la feuille A4 percée cette fois de 4 trous.
Milieu de référence (situation d'action)	Tris d'après les informations (exclusions possibles) Constructions et mesures	Essais d'apposition et de superposition des angles fournis, reports d'angles droits construits ou saisis sur l'environnement. Vérifications par superposition avec le rapporteur gradué.	Une fois placés les deux premiers dans la zone, chercher comment placer le troisième et le quatrième, à l'aide des longueurs et des angles
Milieu d'apprentissage (Situations réflexives : form. et val.)	Formulation des critères de tris entre messages, débat sur leur validité	Explicitation des méthodes de création d'angles « justes ». Exploitation de ces méthodes	Explicitation des constructions, recherche de méthodes

Reste à caractériser des quadrilatères particuliers par relations entre longueurs et angles (consécutifs, opposés).
Nouvelles méthodes de vérification du parallélisme, de construction de deux lignes parallèles sur la feuille de papier.

REFLEXIONS SUR LA PLACE DE LA DIDACTIQUE ET DES MATHEMATIQUES DANS LA PREPARATION AU CONCOURS DE PROFESSEUR DES ECOLES

Isabelle Bloch et Marie-Hélène Salin IUFM d'Aquitaine

La préparation au concours de professeur des Ecoles est cadrée par des textes internes aux IUFM, et qui ne prévoient pas le programme dans tous ses détails ; il en résulte d'assez larges variations locales. Depuis quelques années, d'autre part, des annales corrigées des sujets du concours des différentes académies sont publies et intensivement utilises dans la préparation ; cette circonstance peut clairement inciter les candidats à un bachotage sans retenue, et il n'est pas sûr que les professeurs soient toujours suffisamment en mesure de résister à cette pression.
Or les sujets du concours sont bien évidemment faits pour que le candidat aboutisse à une production évaluable et évaluée ; la question qu'on peut alors se poser, est de savoir si cet objectif est compatible avec une réflexion réelle sur les mathématiques et la didactique, autrement dit si un sujet de concours, même satisfaisant, est à même de donner accès aux éléments nécessaires de formation que l'on considère souhaitables pour les PE1 et plus largement, pour la préparation à l'année de PE2.

Nous nous sommes ainsi retrouvées, Marie-Hélène Salin, professeur en IUFM depuis de nombreuses années, et Isabelle Bloch, nommée en septembre 1997 après des années dans l'enseignement secondaire, pour une réflexion sur les objectifs de la formation des PE1, dans la perspective bien évidemment de leur réussite au concours mais plus largement de leur préparation à l'année suivante. Il nous a donc paru nécessaire de préciser quels étaient, pour nous, ces objectifs et comment nous pouvions envisager de les mettre en œuvre dans les cours de PE1.

Le but de l'atelier était d'illustrer sur quelques exemples la mise en œuvre de ces principes et d'ouvrir le débat avec les participants sur les choix que nous avons faits.
Ces choix ne sont pas indépendants du programme de l'IUFM d'Aquitaine (voir annexe 1) et de l'organisation de la formation. Celle-ci est d'une durée de 80 heures, 74 heures étant consacrées à des "cours - TD" en groupes de 30 à 35 étudiants, et 6 à des cours de synthèse en amphi, portant principalement sur les concepts de didactique travaillés antérieurement. De plus, les étudiants peuvent choisir une option « renforcement » de 32 heures consacrées exclusivement aux connaissances mathématiques.

Le texte qui suit n'est pas à proprement dire le compte-rendu de l'atelier et des discussions qui y ont eu lieu, mais il présente certains des éléments qui illustrent la démarche présentée et il essaie de prendre en compte certaines des questions et remarques qui nous avaient été faites.

Il est constitué de quatre parties :

- La première présente les principes généraux qui guident notre démarche, les 3 suivantes en illustrent certains aspects.

- La deuxième traite de manière générale de la conception d'un TD de didactique et en détaille un exemple (I. Bloch).
- La troisième montre comment sont articulées les objectifs des 5 séances consacrées à l'enseignement de la géométrie et présente le contenu d'une séance de TD-clé (M.-H. Salin).
- La quatrième présente un type de travail proposé dans les séances de renforcement, travail qui a particulièrement interrogé les participants à l'atelier.(I. Bloch)

I. PRINCIPES GENERAUX :

Dans la formation des PE1, il n'y a pas d'un côté, des mathématiques (la théorie !), de l'autre de la formation à l'enseignement incluant des concepts de didactique. La didactique des mathématiques doit être comprise par les étudiants comme une discipline cohérente, qui, s'appuyant sur leurs connaissances antérieures en mathématiques, leur permet d'approfondir le sens des concepts, dans leur double aspect d'outil et d'objet, et leur fournira, en situation professionnelle, des moyens pour agir, adaptés de manière spécifique à chaque concept enseigné.

Concevoir un enseignement intégré de ce type se manifeste de plusieurs façons :

a) dans l'ordre de présentation des différents supports de travail :
Les révisions de mathématiques sur une notion ou un domaine donné, enseigné en primaire, ne sont jamais premières, elles sont précédées de 2 types d'activités :
- soit l'organisation avec les PE, de situations qui simulent des situations de classes primaires, (enseignement par homologie), suivies de leur analyse
- soit l'analyse de situations d'introduction directement destinées aux élèves

L'objectif est de montrer dès le départ l'enjeu de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, en se centrant sur les situations qui donnent du sens aux concepts mathématiques.

b) dans la pratique fréquente d'analyses a priori de situations didactiques avec 2 types de questions :
- quelles sont les connaissances nécessaires pour comprendre la consigne et s'engager dans la résolution des problèmes posés aux élèves ?
- quelles sont les connaissances visées dans la séquence ?

Le travail sur ces questions conduit à approfondir l'étude de l'articulation entre les concepts mathématiques et l'étude de leur filiation.

c) dans l'articulation des « analyses de travaux d'élèves » avec l'étude des situations où ces travaux ont été produits.

d) dans la présentation de «cours de synthèse» sur chaque grand domaine de connaissances.

L'annexe 2 et la partie III présentent les "progressions" de deux des modules, celui portant sur "l'enseignement des rationnels et des décimaux, de la proportionnalité, des fonctions numériques" et celui sur "l'enseignement de la géométrie", bâties selon ces principes.

II. LA CONCEPTION D'UN TD DE DIDACTIQUE EN PE1

Les cours de PE1 comportent une part de didactique théorique ; celle-ci n'est introduite qu'à partir d'études de situations d'apprentissages, d'extraits et analyses critiques de manuels,... Tout ceci constitue des **TD de didactique**, à partir desquels le professeur procède à une mise en forme des concepts fondamentaux de la didactique, et ces concepts sont alors sollicités pour l'analyse d'autres situations. La question qui se pose est de savoir si tout support est adéquat pour faire ce travail, et en particulier si les sujets de concours (volet didactique et travaux d'élèves) offrent une entrée favorable au type de travail que nous voulons conduire avec les candidats professeurs d'Ecole.

Or les sujets de concours sont découpés, fragmentés en questions ; il y a donc deux problèmes distincts :
- le support choisi (manuel, situation observée en classe...) est-il adéquat ?
- le découpage en questions est-il pertinent pour introduire la réflexion des PE1 ?

Nous pouvons faire à ce sujet deux remarques :
- les sujets doivent avoir une longueur raisonnable, ce qui exclut de faire composer sur des situations complexes construites par les didacticiels, par exemple l'introduction des fractions par les feuilles de papier (N. et G.Brousseau, "Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire", IREM de Bordeaux, 1987) ; or ces situations peuvent être d'une grande richesse pour la formation ; de plus les étudiants auront trop peu de temps en PE2, où d'autres priorités existent, pour les étudier ;
- le découpage des questions peut se révéler trop pauvre et ne pas laisser aux PE1 une marge suffisante de réflexion et d'initiative sur les procédures possibles, les variables didactiques, et l'intérêt de la situation.

C'est cette question que nous avons choisie d'illustrer dans le TD sur le puzzle proposé ci-après. Ce TD est intégré dans le module de formation "Enseignement des rationnels et des décimaux, de la proportionnalité, des fonctions numériques" dont le plan est fourni en annexe 2.

A. UN TD EN PE1

Le TD proposé aux participants à l'atelier a en fait pour origine une erreur de programmation dans deux groupes de PE1 : le premier groupe a reçu le TD version 1, et la séance s'est déroulée conformément aux prévisions.

Le deuxième groupe a eu cette même séance quelques semaines plus tard en raison de vacances et stages d'observation : le formateur ayant repris rapidement ses papiers, a distribué le TD version 2, avec pour conséquence de recueillir beaucoup moins de procédures intéressantes, et de voir les étudiants rester bloqués sur les questions posées, et ne pas arriver à s'en détacher pour pouvoir discuter les ouvertures possibles et les modifications de la situation. (Voir en annexes 3 et 4 les versions des deux TD).

L'institutionnalisation portant sur la notion de variable didactique en a été rendue artificielle et peu convaincante.

Il ressort de cette expérience qu'il y aurait pour le formateur à prendre en compte plusieurs facteurs dans le choix d'un TD support pour l'introduction de la réflexion sur un concept et ses implications didactiques :

- la réflexion peut être plus ou moins induite par le choix de la consigne donnée aux élèves : ici, le choix de $4 \rightarrow 6$ au lieu de $4 \rightarrow 7$, ne permet pas aux PE1 d'engager des procédures suffisamment riches dans la résolution, et donc ne leur permet pas non plus de se rendre compte de la richesse de la situation ;

- la fermeture des questions (type épreuve de concours) ne permet pas de générer des questions intéressantes ;

- le degré d'homologie de la situation est aussi à prendre en compte : une situation d'élèves du primaire non aménagée peut s'avérer trop simple pour les PE1 et donc ne pas pouvoir conduire à une problématique suffisamment intéressante.

- dans la formation telle qu'elle est souvent conçue, il se peut que les sujets de concours définissent le rapport institutionnel à la didactique ; quelles sont les conséquences de ce fait ?

B. PERSPECTIVES POUR LES PE2

Si les PE ont construit leur rapport à la didactique par le biais des sujets de concours, on peut craindre un certain nombre d'effets : les PE2 ont à se poser des questions sur des séquences ou des projets d'enseignement **réels**, donc complexes, et non plus des questions scolaires et ponctuelles sur des extraits de progressions. A travers les TD de didactique plus complexes, on vise donc la formation en didactique des PE sur l'ensemble des années de préparation. Les problèmes rencontrés en PE2 tiennent effectivement à ce que ceux-ci :

- ne savent pas poser eux-mêmes les questions ;
- ne savent pas les hiérarchiser.

Les TD de didactique, tels que nous les avons conçus, visent à mieux prendre en compte ce facteur de complexité des situations réelles.

C. CONSTRUCTION DES SUJETS DE TD

Par contre les sujets de concours sont souvent bâtis à partir de situations types, parfois des paradigmes d'enseignement d'une notion donnée ; il est donc possible assez fréquemment de les transformer, de façon à obtenir un sujet de TD intéressant.

III. UN EXEMPLE DE PROGRESSION POUR TRAVAILLER "LA QUESTION DE LA GEOMETRIE"

A. LA QUESTION DE LA GEOMETRIE

Dans un colloque précédant celui-ci, C.Houdement et A. Kuzniak (Montpellier 1996) s'interrogeaient : "faut-il continuer à enseigner la géométrie en formation des maîtres premier degré ?" Si la question se pose, c'est que le vocable "géométrie" recouvre un domaine de connaissances à la fois vaste et flou, ce qui explique les variations très grandes qu'a subi et continue de subir son enseignement en primaire et au collège. Aussi il nous apparaît prioritaire de fournir des repères aux étudiants en nous appuyant sur les distinctions présentées par ce texte[1] :
" Les deux champs de connaissances recouverts par le terme "géométrie" à l'école primaire.

Ce que la tradition appelle "enseignement de la géométrie", renvoie, à l'école primaire, à deux champs de connaissances : d'une part à celui des connaissances nécessaires à l'enfant pour contrôler ses rapports usuels avec l'espace, champ désigné dans les programmes antérieurs par "structuration de l'espace", d'autre part au champ de la géométrie proprement dite.

Savoir prendre, mémoriser, exploiter (en particulier communiquer) des informations spatiales pour se déplacer, pour reconnaître ou construire des objets nécessite des apprentissages qui ne s'effectuent pas spontanément. C'est le cas par exemple de l'utilisation de plans, en situation réelle.

Ces connaissances ne sont pas toutes facilement explicitables dans les termes de la géométrie ; elles relèvent aussi d'autres disciplines comme l'EPS ou la géographie, mais elles constituent les bases nécessaires à toute maîtrise, plus fine, de certaines activités humaines qui se développent en relation avec l'espace. Ainsi, la représentation des objets en perspective pose des problèmes importants à des élèves de 15 ans qui n'ont jamais eu l'occasion de se poser la question de la différence entre ce qu'ils **voient** d'un objet et ce qu'ils en **savent**.

