CORRIGES

AIX-MARSEILLE

Corrigé effectué par l'équipe de Bordeaux.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES

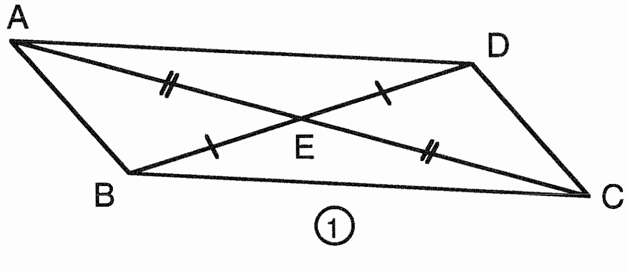
I GEOMETRIE

1) Programme de construction:

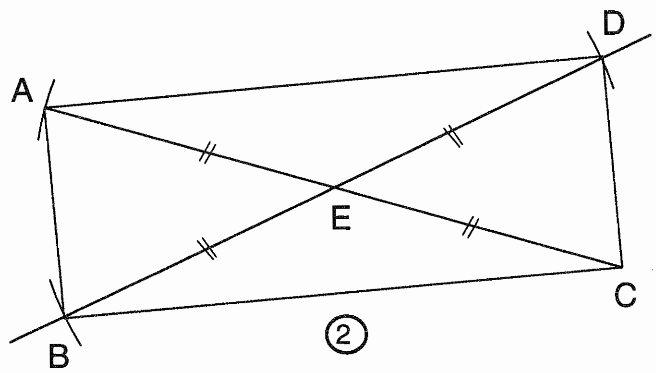
A et E sont deux points donnés.

- Construire le point C, symétrique du point A par rapport au point E (ou bien , tracer la droite (AE) et placer sur cette droite le point C tel que E soit le milieu du segment [AC])
- Construire une droite quelconque passant par E, et distincte de la droite (AC).
- Placer les points D et B sur cette droite, de part et d'autre du point E, et tels que E soit le milieu de BD (ou que EB=ED)

Le quadrilatère ABCD a, par construction, ses diagonales qui se coupent en leur milieu: il s'agit donc bien d'un parallélogramme, et il vérifie bien les contraintes de l'énoncé.



2)

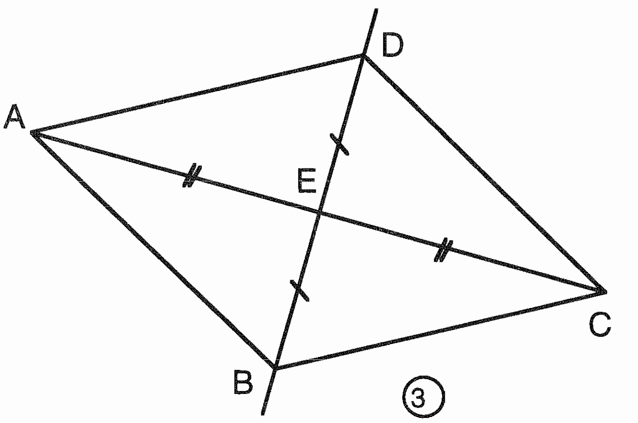


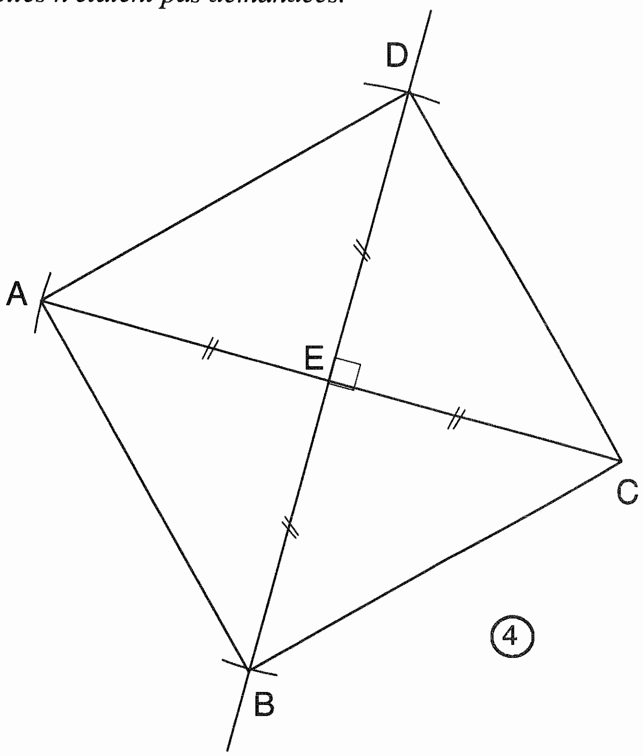
Pour qu'un parallélogramme soit un rectangle, il faut et il suffit que ses diagonales soient de même longueur.
Si AC = BD, alors leurs moitiés sont aussi de même longueurs, d'où EB = EA = ED = EC (1)
Il faut et il suffit donc, dans la construction précédente, de placer D et B tels que EB = EA .
Les égalités (1) montrent que les points A,B,C et D sont sur le cercle de centre E et de rayon EA.

3) Pour qu'un parallélogramme soit un losange, il faut et il suffit que ses diagonales soient perpendiculaires; donc dans la construction du 1), au lieu de choisir une droite quelconque passant par E, il faut et il suffit de tracer une perpendiculaire à la droite (AC).
Les deux autres sommets des losanges de la famille sont donc sur la droite perpendiculaire à (AE) et passant par E.

4) Pour qu'un parallélogramme soit un carré, il faut et il suffit qu'il soit à la fois un rectangle et un losange.
Donc d'après 2) et 3) , il faut et il suffit que les points B et D se trouvent à la fois sur le cercle de centre E et de rayon EA, et sur la perpendiculaire à (AE) passant par E.
Or, ce cercle et cette droite se coupent en deux points, qui définissent ainsi un seul carré.
La famille f contient donc un carré et un seul.

Les figures ci-dessous sont données pour information; elles n'étaient pas demandées.





II ECRITURE DECIMALE D'UN RATIONNEL

Question 1

r = 2,370370370.....

d'où   1000r = 2370,370370370....

d'où   1000r - r = 2370 - 2   car les parties décimales de 1000r et de r sont les mêmes

d' où   999r = 2368   d'où $r = \dfrac{2368}{999}$

Essayons de simplifier cette fraction: 999= 9x111 = 9x3x37 = 3x3x3x37

2368 n'est pas divisible par 3 (somme des chiffres: 19 ,non divisible par 3)

mais 2368 est divisible par 37:   2368 = 37x64, nous pouvons donc simplifier la fraction par 37

d'où $r = \dfrac{64}{27}$ et 64 et 27 sont bien premiers entre eux, puisque 3 est le seul diviseur premier de 27 et qu'il ne divise pas 64.

Question 2

a) Division euclidienne de 100 par 27 : $100 = 3 \times 27 + 19$ avec $19 < 27$

D'après l'égalité précédente, en divisant par 27 : $\frac{100}{27} = 3 + \frac{19}{27}$

d'où $\frac{10}{27} = \frac{1}{10}(\frac{100}{27}) = \frac{1}{10}(3+\frac{19}{27}) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}(\frac{19}{27})$

En reportant dans l'égalité donnée: $\frac{64}{27} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{1}{10}(\frac{19}{27})$ (A)

Or $19 < 27$ donc $\frac{19}{27} < 1$ donc $\frac{1}{10}(\frac{19}{27}) < \frac{1}{10}$

donc $2+\frac{3}{10} < \frac{64}{27} < 2+\frac{4}{10}$ ou $2,3 < \frac{64}{27} < 2,4$

ce qui montre que <u>le chiffre des dixièmes de $\frac{64}{27}$ est 3</u>

b) recherche du chiffre des centièmes

- le dernier terme de (A) s'écrit: $\frac{1}{10}(\frac{19}{27}) = \frac{1}{100}(\frac{190}{27})$
- il faut donc effectuer la division euclidienne de 190 par 27 : $190 = 27 \times 7 + 1$
- d'où, en divisant par 27, $\frac{190}{27} = 7 + \frac{1}{27}$
- d'où, en reportant dans (A) :

d'où
$$\frac{64}{27} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{1}{100}(7+\frac{1}{27})$$
$$\frac{64}{27} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{1}{100}(\frac{1}{27}) \quad \text{(B)}$$

$\frac{1}{27} < 1$ donc $\frac{1}{100}(\frac{1}{27}) < \frac{1}{100}$ donc $2+\frac{3}{10}+\frac{7}{100} < \frac{64}{27} < 2+\frac{3}{10}+\frac{8}{100}$

ou $2,37 < \frac{64}{27} < 2,38$ donc <u>7 est le chiffre des centièmes de $\frac{64}{27}$</u>

recherche du chiffre des millièmes:

$\frac{1}{100}(\frac{1}{27}) = \frac{1}{1000}(\frac{10}{27})$

- la division euclidienne de 10 par 27 a pour quotient 0, ce qui laisse supposer que le chiffre des millièmes est 0

Montrons-le : $\frac{10}{27} < 1$ donc $\frac{1}{1000}(\frac{10}{27}) < \frac{1}{1000}$

D'après (B), on a donc: $2+\frac{3}{10}+\frac{7}{100}+\frac{0}{1000} < \frac{64}{27} < 2+\frac{3}{10}+\frac{7}{100}+\frac{1}{1000}$ ou $2,370 < \frac{64}{27} < 2,371$

ce qui prouve que <u>le chiffre des millièmes est bien 0</u>

c) - si l'on poursuit la recherche au rang des dix-millièmes:

$\frac{1}{10^3}(\frac{10}{27}) = \frac{1}{10^4}(\frac{100}{27})$ et nous retrouvons la division euclidienne de 100 par 27 effectuée au a)

En poursuivant le même processus, nous allons donc retrouver le quotient 3, avec 19 comme reste, puis le quotient 7, avec 1 comme reste, puis le quotient 0, avec 10 comme reste, puis à nouveau le quotient 3 avec 19 comme reste, etc.

Nous retrouvons bien la suite pèriodique infinie de $2,\overline{370}$

Pourquoi obtient-on un seul chiffre à chaque quotient, dans le processus précédent?

L'écriture correspondant au $p^{\text{ième}}$ chiffre n_p est de la forme :

$2+\frac{3}{10}+\frac{7}{100}+\ldots+\frac{n_p}{10^p}+\frac{1}{10^p}(\frac{r_p}{27})$ avec r_p reste de la division précédente donc $r_p < 27$

recherche du $(p+1)^{\text{ième}}$ chiffre:

$\frac{1}{10^p}(\frac{r_p}{27}) = \frac{1}{10^{p+1}}(\frac{10r_p}{27})$

on divise alors $10\ r_p$ par 27 or $10r_p < 10 \times 27$

donc le quotient est strictement inférieur à 10, il n'a donc qu'un seul chiffre.

Autre formulation:

Dans ce processus, pour trouver un nouveau chiffre de l'écriture décimale, on utilise le reste r de la division précédente par 27 ; donc $r < 27$

on multiplie ce reste par 10, et l'on divise le nombre obtenu par 27

Or si $r < 27$ alors $10\ r < 10 \times 27$ donc le quotient obtenu est strictement inférieur à 10, donc n'a qu'un chiffre.

Question 3

$2,3 = 2 + \frac{3}{10}$ donc d'après l'égalité écrite en 2a): $\frac{64}{27} - 2,3 = \frac{1}{10}(\frac{19}{27}) = \frac{19}{270}$

L'erreur commise en remplaçant $\frac{64}{27}$ par 2,3 est donc $\frac{19}{270}$

$2,4 - \frac{64}{27} = 0,1 + 2,3 - \frac{64}{27} = 0,1 - (\frac{64}{27} - 2,3) = 0,1 - \frac{19}{270} = \frac{27}{270} - \frac{19}{270} = \frac{8}{270}$

L'erreur commise en remplaçant $\frac{64}{27}$ par 2,4 est donc $\frac{8}{270}$

Remarque:

Une représentation sur la droite numérique pouvait aussi être proposée pour répondre à cette dernière question:

D'où l'écart avec 2,4 :

$2,4 - \frac{64}{27} = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}(\frac{19}{27}) = \frac{1}{10}(1 - \frac{19}{27}) = \frac{1}{10}(\frac{8}{27}) = \frac{8}{270}$

D'après les premières questions, nous avons $2{,}3 < \frac{64}{27} < 2{,}4$ (1)

(et nous en avons conclu que 3 était le chiffre des dixièmes dans l'écriture décimale de $\frac{64}{27}$;

nous pourrions dire aussi que 2,3 est la valeur approchée par défaut à un dixième près de $\frac{64}{27}$; et que 2,4 en est la valeur approchée par excès)

d'après (1) $2{,}4 - \frac{64}{27} < 2{,}4 - 2{,}3 = 0{,}1$

L'erreur commise en remplaçant $\frac{64}{27}$ par 2,4 est donc inférieure à un dixième.

Nous retrouvons un résultat plus général connu: l'écart entre un nombre et ses valeurs approchées à $\frac{1}{10^p}$ près est inférieur à $\frac{1}{10^p}$.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

	procédures de résolution	**procédures de calcul**	**hypothèses sur les origines des erreurs**
élève 1	- calcule la somme 62+48 c'est à dire le nombre total de photocopies réalisées - indique la soustraction de ce nombre à celui indiqué par le compteur mais effectue une addition - écrit la phrase réponse	- calcul en ligne - calcul en ligne	- oubli de la retenue: difficulté due au calcul en ligne - il a compris* qu'il faut faire une soustraction; mais la difficulté du calcul en ligne (passage de la classe des mille) le conduit à faire une addition (*peut-être aussi sa compréhension de la situation n'était-elle pas très sûre)
élève 2	ajoute les trois nombres de l' énoncé	calcul en ligne	- oubli de la retenue - peut-être a-t-il mal compris la situation et interprété le 1043 comme l'état initial du compteur ? - mais la place du 1043 à la fin de l'écriture et l'absence de phrase réponse laisse penser plutôt que l'élève n'est pas du tout entré dans le problème et a effectué sur les nombres de l'énoncé l'opération la plus simple, sans lui donner de sens - Cette incompréhension de l'énoncé résulte peut-être de difficultés en lecture
élève 3	- calcule 1043 - 62 qui correspond à ce qu'indiquait le compteur avant le tirage des 62 photocopies. - retranche 48 au nombre obtenu pour obtenir l'état initial - écrit la phrase réponse	pose les deux soustractions en colonne	- la démarche est juste - erreur dans l'exécution de l'algorithme usuel de la soustraction: à chaque rang, il retranche le plus petit chiffre du plus grand, qu'il soit en haut ou en bas, échappant ainsi à la nécessité de la retenue ex: 3-2= 1 correct mais 6-4=2 au lieu de 14-6=8 et 10-1=9 On peut supposer qu'il ne sait pas effectuer les retenues

élève 4	- calcule le nombre total de photocopies effectuées - retranche ce nombre à 1043 - donne la phrase réponse	- addition en ligne - soustraction en décomposant 110 en 100+10 et en utilisant une représentation sur la droite numérique	Solution juste

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

Question I

1)

Les aires de ces surfaces peuvent être comparées deux à deux directement par superposition, sauf pour les surfaces D et E.