Le champ de la géométrie proprement dite, lui, constitue un savoir mathématique, élaboré au cours de l'histoire, dont l'intérêt pour les jeunes de la scolarité obligatoire est double :

* La géométrie constitue un outil pour répondre à des problèmes de l'espace physique posés dans le cadre de pratiques professionnelles, sociales et culturelles ;

* elle est un lieu privilégié de l'initiation au raisonnement mathématique. A l'école primaire, ce deuxième aspect est limité : les enfants de cet âge ne peuvent accéder à la démonstration mais, en fin de cycle 3, la plupart d'entre eux, confrontés au problème suivant qui leur est communiqué par écrit et sans figure, peuvent fournir la bonne réponse et la justifier convenablement, : *on a donné à un enfant une figure qui ressemble beaucoup à un carré, en lui disant de vérifier si c'est bien un carré. Il a mesuré les quatre côtés et trouvé qu'ils étaient de même longueur. Il a vérifié ensuite un angle avec son équerre. Il a trouvé qu'il n'était pas droit. Il a alors dit : Ce n'est pas la peine que je vérifie les autres angles, je suis sûr que cette figure n'est pas un carré." Es-tu d'accord avec lui ? Justifie ta réponse."*

[1] Extrait d'un texte rédigé par la commission chargée (en 93) de la rénovation des programmes de mathématiques à l'école primaire. Ce texte n'a jamais été publié.

B. LES OBJECTIFS DU TRAVAIL EN PE1

1. Comprendre ce qui différencie la nature et les objectifs des "activités géométriques" à l'école élémentaire et au collège.
2. Prendre connaissance et analyser les différents types d'activités utilisées dans cet enseignement à l'école primaire.
3. Reprendre un certain nombre de connaissances géométriques enseignées à l'école primaire et au collège, les faire fonctionner dans une problématique "spatiale", dans une problématique "géométrique". (voir annexe 6)
4. Commencer à prendre connaissance et à analyser les comportements des élèves du primaire confrontés aux activités géométriques.

C. LES DIFFERENTES ETAPES ET LEUR ARTICULATION

Thèmes des séquences :

Séquence 1 : Reproduire un dessin, un objet spatial.

Séquence 2 : Faire reproduire à quelqu'un un dessin, un objet spatial. *L'émetteur décrit ou représente, le récepteur construit ;*

Au cours de ces deux premières séquences, les étudiants sont confrontés à des activités semblables à celles préconisées par les programmes pour l'école primaire mais plus difficiles.

Leur réalisation permet :

- d'introduire en situation le vocabulaire « reproduire, décrire, représenter, construire », de faire sentir la nécessité d'un travail sur les notations, la schématisation.

- de montrer la richesse et l'intérêt des situations de communication, mais aussi leur complexité particulière dans le cadre géométrique, liée aux erreurs de mesures et de tracés.

- d'illustrer de manière efficace le concept de variable didactique, en faisant varier les supports, les instruments, la possibilité ou non de confronter à tout moment le modèle et sa reproduction en cours de fabrication etc ...

- de reprendre un certain nombre de concepts de base en géométrie.

L'annexe 4 présente de manière succincte les activités de la 2ème séquence, le bilan de l'activité 2 est particulièrement fructueux. L'activité 3 pose problème même aux scientifiques, elle permet d'aborder ultérieurement le fait que dans l'activité proprement géométrique, certaines propriétés sont considérées comme vraies sans être démontrées et qu'elles servent à en établir d'autres.

Séquence 3 et séquence 4 : Conjecturer et démontrer (1) et (2).

Des exercices complémentaires sont à rechercher entre chaque séquence pour aborder des thèmes non centraux en PE1 (ex : les transformations) ou prolonger l'étude de certains sujets ou surtout s'entraîner à produire des démonstrations simples.

* La première partie de la séquence 3 (annexe 7) a pour but de faire s'interroger les étudiants sur des phénomènes qui ne peuvent s'expliquer que parce que l'espace de la feuille de papier n'a pas exactement les mêmes propriétés que l'espace géométrique et donc de différencier deux problématiques : la problématique spatiale dans laquelle je dirai par exemple qu'un angle est droit si je peux le vérifier avec mon équerre, et la problématique géométrique dans laquelle je dirai qu'un angle est droit si je peux déduire cette propriété d'autres informations sur la figure tenues pour vraies.
* La suite de ces séquences a pour but la reprise de quelques théorèmes importants (voir annexe 6) et la pratique de quelques démonstrations.
* La liaison entre les deux points de vue, spatial et géométrique, est assurée par le travail donné en devoir (annexe 8).
La question n°2 de la partie I n'est pas comprise d'emblée par tous les étudiants mais la travailler conduit à une meilleure compréhension des rapports entre propriété constatée et propriété démontrée.
En ce qui concerne l'exercice II, voici les résultats des calculs d'aires suggérés :
Aire de QRA = 136,5
Aire de QEU + Aire de TUA + Aire de REUT = 136
Lors du concours, un certain nombre de candidats ont répondu : « 136 est très peu différent de 136,5 donc les 3 points sont alignés. ». Après le travail décrit, la réponse (mathématique) attendue est toujours donnée et plusieurs étudiants précisent : « Les trois points ne sont donc pas alignés. Ils le paraissent sur la figure car la différence est très petite. »

Séquence 5 : Cours : "L'enseignement de l'espace et de la géométrie à l'école primaire"
Voir plan (annexe 9) ; Les parties I, II, III, et IV s'appuient sur l'article de Grand N n° 47 (Berthelot et Salin 1993) ;

Ce cours constitue une synthèse du travail d'analyse réalisé auparavant. Il a pour but d'attirer l'attention des étudiants sur des difficultés particulières à l'enseignement de la géométrie en primaire et non de leur proposer des modèles de situations didactiques.
Il est suivi d'un TD de didactique préparé individuellement par les PE1 avant le cours, qui, (une fois n'est pas coutume) est constitué des parties « travaux d'élèves » et volet 2 d'un sujet de concours blanc, réalisé par des collègues de l'IUFM, ces deux parties étant bien sûr complètement articulées.

IV. QUELLES ACTIVITES MATHEMATIQUES POUR LES SEANCES DE RENFORCEMENT ?

Le dernier problème que nous souhaitons soulever concerne la façon dont la formation peut prendre en compte la mise à niveau, en mathématiques, des PE1 possédant une licence non scientifique. Là encore on peut s'interroger sur les options de formation à choisir : exercices "d'entraînement" de mathématiques ? Les élèves "littéraires" en ont fait en quantité au lycée, avec souvent pour seul résultat de les dégoûter complètement des mathématiques. Alors exercices à support "concret" ? D'une part le pseudo-concret ne trompe guère, d'autre part le vrai concret est bien plus difficile que l'abstrait, qui a simplifié le problème pour le mathématiser. Viser à fond la motivation professionnelle (et du concours) en ne partant que de situations du primaire ? Il nous a

paru que c'était renoncer à travailler le rapport personnel aux mathématiques des étudiants, et renforcer leur conviction que, hors de leur fonctionnalité professionnelle, les mathématiques ne pouvaient les intéresser.
C'est pourquoi notre choix s'est porté sur des problèmes mathématiques, sans "habillage" concret ou professionnel, mais dans une situation qui s'apparente, pour nous, aux situations données dans l'enseignement élémentaire, en ce qu'elle présente une mise en scène (mais ici interne aux mathématiques) du savoir visé. Ce sont donc en fait des situations telles que pourrait les construire un professeur de lycée ou de collège qui souhaiterait que son enseignement présente une dimension a-didactique pour les élèves, mais en restant dans le cadre des mathématiques. Il est par ailleurs bien clair que ces situations peuvent être "habillées" au besoin de contextes (en physique par exemple) ; et aussi qu'on peut transformer ces situations en étant plus ou moins directif dans le déroulement. C'est ce que nous avons essayé de présenter ci-dessous, sur le cas des fonctions

Les PE1 bénéficient de cours de rattrapage en mathématiques, nommés Modules de Renforcement à l'IUFM d'Aquitaine ; ce module comporte 32h dans l'année. Il est prévu pour les étudiants ayant une licence littéraire, et qui souhaitent une remise à niveau ; les PE1 choisissent en début d'année de suivre le renforcement en mathématiques ou en français.
La question qui se pose là encore est celle du contenu : entraînement intensif sur des exercices type concours ou travail différent ?

Si l'on opte pour un travail différent, on peut avoir plusieurs optiques :

- les PE1, surtout littéraires, n'auront une chance d'entrer dans les mathématiques que par un biais professionnel, donc les mathématiques de renforcement, comme celles du cours, étudieront des problèmes issus des mathématiques de l'école élémentaire : il s'agit de motiver les étudiants par leur futur métier.

- le renforcement, au contraire, offre au formateur l'occasion de travailler chez l'étudiant son rapport propre au savoir mathématique, et donc, sans bien sûr éliminer les problèmes issus des savoirs du primaire, on ne s'interdira pas quelques incursions dans des problèmes purement mathématiques ; cependant il est souhaitable d'éviter la forme scolaire traditionnelle, qui a vraisemblablement eu peu de succès chez ces étudiants lors de leurs études en collège et lycée.

C'est cette dernière option que nous avons choisie ; nous l'illustrons sur des exemples de fiches proposées aux PE1 sur les fonctions. Ces fiches posent des problèmes de façon relativement scolaire (ce n'est pas une situation fondamentale sur la notion de fonction) mais avec l'objectif de montrer qu'une fonction n'est pas un objet (généralement une formule algébrique) donnée par le professeur, et que lorsqu'on observe des variations, dans différents cadres (géométrique par exemple : le cadre géométrique est choisi ici pour sa "visibilité"), on est amené à considérer des fonctions. Pour employer le vocabulaire de la théorie anthropologique, il s'agit de manipuler différents ostensifs de fonctions et d'apprendre à les reconnaître. Nous faisons l'hypothèse que ce travail peut donner du sens à une notion dont la majorité des PE1 en renforcement nous ont dit qu'ils n'avaient jamais pu comprendre le but de son introduction.

Il faut dire que l'accueil réservé par les PE1 à ce travail a été très positif ; nous l'avons complété par des exemples de sujets de concours (par exemple le volet mathématique de Bordeaux 96, où la fonction étudiée était issue d'un problème de remplissage d'une cuve).

MATHEMATIQUES

1 -. PRINCIPES ET OBJECTIFS

• Les enseignements s'adressent à des étudiants dont le niveau doit être, dès l'entrée en première année, celui d'un élève de classe de troisième de l'enseignement secondaire. Il appartiendra éventuellement à ces étudiants de se donner les moyens d'acquérir ce niveau. A cet effet, une aide optionnelle de 32 heures au total sur l'ensemble de la première année sera proposée aux étudiants, dès le début de l'année.

• L'enseignement sera résolument orienté vers la formation professionnelle, ce qui implique à la fois un approfondissement spécifique de certaines des connaissances que les professeurs d'école auront à enseigner, et un corps de connaissances particulières de nature plus didactique et épistémologique.
Aussi, plutôt que d'être repris dans leur présentation académique, les contenus mathématiques seront organisés autant que possible suivant un plan qui correspond à la logique de leur enseignement dans les trois cycles de l'école et à celle du développement de l'enfant.

• Chacun des grands concepts de mathématiques abordés sera traité dans le cadre d'une étude de didactique des mathématiques comprenant la présentation :

⇒ de situations fondamentales et de l'environnement des problèmes qu'engendrent leurs variables didactiques

⇒ des programmes du premier degré.

⇒ des compétences attendues à la fin de chaque cycle et des instruments d'évaluation.

⇒ des comportements et des erreurs des élèves ainsi que des obstacles rencontrés

• Les cours s'appuieront essentiellement sur des résultats de recherches et les connaissances acquises en particulier dans le domaine de la didactique.
Ils seront illustrés par des travaux dirigés comportant des analyses de supports pédagogiques, par des analyses d'exercices et des réponses d'élèves et, bien sûr, par des exercices de mathématiques.
Ils seront, dans la mesure du possible, motivés et accompagnés (en particulier pour les PE1) de sujets de concours.

2 - VOLUMES HORAIRES

1re Année	80 heures	+ 32 heures	(Soutien optionnel)
2me Année	50 heures		

3 - CONTENUS

• 1re Année : L'enseignement sera découpé en quatre modules qui comportent chacun des aspects mathématiques articulés avec des aspects didactiques, le quatrième module effectuant la synthèse (cette synthèse pouvant être traitée de manière convergente dans les trois autres modules)

Module 1

Enseignement des nombres naturels, de la numération et des opérations arithmétiques. A ce propos, seront introduites les notions fondamentales relatives aux situations d'enseignement : notion de situation fondamentale, variable didactique, typologie des situations d'enseignement, etc.

Module 2

Enseignement des rationnels et des décimaux, de la proportionnalité, des fonctions numériques. A ce propos seront introduites les notions d'obstacle en relation avec l'analyse des erreurs.

Module 3

Enseignement de la géométrie et de la mesure : illustration de certains aspects de la transposition didactique.