Par exemple, pour comparer C et A, l'élève peut :

- soit découper directement la surface C et la poser sur la surface A
- soit utiliser du papier calque pour reproduire les surfaces et les découper
- soit en traçant un arc de cercle convenable, construire à l'intérieur de la surface A, une surface identique à la surface C.

L'élève peut soit réaliser concrètement les actions ci-dessus, soit les imaginer mentalement.

Dans tous les cas, l'élève peut constater que la surface C "est contenue" dans la surface A et en conclure que aire (C) < aire (A)

Il peut trouver par le même procédé que:

aire(A) < aire (D) <aire (F) < aire(B) et que aire(A)< aire(E) < aire(F) < aire (B)

La comparaison des surfaces D et E est un peu moins immédiate

Après découpage, l'élève peut poser la surface D sur la surface E, découper le morceau de E qui dépasse, puis adjoindre ce morceau à E de façon à reconstituer avec E une surface identique à D (cf figure)

Il peut ainsi conclure que:

aire (E) = aire (D) , ce qui termine le rangement.

Commentaire:

Par ce procédé, l'élève met en oeuvre la définition suivante de la notion d'aire:

- deux surfaces A et B ont la même aire si, à partir de la surface A, on peut former une surface identique (exactement superposable) à la surface B, en découpant et recollant des morceaux .

- une surface A a une aire inférieure à une surface B, si la surface A a la même aire qu'une surface A' contenue dans [1]B.

2)a) En traçant les deux médianes de chaque carré, on voit facilement que:

aire(A) = $U_1 + 3U_2$ aire(B) = $4U_1$ aire(C) = $4U_2$ aire(D) = aire(E) = $2U_1+2U_2$ aire(F) = $3U_1+U_2$

[1] Pour plus d'information , voir le document "THEMES MATHEMATIQUES" 1995 p:72, édité par l'I.R.E.M. de Bordeaux.

b) Pour déduire de ces mesures le rangement des aires, il faut comparer U_1 et U_2
Or $U_2 < U_1$ d'où $4U_2 < U_1+3U_2 < 2U_1+2U_2 < 3U_1+U_2 < 4U_1$
et l'on retrouve le rangement du 1) : aire(C) < aire(A) < aire (D) = aire(E) < aire (F) < aire(B)

c) U_1 et U_2 peuvent être comparées par simple superposition: la surface U_2 est visiblement contenue dans la surface U_1

Question II

1) Beaucoup d'élèves donneront le même rangement que précédemment, car ils ne distinguent pas la notion de périmètre de la notion d'aire. Ils pensent que "plus l'aire est grande, plus le périmètre est grand" et que "si deux surfaces ont la même aire, elles ont aussi le même périmètre".
Complément:
Il s'agit là de "théorèmes en acte", c'est à dire d'affirmations (fausses !) qu'ils utilisent implicitement et qui sont liées à une conception fausse des notions d'aire et de périmètre. Le rangement suivant les aires correspond assez bien à la perception qu'ils ont des surfaces (la figure B est visiblement "plus grande") alors que le rangement suivant les périmètres peut s'opposer à cette perception immédiate (c'est le cas ici) et demande plus de réflexion.

2) Réponse 1:
Si un élève formulait le théorème en acte, l'enseignant pourrait peut-être faire écrire au tableau : "si l'aire est plus grande, le périmètre est plus grand" et leur proposer de vérifier si cette affirmation est bien vraie, en examinant, sur papier quadrillé, un carré de 3 carreaux de côté et un rectangle de 7 carreaux de longueurs et de 1 carreau de largeur ; les enfants peuvent alors constater que l'aire du premier est plus grande (9 > 7 ou bien en imaginant le découpage-recollage du deuxième sur le premier) alors que son périmètre est plus petit (12< 16).

Réponse 2 [2]:
L'enseignant peut proposer de commencer à vérifier collectivement le rangement proposé, en comparant les périmètres de surfaces très proches, par exemple B et F.
En dessinant la figure F sur la figure B, les enfants pourraient voir qu'il y a une grande partie du contour qui est commune aux deux figures (les 3/4 du cercle); et pour la partie qui diffère, il s'agit de deux quarts de cercle ; celui de B a pour centre le centre du carré, et celui de F un sommet du carré; mais ils ont tous les deux le même rayon (la moitié de la longueur du côté du carré) ; ils ont donc la même longueur. Donc B et F ont le même périmètre.

Dans les deux cas, les enfants peuvent revenir sur leur "idée première" : la comparaison des aires ne permet pas de conclure quant à la comparaison des périmètres, il faut regarder de plus près les figures pour les ranger suivant le périmètre.

3) a) une procédure simple consiste à utiliser ici encore les médianes du carré pour décomposer chaque contour en 4 parties; les élèves peuvent constater alors que ces parties sont toutes des quarts de cercles,

[2] voir les articles de R. Douady et M.J. Perrin " Aires des surfaces planes ", Petit X n°6, p5-33 et n° 8, p5-30.

de centre soit le centre du carré soit un sommet du carré; tous ces quarts de cercle sont de même rayon; ils sont donc de même longueur.

b) la réponse attendue est donc que toutes les surfaces ont le même périmètre, qui est donc égal au périmètre du cercle inscrit dans le carré.

Question III

Le travail précédent a permis de remettre en cause une idée fausse des enfants en constatant que des surfaces d'aires différentes peuvent avoir le même périmètre.
On peut supposer que l'enseignant veut montrer maintenant que des surfaces de même aire peuvent avoir des périmètres différents : il choisira donc la surface B qui a la même aire que G (égale à $4U_1$) et les élèves constateront que le périmètre de G est supérieur au périmètre de B [périmètre de G = périmètre de B + a où a est la longueur du coté du carré]

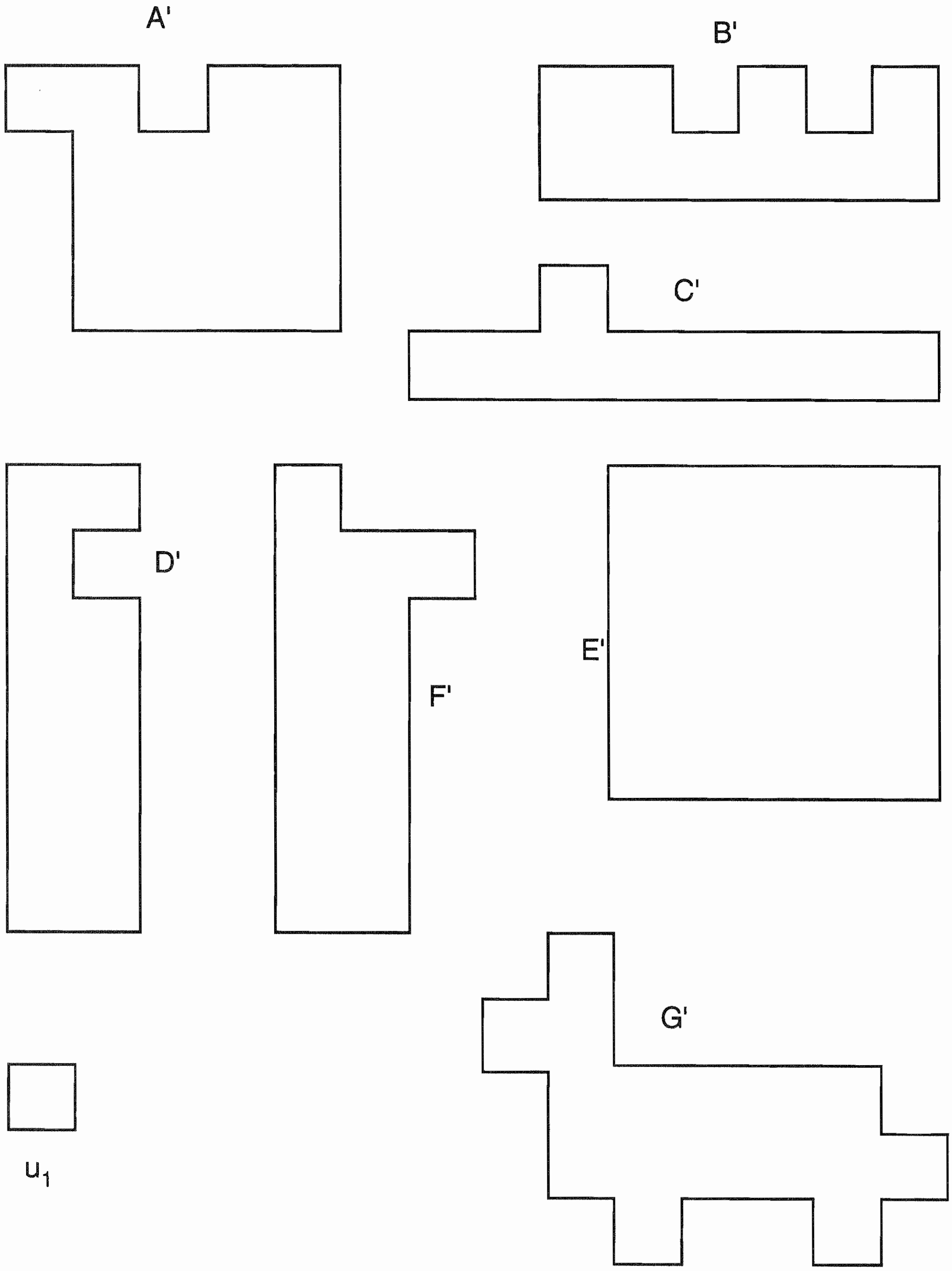
Question IV

1) L'objectif spécifique de l'enseignant dans cette séance est de faire la distinction entre les notions d'aire et de périmètre : permettre aux élèves de prendre conscience que ces deux grandeurs sont indépendantes l'une de l'autre.
Complément:
Il s'agit de consolider ainsi le sens de ces deux notions.
- la notion d'aire:
* la pratique de superposition, de découpage et recollage, réalisée effectivement ou bien imaginée, permet de bien redéfinir la grandeur "aire"
* l'utilisation de pavage avec des unités non conventionnelles pour mesurer des aires, précise la notion de mesure et prépare l'introduction des unités conventionnelles.
- la notion de périmètre:
l'activité permet de la définir à nouveau car elle s'oppose ici à la perception immédiate des surfaces.

Commentaire :
On peut regretter, dans une activité portant sur cet objectif spécifique, que le cas "aire plus petite et périmètre plus grand" ne soit pas vu ici, mais sans doute le sera-t-il dans une séance ultérieure.

2) Réponse 1
Nous choisissons, comme dans le matériel proposé, une première série de surfaces de même périmètre et d'aires différentes, que les enfants devront ranger d'abord suivant les aires, puis suivant les périmètres.
Comme dans l'exemple, la comparaison des aires peut se faire dans un premier temps par superposition, soit directement, soit après découpage et recollage.
Dans un deuxième temps, l'unité "u" est proposée pour exprimer les mesures des aires et effectuer le rangement.
Les surfaces choisies ont pour mesures d'aire: A' : 16u B' : 10u C' : 9u D' : 13u
E' :2 5u F' : 14u
Le périmètre commun à toutes les surfaces est 20a, où a est la longueur du côté du carré qui définit u.

Pour la surface G' , nous choisissons une aire de 16u et un périmètre de 26a:
- la surface G' peut être comparée à la surface A' : même aire et périmètre plus grand
- elle peut aussi être comparée à la surface E' : elle a une aire plus petite et un périmètre plus grand



2) Réponse 2

Nous choisissons, comme dans le matériel proposé, une première série de surfaces de même périmètre et d'aires différentes, que les enfants devront ranger d'abord suivant les aires, puis suivant les périmètres.

Comme dans l'exemple, la comparaison des aires peut se faire dans un premier temps par superposition, soit directement, soit après découpage et recollage.

Dans un deuxième temps, les unités u_1 et u_2 sont proposées pour mesurer les aires et effectuer le rangement à l'aide de ces mesures.

Les aires des surfaces proposées ont pour mesures:

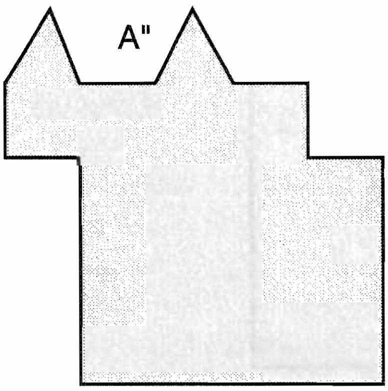
A'' et F'' : $13u_1+2u_2$ B'' : $8u_1+4u_2$ C'' : $13u_1$ D'' : $8u_1+2u_2$ E'' : $25u_1$

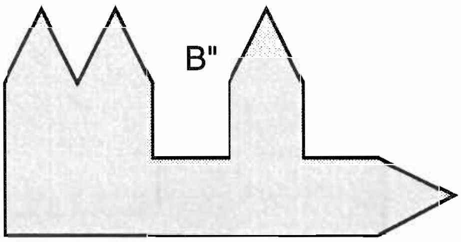
u1 est définie par un carré de côté a, et u_2 par un triangle équilatéral de côté a. Le périmètre commun est 20a.