Module 4

Synthèse sur les concepts de didactique introduits lors des modules n° 1, 2 et 3

• 2me Année : L'enseignement sera réparti en quatre modules, le quatrième pouvant être traité de manière convergente dans les trois autres modules

Module 5

Enseignement dans le cycle des apprentissages premiers (structure des codages d'objets et de leurs propriétés)

Module 6

Enseignement dans le cycle des apprentissages fondamentaux (nombres naturels, mesure, espace, géométrie)

Module 7

Enseignement dans le cycle des approfondissements (espace et géométrie, rationnels et décimaux, opérations)

Module 8

Didactique : analyse de
- situations d'apprentissage
- travaux d'élèves
- situations d'enseignement

ANNEXES

Annexe 2

PLAN DU MODULE :
"L'ENSEIGNEMENT DES RATIONNELS ET DES DECIMAUX, DE LA PROPORTIONNALITE, DES FONCTIONS NUMERIQUES"

C'est avec ce module que l'enseignement a commencé.

Séance n°1

- présentations, organisation : calendrier, matériel
- programmes et compétences de l'école élémentaire
- premier regard didactique : les mathématiques et l'activité mathématique à l'école élémentaire.
- activités mathématiques à l'école : repérer le savoir en jeu.
    Exemple 1: la proportionnalité en CM2.
    Exemple 2 : la course à vingt.

Séance n°2

Phase 1 : Les nombres. Le point sur les ensembles de nombres. Test du DEA de Claire Margolinas (Margolinas, mémoire de DEA, Bordeaux 1985 : *Un bilan des connaissances sur les nombres après la classe de 4ème, le nombre dans tous ses états.*).
Les rationnels : à quoi ça sert ? A quelle nécessité correspond leur introduction ? Transition : quelle introduction au CM ?

Phase 2 : Situation "feuilles de papier" (N. et G. Brousseau *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, IREM de Bordeaux, 1987).

Phase 3 : La théorie des situations (cours de didactique).

Séance n°3

Phase 1 : Les nombres (suite). Suite de l'étude de la situation "feuille de papier". Etude des situations "partage de gâteaux" et "guide-âne".

Phase 2 : à partir de "guide-âne", comparaison de rationnels ; vers les décimaux. (COPIRELEM t. II p. 28). Bilan: cf p. 11 (historique et programmes successifs) p.18 (propriétés topologiques, facilités d'emploi)

Phase 3 : analyse de manuels sur l'introduction des décimaux : Objectif calcul (CM1) ; Diagonale et Apprentissages mathématiques.

Séance n°4

Phase 1 : Devoir n°1 (correction) : mise au point, réflexion sur la preuve en mathématiques.

Phase 2 : Introduction des décimaux en classe. Extraits de manuels. Travaux dirigés : analyser les différentes introductions proposées. (cf Fénichel, Pauvert : *L'épreuve de mathématiques au concours de professeur des écoles*, Armand Colin, 1997, Paris).

Les décimaux, approche historique (texte de Guy Brousseau COPIRELEM 95)

__Séance n°5 - 6__

Phase 1 : Cours: rationnels, décimaux. Correction du test de Margolinas.
Phase 2 : Les erreurs des élèves : explications, classification.
Phase 3 : Les conceptions de l'apprentissage. Cours de didactique: erreurs et obstacles.

Documents: Conceptions de l'apprentissage. Obstacles épistémologiques (texte M.Artigue dans RDM N° 10/2-3). Erreurs des élèves. TD: erreurs sur les décimaux (CRPE 95).

__Séance n°7__

Phase 1 : Fin du cours sur erreurs et obstacles.
Phase 2 : TD : le puzzle.

Documents: articles de M.Artigue et G.Brousseau sur obstacles et erreurs.

__Séance n°8__

Phase 1 : Correction du puzzle. La proportionnalité. Proportionnalité, linéarité. Cours.
Phase 2 : Introduction de la proportionnalité dans les classes. Etude de documents : Bordeaux 95, volet didactique.

Documents: Manuels - Concours.

__Séance n°9__

Phase 1 : Les procédures de proportionnalité. Les différents types de problèmes de proportionnalité.
Phase 2 : TD: exercices de proportionnalité. Lyon 96 (VM). Pour S10 : Bordeaux 96 (volet didactique).

__Séance n°10__

Phase 1 : Pourcentages. Fonctions numériques.
Phase 2 : Exercices sur les pourcentages. Sujets de concours avec pourcentages.
Bordeaux 96 (Volet mathématique).

__Séance n°11__

Phase 1 : Fonctions numériques : voir en annexe le plan du cours sur les fonctions.
Phase 2 : Bordeaux 96 (TE). Orléans 96. Exercices.

annexe 3

UN EXEMPLE DE TD DE DIDACTIQUE : LE PUZZLE, DEUX VERSIONS

TD VERSION 1

Les PE1 reçoivent le modèle du puzzle avec les questions posées aux élèves (p. 137/138 de "Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire", G et N BROUSSEAU, IREM de Bordeaux). (annexe 4)

Première partie : faites le travail demandé :
(agrandissement du puzzle, 4cm deviennent 7cm).

Après bilan sur ce travail et recensement des procédures employées par les étudiants, le formateur fournit la liste suivante de questions :

Questions:

- Quel est le savoir visé ?
- Quelles sont les procédures possibles ? Quelles sont les connaissances nécessaires pour commencer ce travail ?
- Quels sont les paramètres sur lesquels le professeur peut jouer pour modifier les procédures des élèves ? Comment les fixer ?
- Est-ce une situation a-didactique ? si oui détaillez-en les différentes phases et le déroulement possible.

Exploitation

- Recensement des procédures des étudiants ; compléter en donnant les autres procédures, y compris les fausses, si elles ne sont pas apparues.
- Reprendre la notion de variable didactique. Discuter les modifications possibles de 4cm→7cm.

Cours de didactique :

- Théorie des situations (reprise)
- Variable didactique (reprise)
- Dévolution et rôle du milieu.

TD VERSION II voir annexe 5, extraite des documents COPIRELEM de Pau.

Annexe 4

Module 8 - Activité 1 Séance 37

8.1 - AGRANDISSEMENT DU PUZZLE

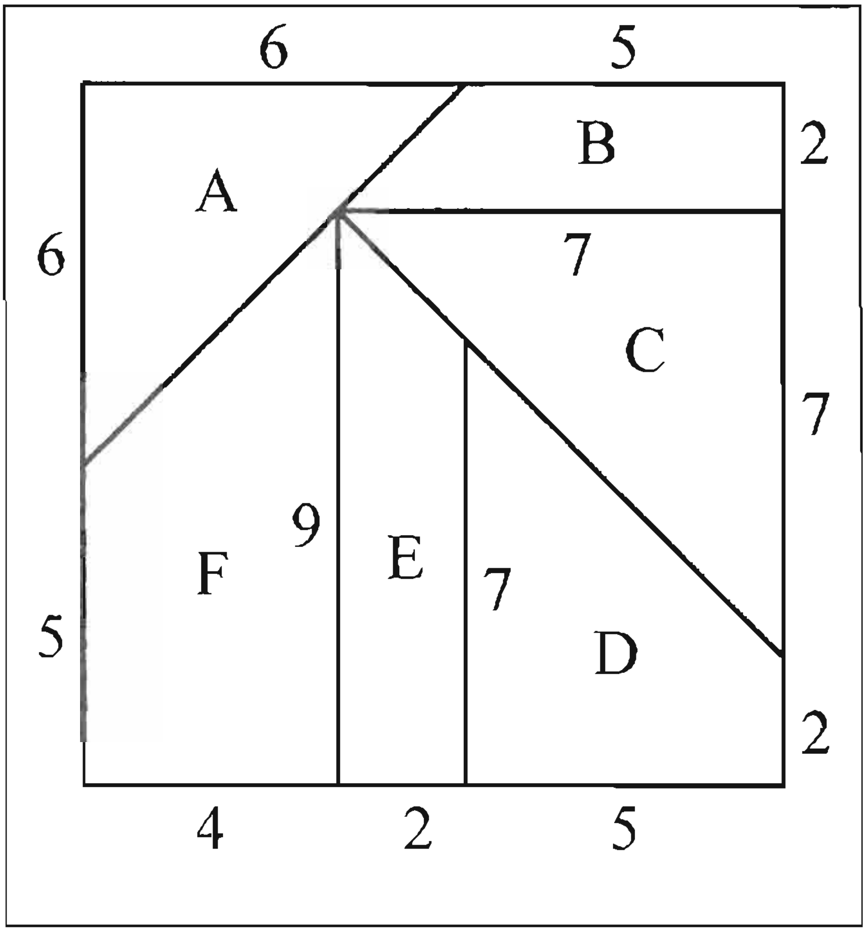
8-1-1 : Matériel :

- 6 à 8 puzzles (suivant le nombre d'enfants) dessinés sur des cartons rectangulaires de 20 cm x 15 cm.

- Pour chacun des puzzles, les 6 pièces (A, B, C, D, E, F) découpées dans le même carton. (chaque puzzle et ses 6 pièces sont placés dans une enveloppe)

- des feuilles de papier affiche (en très grand nombre) ou, quand c'est possible, des feuilles de papier quadrillé, ce qui facilite et rend plus rapide les mesures et les tracés.

- Un double décimètre par enfant.



8-1-2 : Situation-problème :

Consigne :

"Voici des puzzles. Vous allez en fabriquer de semblables, plus grands que les modèles en respectant la règle suivante : le segment qui mesure 4 centimètres sur le modèle devra mesurer 7 centimètres sur votre reproduction..

Je donne un puzzle par équipe. Chaque élève devra faire une ou deux pièces. Lorsque vous aurez fini, vous devrez pouvoir reconstituer les mêmes figures qu'avec le modèle".

Déroulement :

Les enfants sont partagés en équipes de 4 ou 5. Après une brève concertation par équipe, ils se séparent pour réaliser leurs pièces.
Le maître affiche (ou dessine) au tableau une représentation agrandie du puzzle complet.

.../...

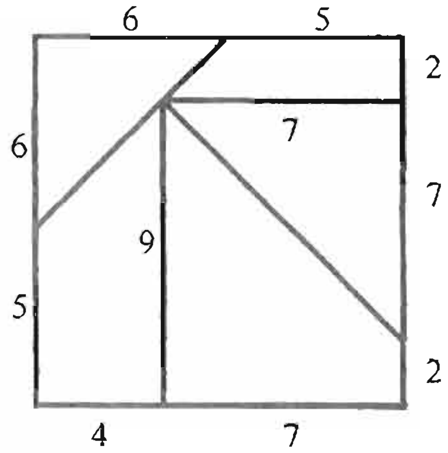
Annexe 5

Le Puzzle

Voici une situation pour une classe de CM2

Les enfants sont regroupés par équipes de 4 ou 5. Chaque équipe reçoit le puzzle ci-dessous.
La consigne donnée est la suivante :
"Chaque équipe a reçu un puzzle et doit reconstruire un autre, mais plus grand. Pour cela il faudra respecter la règle suivante : "un segment qui mesure 4 cm sur le puzzle que je vous ai donné devra mesurer 6 cm sur le puzzle que vous construirez".
De plus chaque élève de l'équipe doit fabriquer une seule pièce du puzzle.
Lorsque chaque élève de l'équipe aura terminé, vous assemblerez les pièces. Vous devrez alors obtenir un puzzle identique au modèle, mais plus grand".

Après la recherche par équipes, les différentes solutions sont communiquées lors d'une mise en commun.



1) Quelles sont les connaissances mathématiques concernées par ce travail ?
2) Quel est l'intérêt d'organiser un travail de groupe dans lequel chaque élève a une seule pièce à reconstituer ?
3) Voici quelques-unes des procédures couramment utilisées par les élèves dans cette situation :
    - *"On ajoute à chaque fois 2, puisque 4 doit faire 6"*
    - *"Il faut ajouter la moitié de la longueur de départ"*
    - *"Il faut multiplier chaque longueur par 1,5"*
    - *"Puisque 4 donne 6, 2 donne 3, 6 donne 9 ... ".*

Comparez ces différentes procédures et les représentations de la situation auxquelles elles correspondent.

4) Que attendre l'enseignant de la mise en commun ?
5) Voici deux modifications de la consigne :
    - *"Ce qui mesure 4 cm devra mesurer 8 cm... "*
    - *"Ce qui mesure 4 cm devra mesurer 7 cm... "*

Quelles modifications ces changements de consigne sont-ils susceptibles d'introduire dans les procédures utilisées par les élèves ?

Annexe 6

Connaissances de géométrie pour le concours

- celles exigibles des élèves jusqu'à la 5ème incluse
- une partie de celles nécessaires aux démonstrations relevant de l'enseignement au collège et plus précisément :

  * Connaissances des propriétés métriques et angulaires des triangles et des quadrilatères
  * Médiatrice d'un segment, bissectrice d'un angle et leurs propriétés dans le triangle
  * Théorème de Pythagore et sa réciproque
  * Théorèmes des milieux et de Thalès dans le triangle et leurs réciproques

Annexe 7

Module 3-2 Décrire un objet géométrique et / ou le construire à partir d'une description

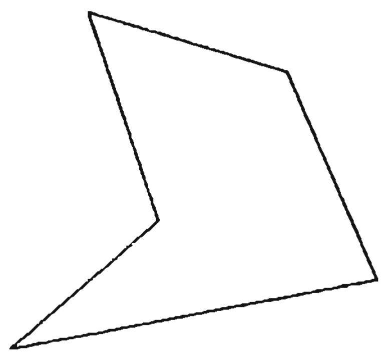
Décrire prend du sens dans une situation de communication où les tâches des émetteurs et des récepteurs sont différentes.
Il s'agit pour l'émetteur de produire et communiquer des informations permettant à un récepteur de construire un objet géométrique identique au modèle.