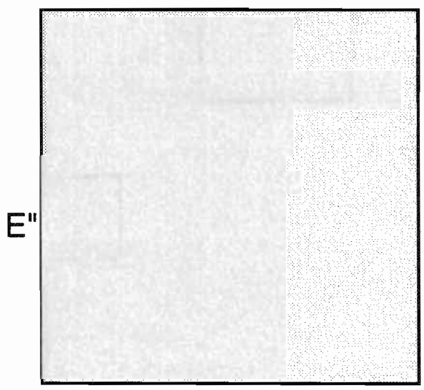
Comme dans l'exemple donné, par superposition, on voit que $u_2<u_1$, ce qui permet de retrouver le rangement à partir des mesures ci-dessus.

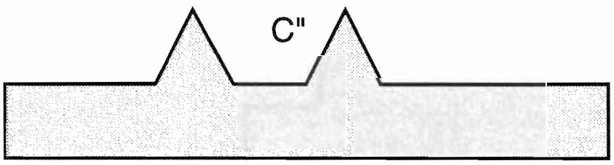
Pour la surface G'', nous choisissons une aire de $13u_1+2u_2$ et un périmètre de 24a:

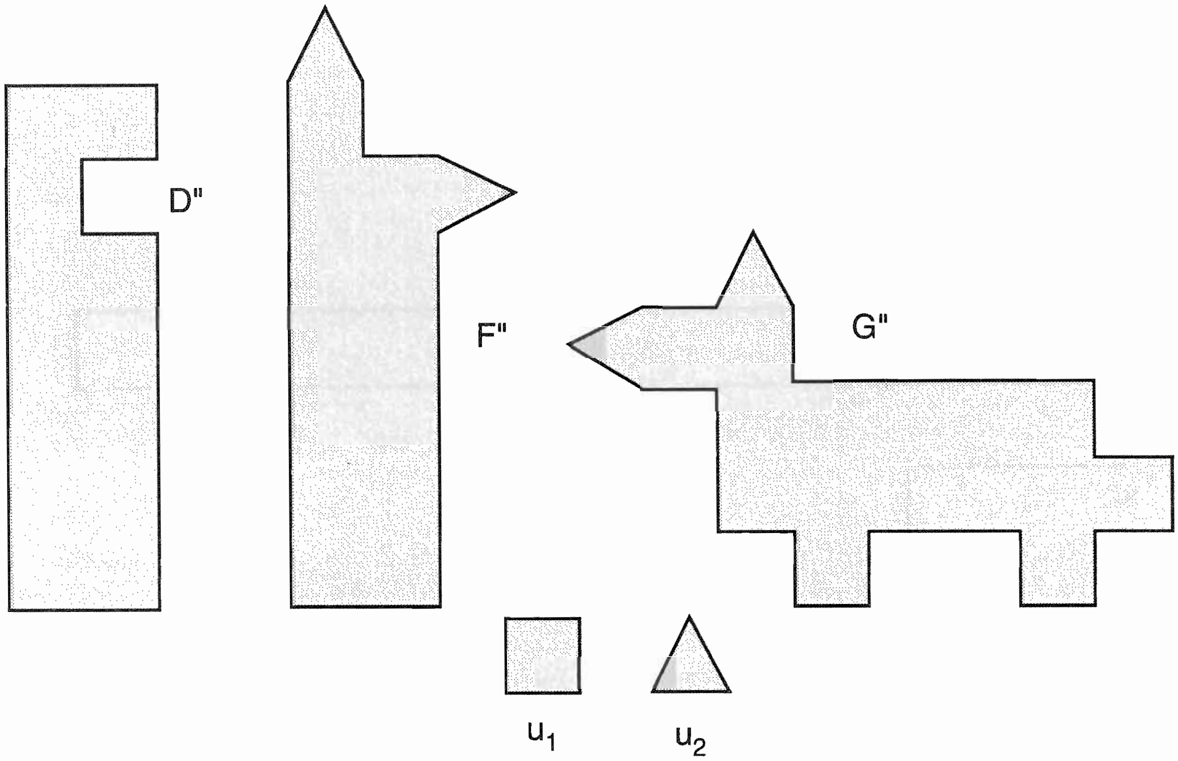
- la surface G'' peut être comparée à la surface A'' (ou F'') : même aire et périmètre plus grand
- elle peut aussi être comparée à la surface E'' : elle a une aire plus petite et un périmètre plus grand











Commentaires sur cette question et les réponses données ici:

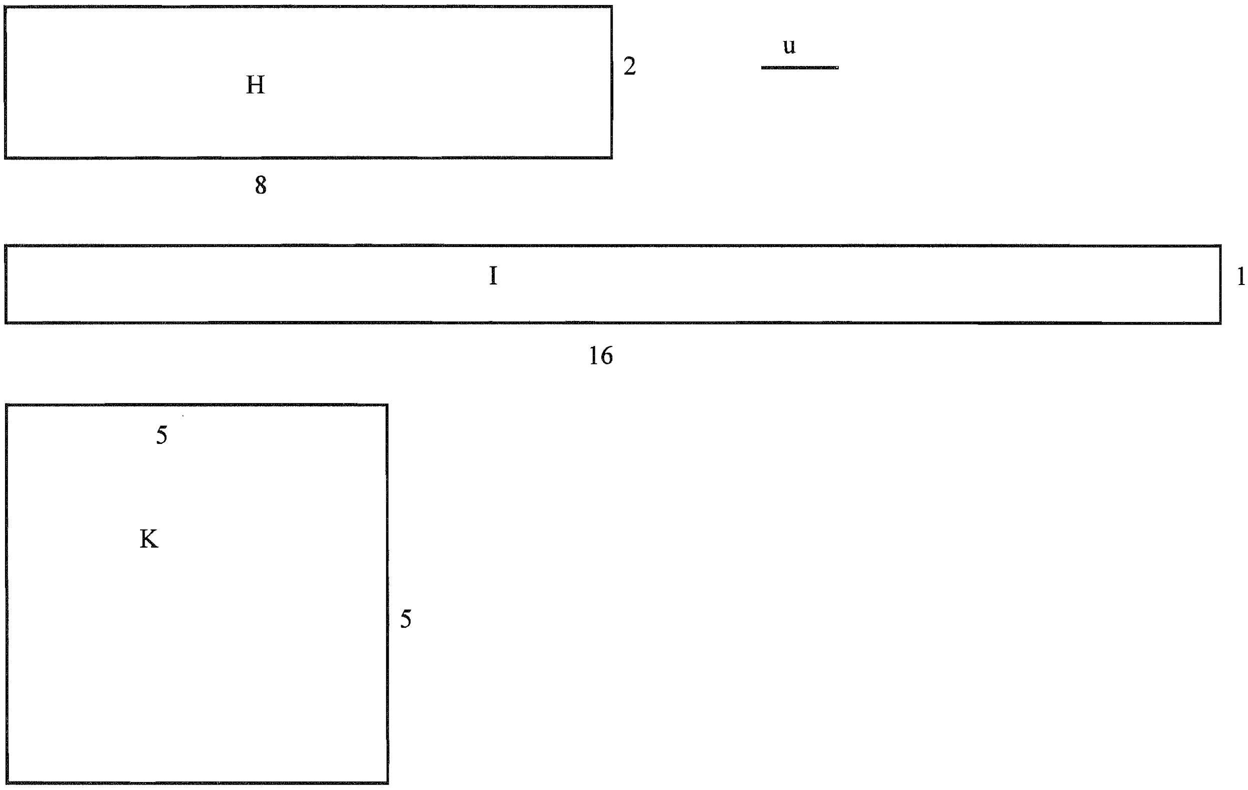
1°) L'expression "suivant les mêmes modalités" pouvait être interprétée de plusieurs façons (jusqu'où doit aller la ressemblance avec le matériel proposé et les procédures mises en oeuvre ?) ; en particulier, en ce qui concerne la présence, ou non, de deux unités de mesure. C'est pourquoi nous donnons deux exemples de réponse, l'une avec deux unités de mesure, l'autre avec une seule unité.

2°) Cette question nous parait nécessiter beaucoup de temps si l'on veut une réalisation précise et complète du matériel demandé.
Nous donnons les deux réponses ci-dessus pour l'information des candidats, mais il ne nous parait pas envisageable de produire un matériel aussi élaboré un jour de concours.
Il nous semble que le mot "Proposez" peut être entendu comme "Décrivez" plutôt que "Réalisez effectivement". C'est pourquoi nous considérons comme réponse acceptable le jour du concours :
- la réalisation des surfaces A et B et de celle définissant u (ou bien u_1 et u_2)
- l'indication des mesures d'aire et de périmètre pour les autres surfaces
- quelques lignes pour montrer que ces surfaces répondent bien à la question.(cf corrigé ci-dessus)

Question V

1- Deux surfaces peuvent avoir la même aire et des périmètres différents : H et I

2- Deux surfaces peuvent avoir le même périmètre et des aires différentes: H et K

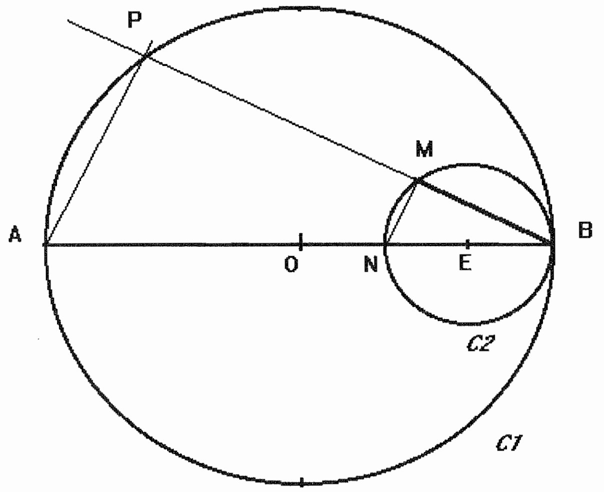

u
H
2
8
I
1
16
5
K
5

Corrigé effectué par l'équipe de Bordeaux

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES

Exercice 1
Solution "arithmétique"
Le numéro 2 contient un triangle doré de plus et un triangle émaillé de moins que le numéro 1.
Il coûte 1,5 F de plus car 22 - 20,50 = 1,5
Le numéro 3 est obtenu à partir du numéro 2 par la même opération
Le numéro 3 coûtera 23,5 F car 22 + 1,50 = 23,5
Exercice 2
Solution "arithmétique"
Rabais consenti par le commerçant 500 F car 2500 x 20% = 500
Prix consenti par le commerçant 2000 F car 2500 - 500 = 2000
Somme qu'ils possèdent ensemble : 1728 F car 2000 - 272 = 1728
Les économies des deux amis représentent 9/5 de celles de Jean car 5/5 + 4/5 = 9/5
1/5 des économies de Jean est représenté par 192 F car 1728 : 9 = 192
Les économies de Jean sont 960 F car 192 x 5 = 960
Celles de Paul sont 768 F car 1728 - 960 = 768 Vérification : 4/5 x 960 = 4 x 192 = 768
Exercice 3
1.
a) Construction de la figure



b) Le cercle C2 est tangent intérieurement au cercle C1 car O, E et B sont alignés, par définition et donc la distance OE est égale à la différence des rayons. Donc l(EB) = 2,5 cm
Le triangle NMB est un triangle rectangle puisque l'angle en M est inscrit dans un demi cercle.
2.
L'hypoténuse de NMB mesure 5 cm, et un des côté de l'angle droit 4 cm, l'autre, MN, mesure par conséquent 3 cm (d'après le théorème de Pythagore)
3.
L'angle APB est, lui aussi, inscrit dans un demi-cercle, il est donc droit. [AP] et [NM], perpendiculaires à une même droite BP, sont parallèles.
3. Les triangles MNB et APB se correspondent dans une homothétie de centre B. [BP] et [BM] sont dans le même rapport que les deux hypoténuses.
l(BP)/l(BM) = l(BA)/l(BN) donc l(BP) = 4 x 15/5 = 12
[BP] mesure 12 cm

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1

Aucun des textes ne permet formellement à quelqu'un qui ne l'a pas vue préalablement de construire la figure demandée.
Il suffit pour chaque message de construire une figure différente de celle attendue mais conforme au texte.

Question 2.

Pour les messages 1 et 2. le triangle, même s'il était bien placé pourrait être isocèle (figure a).

Pour le message 3, le segment issu du sommet du triangle équilatéral pourrait ne pas être "horizontal", (figure b).

Le message 4 est le plus précis et pourrait permettre des inférences correctes, mais il ne faut pas beaucoup de mauvaise foi pour décoller le triangle équilatéral du côté gauche du rectangle tout en ne laissant libre qu'un sommet, (figure c).

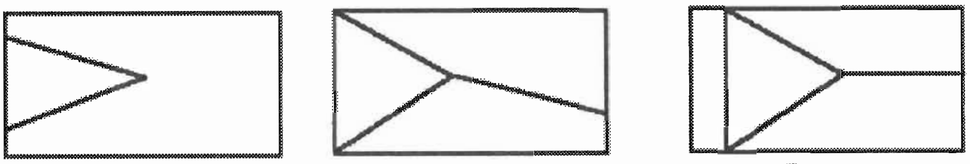


figure a figure b figure c

Question 3.

L'impossibilité de réussir ces situations de communication avec le répertoire des descriptions naïves tient à l'ambiguïté des moyens ordinaires de décrire les relations d'incidences, surtout entre des formes.

" le centre" pour dire "le milieu"
" la partie droite" pour dire "le côté opposé"
" rejoindre" pour dire "joindre"
" sur la partie gauche" pour dire "dont un côté coïncide avec celui du rectangle qui mesure 5 cm"
" sur l'angle libre" pour dire le troisième "sommet"
" un rectangle de 10 cm (de diagonale?) et de 5 centimètres (de largeur)

Les élèves n'ont pas de problème de connaissance de l'espace mais ne disposent pas de la terminologie géométrique. Mais il est clair qu'il ne s'agit pas seulement d'une question de terminologie. La solution du problème proposé exige de décomposer les figures en segments et d'en désigner les extrémités (par exemple avec des lettres).
Les descriptions "naturelles" s'appuient sur des connaissances contextuelles qui peuvent pallier à l'insuffisance des répertoires et des élèves peuvent réussir la reproduction grâce à un message heureusement suggestif, mais la réussite ne tiendra pas dès qu'elle devra se justifier.