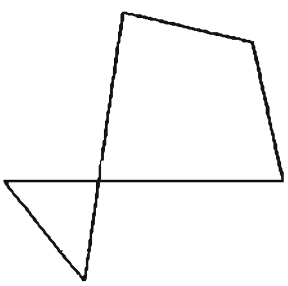
Activité 1
L'objet géométrique est un assemblage de cubes. Aucune contrainte n'est fixée aux émetteurs qui peuvent utiliser les moyens de description qu'ils veulent : texte, dessins, schémas etc...

Activité 2
L'objet géométrique est une figure dessinée sur une feuille (voir ci-dessous). Il est demandé aux émetteurs d'utiliser une description qui ne comporte pas de dessin ni schéma.
Les instruments utilisés sont différents suivant les tâches.

Activité 3
Le meneur de jeu dispose d'un triangle dessiné T. les participants doivent par équipe, lui demander par écrit les renseignements leur permettant de construire un triangle superposable à T. Gagnent les équipes qui ont réussi à construire le triangle superposable en demandant le moins de renseignements possible.
La phase d'action est suivie d'un examen collectif des listes de demandes de renseignements : celles qui permettent de réussir et les autres. Des conclusions plus générales sont tirées.

Bilan des connaissances utilisées ou évoquées lors de la séance





Annexe 8

Module 3.3. Conjecturer et démontrer

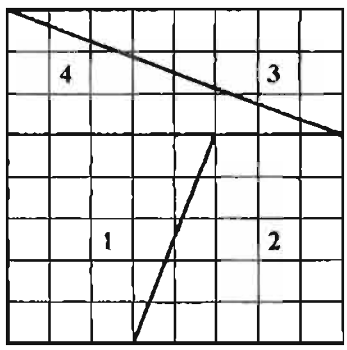
Objectifs : différencier approche spatiale et approche géométrique et expliciter la signification de la phrase "Faire de la géométrie, c'est raisonner juste sur des figures fausses".

Activité 1
Construire un segment [AC] de 6 cm de longueur. Construire un triangle ARC tel que AR mesure 4,8 cm et RC 3,6 cm. Construire un triangle TAC tel que TA et TC mesurent 4,2 cm.
A l'aide de vos instruments de géométrie, répondez aux questions suivantes :
1) ARC est-il un triangle rectangle ? et TAC ?
2) O désigne le milieu de [AC]. Le triangle TOR est-il isocèle ?
3) Tracer le cercle de diamètre [AC]. T et R sont-ils des points du cercle ?
Refaites la figure en multipliant les mesures par 2. Faites-vous les mêmes réponses ?

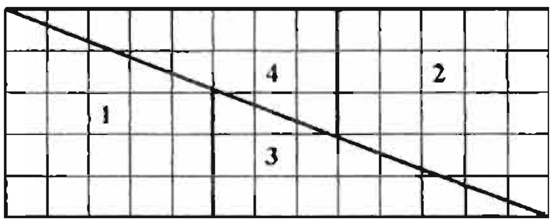
Activité 2 (Réflexion sur une activité proposée en 5ème)
Consigne donnée par le professeur aux élèves (qui n'ont jamais réalisé cette figure) : "Tracez un triangle ABC dont un angle est obtus et les côtés de longueur supérieure à 10 cm. Tracez les 3 médiatrices de ce triangle à l'aide d'une équerre. Vous obtenez un petit triangle A'B'C' .Essayez de construire des triangles pour lesquels le triangle formé par les intersections des médiatrices soit beaucoup plus grand."
Effectuez les constructions demandées, précisez ce qui se passe et essayez d'expliquer pourquoi le professeur donne cette consigne aux élèves.

Activité 3 : Le paradoxe de Lewis Carroll (ou comment vérifier que 64 = 65)

Prenons une feuille de papier quadrillée et divisons-la en 64 petits carrés, comme un échiquier.
Découpons-la de manière à avoir deux triangles et deux trapèzes comme sur la figure (a) et disposons ces moceaux comme l'indique la figure (b).
Le rectangle ainsi obtenu a des côtés qui mesurent respectivement 5 et 13 unités de longueur,
de sorte que sa surface est :
5 x 13 = 65 petits carrés,
alors que la figure dont on est parti mesurait : 8 x 8 = 64 petits carrés.
D'où est venu le carré supplémentaire ?



(a)



(b)

Quelles questions pose l'existence des phénomènes relevés au cours de ces trois activités ?

Annexe 9

PE1 Module 3

Plan du cours sur l'enseignement de la géométrie à l'école primaire

I. Introduction : La géométrie, objet de questionnements à l'école primaire

II. Connaissances spatiales et connaissances géométriques

A. Les différences

1. Leur genèse chez l'enfant
2. Les types de problèmes
3. Le vocabulaire
4. L'organisation des connaissances

B. Les rapports

III. Les programmes de l'enseignement de la géométrie

A. Présentation des programmes de 95

B. De quel type de géométrie s'agit-il ?

1. La géométrie "mathématique"
2. Les connaissances nécessaires à la maîtrise des rapports spatiaux.

IV. Les compétences des élèves à l'issue de l'école primaire

A. Concernant les maîtrises spatiales

B. Concernant les connaissances enseignées jusqu'au CM2

V. Les difficultés de l'enseignement de la géométrie

A. Les différents types de figures et leurs usages

B. Il ne suffit pas de regarder l'espace sensible pour "trouver" l'espace géométrique

C. L'enseignement de la géométrie suppose des compétences spatiales rarement repérées et travaillées.

D. A un même énoncé, correspondent des problèmes complètement différents en fonction de la valeur de certains paramètres

1. Rôle de la taille de l'espace
2. Rôle de la nature des instruments

E. Le langage et les notations

VI. Quelques directions de travail pour l'enseignement tenant compte de ces analyses

Annexe 10 : Devoir (donné après le travail sur les révisions des théorèmes en géométrie)

I) Voici deux des messages envoyés par deux d'entre vous pour décrire le pentagone non croisé de la séquence 3-2

Message 1

- Tracer un segment [AB] de 5 cm. Reporter une longueur de 10 cm en B et une longueur de 8,6 cm en A. Noter C le point d'intersection.
- Tracer les segments [BC] et [CA]
- Noter D le milieu de [CB]. Effacer le segment [OB].
- Reporter une longueur de 5 cm en B et de 5 cm en D. Noter E le point d'intersection
- Tracer les segments [DE] et [BE].

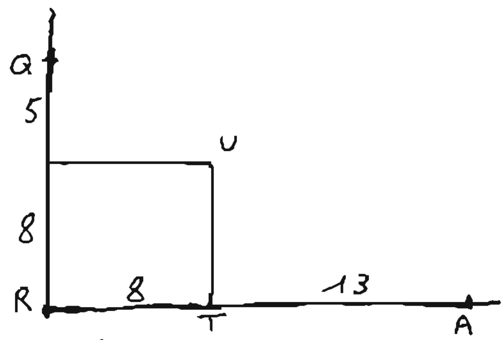
Message 2

La figure est composée d'un losange et d'un triangle.
Le triangle ABC est isocèle. AB = AC = 5 cm et BC = 8,6 cm.
AC sera un côté du losange ACDE
Le losange comporte 4 côtés égaux de 5 cm. AD et CE seront les diagonales.
AD = 5 cm, et CE = 8,6 cm.
Un angle droit est formé entre BC et CD. Ainsi, B, A et D seront alignés. La figure obtenue sera un polygone ABCDE.

Questions :

1) Réécrire ces messages, sans en modifier les informations mais en utilisant les formulations et les notations correctes enseignées au collège.
2) Si l'on construit la figure à partir des instructions du message 1, montrez que l'on peut justifier, en s'appuyant sur une démonstration, l'énoncé de toutes les propriétés données par la description 2.
3) Le message 2 est redondant. Donnez-en une version allégée, correspondant à la même décomposition de la figure mais comprenant le nombre minimum d'informations nécessaires à sa réalisation.

II) D'après le sujet Bordeaux 94



A) Le dessin ci-contre est un dessin à main levée.
Les dimensions sont données en centimètres.
1) Décrivez cette figure, pour que quelqu'un qui ne dispose que de votre description puisse la construire.
2) Démontrez que l'on peut construire la figure en ne construisant qu'un couple de droites perpendiculaires. Effectuez la construction à la règle et au compas.
3) Quelle conjecture pouvez-vous faire à propos des points Q, U, et A ?
En vous appuyant sur la comparaison de l'aire du triangle QRA, et de la somme des aires des triangles QEU, TUA, et du quadrilatère REUT, confirmez ou infirmez cette conjecture par une démonstration.
4) Trouvez une autre méthode pour démontrer ce résultat.

Annexe 11

FONCTIONS

FICHE N; 1

M est un point de [Ox]. On pose : x = OM

I. a) Pour le point M tracé sur la figure

- tracer en rouge un carré d'aire x^2, dont O et M sont 2 sommets
- tracer en vert un rectangle d'aire x, dont O et M sont 2 sommets

b) Refaire les constructions du a) pour les valeurs de x suivantes :

x = 0,2 ; x = 0,4 ; x = 1 ; x = 1,2 ; x = 3 . *Il n'est pas nécessaire de donner les valeurs, on peut demander d'étudier la situation proposée.*

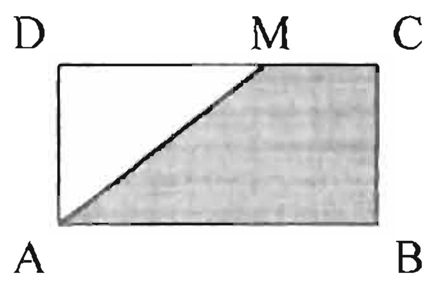
II. Dans quels cas l'aire du carré est-elle plus grande que celle du rectangle ?
Dans quels cas l'aire du rectangle est-elle plus grande que celle du carré ?
Ecrire la propriété algébrique que l'on constate ainsi.

III. Représenter sur un même graphique
- l'aire du carré en fonction de son côté
- l'aire du rectangle en fonction du côté OM

Comment se traduit sur le graphique la propriété constatée au II ?

FICHE NUMERO 2

ABCD est un rectangle (AB = 4 ; AD = 2). Un point M décrit le parcours ABCDA, x est la longueur du trajet et y l'aire balayée par AM (hachurée sur la figure).



I. Dans chacun des cas suivants : a) x = 3 ; b) x = 5,5 ; c) x = 9 ; d) x = 11

- faire une figure à l'échelle
- placer M et hachurer la surface correspondante
- calculer l'aire de la surface hachurée

II. On cherche à déterminer un moyen de trouver cette aire y sans faire le calcul ˆ chaque fois.

a) Pour quelles valeurs de x le problème a-t-il un sens ?

b) Exprimer y en fonction de x

c) Représenter graphiquement y en fonction de x

d) Pour quelle valeur de x l'aire obtenue est-elle égale à 7 ? Faire une figure en plaçant le point M correspondant.

FICHE NUMERO 3

Soit une droite D munie d'un repère (O, I), un point A fixe situé à la distance 1 de cette droite, et O sa projection orthogonale sur D. (O, I, A) est donc un repère orthonormé du plan.

Soit M le point d'abscisse x sur D et M' un point de D tel que MAM' soit un triangle rectangle.

On appelle x' l'abscisse de M' dans (O, I).On se demande comment varie x' quand le point M se déplace sur la droite D.

On peut demander simplement d'étudier la situation de départ, M étant un point variable sur D. Cependant l'expérience prouve qu'un étudiant littéraire peut se sentir totalement démuni devant cette question.

I. a) Faire le schéma pour plusieurs valeurs de x, sur une même figure ; choisir une couleur différente pour chaque triangle.

Trouver la valeur de x' en fonction de x. La construction de M' est-elle toujours possible ? Retrouver algébriquement ce résultat.

b) Soit M_1 d'abscisse 1, M_2 d'abscisse 2, M'_1 et M'_2 les points correspondants.

Si M se déplace de M1 à M2, comment se déplace M' ?

Traduire cette constatation par des encadrements : si < x < alors < x' <

Retrouver algébriquement ce résultat.

c) Que fait M' : - lorsque M s'éloigne de O sur] O I) ?

- lorsque M se rapproche de O sur] O I) ?

Traduire ces phrases en termes d'abscisses.

d) Au point M d'abscisse 2 correspond M' d'abscisse -1/2. Quel est le "correspondant" du point M' d'abscisse -2 ? Pouvez vous généraliser ce résultat ?

II. a) En utilisant I a, tracer, dans un repère (O,i j), la représentation graphique de x' en fonction de x.

b) Comment se traduit sur la courbe la constatation de I d ?

c) Interpréter à l'aide de la courbe les résultats du I a, I b, et I c.

FICHE NUMERO 4

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O,i, j), soit le demi-cercle de centre O et de rayon 1 situé dans le demi-plan supérieur.

I.a) A tout point M de l'axe (xx') on associe (lorsqu'il existe) le point N du demi-cercle tel que M et N ont même abscisse. Où doit se trouver M pour que N existe ?

b) Soit x l'abscisse de M. Traduire la condition précédente pour x

c) Exprimer en "fonction" de x l'ordonnée du point N correspondant. Retrouver les conditions d'existence du point N.

d) Soit M d'abscisse x et M' d'abscisse -x. Quelle est la transformation géométrique qui fait passer N à N' ?

II. Trouver y pour x Î {-1 ; -0,8 ; -0,2 ; 0 ; 0,2 ; 0,5 ; 1}. Représenter graphiquement y en fonction de x. Que constatez-vous ?

VARIANTE (nettement plus difficile) :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O,i,j), soit le quart de cercle de centre O et de rayon 1 situé dans le demi-plan supérieur.

A tout point M d'abscisse x de l'axe [Ox), on associe l'aire A(x) du rectangle OMNP, où N est le point du quart de cercle d'abscisse x, et P la projection de N sur [Oy).

Point de vue numérique : calculer A(x) pour un certain nombre de valeurs de x ; A(x) semble passer par un maximum, pour x voisin de 0,7. Quelle est l'expression algébrique de A(x) ?
Point de vue géométrique : Prouver que A(x) est maximale lorsque l'angle MON a pour mesure 45¡ (chercher le maximum de l'aire d'un triangle rectangle d'hypoténuse donnée).

Annexe 12

PLAN DU COURS SUR LES FONCTIONS (ASPECT DIDACTIQUE)

I FONCTIONS NUMERIQUES : NOTION DE VARIABLE.

Représenter un nombre par une lettre : les règles relatives aux opérations ("terme", somme de plusieurs termes ; et un produit ? ...).

Trois aspects des variables :

- indéterminée (cas des égalités remarquables, passer dans le cadre géométrique)
- inconnue
- paramètre (sans insister sur ce dernier)

Les problèmes de didactique de l'algèbre ; 3 raisons pour ne pas introduire l'algèbre trop tôt :

- se donner le temps du travail arithmétique (cf Chevallard)
- statut des symboles en mathématiques (ceci n'est pas un triangle : Æ - ceci n'est pas le nombre trois : 3 - ceci n'est pas la variable x : x)
- difficultés de manipulation des lettres ; ex: -5 <0 mais -a = opp(a) pas toujours <0 ; mais - √x <0 !

II FONCTIONS : QUELQUES REMARQUES DIDACTIQUES

3 points de vue :

- variation conjointe
- correspondance
- provision

Quels sont les types d'exercices pour introduire les fonctions, et lesquels sont pertinents par rapport à ces points de vue ? (brièvement, en liaison avec fonctions connues, du programme, essentiellement linaires et affines).

Représentants d'une fonction
Les différents cadres de représentation (numérique, algébrique, graphique, géométrique, symbolique)
Caractéristique des représentants : caractère partiel et risque d'ambiguïté didactique accru par le caractère très abstrait du concept (ceci n'est pas une fonction).

LES PROBLEMES DU PRIMAIRE : FORMATION DES PROFESSEURS DES ECOLES A L'ANALYSE DE LEURS VARIETES ET DE LEURS PROCEDURES DE RESOLUTION.

Ch. Davaine, H. Delègue, M.Lardey, J.Roussel, O.Teiten

Résumé : Il s'agit d'un atelier qui s'est appuyé sur le compte rendu d'un travail de recherche effectué à l'IUFM Nord Pas de Calais, réunissant des formateurs de différentes origines (professeurs de trois disciplines, conseillers pédagogiques et maîtres formateurs) dans des actions visant la formation des PE1.
Ces formations visent à préparer les PE1 au choix et à la rédaction de problèmes de réinvestissement en attirant leur attention sur la complexité liée à la compréhension de textes et à l'utilisation de représentations.

La séance s'ouvre à partir d'une illustration tirée d'un livre de littérature enfantine
« C'EST QUOI LE PROBLEME ? »
Il s'agit d'un champ très vaste. Quels sont les problèmes concernés ? Le groupe n'envisage pas l'étude des problèmes visant l'introduction de nouvelles notions pour la résolution desquels le maître explicite toutes les informations sauf celles concernant les procédures. La recherche vise à sensibiliser les PE à la complexité des problèmes présentés sous forme d'énoncés.
Présentation générale:

A POINTS DE DEPART DE LA RECHERCHE

1. Constat des difficultés que rencontrent les PE à mobiliser les connaissances didactiques en dehors des épreuves du concours (par exemple, savoir exploiter les résultats des élèves, savoir rédiger des énoncés pour leurs élèves dans le cadre de leur pratique professionnelle et dans celui de leur mémoire.

2. Constat de difficultés que rencontrent les P.E 1 comme candidats à un concours qui comporte des épreuves en général supérieures à leurs compétences (pour la plupart, leurs connaissances mathématiques correspondent à celles qu'ils avaient à la fin du collège) :

a) lecture et compréhension de documents. Il semblerait qu'ils n'utilisent pas les informations graphiques, statistiques, les tableaux .
b) argumentation et production des documents personnels.
c) analyse des pratiques (mise en relation des éléments didactiques et des observations réalisées lors des stages)

B METHODOLOGIE

- L'équipe est constituée de formateurs remplissant des fonctions différentes (maîtres formateurs, conseillers pédagogiques, professeurs de disciplines différentes)
- Chaque membre de l'équipe résout les problèmes (prise en compte des réflexions de chacun) avant de les soumettre aux PE ou à des élèves de l'école élémentaire pour envisager les activités de formation correspondantes :
  - Compréhension d'un énoncé
  - Modélisation de situations
  - Changement de registre : conversion du texte ou de l'énoncé en représentation(s) pour rendre le traitement possible.
  - Mise en œuvre de traitements
  - Etayage d'une réponse par un écrit
  - Poursuite de la recherche après avoir déterminé la ou les solution(s).

Au-delà des recherches entreprises dans les relations math/français, le groupe se place sur le plan de la compréhension de documents : formation complémentaire math/français, approches différentes des disciplines (philosophie, français , littérature, domaine scientifique, histoire...)

C. TRAVAIL MENE AU COURS DE L'ATELIER

L'atelier s'est poursuivi par l'étude avec les participants de trois exemples d'activités qui ont été menée avec les PE1:

1. *Un travail mené uniquement avec des PE1 confrontés à des problèmes additifs.*
2. *Analyse par des PE1 d'une suite d'activités menées avec des élèves de CE1.*
3. *Analyse a posteriori par les PE1 d'un travail mené par une conseillère pédagogique de circonscription avec une classe de CM2.*

1. Travail avec les P.E 1 confrontés à des problèmes : mise en cohérence de ce qui a été étudié en mathématiques, en français et en sciences humaines

C'est un travail mené avec deux groupes soit 58 étudiants dont le cursus se répartit ainsi :1/3 en Lettres Langues, 1/3 en Sciences humaines, 1/3 dans des disciplines Scientifiques dont géographie, sociologie.
Dès la première séance de mathématique, ils ont eu à résoudre les énoncés qui figurent en annexe 1 (la présentation permet d'évaluer le temps passé et d'enregistrer d'éventuels commentaires).
Immédiatement après, les problèmes sont corrigés individuellement ; plus tard les PE1 seront amenés à réagir sur les résultats du groupe.
Les réponses données à deux énoncés sont communiquées aux participants à l'atelier qui ont à en faire une analyse.

Enoncé 1
Lundi après-midi, Pierre a reçu 750F de ses parents ; il fait plusieurs achats importants et le soir il constate qu'il a 378F de moins que le matin. Combien a-t-il dépensé ?

Résultats :
(voir en annexe les consignes de passation et le modèle de feuille de réponse)
Le temps passé par chaque étudiant varie de 30 s à 8 min ; la plupart passant de 1min à 5min, sur cet énoncé. Ces informations confirment qu'ils se sont rarement contentés d'une lecture superficielle mais ont considéré qu'il y avait une réelle difficulté. Les brouillons comportent souvent plusieurs opérations ; quand l'addition 378+750 est posée, elle est reprise pour la réponse.

Réponses : 36 étudiants ont trouvé 378 F; 11 ont trouvé 372F ; 9 ont trouvé la bonne réponse 1128 F ; 2 ont indiqué qu'ils n'y avait pas de réponse possible.

On trouve aussi des commentaires comme : « *ce n'est pas un problème de math* ».

Enoncé 2
Au premier semestre, la France a enregistré un déficit commercial de 476 millions de francs A la fin de l'année, on constate que pour l'année 1996, la balance commerciale a enregistré un excédent de 1,3 milliards de francs. Que s'est-il passé au second semestre ?

Résultats
Le temps passé est équivalent, mais une observation directe permet de penser que le temps passé est surtout consacré à la conversion des grands nombres.
Réponses : Il est réussi par 47 étudiants sur 58, les 11 autres ont fait des erreurs de calcul (conversion milliards/millions). Tous effectuent un calcul numérique dont le signe est donné par une proposition "il y a un déficit", "on a gagné".
Ce problème n'a donné lieu à aucun commentaire.

Echanges entre les participants à l'atelier à partir de la question :
- *Comment interpréter la différence significative des performances sur les deux énoncés ?*
- *Ce sont des problèmes équivalents selon la classification de Vergnaud sur les structures additives.*

Suite à ces échanges, il est présenté aux participants la suite du travail mené avec les PE1 ainsi que les liaisons qui ont été établies avec les enseignements dispensés en français et en sciences humaines.

En français, dès le premier trimestre, les étudiants travaillent la compréhension de textes pour préparer l'épreuve de synthèse de document.
Cette épreuve se concrétise par une forme imposée : une lecture de textes avec compréhension fine et production d'écrit (distinguer l'essentiel de l'accessoire, comparer des textes, comprendre rapidement les thèses sous-jacentes, percevoir les ressemblances et les différences.. .). Cet exercice n'est pas travaillé au BAC, quelquefois en Université DEUG, BTS.

Présentation des compétences que nécessitent cette épreuve (annexe 2) illustrée d'exemples.

En sciences humaines, une séance a été consacrée à la compréhension d'un article de Gérard Vergnaud (1976) sur les problèmes additifs.

A la fin du premier trimestre, les PE1 sont conduits à analyser les résultats du groupe aux énoncés 1 et 2. Cette séance est observée par le professeur de Français et celui de Sciences Humaines.
Première réaction : dans chaque groupe au moins un étudiant ayant fait le lien avec les catégories citées dans l'article de G. Vergnaud, tous les groupes se précipitent sur cette catégorisation. Le débat entre PE porte sur l'identification de « la bonne catégorie » qui justifierait sans plus de réflexion les différences de performances.
Seconde analyse dans quelques groupes : des remarques sur la formulation de l'énoncé 1.

- la chronologie n'est pas respectée,
- le mot *dépenser* induirait le signe moins,
- la relation entre les différents temps interviendrait dans le choix de l'opération (le passé composé qui pourrait indiquer une antériorité).

A ce stade de l'analyse, il est demandé aux PE de reformuler l'énoncé pour que ce soit un « bon problème de math », tout en respectant la situation.

Présentation à l'atelier des énoncés produits.

Constats sur ces nouveaux énoncés :
Ils ont peu modifié la syntaxe.
Certains ont défini ou symbolisé une somme initiale pour rétablir la chronologie.
Exemple : quand une étudiante (en très grande difficulté en math) a été amenée à écrire le problème, elle a pris conscience de la manière de rétablir une chronologie, de la nécessité d'utiliser un vocabulaire adapté.
Certains n'ont réussi une reformulation qu'en changeant la situation (ex : introduction d'une caissière) pour transformer le problème en un problème d'états successifs (prégnance de la catégorisation)
D'autres ont travaillé en se donnant des consignes : sur les verbes, les temps employés, la chronologie, la chasse à l'implicite.

2. Analyse par des PE1 d'une suite d'activités menées par un maître formateur avec des élèves de CE1.

Présentation à l'atelier d'un problème proposé dans une classe de CE1. Cette présentation devait être effectuée par la maîtresse de la classe, Madame Beulque, qui fait partie de l'équipe de recherche ; mais l' I.E.N. a posé son veto à la venue de cette EMF au colloque, suffisamment tard pour qu'une réaction institutionnelle ne puisse avoir lieu. Nous l'avons <u>partiellement</u> remplacée.

<u>Problème de Grégory</u>

> Grégory habite un immeuble très haut. Il rend visite à Virginie qui habite 5 étages au-dessus de lui. Ensuite il va rendre visite à Bénédicte. Il doit remonter de 8 étages. Combien d'étages y a-t-il entre l'appartement de Virginie et celui de Bénédicte ?

Remarques des participants de l'atelier:
Le texte est ambigu (1° lecture : on pense à 8 étages ; 2° lecture on se demande s'il manque un membre de phrase « pour revenir chez lui ») pourquoi cette négligence?

L'objectif poursuivi dans cet exercice est justement de conduire les élèves à dire que l'énoncé est ambigu, qu'il permet plusieurs lectures (à rapprocher des lectures plurielles d'un même texte en français). Ensuite on demandera à ces élèves de le réécrire pour lever l'ambiguïté . Certains participants restent sceptiques sur le bien fondé de cette démarche.