SECOND VOLET (8 POINTS).
DIDACTIQUE

Question 1. Visiblement le professeur fait effectuer des divisions à ses élèves et n'a pas encore choisi avec eux une méthode rapide et standard.
Le professeur veut permettre à chaque élève d'élaborer avec les moyens qu'il comprend une stratégie "de base" de la division qui servira de signifié à l'algorithme final.
Il envisage de faire choisir ou élaborer cet algorithme par des confrontations de méthodes différentes.

Question 2. connaissances requises.
C'est aussi l'occasion pour les élèves d'utiliser de façon pertinente les opérations déjà connues (- et x) et d'en rendre la pratique sure et familière.
La soustraction, les multiplications de petits nombres. le niveau de connaissances requises est celui du CE1

Question 3 Procédures des élèves

- Alain utilise la soustraction répétée optimisée (autant de dizaines qu'on peut, puis autant de crayons qu'on peut) et établit très bien la liaison avec la multiplication qu'il utilise pour vérifier son résultat.

L'algorithme standard n'est plus qu'une question de disposition. Il est déjà conçu et compris

- Bernadette reçoit l'énoncé sur le mode quotidien. On ne voit jamais un enseignant épuiser sa réserve de crayons et en mettre autant d'un seul coup à la disposition de chacun de ses élèves ! Martine ne doit donner qu'un crayon à chaque élève. Dire à Bernadette qu'on "distribue les 218 crayons, n'est pas vrai non plus puisqu'il en restera 14 non distribués". Dire "on répartit également entre 17 élèves un lot de 218 crayons et on garde les crayons restants" serait plus précis, mais c'est l'opération elle même que Bernadette ne conçoit pas.

- Claire utilise systématiquement et presque ostensiblement la méthode des tâtonnements pour trouver le bon produit, avec une stratégie qui n'utilise pas les facilités occasionnelles procurées par les nombres rencontrés. Elle ne conçoit donc pas la division comme une opération arithmétique (deux données et deux résultats) et elle ne lui associe aucune manipulation "concrète". Elle la considère comme une tâche intellectuelle à effectuer à l'aide de multiplications. Le chemin pour Claire risque d'être très long, puisqu'il lui faudra optimiser sa quête ! Au lieu de recommencer chaque tentative directement (elle n'apprend presque rien sur le résultat à chaque essai), calculer d'abord la différence puis reprendre les essais pour cette différence.

La solution de Daniel pourrait lui suggérer la route.

- Daniel fait une première estimation plus fine. Il se rapproche par des multiplications comme Claire mais ne perd pas de vue la fonction de ses résultats et termine par deux soustractions de 17. Il lui resterait à optimiser l'utilisation des restes!

Question 4. Autres procédures.

On aurait pu trouver à ce stade :

- des procédures sur la voie de celle d'Alain mais plus primitives : soustractions systématiques de 17 jusqu'à épuisement par exemple, ou soustraction de groupements irréguliers moindres que dix,.
- un variante de la méthode de Claire : des multiplications systématiques associées à des additions

Exemple	1	17	218
	2	34	
	4	68	
	8	136	

On s'arrête parce que la somme des nombres à droite dépasse certainement 218,

On cherche alors à obtenir le nombre le plus près possible de 218 avec des sommes des nombres de droite : Martine distribue 136 + 68 = 204 crayons Chaque élève aura donc 8 + 4 = 12 crayons.

D'autres manières d'établir les produits peuvent apparaître sans que la méthode change,

- sans parler d'une procédure standard apprise par l'élève avec ses parents.

Question 5. Mise en commun.

La mise en commun permet "d'enrichir le sens" de la division par la diversité des manières de l'effectuer. Quelle procédure privilégier ? Evidemment celle d'Alain pour les raisons exposées ci-dessus, les autres méthodes ne serviront donc que d'illustrations.

Remarque didactique sur l'usage de procédures variées au cours d'apprentissages scolaires.

(relative à la question 5) :

Comment Claire et Daniel vont-ils pouvoir adhérer à la méthode d'Alain s'ils sont trop absorbés par la compréhension et l'exécution de la leur ? *il n'y a aucun passage évident de l'une à l'autre pour les élèves.*

Pendant que Daniel et Claire vont devoir changer complètement de méthode et de conception pour "adopter" la solution d'Alain, (à moins que le professeur ne veuille absolument leur faire poursuivre leur première approche (?), mais elle ne convergera pas vers la méthode standard, Bernadette devra commencer à répéter des soustractions pour comprendre la répartition, et Alain risque de s'installer fièrement dans une procédure encore relativement lourde.

La situation de cette classe montre bien les difficultés de la méthode de redécouverte et la façon dont elle peut créer des "hétérogénéités" ingérables pour le professeur.

Le professeur ne doit pas accorder une confiance aveugle à l'évolution "naturelle" des méthodes ni cultiver trop longtemps des différences de cultures "riches" pour la classe, mais qui vont épuiser et lasser les enfants égarés par les différences. Il doit maintenir un fragile équilibre entre une dévolution nécessaire et une institutionnalisation assez rapide pour permettre à chacun d'accéder à une culture commune et aller de l'avant.

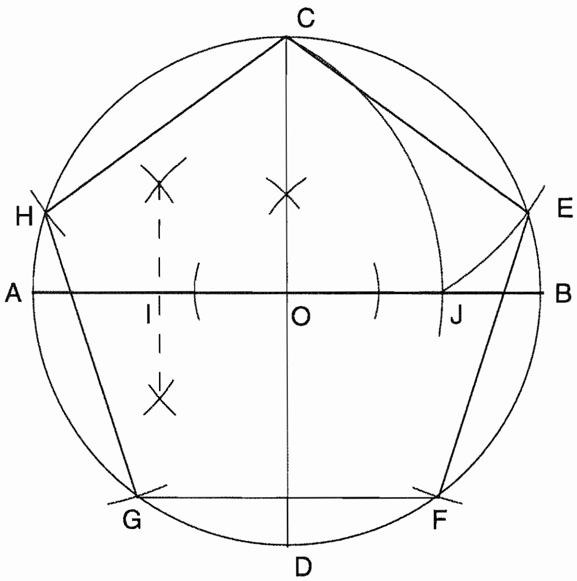
Besançon

Corrigé rédigé par l'équipe de Bordeaux
avec l'aide des éléments communiqués par notre correspondant de l'académie de Besançon

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES

Exercice 1



a) Construction (voir ci-contre).

b) Calcul de IC en fonction de r.
Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ICO :

$IC^2 = IO^2 + OC^2$

$IC^2 = (\frac{r}{2})^2 + r^2$

$IC^2 = \frac{r^2}{4} + r^2 = \frac{5r^2}{4}$

$IC = \sqrt{\frac{5r^2}{4}}$ $\boxed{IC = \frac{r}{2}\sqrt{5}}$

c) Calcul de la longueur d'un côté du pentagone en fonction de r.

Calcul de CJ.
Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle JCO :

$CJ^2 = JO^2 + OC^2$ $JO = IJ - IO$ or $IJ = IC$ (par construction)

$JO = IC - IO$

$JO = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$ $JO^2 = \frac{r^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2$

$CJ^2 = \frac{r^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2 + r^2 = \frac{r^2}{4}(6 - 2\sqrt{5}) + r^2$

$CJ^2 = \frac{r^2}{4}(10 - 2\sqrt{5})$ ou $CJ^2 = \frac{r^2}{2}(5 - \sqrt{5})$

$\boxed{CJ = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$ ou $\boxed{CJ = r\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}}$

Exercice 2

1ère méthode : (utilisation des coefficients de proportionnalité : passage par l'unité : $f(x) = x \times f(1)$)

20 billes	➡	9 "pogs"	15 "pogs"	➡	16 agates
1 bille	➡	$\frac{9}{20}$ "pogs"	1 "pog"	➡	$\frac{16}{15}$ agates
25 billes	➡	$\frac{9}{20} \times 25$ "pogs"	$\frac{9}{20} \times 25$ "pogs"	➡	$\frac{9}{20} \times 25 \times \frac{16}{15}$ agates

Donc 25 billes ➡ $\frac{9}{20} \times 25 \times \frac{16}{15}$ agates soit $\boxed{12 \text{ agates}}$

2ème méthode : (utilisation de la propriété de linéarité : $f(a.x) = a\, f(x)$)

9 "pogs"	➡	20 billes	15 "pogs"	➡	16 agates
45 "pogs"	➡	100 billes	45 "pogs"	➡	48 agates

Donc 100 billes ➞ 48 agates

25 billes ➞ $\boxed{\text{12 agates}}$

Exercice 3

Choix de l'inconnue : soit x la somme à partager.

Mise en équation : $(\frac{x}{2} - 15000) + (\frac{x}{3} - 5000) + \frac{x}{4} + (\frac{x}{5} + 3000) = x$

Résolution de l'équation : $\frac{30x}{60} - 15000 + \frac{20x}{60} - 5000 + \frac{15x}{60} + \frac{12x}{60} + 3000 = x$

$$\frac{30x + 20x + 15x + 12x}{60} - \frac{60x}{60} = \frac{77x - 60x}{60} = 17000$$

$17x = 17000 \times 60$ soit $x = 60000$

Conclusion : première personne : $\boxed{15000 \text{ F}}$

deuxième personne : $\boxed{15000 \text{ F}}$

troisième personne : $\boxed{15000 \text{ F}}$

quatrième personne : $\boxed{15000 \text{ F}}$

Remarque L'énoncé peut s'interpréter de la manière suivante :

$$(\frac{x - 15000}{2}) + (\frac{x - 5000}{3}) + \frac{x}{4} + (\frac{x}{5} + 3000) = x$$

ce qui conduit à $x \approx 21764,71$

Exercice 4

a) $A = \frac{364}{1001} = \frac{4 \times 7 \times 13}{7 \times 11 \times 13} = \frac{4}{11}$ A est non décimal car le dénominateur de la fraction irréductible ne comporte pas que des facteurs 2 ou 5.

ou A est non décimal car $A = 0,\underline{36}$ écriture infinie périodique.

$B = \frac{384}{275} = \frac{2^7 \times 3}{5^2 \times 11}$ B est non décimal (voir ci-dessus).

b) $A + B = \frac{4}{11} + \frac{384}{275} = \frac{4 \times 25}{275} + \frac{384}{275} = \frac{484}{275} = \frac{44}{25} = \frac{44}{5^2}$ A + B est décimal (voir ci-dessus).

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Première question

a) *Stratégie la mieux adaptée (pour le premier cas)*

Déterminer les images des quatre sommets de la figure qui se trouvent sur des nœuds du quadrillage. Pour cela on utilise les propriétés du quadrillage en repérant les nœuds et en comptant les carreaux (sur des "horizontales").

b) *Stratégies possibles (pour les deux autres cas)*

- Pliage le long de l'axe (tracé de la figure par transparence)
- Utilisation de papier calque :
  on décalque la figure et l'axe muni d'un point repère et on retourne le calque.
- Utilisation de l'équerre et de la règle graduée :
  déterminer les images des quatre sommets (l'axe est la médiatrice du segment joignant un sommet et son image).
- Utilisation du compas et de la règle :
  déterminer les images des quatre sommets en utilisant le principe de construction d'un losange fictif (voir ci-contre). La règle est utilisée pour tracer les côtés.

Deuxième question

a) *Identification des réponses correctes*

Les trois productions A, E et H.

b) *Analyse des erreurs*

B : L'élève a effectué une translation.

C : Une seule erreur sur l'image du sommet "le plus bas" de la figure initiale (le grand côté de la figure image devient "vertical").

D : En utilisant, sans doute, le papier calque, l'élève a fait subir à la figure initiale un demi-tour de centre un point de l'axe.

F : Bon retournement du papier calque, mais léger glissement sur l'axe probablement dû à l'absence d'un point repère.

G : Bonne idée de la nécessité de retourner le papier calque, ce qui se devine vu la position du dessin proposé comme symétrique. Mais malheureusement le retournement effectué est incorrect.

I : Bon retournement du papier calque mais non respect de la distance à l'axe.

c) *Productions A, B et D*

A : Symétrie orthogonale (ou axiale).

B : Translation (5 carreaux vers la gauche, "horizontalement").

D : Symétrie centrale (ou demi-tour) de centre un point de l'axe.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

a) *Niveau du cycle*

Cet apprentissage ("addition de nombres décimaux") se situe en 2è année du cycle des approfondissements (CM1).

b) *Conception de l'enseignement induit par chacun des documents*

Document A	***Document B***
Le maître expose, explique et finalement transmet une technique. Les élèves observent et finalement reproduisent une technique.	***(Voir remarque didactique en bas de page).*** [1] L'activité est intitulée "découverte". En conclusion, l'élève doit pouvoir "expliquer" la technique de l'addition (humaine) dans les décimaux correspondant au travail de la calculatrice. Si cette technique était inconnue de l'élève, on suppose que les questions posées sont de nature à le lui faire découvrir (sans doute avec l'aide du professeur). L'enseignant doit inviter l'élève à proposer des résultats calculés de tête ou estimés, puis à les confronter au résultat donné par une calculette. Cette méthode suppose une connaissance déjà assez bonne de l'addition des décimaux et constitue des exercices d'étayage pour la mémorisation de ces connaissances.