Le même énoncé a été présenté aux P.E 1. Pour une analyse a priori.
Ils ont perçu que le problème était un problème de compréhension .
Ils ont proposé 3 interprétations conduisant à trois réponses:

il y a 8 étages
il doit remonter de 8 étages pour remonter chez lui → (8+5=13 étages) ;
il rentre chez lui entre les deux visites, il y a alors 3 étages (8-5).

Ils ont pensé qu'une représentation faciliterait la compréhension des élèves de CE ; alors que pour le problème de Pierre (énoncé 1), ils avaient relevé la difficulté d'une représentation.
Après cette analyse, les PE visionnent le film tourné dans la classe qui met en évidence la manière dont la maîtresse de la classe a mis en œuvre cette séance :

Lors du lancement, elle ne propose pas de représentation au tableau.
Lecture silencieuse de l'énoncé.
Explicitation du lexique mais pas de la situation (elle ne cherche pas à souligner l 'ambiguïté)
Consigne : donner une réponse puis justifier cette réponse.
Le travail est individuel ; il n'y a pas de demande explicite de schéma (on remarquera d'ailleurs que la schématisation intervient après le calcul comme illustration de l'exécution de ce calcul et non comme explication de la situation).

Présentation à l'atelier de réponses d'élèves de CE1 : analyse et commentaires par les participants. On constate une grande diversité de schémas souvent non pertinents pour représenter la situation (ensembles, opérateurs)

2° étape pour les élèves de CE1 : plusieurs jours plus tard, on propose le même problème avec une autre situation (changement de prénoms, de nombres (5 et 6), mais la formulation est identique).

Rémi habite un grand immeuble. Il rend visite à Léa qui habite 5 étages au-dessus de lui. Ensuite il rend visite à Valérie. Il doit remonter de 9 étages. Combien d'étages y a-t-il entre l'appartement de Léa et celui de Valérie ?

Les élèves résolvent le problème sans dire que c'est le même ni qu'il y a deux solutions.
Ils retrouvent soit l'une soit l'autre , 9 ou 4 (on retrouve l'ambiguïté de l'énoncé).
Puis la maîtresse, sans avoir corrigé, donne la consigne: « sans écrire votre résultat, faites un dessin qui permettra à un autre élève de la classe de retrouver la solution que vous avez choisie »
3° étape : la réécriture :
Les élèves sont répartis en 4 groupes de 6. Critères : groupes constitués selon leurs compétences de production écrite.
Consigne : produire un énoncé sans ambiguïté qui conduit à la solution 1 ou à la solution 2 (choix donné par un tirage au sort)
l'enseignante prend en charge le groupe constitué d'élèves en difficulté pour la production d'écrits. Elle procède par une dictée à l'adulte (activité pratiquée depuis la maternelle :ce n'est pas une simple transcription d'un oral. Il s'agit de la construction d'un texte en

interaction avec les élèves qui proposent individuellement des éléments que la maîtresse aide à structurer)
Les deux solutions produites par les groupes reposent sur la polysémie d'*ensuite*.
Ces étapes ultérieures n'ont fait que l'objet d'une présentation a posteriori chez les PE1

3.Analyse a posteriori par les PE1 d'un travail mené par une conseillère pédagogique de circonscription avec une classe de CM2.

Réflexion de l'atelier sur le compte rendu de l'accompagnement d'une classe dont les élèves sont confrontés à des problèmes que leur maître habituel n'a pas l'habitude de leur proposer.

Il s'agit d'une classe rurale, (petit bourg, pas d'école privée, tous les milieux) dont le maître chevronné est très traditionnel, ses résultats sont reconnus par la hiérarchie et appréciés par les professeurs de 6° car correspondant à leurs attentes.
Ce maître impose l'utilisation d'une *méthode de raisonnement logique* (je cherche, je dois connaître). Les problèmes qu'il propose se prêtent parfaitement à cette méthode.
Il fait preuve d'une grande ouverture et accepte une remise en question de sa pratique.
Une intervention de la C.P.C. a lieu chaque semaine dans la classe : il ne s'agissait pas d'imposer un mode de travail au maître mais d'envisager une transformation à long terme.
Le choix des problèmes est modifié. Auparavant le maître procédait à des réécritures de problèmes de manuels pour s'appuyer sur le contexte et l'environnement des enfants. Ces problèmes étaient le plus souvent l'application d'une notion récemment apprise (ex : technique opératoire, manipulation de mesures ...). Il s'agit maintenant d'énoncés de problèmes permettant plusieurs lectures ou bien posant des problèmes d'ancrages multiples du raisonnement par rapport aux situations réelles évoquées ou encore permettant l'utilisation de plusieurs modèles mathématiques.
L'atelier se termine en étudiant plus particulièrement le compte rendu d'une séance portant sur l'adaptation du problème des tomates (G. Le Poche, IUFM de Rennes, brochure COPIRELEM).

Les tomates

> Un gérant de supermarché achète 125 cageots de 12kg de tomates à 6F75 le kilogramme. Il revend les tomates à 10F80 le kilogramme et fait un bénéfice de 4941F.
> On demandait combien de kilogrammes de tomates n'ont pas été vendus ; Pierre a trouvé 105kg, peux-tu dire comment il a fait ?

Les discussions font apparaître
Le problème est mal formulé car il n'explicite pas comment se calcule le bénéfice indiqué :

- *Soit il s'agit de la différence entre la somme reçue lors de la vente (que l'on considère comme terminée, le reste des tomates étant perdu) et la somme dépensée pour l'achat ;*

- *Soit on considère que les tomates non vendues gardent leur valeur potentielle de vente et n'occasionnent aucune perte : le bénéfice se calcule alors pour chaque kilogramme vendu.*

Mise en évidence du choix de l'ancrage pour initier le raisonnement :
Premier ancrage : on part des 1500kg à 6F75, on calcule le prix de vente puis la quantité vendue.

Second ancrage : on part des 10F80 et de 6F75 pour calculer le bénéfice au kilogramme

	Quantité de tomates (masses en kg)	**Prix au kilo. (coeff. en F/kg)**	**Prix (en F)**
Achat	**1500**	**6,75**	**10125**
Vente	**1220** **1395**	**10,80**	**15066**
Bénéfice		**4,05**	**4941**

ANNEXE 1 :EXERCICES POSES AUX PE

Consignes figurant sur la page de garde du polycopié d'exercices :

Pour chacun des exercices joints, il est nécessaire de suivre les consignes ci-dessous.

- Vous devez utiliser uniquement la feuille polycopiée pour y faire vos recherches.
- Vous pouvez annoter l'énoncé et la présentation de la partie "brouillon" n'a aucune importance ; si elle est trop réduite, utilisez le verso de la feuille.
- La partie " votre réponse " doit être une justification courte mais rédigée de la solution.
- Vous pouvez penser qu'il y a plusieurs solutions ou au contraire que les informations fournies ne sont pas pertinentes pour répondre : ceci peut être " votre réponse "
- Pour tous vos travaux vous pouvez utiliser des couleurs mais jamais de gomme ni d'effaceur.
- Si vous éprouvez le besoin d'utiliser une calculatrice, indiquez les calculs que vous effectuez ainsi.
- N'oubliez pas de noter l'heure de début et l'heure de fin de chaque exercice et de calculer la durée en minutes.
- <u>Ne revenez pas sur un exercice traité antérieurement</u>, mais une fois tous les exercices traités, vous disposez du bas de la feuille pour exprimer un avis sur votre propre réponse ou sur le thème ou l'énoncé de cet exercice.

Exemple de la présentation de chacun de ces exercices (1 feuille/exercice)

Heure de début de lecture: heure de fin de la rédaction: durée:
énoncé:

> *Lundi après-midi, Pierre a reçu 750F de ses parents; il fait plusieurs achats importants et le soir il constate qu'il a 378F de moins que le matin. Combien a-t-il dépensé?*

brouillon de recherche:
rédaction de votre réponse:
commentaire:

Enoncés proposés

énoncé 1:

Lundi après-midi, Pierre a reçu 750F de ses parents; il fait plusieurs achats importants et le soir il constate qu'il a 378F de moins que le matin. Combien a-t-il dépensé?

énoncé 2:

Au premier semestre, la France a enregistré un déficit commercial de 476 millions de francs. A la fin de l'année, on constate que pour l'année 1996, la balance commerciale a enregistré un excédent de 1,3 milliards de francs. Que s'est-il passé au second semestre?

énoncé 3:

Un fleuriste possède 3 fois plus de cactus que d'orangers. S'il avait 10 orangers de plus, il aurait le même nombre de cactus et d'orangers. Combien possède-t-il de plantes de chaque sorte?

énoncé 4:

Une ligue de hockey a neuf équipes. Durant la saison, chaque équipe doit jouer trois parties contre chacune des autres équipes. Quel est le nombre de parties jouées?

énoncé 5:

Un jour, Audrey achète des petits pains à 3 pour 1 franc. Elle les revend 2 pour 1 franc. Si elle a réalisé 18 francs de bénéfice, combien a-t-elle vendu de petits pains ce jour là.

énoncé 7:

José possède 20 pièces de monnaie de 5c et 10c dont la somme représente 1F40c. Il utilise 8 pièces pour acheter un bonbon de 65c. Combien de pièces de 5c lui reste-t-il?

énoncé 8:

Au moment des tests, Hugues a calculé qu'avec 15 exercices à solutionner en deux heures, il devait consacrer en moyenne 8 minutes par exercice. Selon son évaluation cependant, certains problèmes difficiles lui prendraient deux fois plus de temps. D'autres plus faciles, deux fois moins de temps. Hugues a réussi à compléter l'épreuve en temps voulu et en respectant ses prévisions.
Peut-on savoir combien de problèmes étaient difficiles?
Est-il possible qu'il ait terminé l'examen en une heure?

énoncé 9:

7+3 est une décomposition additive de 10, son produit associé est 21
2+2+3+3 est une autre décomposition additive de 10, son produit associé est 36
quelle est la décomposition additive de 61 de produit associé maximum?

énoncé 10:

Dans un tournoi de volley, chaque équipe rencontre une fois toutes les autres équipes. En tout, cela fait 21 rencontres. Combien d'équipes participent à ce tournoi?

ANNEXE 2 : LA SYNTHESE DE DOCUMENTS : COMPETENCES ATTENDUES

- Identifier le thème et le sujet des documents (3 à 5 documents).
- Formuler une hypothèse globale sur l'orientation du texte en prenant appui sur :
  - Des indices paratextuels (titre, date, auteur, ..).
  - Des indices formels (silhouette du texte, présentation d'un phénomène, argumentation,..)
- Conduire une lecture méthodique : la durée limitée lors du concours impose au candidat de gagner du temps et donc d'entrer le plus vite possible dans la compréhension fine :

Plan du texte	**Organisation textuelle**
Ordre des idées	▪ connecteurs
Arguments	▪ organisation syntaxique
Exemples	▪ repérer et comprendre les argumentations

- Définir l'orientation du texte en s'attachant au vocabulaire, aux réseaux sémantiques et lexicaux, au sens du vocabulaire selon les auteurs.
- Ne pas commettre de contresens par rapport au sens que donne l'auteur

  Exemple :

lecture combinatoire stratégies de lecture	*Ces mots peuvent avoir des sens différents selon les auteurs*

Comparable aux maths sens différent selon le contexte: milieu de la pièce / milieu du segment.
Cela demande du bon sens mais un « faux bon sens » : il nécessite des connaissances solides sur la théorie considérée ou sur le contexte de référence (en maths : réalités ou réalités virtuelles dans le cadre d'énoncés, on est dans le fictionnel, et non dans le monde réel même si l'énoncé s'appuie sur des données réelles)

- Mettre à jour l'organisation linéaire, les marques d'argumentation, de logique. Comprendre le rôle des connecteurs, les hiérarchiser, le rôle des mots de liaison, ..
- Repérer l'ordre des arguments, la présence d'exemples d'illustrations non significatives (en math on pense complexifier un problème en ajoutant un élément)
- Formulation de la problématique que soulève la confrontation des documents : déterminer la problématique définie par les textes relève d'une démarche comparable à comprendre un énoncé de mathématiques.
- Recherche et organisation des éléments communs aux documents.
  Sélectionner les informations, les disposer sous forme de listes, de tableaux, ne retenir que les éléments qui alimentent la problématique :
  - les points confortant les mêmes arguments (éléments complémentaires)
  - les points s'opposant (éléments contradictoires)

- Rédiger la synthèse dans une formulation personnelle.
- Restituer dans une confrontation des arguments développés par les auteurs alimentant la problématique retenue.

LE MEMOIRE PROFESSIONNEL

Yves Girmens Perpignan

ORIGINE DE L'ATELIER

L'atelier avait comme but de susciter un échange de vues à partir des expériences des participants sur l'encadrement du mémoire professionnel en deuxième année de formation de professeurs des écoles.

La réflèxion entendait s'appuyer dans un premier temps sur les contributions diverses déjà produites par la COPIRELEM au cours des stages et colloques puis, dans un deuxième temps, essayer d'approfondir le sujet en vue d'enrichir le débat.

(La bibliographie des différents documents déjà produits est fournie à la fin du compte-rendu ; il est conseillé de se reporter à ces documents dont le présent article est un complément).