[1] **Remarque didactique à propos du document B** : les "techniques" plus ou moins complètes et efficaces mises en oeuvre implicitement par les élèves dans les exercices, validées empiriquement par la calculette devront être "formulées" par les élèves puis "expliquées".
Aucune indication figurant dans le sujet n'est donnée au maître sur le ou les moyens d'obtenir ce résultat. Le "livre du maître" donnerait peut-être des précisions à ce sujet.
Dans le cas présent, en l'absence de toute autre précision, la "découverte" sera sans doute un "cours" illustré par des exemples successifs. Cette fiche prise seule ne suffit pas à définir une situation où l'élève pourrait découvrir lui-même la connaissance visée. Par conséquent, les réponses du genre : méthode de découverte, de redécouverte ou situation-problème, qui laissent à penser le contraire sont tout à fait inapropriées.

c) *Thèmes des séances précédentes*

Document A	**Document B**
- Addition des nombres entiers.	Addition et soustraction des nombres entiers.
- Nombres décimaux.	Fractions décimales.
	Addition de fractions décimales.
	Nombres décimaux.

d) *Aide-mémoire pour le document A*

Pour effectuer une addition en colonnes de nombres décimaux :

1. Place les unités sous les unités (il suffit d'aligner les virgules).
2. Effectue l'opération comme avec des nombres entiers.
3. Dans le résultat, place la virgule sous les autres virgules.

e) *Exercices d'évaluation*

• Additions disposées en colonnes avec ou sans retenue.

Effectue les opérations suivantes :

```
 262,15        48,9
+ 34,7       + 7,25
-------      ------
```

• Additions disposées en ligne (nombres entiers et nombres décimaux ayant des parties décimales d'inégales longueurs).

Effectue les opérations suivantes :

```
23,14 + 302,7 =
9,65 + 14 + 7,8 =
```

• "Petit" problème additif.

Kevin pense à un nombre. Il retranche 15,3 à ce nombre et obtient 9,7. Trouve à quel nombre Kevin a pensé.

Erreurs possibles :

a) 9,6 + 7,8 = 16,14 (Un décimal est conçu comme la juxtaposition de deux entiers.)

b) 3,15 + 12,4 = 4,39 (Non prise en compte de la virgule, d'où l'alignement des dernières décimales de chaque nombre.)

Bordeaux - Clermont-Ferrand - Ile de la Réunion

Corrigé effectué par l'équipe de Bordeaux.

PREMIERVOLET(12POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES

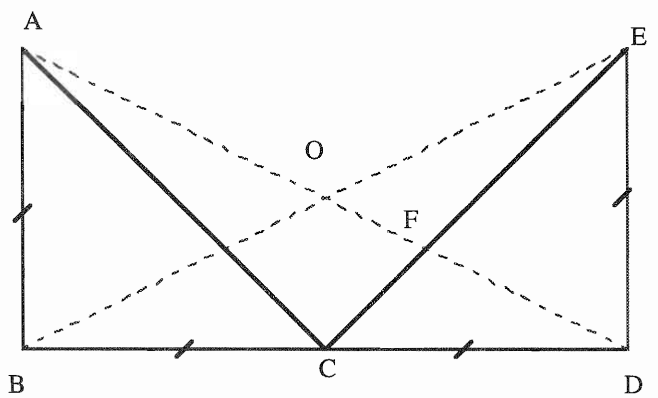
EXERCICEN°1 :

La reconstitution des égalités donne :

1-10-7 (en km) 2-6-12 (en F.) 3-9-8 (m/s) 4-11-5 (m^3)

Il n'était pas demandé de justification.
Une réponse en cm est fausse : l'échelle est un coefficient de proportionnalité.
Barême :
Tout juste : 2 points.
Etiquettes bien placées mais unités fausses (-1/4 par unité fausse).
Etiquettes mal placées : + 0,5 point par ligne juste et -1/4 par unité fausse dans les lignes justes.)
Autre rédaction (utilisation des quotients par exemple), mais formules justes : moitié des points.

EXERCICE 2 :



Les droites (AB) et (ED) sont perpendiculaires à la droite (BD). Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles donc (AB) // (ED).

AB=ED, (AB) // (ED) et les points A et E sont du même côté de la droite (BD).
Un quadrilatère non croisé dont 2 côtés opposés sont parallèles et de même longueur est un parallélogramme. Donc ABDE est un parallélogramme. Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu O, donc [AD] et [BE] se coupent en leur milieu.
Remarque : ce parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle.

3- D est le symétrique de B par rapport à C donc C est le milieu de [BD] et O est le milieu de [BE], donc [DO] et [EC] sont deux médianes du triangle BED. F est donc le centre de gravité de ce triangle. Ce centre de gravité se trouve aux 2/3 de la médiane en partant du sommet, donc
FE = 2 CF.

4- A(ACF) = A (ACD) - A (CFD)
A (DEF) = A (CED) - A (CFD)
mais les triangles ACD et CED ont des hauteurs de même longueur (AB = ED) et la même base CD. Donc A (ACD) = A (CED) d'où A (ACF) = A (DEF)

5- $\widehat{ACF} = 180° - (2x45) = 90°$ donc le triangle ACF est rectangle en C.

donc A (ACF) = $\dfrac{CFxAC}{2}$. Le théorème de Pythagore donne AC = $4\sqrt{2}$ (ou CE = $4\sqrt{2}$)

mais CF = $\dfrac{1}{3}$ CE (d'après 3-), donc CF = $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

A(ACF) = $\dfrac{4\sqrt{2}x4\sqrt{2}}{2x3} = \dfrac{16}{3}$ (en cm2).

Autre solution possible à partir de 3- :
3- O est milieu de [BE] et C est milieu de [BD]. La droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté, donc (OC) // (ED) et ED = 2 OC. L'utilisation du théorème de Thalès dans les triangles OFC et EFD donne
$\dfrac{FE}{FC} = \dfrac{ED}{OC} = 2$ soit FE = 2 FC

4- EF = $\dfrac{2}{3}$EC donc A (DEF)= $\dfrac{2}{3}$ A (CED). Comme AF = AO + OF = $\dfrac{1}{2}$AD + $\dfrac{1}{3}$OD = $\dfrac{2}{3}$AD

alors A(ACF) = $\dfrac{2}{3}$ A (ACD). Mais A (ACD).= A (CED) donc A (ACF) = A (DEF)

5- Comme A (ACF) = A (DEF) = $\dfrac{2}{3}$ A (CED). Alors A (ACF) = $\dfrac{2}{3} x \dfrac{4x4}{2} = \dfrac{16}{3}$ (en cm2).

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

1-1 Sur quelles notion étudiée en cycle 3, portent ces problèmes ?

Ces problèmes portent sur la notion de proportionnalité. En effet, les situations I, II et IV renvoient (culturellement) à la proportionnalité, et la situation III visiblement non.
Il s'agit donc de "reconnaître des situations de proportionnalité", et de" les traiter par les moyens de son choix" (cf. les programmes de l'école primaire).

1-2 Procédure de résolution utilisable en cycle 3 qui semble la plus adaptée à l'énoncé :

Problème 1

L'enfant fait le raisonnement suivant:
- On remarque que 24=9+15 donc pour 24 personnes il faut les oeufs pour 9 personnes et les oeufs pour 15 personnes, soit 6+10=16"

- On remarque que 30=15+15 (ou plus difficilement 30=15x2) donc pour 30 personnes , il faut les oeufs pour 15 personnes et encore les oeufs pour 15 personnes, soit 10+10=20"

- pour 6 personnes plusieurs possibilités :

Soit on se sert des réponses précédentes en remarquant que 6 est le quart de 24 ou que 6 est le cinquième de 30 : dans le premier cas, la réponse est le quart de 16 soit 4 œufs.
Soit on part de l'énoncé en remarquant que 6 est la différence entre 15 et 9. Le nombre d'œufs pour 6 personnes est alors 10- 6 soit 4 oeufs. On peut aussi remarquer que 6 correspond aux 2/3 de 9, ce qui conduit à conclure 6x(2/3)=4.

Remarque : l'élève de CM2 qui aurait vu les question a), b), c) globalement peut être amené à chercher le nombre d'œufs pour trois personnes (Procédure efficace sur l'ensemble des trois questions).

Ces raisonnements peuvent ou non s'appuyer sur une présentation en tableau:

nombre de personnes	9	15	24	30	6
nombre d'œufs	6	20			

Dans tous les cas, l'élève utilise implicitement les propriétés de linéarité:

f(24)= f(9+15)= f(9)+f(15)= 6+10=16
f(15+15)=f(15)+f(15) ou f(15x2)=2 f(15)

f(24:4)=f(24):4 ou f(30:5)= f(30) :5
f(15-9)=f(15)-f(9)
f(9:3)=f(9):3 et f(3x2)=f(3)x2

C'est la procédure qui parait la mieux adaptée au cycle 3 parce que:
- dans les procédures plus expertes (recherche systématique du coefficient de proportionnalité, ou "produit en croix" ou "règle de trois"), l'enfant perd de vue le sens, alors qu'ici il raisonne sur la situation, ce qui nous parait conforme aux objectifs du cycle 3.

- l'autre procédure utilisée en CM, la recherche de l'image de 1, par les propriétés de linéarité n'est pas envisageable ici : pour une personne, il faut 2/3 d'oeufs: cela n'a pas de sens, et de toutes façons les enfants ne savent pas multiplier par 2/3.

Problème II :
6 est la moitié de 12, donc la fermière fera 16/2 soit 8 petits fromages de plus, d'où un total de 24 fromages.
Dans tous les cas, l'élève utilise implicitement les propriétés
f(6)= f(12:2)=f(12):2 et f(12+6)=f(12)+f(6)

Problème III :
On ne peut pas prévoir le poids d'une personne...

Problème IV :
f(2x3)=2xf(3) un segment deux fois plus grand dans le modèle doit être encore deux fois plus grand dans l'agrandi : idem pour f(9)= 3f(3) ou bien f(9) = f(3)+f(6).
(en raisonnant éventuellement sur la figure: le segment vertical de droite a même longueur que les deux segments AB et CD mis bout à bout)
pour f(2), les "choses se compliquent: f(2)= f(6):3= 8:3 or on ne peut exiger des enfants de CM2 la connaissance du rationnel 8/3.
Remarque : cet exercice ne s'inscrit pas bien dans le programme puisque les enfants ne pourront pas donner la réponse exacte.

Là aussi une représentation en tableau peut faciliter le raisonnement:

longueur sur le premier dessin	3	12	6	9	2
longueur sur le dessin agrandi	4	16			? ?

2- Analyse des procédures probables des trois élèves

	Sébastien	Margaux	Mathilde
1-a	Résultat juste - procédure non explicite	dans les trois cas, Margaux a appliqué la même règle: pour n personnes, elle cherche p tel que px2=n et elle écrit que" le nombre d'oeufs est p" : procédure erronée ici.	Résultat faux : procédure non apparente : peut-être 24= 15+9 donc f(24)=f(15)+9= 10+9 (9 personnes de plus, 9 oeufs de plus) : fonction additive
1-b	idem	voir ci-dessus.	Résultat juste : procédure non apparente, sans doute a-t-elle vu 30=15+15, d'où la procédure attendue.
1-c	non réponse	voir ci-dessus	Résultat faux : sans doute : « 3 personnes de moins, 3 oeufs de moins ».
II	Résultat juste : procédure attendue (avec une erreur d'écriture (12:6 au lieu de 12:2)	22 vient probablement de 16 + 6. L'erreur a peut être pour origine la lecture erronée de l'énoncé. (6 ~~litres~~)	Résultat faux 2x12 ?

III	Réactioncorrecte	elle fait visiblement 27+17; est-ce tout simplement pour faire une opération avec les poids donnés dans l'énoncé? est-ce parce qu'elle a remarqué que 6+9=15? Cela signifierait qu'elle utilise ici la propriété additive de linéarité , ce qui est peu probable puisqu'elle n'a pas su l'utiliser dans I.	Elle remarque qu'en 3 ans, Vincent a grossi de 10kg , et applique cette règle "10kg en 3 ans". Elle applique la propriété "des écarts" à la fonction (âge, poids) (à un même écart d'âge correspond toujours le même écart de poids) , propriété caractéristique des fonctionsaffines. Elle a voulu répondre à la question posée (pb de contrat didactique) et a cherché une règle simple.
IV	3 réponses exactes sur les 4 : procédure attendue pour 6 et 9 ; pour 2, peut-être l'élève a-t-il choisi l'entier le plus plausible?(ordre de grandeur) peut-être, devant la difficulté de calcul, retour à une fonction additive : f(2)=2+1=3 (et on trouve là une erreur très courante en CM)	On peut penser qu'elle a voulu utiliser une fonction additive, mais comme il n'y en a pas qui soit compatible avec f(3)=4 et f(9)=12 elle a distingué segments horizontaux et verticaux. Nous pouvons voir là la prégnance du modèle additif qui constitue un obstacle à la proportionnalité.	4 réponses fausse. Mathilde ajoute 4 à toutes les dimensions (sauf le toit). (Prégnance du modèle additif).

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

Remarque à propos des question 1-A et 1-B : dans « objectif calcul », la feuille de papier calque est proposée pour que l'élève n'écrive pas sur le livre, ce que les candidats ne sont pas censés savoir[1].

Question 1-A[2] : erreur possible et hypothèses sur son origine.

L'élève peut oublier de repasser en couleur la troisième figure (à partir de la gauche).

Origine probable de cette erreur : la présentation « oblique » de l'angle droit. Cette présentation ne présente pas de trait « horizontal » et de « trait vertical. »

On peut aussi signaler que l'élève ayant déjà trouvé la deuxième figure comme solution se contente d'une seule réponse (phénomène de contrat).

L'élève peut valider sa réponse en effectuant un double pliage (selon la première droite, puis selon la seconde). La superposition valide l'orthogonalité.

Il peut aussi se servir du calque en faisant tourner le calque : (l'invariance globale par rotation de 90° caractérise un couple de droites perpendiculaires.).

Eventuellement l'usage du rapporteur ?

[1] les auteurs de cet ouvrage conseillent d'utiliser le papier calque (voir exercice 1) pour que l'enfant n'écrive pas sur le manuel. En ignorant cette habitude, le candidat peut attribuer au papier calque une toute autre fonction : par exemple, l'orthogonalité peut être contrôlée par rotation du papier calque. La démarche est d'ailleurs intéressante, mais le candidat aurait du être informé du statut de ce calque dans ce sujet.