ASPECTS GENERAUX DU MEMOIRE

Le mémoire professionnel doit être un outil de professionnalisation :

-il doit être l'occasion d'initier à la démarche propre à tout enseignant : "l'enseignant se forme et s'informe", ce qui doit devenir pour lui un acte volontaire faisant partie de sa culture.

-il doit permettre d'initier le stagiaire à une démarche d'analyse de sa pratique : en cela, il est un moyen pour permettre au stagiaire d'acquérir la posture nécessaire en vue de mettre en oeuvre des pratiques choisies et construites.

-il doit développer chez l'enseignant stagiaire la capacité à échanger et à communiquer avec d'autres, ce qui constitue une dimension importante de son métier .

DYNAMIQUE DU CHOIX DU SUJET

Il semble nécessaire de permettre au stagiaire, dès les premières expériences d'enseignement, d'identifier un sujet d'étude dans les préoccupations qu'il a rencontrées.

Le choix précoce d'un sujet, compte-tenu que ce sujet demande à mûrir et à évoluer, est la garantie que le professeur stagiaire pourra nourrir une réflexion consistante sur ce sujet et avoir le temps de faire un retour sur la pratique.

Il s'agira, pour un stagiaire qui exprime une préoccupation pour un thème aussi vaste que par exemple, la résolution de problèmes, l'erreur, les jeux....de l'aider à repérer dans ces domaines des questions plus "pointues".

Un dispositif d'accompagnement dans l'affinement du choix du sujet semble indispensable si l'on veut que le stagiaire s'engage dans une réflexion formatrice.

On retiendra deux points de vue concernant la procédure de choix du sujet : dans certains IUFM, les formateurs proposent des "champs d'étude" larges, dans lesquels les stagiaires sont invités à repérer "une question" ; dans certains autres, on encourage les stagiaires à choisir un sujet qui, à partir d'une entrée disciplinaire, permettra de développer une réflèxion pouvant se tranférer à d'autres domaines.

Dans tous les cas, il est essentiel que le sujet choisi permette au stagiaire d'amorcer l'élaboration d'une pratique d'enseignement réflèxive, par la mise en oeuvre d'allers-retours entre une analyse distanciée et des expérimentations lors des stages de pratique.

Il semble qu'un stage en responsabilité, où le stagiaire doit faire face à de multiples difficultés et doit tenter de les résoudre dans l'urgence, ne soit pas propice à la prise de recul nécessaire au repérage d'un sujet de mémoire; le moment privilégié pour le choix d'un sujet est certainement le stage de pratique accompagnée.

RESSOURCES THEORIQUES : QUELLE BIBLIOGRAPHIE ?

Vers quels documents diriger les stagiaires avec l'assurance qu'ils y trouveront des éléments théoriques pouvant leur servir de cadre d'étude ou leur fournir des outils d'analyse?

Trois types de documents, pouvant fournir des apports à différents stades de la réflexion, peuvent être identifiés :

- les ouvrages de vulgarisation à portée générale ou particulière.
- les livres du maître qui accompagnent les manuels de l'élève.
- les articles de réflexion didactique, pédagogique, psychologique ou autres.

La difficulté est de déterminer un type de lecture qui sera profitable au stagiaire à un moment donné de sa réflexion : il convient d'éviter que le stagiaire cherche à consulter tous les documents existant sur un sujet ou lise prématurément des ouvrages trop généraux ; c'est pourquoi, il semble nécessaire d'accompagner le stagiaire dans le choix de ses lectures en fonction de l'avancement de son travail.

Il serait intéressant de faire un inventaire, en s'appuyant sur l'expérience des tuteurs de mémoire, d'exemples d'éléments de bibliographie que l'on peut conseiller en fonction du stade de la réflexion atteint par le stagiaire.

LA GUIDANCE DU MEMOIRE

Le suivi du mémoire doit permettre des échanges entre stagiaires sur leurs points de vue, leurs analyses d'expériences, leur questionnement, les choix possibles d'outils théoriques...

Le suivi du mémoire doit aussi inciter le stagiaire à produire des écrits intermédiaires qui seront des appuis de sa réflexion.

Pour prendre en compte ces deux aspects, l'accompagnement du mémoire pourra prendre la forme d'une suite de rencontres entre stagiaires et tuteurs alternant des séances de travail collectif réunissant plusieurs stagiaires et le tuteur et des séances de travail individuel entre chaque stagiaire et son tuteur.

Un tel dispositif ne pourra être fructueux que si des échéances de travail précises sont définies pour les stagiaires en vue de chaque rencontre.

L'EVALUATION, LA SOUTENANCE

Le tuteur de mémoire dispose de toutes les informations sur la qualité de la réflexion menée par stagiaire et sur son évolution : il est le témoin privilégié de la transformation du stagiaire au cours de l'élaboration du mémoire.

Sa présence lors de la soutenance du mémoire et sa place dans l'évaluation ne peuvent se justifier que par la nécessité de prendre en compte, comme éléments d'évaluation, non seulement le produit fini et sa présentation orale, mais aussi le processus de formation du stagiaire à travers son mémoire.

LES ANCIENS MEMOIRES

L'idée de permettre aux stagiaires de s'inscrire dans une recherche initialisée par les mémoires déjà réalisés sur le même sujet est intéressante : il s'agit alors de leur permettre de mettre à profit les résultats des travaux antérieurs afin de poursuivre l'étude du même sujet de manière plus approfondie ou dans une autre direction.

Cette perpective irait dans le sens d'un développement de champs de recherche propres aux IUFM.

Selon quelles modalités l'accés aux mémoires existants peut-il être prévu : tous les mémoires sont-ils consultables? Sur quels critères choisira-t-on les mémoires qui pourront être consultés? Faut-il prévoir un cadre pour exploiter cette consultation?

BIBLIOGRAPHIE

- Quels mémoires professionnels pour quels effets de formation
ACTES du Colloque COPIRELEM d'AUSSOIS - Mai 1993.

- DOCUMENTS POUR LA FORMATION DES PROFESSEURS D'ECOLE EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES -TOME III - COPIRELEM : Mémoires et Dossiers professionnels de mathématique - Colmar - Mars 1993.

- Mémoires professionnels : quelles orientations, quelles exigences ?
ACTES du Colloque COPIRELEM de Douai - Mai 1995.

Liste des participants

Amiot Michelle	Frémin Marianne	Michon Florence
Arhel Danièle	Gérome Evelyne	Millet Jean-Luc
Assude Térèsa	Gioux Anne-Marie	Mopondi Alexandre
Aubertin Jean Claude	Girmens Yves	Mul André
Aurand Catherine	Gispert Hélène	Myx André
Baccon Anne-Marie	Goudin Philippe	Ngono Bernadette
Barth Christian	Greff Eric	Pean Danielle
Berthelot René	Grenier Denise	Pédroletti Jean Claude
Bertotto Anne	Grimaud Martine	Peix Anne Marie
Bloch Isabelle	Grugeon Allys Brigitte	Peltier Marie-Lise
Bohn Myriam	Helayel Josiane	Petit Bernard
Bonnet Nicole	Houdement Catherine	Pézard Monique
Bonnot Marie Christine	Huet Marie-Louise	Philippe Bernard
Boule François	Huguet François	Pralon Alda
Bourgeais Sandrine	Jaffrot Michel	Pralon Olivier
Bourhis Lainé Françoise	Johsua Marie-Alberte	Quatrini Myriam
Brégeon Jean-Luc	Jollivet Marie-Claire	Quéguiner Anne
Briand Joël	Kritter Chantal	Quinquis Noëlle
Brissiaud Rémi	Kuzniak Alain	Ranc Geneviève
Bronner Alain	Lachaussée Danièle	Rauscher Jean-Claude
Butlen Denis	Lallement Marie Hélène	Reboux Olivier
Carral Michel	Lardey Martine	Reynès Francis
Cathalifaud Robert	Laureys Sylvie	Rimbault Claude
Charnay Roland	Le Borgne Philippe	Robert Ghislaine
Chausseau Marie Hélène	Le Coutaller Fernande	Rondreux Olivier
Chaussecourte Philippe	Le Men Virginie	Roussel Jean
Chérif Abdoul Aziz	Le Poche Gabriel	Roussel Malinaud Brigitte
Colonna d'Istria Catherine	Le Tirilly Marc	Roussignol Nelly
Cousson Bernadette	Lebreton Jean-Claude	Rouxel Bernard
Davaine Chantal	Leduc Christian	Salin Marie Hélène
De Biasi Robert	L'Eplattenier Marc	Sarrazy Bernard
Delègue Henri-Patrice	Mainguené Jean	Soumy Jean-Guy
Delhaye-Prévost Dominique	Mallen-Dontenwill Annie	Taveau Catherine
Delhaye Pierre	Masselot Pascale	Teiten Odile
Douek Nadia	Massot Annick	Unger Dominique
Duval Alain	Massot Christian	Valentin Dominique
Euriat Jacqueline	Maurin Claude	Vergnes Danielle
Eysseric Pierre	Mercier Alain	Verseille Jean
Faure Bertrand	Merrien Jean	Vincent Bernadette
		Vincent Jean

Nom Prénom	Adresse Administrative
Amiot Michelle	IUFM 20 Avenue Raymond Bergougnan 63 039 CLERMONT-FERRAND Cedex 2 Tel 04 73 31 71 50
Arhel Danièle	IUFM d'Etiolles domaine du Saulchoir 91450 SOISY sur SEINE Tel 01 60 75 98 06
Assude Térèsa	IUFM de Versailles Centre d'Etiolles Domaine du Saulchoir 91 450 SOISSY sur SEINE Tel 01 69 89 60 80
Aubertin Jean Claude	IUFM 57 Avenue de Montjoux 25 000 BESANCON Tel 03 81 65 70 01
Aurand Catherine	IUFM 5 rue Pasteur 78 100 St GERMAIN en LAYE Tel 01 30 87 43 00
Baccon Anne-Marie	IUFM 8 rue de Rosmadec 29 191 QUIMPER Cedex Tel 02 98 55 29 92
Barth Christian	IUFM route des Mines 07 000 PRIVAS Tel 04 75 66 16 00
Berthelot René	44 Boulevard Sarrailh 64 000 PAU
Bertotto Anne	Ecole Maternelle Pileu 48 Avenue des Tilleuls 91 300 MASSY Tel 01 60 13 17 82
Bloch Isabelle	IUFM 44 Boulevard Jean Sarrailh 64 000 PAU Tel 05 59 32 31 65
Bohn Myriam	IUFM de Haute Normandie BP 18 76131 MONT SAINT AIGNAN Cedex Tel 02 32 82 30 40
Bonnet Nicole	IUFM de Bourgogne 3 Boulevard St Exupéry 58 000 NEVERS
Bonnot Marie Christine	IUFM Centre de Bonneuil Route de Brevannes 94 380 BONNEUIL Tel 01 49 56 37 16
Boule François	IUFM 51 rue Charles Domont 21 000 DIJON Tel 03 80 67 64 67
Bourgeais Sandrine	UFR Sciences BP 809 6 Avenue Victor Le Gorgeu 29 285 BREST Cedex
Bourhis Lainé Françoise	IUFM d'Etiolles domaine du Saulchoir 91450 SOISY sur SEINE Tel 01 60 75 98 06
Brégeon Jean-Luc	IUFM 42 Rue du progrès 03 000 MOULINS Tel 04 70 35 13 00
Briand Joël	IUFM 49 rue de l'école normale BP 219 33 021 BORDEAUX Tel 05 56 17 13 33
Brissiaud Rémi	IUFM 45 Avenue des Etats-Unis 78 000 VERSAILLES
Bronner Alain	IUFM 2 Place Godechat BP 4152 34 092 MONTPELLIER Cedex 5 Tel 04 67 61 83 42
Butlen Denis	IUFM de Créteil CD 77 3 rue de Belle Ombre 77 008 MELUN Cedex Tel 01 64 41 35 00
Carral Michel	IUFM 118 Route de Narbonne 31 062 TOULOUSE Tel 05 62 25 20 02
Cathalifaud Robert	IUFM 209 Boulevard de Vanteaux 87 036 LIMOGES Cedex Tel 05 55 01 76 76
Charnay Roland	IUFM de Bourg BP 153 O1 004 BOURG en BRESSE Tel 04 74 32 15 72
Chausseau Marie Hélène	IUFM de Poitiers 18 rue Jules Ferry 86 000 POITIERS Tel 05 49 37 45 21
Chaussecourte Philippe	IUFM de Créteil et Collège François Couperin 2 rue Grenier sur l'eau 75 004 PARIS Tel 01 42 72 33 08
Chérif Abdoul Aziz	IUFM 89 Avenue Georges V 06 000 NICE Tel 04 93 53 75 00
Colonna d'Istria Catherine	Ecole Pasteur Place Pasteur 03 800 GANNAT Tel 04 70 90 12 44