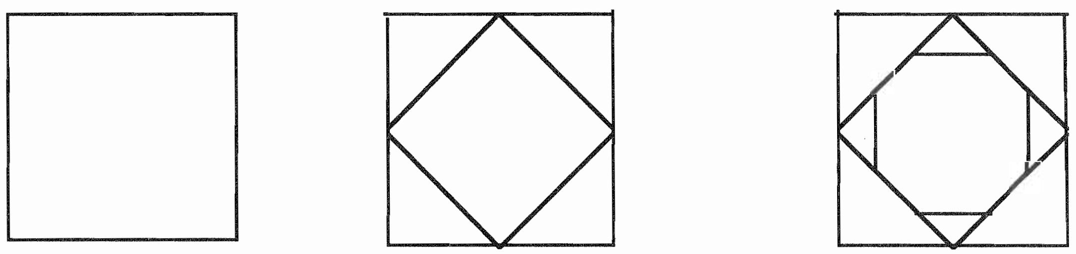
[2] Le sujet demande : « dans l'exercice 1 du bas de la page 34, indiquer une erreur possible... » : le texte ne signifie pas s'il s'agit de rechercher une erreur possible dans le manuel, ou de prévoir une erreur possible d'un élève qui ferait cet exercice. Or il est plausible lors de cette épreuve de s'attendre à une question relative à la qualité d'un exercice. Il fallait donc lever le doute.

Question 1-B : erreur possible et hypothèses sur son origine.
Une erreur possible consiste à considérer comme parallèles les deux droites (non parallèles) de la figure du milieu.
Origine probable de cette erreur : les deux représentations de ces droites ne sont pas sécantes.
L'exercice évoque des droites qui sont représentées par des segments. Cette représentation conventionnelle des droites n'est pas sans poser des difficultés à l'école primaire.
Deuxième partie : Deux procédures pour vérifier le parallélisme :
- s'assurer que les deux droites sont perpendiculaires à une même troisième *(c'est la démarche souhaitée par ce manuel dans les pages précédentes*).
- s'assurer que la distance entre ces deux droites est constante : (soit par mesurage, soit par pliage).
- faire glisser l'équerre le long d'une règle. *(action difficile à mener à bien à l'école primaire).*
- La procédure qui consiste à prolonger pour s'assurer que les « droites » ne se rejoignent pas est moins usitée.

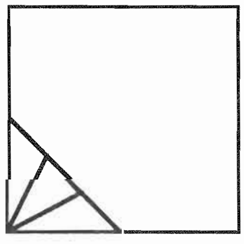
Question 2-A : Exercices découvertes p. 38 : Type de papier quadrillé.
Il faut que les sommets « importants » des différentes lignes soient sur des noeuds du quadrillage.
- 1mm, pourrait aller; mais 1 rendrait la figure complexe et supposerait des dénombrements difficiles : 6 cm=60 mm
- 5 ou 10mm conviendraient pour le premier (le candidat devrait justifier en citant les longueurs qui interviennent pour déterminer les points, horizontalement et verticalement).
- seul 5mm convient pour le deuxième.

Question 2-B : Exercices découvertes p.38 : instruments et procédures (papier quadrillé).
On suppose qu'il s'agit d'un papier à quadrillage carré de coté 5mm. L'élève a besoin d'un crayon et d'une règle graduée pour mesurer sur le modèle. Il doit ensuite traduire : 6cm= 6 carreaux.
L'équerre est inutile. Le quadrillage donne implicitement orthogonalité et parallélisme..
Procédures possibles de reproduction :

- procédure globale : Observation et analyse « globale » de la figure pour commencer par le grand carré, puis le carré intérieur, etc. *(Un film des différents tracés serait efficace pour répondre à cette question).*



- procédure locale : dessiner le grand carré, puis partir d'un coin et marquer les sommets « importants » et réaliser les tracés des segments au fur et à mesure en s'aidant du quadrillage.



Question 2-C : Exercices découvertes p.38 : instruments et procédures (papier uni).
A priori, il faut ajouter l'équerre aux instruments précédents, mais, si le modèle est pliable (photocopie du manuel), l'enfant peut repérer les angles droits du contour ainsi que des régularités (symétries axiales) qui peuvent l'encourager, par pliage, à mettre au point un quadrillage lui permettant de réaliser la construction.

Les procédures possibles :
Elle dépendent très largement de ce qui a été fait précédemment : si, comme le suggère la consigne du manuel, le travail sur papier quadrillé a été fait avant, on peut s'attendre à des reproductions préalables du quadrillage. (A l'aide de l'équerre ou/et de pliages.)
Procédure globale : construire le quadrillage et les points importants au fur et à mesure.
Procédure locale : construire tout le quadrillage et les points importants ensuite.
Procédure mixte : construire quelques lignes du quadrillage (par pliage), y placer les points importants et terminer par traçage de lignes supplémentaires du quadrillage.

Question 3 Exercice 2 p .39 deux activités correspondant à deux notions différentes
- Reconnaître des figures simples dans une figure complexe : rectangle, losange...)
- retrouver des alignements et des lignes essentielles de construction.

On peut aussi :
- Travailler, par pliage sur la symétrie axiale.
- à partir d'un rectangle, construire un losange à l'intérieur. (à l'extérieur la tâche est alors très difficile).
- construire la série des rectangles (agrandissements de figures).

Les auteurs du manuel proposent de travailler avec papier quadrillé puis avec papier uni, ce qui renvoie à l'analyse déjà faite en 2.

Question 4 Exercice 3 p .39 procédures de reproduction :
- Il faut d'abord que l'élève remarque qu'il s'agit d'un carré, que l'hélice est constituée de quatre arcs de cercle qui sont sécants au centre du carré et qui sont portés par des cercles dont les centres sont les sommets du carré.
- Pour effectuer le tracé, l'élève peut retrouver le centre du carré (intersection des diagonales). A partir de là, la procédure de tracé va de soi.

Il peut, aussi, se contenter de tracer les arcs de cercle et de les faire « affleurer » au centre sans construire explicitement ce centre (problème de contrat de construction).

Question 5 Exercice 5 p .39 : difficultés
- Premier type de difficulté : savoir lire les constituants de la figure (comme pour l'exercice 3).
- Deuxième type de difficulté : une fois ces constituants reconnus, savoir les construire donc savoir retrouver les centres des cercles tangents et des demi-cercles.

Simplifications : faire figurer le diamètre « horizontal », indiquer les centres des demi-cercles.

Caen

Corrigé effectué par l'équipe de Bordeaux

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES

1. question

Tracer un segment AB de longueur r (quelconque).
De A comme centre et avec un compas d'ouverture r tracer un arc.
De B comme centre et avec la même ouverture r tracer un autre arc qui coupe le premier en F.
De F comme centre tracer le cercle Γ de rayon r.
Prolonger AF qui coupe Γ en C, tracer le segment AC.
Prolonger BF qui coupe Γ en D, tracer le segment BD.
Tracer BC, AD et DC.
De A comme centre tracer de part et d'autre de AC deux arcs de rayon R quelconque mais supérieur à AF (supérieur à AC sera plus commode).
Avec le même rayon tracer deux arcs issus de C.
Les arcs se coupe en x et y, tracer d_1 la droite xy. Elle passe par F et est la médiatrice de AC.
Prolonger DC qui coupe d_1 en E.
Tracer FE et CE.
Noter J l'intersection de AD et FE.

2. question

a) Puisque FE est la médiatrice de AC, longueur de EC = longueur de EA.

Le triangle FCE est rectangle en F et l'angle $\widehat{FCE}$ est de 60° donc FCE est la moitié d'un triangle équilatéral
et la longueur de CE = 2 x longueur de FC = longueur de AC
donc ACE est équilatéral.

b) $\widehat{FBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ABF} = 90° - 60° = 30° = \widehat{BCF}$

$\widehat{BCF} = 180 - 2 \quad 30° = 120°$

Les mesures sont 30 pour $\widehat{FBC}$ et $\widehat{BCF}$ et 120 pour $\widehat{BCF}$.

c) AD est parallèle à ED comme portés par des côtés opposés d'un rectangle
D est le milieu de ED (ED = DC)
car $\widehat{EFD} = \widehat{CFE} - \widehat{CFD} = 30°$ et car $\widehat{FED} = 30°$ d'après la question a)
donc FED est isocèle et FD = ED or FD = DC puisque FDC est isocèle
donc ED et AB sont des segments parallèles et égaux, donc ABDE est un parallélogramme.

3. question

a) EF est la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 2a donc
longueur de EF = 1/2 x 2a $\sqrt{3}$ = a$\sqrt{3}$

Soit I le pied de la perpendiculaire abaissée de E sur BD,
EFI est un triangle rectangle, moitié d'un équilatéral de côté EI, moitié de EF. la longueur de EI est a$\sqrt{3}$/2. EDI est aussi un triangle rectangle de ce type et la longueur de DI est la moitié de celle de ED : a/2. BE est l'hypoténuse du triangle rectangle AEI dont les côtés BI et EI mesurent
(BI) = 5a/2 et (EI) = a$\sqrt{3}$/2.
$BE^2 = 25/4\ a^2 + 3a^2/\ 4 = 28/4\ a^2 = 7\ a^2$ donc BE = a$\sqrt{7}$.

b) aire de AEC = l(FC) x l(FE) = a x a$\sqrt{3}$ = $a^2\sqrt{3}$ (= aire de ABD)
aire de AFD = 1/2 longueur AD x 1/2 a = longueur de EF x 1/4 a = $a^2\sqrt{3}$ /4.

c) Remarquons que l'aire de ABF est égale à l'aire de AFD puisque AF est la médiane relative à BD. Donc l'aire de ABCD est quadruple de celle de AFD, et égale à celle de AEC : $a^2\sqrt{3}$.

d) $\widehat{EFD} = 30°$ et $\widehat{ADF} = 30°$, d'après la question 2c) ; donc $\widehat{FJD} = 120°$
donc FJD est semblable à EDF dans le rapport 1/$\sqrt{3}$.

4.question

GF = AF (rayons d'un même cercle donc AGF isocèle en F
mais CAE est équilatéral (d'après 2a)) donc $\widehat{FAG} = 60°$ et donc $\widehat{AGF} = 60°$ et $\widehat{AFG} = 180° - 120° = 60°$ donc AFG est équilatéral.
Donc AG = AF = 1/2 AC = 1/2 AE G est le milieu de AE.

5 question
a) Le polygone ABHCDG est un hexagone régulier (car tous ses points sont sur le même cercle et AG = GD d'après 4, HB = HC par symétrie par rapport à la médiatrice de AB et donc tous les côtés sont égaux à a.
b) Les axes de symétries de la figure ABHDCG sont :

les diagonales AC, BD et HG

les médiatrices des côtés (les 3 rayons perpendiculaires aux diagonales)

E est symétrique de C par rapport à AD, donc (CAD) = (DAE) = 30°.
c) Les axes de symétrie de ACE sont AD, EF et CG
d) La rotation directe (sens inverse des aiguilles d'une montre), de centre F et d'angle 240° applique A sur D et C sur B. (La rotation de sens inverse de même centre et d'angle 120° transforme elle aussi A en D et C en B

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1

Solution	**Calculs** 13,90 : 1,2 = 139 : 12
Poids en grammes :	139 12
12 x 100 = 1200	19 11, 58
Poids en kilogrammes : 1,2 (1200g ≡ 1,2 kg)	70
Prix au kilogramme, en francs :	100
13,90 : 1,2 ≈ 11,58	4
	Le quotient n'est pas décimal et une précision plus grande est inutile

Question 2

a) Le travail de Manuel
Manuel effectue le produit des nombres qu'on lui a donnés.

Il associe la quantité, le prix à l'unité et le prix dans une relation multiplicative.

Il calcule bien le poids du produit en kilogramme.

Mais il confond le prix marqué sur le lot (c'est à dire le prix à l'unité de lot) 13,90 F avec le prix à l'unité de poids (de masse) c'est à dire le prix au kilogramme et il se laisse entraîner à chercher le troisième terme : un prix pour une quantité et il multiplie le prix donné par le poids en kilogrammes :1,2 Manque de familiarité avec la pratique des mesures de grandeurs?

A moins qu'il n'ait pas encore appris à distinguer utilement le sens de la multiplication et de la division des décimaux.

Pour vérifier et lui donner une chance d'affronter l'alternative, lui demander de calculer avec son prix du kilogramme, le prix des 1,2 kilogrammes de desserts proposés. S'il est perdu c'est la deuxième hypothèse qui est la bonne. Revenir alors à un calcul sur les entiers (S'il y avait 12 kg on paierait ? 139 F ! prix du kilogramme ? S'il y a échec alors revenir à Si on vendait 1200 Kg pour 139 F, quel serait le prix au kg ? L'opération reste la même si les nombres changent mais il faut garder les mêmes grandeurs.

b) Le travail de Mehdi.
Mehdi conçoit directement la fonction poids $\rightarrow$ prix et ses propriétés de linéarité.
Il veut conserver le rapport externe (le prix par poids) et procéder par des partages sur le poids, qu'il connaît, pour obtenir d'abord le prix de 1 lot de 100g (de façon à n'avoir que des divisions à faire)
puis celui de 1 kilogramme:

Mais il reste dans les prix "effectifs" en Francs et centimes et il ne sait pas diviser directement 95 par 6, ce qui le condamne à ne pas pouvoir calculer le prix de 1 lot.
(il aurait pu dire 1 lot de 100 g "ça fait" 1 F, et 95 : 6 = 15 c, et ...5/6 de F !)
Sa stratégie s'effondre.

Néanmoins le projet de diviser 6,95 par 6 demeure et Mehdi le réalise par tâtonnements, en multipliant des sommes exprimées en décimaux 1,5; 1,1 ; 1,2 et finalement 1,15.
Négligeant l'erreur qu'il a commise sur une boite, il calcule alors le prix de d'un kilo (10 "boîtes") : 11,50

c) Le travail de Céline.
La méthode de Céline est fondamentalement la même que celle de Mehdi. Elle n'en diffère que par la stratégie de calcul de 1000 à partir de 1200.
Elle cherche ce que nous appellerions le plus grand diviseur commun : 200
Le prix de deux cent grammes est 13,90 divisé par 6 : 2,31 en négligeant le reste.

Mais là, ô surprise! au lieu de multiplier par 5, "normalement", ce qui aurait produit 11,55, elle retranche ce prix de celui des 1200 g, première astuce ingénieuse qui évite de multiplier l'erreur par 5. Puis ô merveille! au lieu de retenir 11,59, le résultat standard de l'opération, elle fait intervenir le reste négligé, pour annoncer 11,58 F , le résultat "officiel.

Mehdi et Céline ont très bien compris la situation, mais ils utilisent une méthode de division qui est à peu près celle des scribes égyptiens il y a au moins quarante siècles. Elle peut paraître plus accessible au tout début de l'apprentissage ou légitime comme "paradigme" pour restaurer le sens à l'occasion, mais elle présente des difficultés techniques et des limitation qui ne peuvent que rebuter la plupart des enfants.

Remarques didactiques :
On peut s'émerveiller sur l'ingéniosité des calculs et la maîtrise dans les approximations, mais il est certain que l'on pourrait enseigner à ces enfants des méthodes plus puissantes Si Céline ne manque pas de laisser ces raffinements (pervers et polymorphes) dès qu'on l'autorisera à traiter ce genre de problèmes avec les moyens adéquats, il est à craindre que Mehdi ne s'enkyste dans l'évitement des raisonnements sur les décimaux et dans les méthodes primitives et maladroites alors qu'il pourrait parfaitement faire mieux.
L'origine de ces erreurs est donc clairement d'origine didactique. Une absence de volonté d'enseigner ? une trop grande complaisance pour les méthodes primitives des élèves et l'étude de leurs erreurs ? une recherche excessive et trop prolongée de "maintenir" ou de "restaurer le sens des opérations" ?

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

(Voir commentaire sur le sujet en fin de corrigé)

Question 1 (document A)

1) Description des classements
Les objets classés sont dix figures différentes. Il y a 14 dessins dont 4 sont répétés, il ne peut donc pas y avoir une classification unique mais au moins deux.
La première concerne les 7 premières figures (toutes différentes) réparties en trois classes suivant le dénominateur des fractions qu'elles figurent : les sixièmes, les huitièmes, les tiers, quelle que soit la forme partagée, sa taille ou la façon de réaliser le partage égal.
Le second concerne 7 figures (toutes différentes les unes des autres) réparties en trois classes suivant à la fois la forme partagée (presqu'un carré, un rectangle, ou un petit disque) et la valeur des fractions ainsi réalisées : toutes les fractions d'une même classe sont égales et représentées par des formes superposables.

Objectifs spécifiques:
Le document A décrit une leçon dont nous ne connaissons pas le déroulement mais qui a apparemment abouti à des codages satisfaisants. L'activité proposée dans la fiche n'a qu'un lien éloigné avec les objectifs de la leçon A qui appellerait d'autres exercices. Il s'agit d'une "exploitation" pour illustrer (mais pas institutionnaliser) une définition du "codage fractionnaire" et suggérer un sens en s'appuyant sur des procédés empiristes et ostensifs.
Vraisemblablement : "a/b" indique qu'une figure (ou un "tout") a été partagée en b parties superposables et que a de ces parties sont hachurées (choisies ? gardées ?).
Avec le premier classement il peut illustrer qu'une même fraction peut être réalisée par des dessins très différents. Il peut commenter le rôle du dénominateur et différentes manières, adaptées à des formes diverses, d'obtenir une **même** fraction de divers "tout". Les deux premières classes ont le même numérateur mais des dénominateurs différents.
Ce que code cette écriture (une grandeur ? une mesure? un rapport ?) n'a apparemment pas été abordé et c'est sans doute l'objectif implicite de la deuxième classification réalisée où il peut illustrer que des fractions différentes d'un même "tout", peuvent correspondre à une même "quantité"
2) Les variables que cette situation d'**ostension** met à la disposition du professeur sont essentiellement les variables des formes (rectangles, carrés disques) qui doivent se prêter à des partages égaux, de leur taille et celles caractérisant les partages : technique de partition (ex. en bandes horizontales, ou verticales, ou les deux), le nombre de parts effectuées, le nombre de parts choisies.

Remarques didactiques :
Ces variables sont cognitives en ce sens que certaines des valeurs qu'elles peuvent prendre sont susceptibles de conduire à des réponses, à des connaissances et à des conceptions différentes de la part des élèves. Elles sont bien didactiques puisque le professeur peut choisir leurs valeurs, mais les variations (trop faibles et rares) qui sont choisies effectivement ici ont un effet didactique nul ou très réduit, elles limitent fortement les possibilités conceptuelles et ne conduisent pas à lever des ambiguïtés essentielles. Au contraire les variations "critiques" sont soigneusement évitées.
Toutes les combinaisons qui seraient nécessaires à une illustration ostensive de cette représentation des fractions ne sont pas utilisées.

Le choix de cette représentation primitive limite les fractions représentables à des fractions simples inférieures à l'unité.

La variable "taille" n'est pas utilisée : on aurait pu (et dû ?) avoir deux sixièmes d'un grand disque à côté du petit, dans la première classe du premier classement. Cette variable aurait posé au professeur le problème de distinguer ce que désignait son codage : un rapport. Ainsi, sans peut être s'en rendre compte le professeur fait passer ses élèves des mesures habituelles à l'école primaire, (nombres concrets) qui correspondent à une valeur avec des unités conventionnelles déterminées, à des mesures de type mathématique, définies à une homothétie numérique près (sans unité) disons d'une mesure "concrète" à un "rapport". L'ambiguïté va probablement durer.

Les différentes formes de partage ne sont pas confrontées entre elles (Tous les 1/3 sont égaux, quelle que soit la forme des partages).

Question 2.

1) Les objectifs de la séance.
Rappeler les conditions de la mesure avec une unité quelconque à reporter (et non pas utiliser une graduation)
Poser le problème de raffinement de l'encadrement avec des entiers, qui va justifier l'introduction des fractions.
Utiliser une connaissance des fractions simples (1/4 , 1/2) déjà là dans la culture de la plupart des enfants.
2) L'exploitation des messages.
Le choix des messages montre que le professeur veut faire ressortir :

- L'usage des expressions relatives à l'encadrement : "un peu plus", "entre" ...qui sera presque toujours nécessaire et souvent insuffisant
- La méthode qui consiste à mesurer le "un peu plus" avec des unités secondaires obtenues par pliage, ou par partage de l'unité.

Il sera nécessaire que le professeur conduise fermement cette "exploitation" par des questions et des exercices appropriés, car la situation choisie, si elle pose effectivement le problème et permet aux enfants de produire eux même les premiers pas, ne conduit pas naturellement à "inventer" les fractions : les enfants vont proposer de procéder par moitié, moitié de moitiés etc. Ils vont commenter et réinventer le double décimètre...L'écriture des mesures suit d'autres lois :
"3/4" risque de n'être que "1/2 et 1/4" car 2/4 n'existe pas beaucoup dans la culture quotidienne.

Le professeur peut demander :

- à ceux qui se sont cantonnés à des mesures entières de mesurer avec des quarts,
- d'améliorer le troisième message et pour cela de fabriquer d'autres "sous-multiples" de l'unité : les huitièmes apparaîtront mais devront être vérifiés car le pliage ne donne que des résultats approximatifs, les tiers sont possibles, les cinquièmes improbables, les septièmes certains (ce sont à peu près des centimètres !).
- Eventuellement, d'essayer systématiquement plusieurs sous-unités (les tiers, les quarts, les cinquièmes...) pour choisir celle qui donne la meilleure précision pour mesurer un segment déterminé.

3) Institutionnalisation
Rappel du principe (connu) de la mesure des longueurs avec une unité, et formulation du problème : quand les entiers ne suffisent plus on peut utiliser des "sous-unités".
Contrairement à tout ce que les enfants ont appris jusqu'à ce jour, on peut mesurer avec des unités non conventionnelles, on peut partager ces unités en un nombre non conventionnel de parts (différent de 10) (Les méthodes de partage ne font l'objet d'aucune institutionnalisation).
La nouvelle unité s'écrit 1/(nombre de parties en lequel on a partagé) et se lit 1/ (quant)ième. Ce nombre dit le nom de la nouvelle unité et pour cela s'appelle le dénominateur.
Pour indiquer la mesure d'un segment plus court que l'unité il suffit d'indiquer "en bas" d'une barre le nombre de sous unités obtenu par partage de l'unité (le dénominateur), et "en haut" le nombre de sous-unités reportées pour mesurer le segment (le numérateur).
Signaler le caractère historiquement primitif et peu pratique de ce système de mesure et indiquer son intérêt intellectuel et mathématique, annoncer l'étude du rangement de ces mesures et des opérations qu'on peut faire avec elles.

Question 3

Il semble que cette leçon introduit "la machine à partager les segments", mais qu'il est laissé au maître le soin soit de montrer aux élèves comment on l'utilise, soit de leur en faire faire la découverte.
Objectifs (du professeur) :
Faire fonctionner la définition des fractions pour *construire* et *exprimer* des longueurs de segments et plus précisément :

- faire utiliser directement plusieurs dénominateurs,
- faire mesurer avec des fractions des longueurs supérieures à l'unité
- faire opérer sur des fractions

Question 4

Très nettement la situation C suppose déjà bien établie une définition des fractions que la situation B ne fait que préparer.
La situation B ne demande aux élèves que de produire, sans beaucoup de réflexion, les éléments dont le maître a besoin pour produire son discours. Aucune retour non didactique ne vient presser l'enfant d'aménager sa réflexion pour résoudre un problème nouveau pour lui s'il sait déjà effectuer des mesures entières avec une unité quelconque.

La situation de communication est trop lourde et lente pour ce qu'elle apporte : des éléments très faibles de solution à un problème à résoudre... par le maître de toute façon ! Si le professeur oublie l'exploitation, qui n'est pratiquement pas indiquée dans le document, et quelques exercices pour en institutionnaliser le point essentiel, il aura perdu et fait perdre beaucoup de temps à ses élèves sans profit didactique.
La leçon C, ou l'élève n'a pas davantage de possibilités d'autocorrection risque par contre de poser
à certains élèves :

- des problèmes d'interprétation des écritures proposées (interpréter directement 2 - 4/5 n'est pas si facile, même s'il ne s'agit que de traduire un programme de construction).
- mais plus encore de réécriture, (est-ce que 6/10, qui mesure à peu près ce qui a été précédemment établi comme 5/3 en est une autre écriture ?)

Quant au professeur, cette leçon C risque de poser :

- des problèmes de correction en cours de leçon (comment vérifier rapidement que les segments dessinés ont la bonne longueur ?)
- et des problèmes de contrôle et de correction des algorithmes de construction et de mesure des segments effectués par chacun des élèves. Or ces activités sont indispensables à la compréhension de la leçon et des concepts présentés ici.

Il est très important que le professeur se prépare à conduire fermement une leçon d'exposition très bien préparée et minutée, "présentée" comme une découverte...mais fortement guidée (!) et qu'il ne ménage que de courts moments d'activités précises et d'exercices aux élèves.
Toute interprétation "non directive" de cette leçon conduira la plupart des élèves à l'échec par manque d'assistance aux nombreux moments cruciaux qu'ils rencontreront.

Commentaire sur le sujet :
Le sujet de mathématique est classique mais assez long. Les sujets de didactique sont extrêmement intéressants, pertinents pour une réflexion didactique, mais y répondre de façon correcte réclame beaucoup de "métier" et beaucoup plus de temps que n'en disposaient les candidats.
Ces sujets sont légitimes, ils vérifient la compréhension des mathématiques de l'école primaire sous ses différents aspects. Nous avons décidé de proposer ici les réponses correctes qu'ils appellent. Quelles sont les réponses effectives (la transposition didactique) qui ont été effectivement acceptées par les examinateurs pour ces questions ? Elles sont vraisemblablement sensiblement différentes de celles que nous donnons, mais pouvons-nous accepter de recommander des réponses niaises conventionnelles et grossièrement fausses ?
Ces sujets seraient plus faciles à choisir et à traiter par les étudiants si

d'une part l'enseignement des mathématiques qu'ils ont suivi au secondaire "plaçait" et traitait correctement les connaissances du primaire, et si l'enseignement primaire ne cherchait pas à singer et à anticiper sur les enseignements les plus délicats du secondaire,

et si d'autre part, le travail sur la matière à enseigner (la didactique proprement dite, qu'il ne faut confondre ni avec la pédagogie, la méthodologie, la psychologie, ni avec la didactique fondamentale ou la didactique générale) s'institutionnalisait davantage.

Cette divergence flagrante entre les questions pertinentes et ce qui peut être accepté effectivement comme réponse dans les concours est le résultat de l'évolution erratique de l'enseignement depuis une cinquantaine d'année.
Elle est actuellement l'objet d'une lutte entre les **raisonnables** qui pensent qu'il convient de recruter les futurs professeurs en fonction de celles de leurs connaissances <u>mathématiques</u> qui leur seront nécessaire pour exercer leur métier et <u>qu'ils ne pourront pas acquérir par la suite</u> et les **pragmatiques,** qui pensent que les futurs professeurs ne doivent être recrutés que sur les connaissances qu'ils ont pu acquérir dans la course aux mathématiques de l'école polytechnique et que dans les conditions actuelles aucune formation ni réflexion préalable spécifique n'est souhaitable ni même possible

Corse

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES

Exercice n°1

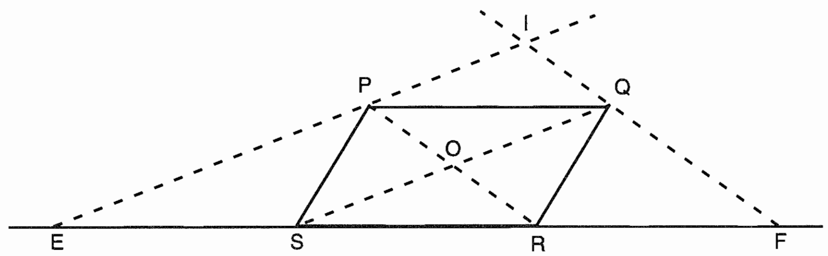
a) On peut choisir parmi six places pour le premier point ; pour chaque choix du premier point il reste cinq places pour le second, mais chaque disposition est alors obtenue deux fois. Il y a donc 6 x 5 / 2 = 15 signes à deux points. (c'est le choix de 2 points parmi 6 ou encore le nombre de combinaisons de 6 signes « pris deux à deux »).