Cousson Bernadette	Ecole Maternelle Helvétie 3 Avenue d'Helvétie 25 000 BESANCON
Davaine Chantal	Inspection de l'Education Nationale rue Carnot 59 380 BERGUES Tel 03 28 68 19 89
De Biasi Robert	IUFM 12 rue Sarrus 12 000 RODEZ Tel 05 65 68 03 43
Delègue Henri-Patrice	IUFM 40 rue Victor Hugo BP 129 59 820 GRAVELINES Tel 03 28 51 94 40
Delhaye-Prévost Dominique	IUFM Centre d'Outreau 5 rue M Adam 62 260 OUTREAU Tel 03 21 31 36 61
Delhaye Pierre	IUFM d'Amiens 51 Boulevard de Chateaudun 80 000 AMIENS
Dossat Luce	IUFM 36 Avenue Jean Jaurès 63 407 CHAMALIERES Cedex Tel 04 73 34 77 00
Douek Nadia	IUFM de Créteil Site de Livry Gargan Avenue de Jean Zay LIVRY GARGAN
Duval Alain	IUFM d'Amiens 51 Boulevard de Chateaudun 80 000 AMIENS
Euriat Jacqueline	IUFM de Lorraine rue Kennedy 88 025 EPINAL Cedex Tel 03 29 34 40 22
Eysseric Pierre	IUFM Avenue Alphonse Gillet BP 143 83 004 DRAGUIGNAN Tel 04 94 60 44 80
Faure Bertrand	Ecole des rochers 43 rue d'Estienne d'Orves 92 140 CLAMART Tel 01 46 42 02 79
Frémin Marianne	IUFM d'Antony Val de Bièvre 96 rue A. Pajeaud 92160 ANTONY Tel 01 46 66 21 90
Gérome Evelyne	IUFM 42 Rue du progrès 03 000 MOULINS Tel 04 70 35 13 03
Gioux Anne-Marie	18 Avenue Georges Clémenceau 29 287 BREST Cedex Tel 02 98 43 84 23
Girmens Yves	IUFM 3 rue A.Sauvy 66 000 PERPIGNAN Tel 04 68 85 15 17
Gispert Hélène	IUFM RP 815 78 008 VERSAILLES Cedex Tel GHD 50, Univ.ParisSud 01 69 15 78 25
Goudin Philippe	IUFM 45 rue de l'Ecole Normale 61 000 ALENCON Tel 02 33 27 41 41
Greff Eric	IUFM 45 Avenue des Etats-Unis 78 000 VERSAILLES
Grenier Denise	Equipe CNAM Laboratoire Leibniz 46 Avenue Félix Viallet 38 000 GRENOBLE Tel 04 76 57 47 64
Grimaud Martine	Collège Anatole France 38 rue Victor Chabot 87 000 LIMOGES Tel 05 55 33 67 22
Grugeon Allys Brigitte	IUFM de Créteil CD Le Bourget 4 rue Roger Salengro 93 350 LE BOURGET Tel 01 48 37 07 14
Helayel Josiane	IUFM d'Antony Val de Bièvre 96 rue A. Pajeaud 92 160 ANTONY Tel 01 46 66 21 90
Houdement Catherine	IUFM de Haute Normandie BP 18 76131 MONT SAINT AIGNAN Cedex Tel 02 32 82 30 40
Huet Marie-Louise	IUFM 57 rue de Ballon 72 016 LE MANS Cedex Tel 02 43 81 91 40
Huguet François	IUFM 8 rue de Rosmadec 29 191 QUIMPER Cedex Tel 02 98 55 29 92
Jaffrot Michel	IUFM 156 Boulevard Louis Blanc 85 000 LA ROCHE sur YON Tel 02 51 37 01 77
Johsua Marie-Alberte	IUFM 63 La Canebière 13 232 MARSEILLE Cedex 01 32 Tel 04 91 14 27 22 BurMath Tel 04 91 14 27 32
Jollivet Marie-Claire	IUFM de Charente 227 route de Montmoreau 16 022 ANGOULEME Cedex Tel 05 45 61 24 42
Kritter Chantal	IUFM d'Antony Val de Bièvre 96 rue A. Pajeaud 92160 ANTONY Tel 01 46 66 21 90
Kuzniak Alain	IUFM 17 rue de la Côte Blanche 27 025 Evreux Cedex Tel 02 32 38 84 20

Lachaussée Danièle	IUFM Centre de LAON Avenue de la République 02 000 LAON Tel 03 23 26 33 80
Lallement Marie Hélène	IUFM Site d'Avignon 140 Route de Tarascon 84 083 AVIGNON Tel 04 90 13 56 56
Lardey Martine	Ecole Gérard Philipe rue des Manoirs 59 279 LOON Plage Tel 03 28 21 33 46
Laureys Sylvie	Les garrigues Ecole Primaire 34 740 VENDARGUES Tel 04 67 87 17 02
Le Borgne Philippe	IUFM 34 rue Jean Baptiste Clément 08 000 CHARLEVILLE-MEZIERES Tel 03 24 33 37 40
Le Coutaller Fernande	IUFM 4 Chemin de Launay Violette B 12227 44 322 NANTES Cedex 03 Tel 02 40 16 30 32
Le Men Virginie	IUFM d'Amiens 51 Boulevard de Chateaudun 80 000 AMIENS
Le Poche Gabriel	IUFM de Bretagne 153 rue St Malo 35 043 RENNES Cedex Tel 02 99 54 64 89
Le Tirilly Marc	IUFM 2 Avenue Jules Isaac 13 626 AIX en Provence Cedex 01 Tel 04 42 30 02 00
Lebreton Jean-Claude	IUFM 9 Avenue P.Renaulme 41 000 BLOIS Tel 02 54 56 78 78
Leduc Christian	IUFM Le Moulin BP 311 59 304 VALENCIENNES Cedex Tel 03 27 28 22 50
L'Eplattenier Marc	IUFM 17 rue de la Côte Blanche 27 025 Evreux Cedex Tel 02 32 38 84 20
Mainguené Jean	IUFM 7 rue Dacier 49 100 ANGERS Tel 02 41 22 74 00
Mallen-Dontenwill Annie	Ecole d'application Rèpes Sud 70 000 VESOUL Tel 03 84 75 14 29
Masselot Pascale	IUFM de Créteil 3 rue de Belle Ombre 77 008 MELUN Cedex Tel 01 64 41 35 00
Massot Annick	Collège la Reinetière Boulevard Pasteur 44 980 Ste LUCE sur Loire Tel 02 40 25 71 27
Massot Christian	Collège la Reinetière Boulevard Pasteur 44 980 Ste LUCE sur Loire Tel 02 40 25 71 27
Maurin Claude	IUFM 140 Route de Tarascon BP 871 84 083 AVIGNON Cedex Tel 04 90 13 56 56
Mercier Alain	IUFM 32 rue Eugène Cas 13 004 Marseille Tel 04 91 14 27 22 BurMath 04 91 14 27 32
Merrien Jean	IUFM de Bretagne 153 rue St Malo 35 043 RENNES Cedex Tel 02 99 54 64 89
Michon Florence	IUFM 75 Avenue Mendès France 74 136 BONNEVILLE Cedex Tel 04 50 25 02 00
Millet Jean-Luc	IUFM 209 Boulevard de Vanteaux 87 036 LIMOGES Cedex Tel 05 55 01 76 76
Mopondi Alexandre	IUFM de Bretagne 153 rue St Malo 35 043 RENNES Cedex Tel 02 99 54 64 89
Mul André	IUFM 45 Avenue des Etats-Unis 78 000 VERSAILLES Tel 01 39 24 20 69
Myx André	9 Bis rue Capitaine Ferber 69 300 CALUIRE Tel 04 78 29 38 76
Ngono Bernadette	IUFM de Haute Normandie BP 18 76131 MONT SAINT AIGNAN Cedex Tel 02 32 82 30 40
Pean Danielle	IUFM 4 Chemin de Launay Violette B 12227 44 322 NANTES cedex 3 Tel 02 40 16 30 32
Pédroletti Jean Claude	IUFM 57 Avenue de Montjoux 25 000 BESANCON Tel 03 81 65 70 02
Peix Anne Marie	IUFM de Lyon BOURG en Bresse
Peltier Marie-Lise	IUFM de Haute Normandie BP 18 76131 MONT SAINT AIGNAN Cedex Tel 02 32 82 30 40
Petit Bernard	IREM de Brest UFR Sciences BP 809 6 Avenue Victor Le Gorgeu 29 285 BREST Cedex Tel 02 98 01 65 44

Pézard Monique	IUFM de Créteil CD 77 3 rue de Belle Ombre 77 008 MELUN Cedex Tel 01 64 41 35 00
Philippe Bernard	IUFM 1 rue Théodule Ribot BP 2249 22O22 St BRIEUC Cedex 1 Tel 02 96 68 34 68
Pralon Alda	1388 Route de Charniaz 74 380 BONNE
Pralon Olivier	IUFM 75 Avenue Pierre Mendès-France BP 153 74 136 BONNEVILLE Tel 04 50 25 02 00
Quatrini Myriam	Faculté des Sciences 163 Avenue de Luminy Case 901 13 288 MARSEILLE Cedex 9 Tel 04 91 26 96 36
Quéguiner Anne	IUFM de Créteil CD Livry-Gargan
Quinquis Noëlle	IUFM 8 rue de Rosmadec 29 191 QUIMPER Cedex Tel 02 98 55 29 92
Ranc Geneviève	Inspection Educ Nat 2 rue de Montpellier 91 300 MASSY Tel 01 69 20 17 41
Rauscher Jean-Claude	IUFM d'Alsace 200 Route de Colmar 67 200 STRASBOURG Tel 03 88 40 79 40
Reboux Olivier	IUFM de Haute Normandie BP 18 76131 MONT SAINT AIGNAN Cedex Tel 02 32 82 30 40
Reynès Francis	Collège Grand Air Avenue Dr Lorentz-Monod BP 138 33 311 ARCACHON
Rimbault Claude	IUFM 1 rue Théodule Ribot BP 2249 22O22 St BRIEUC Cedex 1 Tel 02 96 68 34 68
Robert Ghislaine	IUFM 3 rue Bossuet 60 000 BEAUVAIS Tel 03 44 48 72 00
Rondreux Olivier	IUFM 3 rue Bossuet 60 000 BEAUVAIS Tel 03 44 48 72 00
Roussel Jean	IUFM 40 rue Victor Hugo BP 129 59 820 GRAVELINES Tel 03 28 51 94 40
Roussel Malinaud Brigitte	IUFM de Créteil CD Le Bourget 4 rue Roger Salengro 93 350 LE BOURGET Tel 01 48 37 07 14
Roussignol Nelly	IUFM de Créteil CD 94 Route de Brévannes 94 861 BONNEUIL Cedex Tel 01 49 56 37 11
Rouxel Bernard	UFR Sciences BP 809 6 Avenue Victor Le Gorgeu 29 285 BREST Cedex
Salin Marie Hélène	IUFM 49 rue de l'école normale BP 219 33 021 BORDEAUX Tel 05 56 17 13 33
Sarrazy Bernard	IUFM 49 rue de l'école normale BP 219 33 021 BORDEAUX Tel 05 56 17 13 33
Soumy Jean-Guy	IUFM avenue Marc Purat 23 000 GUERET Tel 05 55 61 44 01
Taveau Catherine	IUFM de Créteil Site de Livry-Gargan
Teiten Odile	IEN DK Petite Synthe AIS BP 112 Avenue de la Villette 59 640 DUNKERQUE Tel 03 28 64 96 79
Unger Dominique	IUFM Centre de Bonneuil Allée Jean Rostand 94 380 BONNEUIL Tel 01 49 56 37 11
Valentin Dominique	IUFM d'Antony Val de Bièvre 96 rue A. Pajeaud 92 160 ANTONY Tel 01 46 66 21 90
Vergnes Danielle	IUFM d'Antony Val de Bièvre 96 rue A. Pajeaud 92 160 ANTONY Tel 01 46 66 21 90
Verseille Jean	IUFM d'Antony Val de Bièvre 96 rue A. Pajeaud 92 160 ANTONY Tel 01 46 66 21 90
Vincent Bernadette	UFR MIM (CMI) 39 rue Joliot Curie 13 453 MARSEILLE Cedex 13 Tel 04 91 11 35 01
Vincent Jean	IUFM Boulevard Victor Hugo 51 000 CHALONS sur MARNE Tel 03 26 65 18 75

Auteurs : Travail collectif coordonné par la COPIRELEM.

Titre :

Actes du XXV ème Colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs de Mathématiques chargés de la formation des maîtres.

"Evolution de l'enseignement des Mathématiques et de la Formation des maîtres"

Public concerné :

Professeurs de Mathématiques et Formateurs chargés de cette discipline pour le premier degré.

Résumé :

Cette brochure contient les textes des conférences et des communications de recherches ainsi que les comptes-rendus des ateliers du Colloque qui s'est déroulé dans le Village de Vacances "Le Domaine du Dourdy" à Loctudy.

Mots clés :

Didactique des mathématiques, enseignement et apprentissage, formation des maîtres, école élémentaire.

Editeurs :

IREM de Brest UFR Sciences
BP 809 6 Avenue Victor Le Gorgeu
29 285 Brest Cedex
Directeur : Thierry Giorgutti
e-mail : IREM@univ-brest.fr
Tel : 02 98 01 65 44

Responsable de la publication :

Monsieur Thierry Giorgutti, Directeur de l'IREM de Brest

Date : Mai 1999

Nombre de pages : 340

Prix :

N° ISBN : 2-908887-45-2