Appelons ABCDEF les 6 noeuds de la grille et remarquons que le caractère AB (obtenu en choisissant en premier lieu le noeud A et en deuxième lieu le noeud B) est le même caractère que BA (obtenu en choisissant d'abord le noeud B) les caractères sont :

AB, AC, AD, AE, AF, BC, BD, BE, BF, CD, CE, CF, DE, DF, EF

b) Il y a le même nombre de caractères à deux points et à quatre points car à chaque caractère à deux points on peut associer un caractère à quatre points et un seul : celui constitué des quatre autres points. Il y a donc 15 caractères à 4 points.

Exercice n°2



1) PQRS est un parallélogramme donc SQ est parallèle à EP. IP est le prolongement de AP, Donc OQ et IP sont parallèles. Le même raisonnement montre que PO est parallèle à QF donc à QI. Donc IPOQ est un parallélogramme.

2) Si IPOQ est un rectangle, conditions nécessaires : POQ est un angle droit, les deux diagonales de PQRS sont perpendiculaires, PQR est un triangle isocèle, donc PQRS est un losange. Cette condition est suffisante : Si PQRS est un losange, alors PQR est un triangle isocèle, donc sa médiane OQ est médiatrice de PR donc POQ est droit et IPOQ est un rectangle.

Si IPOQ est un losange,

OP = OQ, or OP = OR et OS = OQ donc PR = OP + OR = OS + OQ = SQ, le parallélogramme PQRS, qui a ses deux diagonales égales est un rectangle (car P est sur le cercle de diamètre SQ et donc SPQ est droit).

Cette condition est suffisante : si PQRS est un rectangle PR = QS et comme les diagonales se coupent en leur milieu, OP = OQ, et IPOQ est un losange.

3) Calcul de $\frac{IP}{IE}$

Le triangle IEF est homothétique du triangle IPQ dans une homothétie de centre I, puisque PQ est parallèle à EF (D'après le théorème de Thalès).

$\frac{IP}{IE}=\frac{PQ}{EF}$ or $EF = 3\ PQ$ par construction. Donc $\frac{IP}{IE}=\frac{1}{3}$

Exercice n° 3

Le poids de matière grasse contenu dans le sachet est 0,0217 kg, soit 21,7 grammes

car 0,217 x 10% = 0,0217

Ce poids représente les 45% du poids du produit sec,

le poids du produit sec correspondant à ce poids est donc les 100/45 de 0,0217 soit 0,0482 kg

car 100/45 x 0,0217 = 0,0482

Le poids de l'eau contenue dans le sachet est donc de 0,168 kg, soit 168 g

car 0,217 - 0,0482 = 0,168

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Exercice n° 1

a) L'élève A donne une réponse exacte : les pièces B et D.

L'élève B choisit bien la pièce D mais la pièce C ne convient pas. Sa largeur est correcte : 7 carreaux mais la hauteur est fausse cinq et demi au lieu de trois et demi

L'élève C choisit bien la pièce mais propose F qui a une largeur régulière de 3 carreaux contrairement à la pièce manquante.

b) Les distracteurs globaux étaient réduits :

- pour D : pas de forme symétrique

  seulement deux figures alternatives, de « largeurs » régulières deux carreaux et trois carreaux, la pièce E est aussi trop longue d'un carreau, mais sa largeur est fausse ainsi que la hauteur du petit trapèze. Pour réussir, l'élève doit décomposer la forme (un trapèze et un rectangle) et compter le nombre de carreaux de ces composants et utilisant implicitement des rotations de π de $\pi/2$ ou de 0.

  F ne peut être choisie que par un élève qui ne compte pas les carreaux ou qui ne compte que la largeur du rectangle et peut être la grande base du trapèze.

  E ne peut être choisie que par un élève qui ne compte pas ou qui ne compte que la largeur du petit trapèze.

- Pour B : deux alternatives aussi l'une avec une bonne orientation du quadrillage, l'autre avec une orientation fausse. L'élève qui compte les carreaux de base peut trouver que la base rencontre 7 carreaux.

c) L'élève qui a répondu juste a dû décomposer les figures mentalement, repérer les côtés caractéristiques et compter le nombre de carreaux.

d) Compétence du cycle 2

Exercice n° 2

a) Les compétences du cycle trois qui sont évaluées dans cet exercice sont :

« distinction entre périmètre et aire » : on trouve cette phrase dans les contenus des programmes (p.64 éditions du CNDP)

« maîtriser la notion d'aire. »

« Etre capable de calculer le périmètre et l'aire d'un carré, d'un rectangle » (bien qu'ici, la figure polygonale sur quadrillage soit plus complexe. (p.111 édition CNDP).

b) L'élève 2 confond complètement le périmètre et l'aire et évalue globalement le résultat. Le comptage - négligé et faux - ne vient que pour argumenter sa conclusion.

c) L'élève 3 se trompe, la différence entre l'aire de B et celle de A est de 6 carreaux et non pas de trois. Il compare bien les aires mais il commet l'erreur classique de croire que l'écart à la moyenne de deux quantités ajoutées est égal à la différence entre les deux quantités. Pour le périmètre il croit qu'il varie comme l'aire et commence par affirmer que le périmètre de B est plus grand, puis il ne sait pas, ou il n'a pas le temps de répondre ou peut-être encore compte-t-il, et il reste coi devant la contradiction qui lui apparaît.

d) Procédures correctes :

Pour l'aire : B a en plus ce que A a en moins. Ou encore A et B sont obtenus à partir d'un même rectangle mais B est augmenté de trois carreaux alors que A est diminué de trois carreaux

SECOND VOLET (8 POINTS).
DIDACTIQUE

Avertissement des auteurs : Cette partie a posé problème aux correcteurs (voir note en fin de texte). Nous avons donc choisi de construire un corrigé très détaillé qui n'est sans doute pas ce qui est exigible le jour du concours. Mais nous souhaitons, par cette démarche, permettre la conduite d'une réflexion didactique mieux étayée.

Question 1

a) notions visées

La page 161 concerne un méthode d'énumération utilisable dans le mesurage de certains volumes.

La page 165 concerne la notion de volume.

La page 166 ne concerne que le système et la dénomination des unités pour le mesurage des capacités.

La page 167 concerne la mesure du volume (mais sans relation avec l"unité").

b) Justifications :
i) page 161
Les élèves doivent compter les cubes de chaque assemblage en se basant sur leur disposition :

A comprend 3 "tranches" égales à celle que l'on aperçoit et qui comprend 9 cubes : 3x9 = 27.
B comprend aussi 3 tranches égales de 9 cubes ainsi que C.
D doit être décomposé en tranches inégales : 9 x 2 pour la base, et 9 dessus donc 18 + 9 = 27.

Les savoirs explicitement utilisés sont ceux d'une forme élémentaire de mesure : celle des collections, c'est à dire le dénombrement. Elle ne s'applique pas ici à une grandeur "Volume"
Preuve : Volume de quoi? les cubes pourraient être éparpillés.
Les connaissances nécessaires à l'énumération des cubes sont: une maîtrise des relations spatiales, de la reconnaissance des formes et de leur représentation en perspective. Ces compétences serviront dans l'étude des volumes, mais la grandeur "volume" n'intervient ni explicitement, ni implicitement dans la pensée de l'élève dans cette activité.

Preuve : On suppose implicitement que les cubes sont identiques dans les trois figures, mais ils pourraient être de tailles différentes d'une figure à l'autre, sans que l'activité ni la consigne ne soient différentes: il ne s'agit que de les compter. Il pourrait même y avoir un assemblage de billes en C, de parallélépipèdes rectangles en B et de pyramides en D. (y en a-t-il le même nombre ?) Les figures ne montrent un volume que pour le professeur. Par contre elles induisent un **procédé de mesurage** par comptage qui va servir pour les mesures de volume.
ii) Page 165
Ici apparaît une définition du **volume, comme grandeur,** indépendamment de la mesure, fondée sur deux conceptions :
- le volume comme capacité, c'est à dire comme place ("en creux") délimitée par un récipient : 2 vases ont même capacité si le transvasement total de l'un dans l'autre est toujours possible dans les deux sens.
- le volume comme place ("en plein") occupée : 2 objets ont même volume s'ils provoquent la même élévation de niveau de liquide lorsqu'on les plonge successivement dans le même récipient (contenant la même quantité de liquide). (Si, immergés, ils déplacent la même quantité de liquide).

Ces deux conceptions sont "unifiées" par une expérience, délicate, le volume déplacé est égal au volume transvasé.
La "définition" est incomplète, il y manque les "opérations" sur la grandeur, en particulier celles qui définissent la somme.
iii) Page 166
Cette activité ne vise directement, ni la conception de ce qu'est un volume, ni celui de sa mesure (au sens général). Mais elle développe un système d'unités spécifiques pour le mesurage de certains volumes et leur vocabulaire. Elle propose quelques exercices de conversions et sans doute l'usage de l'échelle des unités dérivées du litre. Cette leçon présente aussi les caractères géométriques du litre mais n'en fait apparemment rien.
iv) Page 167
Le vase gradué effectue la "mesure" c'est à dire la correspondance directe (un repèrage comme le peson ou le thermomètre) :

volume de liquide $\rightarrow$ nombre (de cl).

L'élève apprend à utiliser l'instrument pour le mesurage d'une quantité de liquide ou le volume d'un petit objet et à en lire le résultat comme une mesure.
Ensuite,
- soit il "découvre" la linéarité de cette correspondance : la mesure de volume de deux boules (égales ?) est le nombre-somme des deux mesures de volume. C'est la propriété fondamentale de la mesure.
- soit la graduation de son verre est fausse, à moins que sa manipulation ne soit négligente.

c) Propriété des volumes
L'exercice de la page 167 a pour objet de faire "découvrir" la **linéarité de la mesure des volumes**

Volume (A $\cup$ B) = Volume (A) + Volume (B) (si A et B sont disjoints)

Dans ce cas, La mesure de la réunion de deux volumes disjoints égaux est le double de la mesure de chacun,
si A est la place occupée par la première bille, Vol (A), sa mesure est calculée par la différence de niveau.

Volume (A) = 1 dl - 0,7 dl = 0,3 dl.

La place B occupée par la seconde bille - identique à la première - a pour volume Volume (B),

Volume(B) = Volume de (A) = 0,3 dl.

Alors le niveau total devrait "augmenter" de 0,3 dl et le liquide indiquer alors le niveau :

1dl + 0,3 dl = 1,3 dl

Le volume des deux boules est en dl : 0,3 + 0,3 = 0,6

Question 2
a) Les compétences des élèves
Pour exécuter l'activité de la page 161 les élèves doivent avoir acquis les compétences suivantes:
Savoir compter (au moins jusqu'à 30).

Connaître (l'une au moins) des expressions de la forme 9 + 9 + 9, 9 x 3, 3 x 3 x 3, (2 x 9) + 9.
Savoir reproduire un assemblage de cubes dessinés (test : savoir reproduire une figure de Rey).
Pouvoir dire " ce dessin représente trois pyramides semblables formées de neuf cubes, c'est à dire :

- savoir reconnaître que deux collections sont "identiques" (disposées de la même manière)
- savoir interpréter un dessin en perspective cavalière et "deviner la présence nécessaire d'objets cachés.
- savoir établir (ou reconnaître) implicitement une correspondance terme à terme entre deux collections.

Savoir désigner les dessins (ici à l'aide de métaphores : l'escalier, la chaise, le cube, le porte-avion,
Savoir utiliser les termes "assemblages", et "composés" (les cubes sont plutôt disposés ou rassemblés qu'assemblés)

b) Les moyens de validation
Le seul moyen effectif de validation consisterait à réaliser les assemblages dessinés, puis à compter les cubes qui les composent. Mais pour juger qu'un assemblage est bien la réalisation d'un dessin donné il faut que l'élève ait compté les cubes des diverses "composantes", donc décomposé convenablement l'assemblage.Les élèves qui se trompent ne trouveront guère d'aide par ce moyen. Les seules validations seront personnelles et intellectuelles (évidence) ou par l'explication appuyée sur l'autorité du professeur.

Question 3
a) Différentes méthodes.
Il en existe de nombreuses déterminées par différents choix :

i) Suivant le ***rapport aux expériences*** décrites

La page est supposée décrire

- ce que le maître dit ou fait lire et ce qu'il décrit ou fait décrire (méthodes dogmatiques). Par exemple le maître **expose** lui même le contenu de la page du livre qui peut être lu en conclusion. Ou encore le maître **fait étudier** le livre : la page est lue par les élèves qui "imaginent" ce qui y est décrit, qui répondent aux question sous le contrôle du professeur ou même qui sont invités à poser des questions ou a faire des déclarations. Le vocabulaire nouveau est introduit, repéré, expliqué et commenté ;
- ce que le maître **manipule** effectivement devant les élèves : (méthodes ostensives),
- ou ce que **les élèves manipulent eux mêmes**. (méthodes "actives" classiques),

Les conclusions formulées par les élèves sont comparées aux déclarations lues dans le livre, qui sont à leur tour expliquées et commentées.

Remarque : Il n'y a aucun exercice, aucun usage ni aucune application de ces connaissances visibles pour les élèves à ce moment là. (par ex. J'ai un récipient qui contient 6 litres, un autre qui contient 4 litres comment réaliser 2 litres).

ii) Suivant le ***processus épistémologique*** sous jacent

- Les faits sont "découverts" par "induction empirique" à partir d'une "observation" naturaliste. Les questions et la conclusion sont supposées s'imposer d'évidence.
- Les faits sont introduits par des questions en tant qu'expériences dont on tire des conclusions (méthode expérimentale).

iii) Suivant la ***stratégie didactique*** du professeur. Par exemple :

La maïeutique socratique : Le maître problématise chaque contenu (ex. J'ai plusieurs récipients, comment faire pour savoir lequel peut contenir le plus de liquide? pour les ranger par ordre de capacité décroissante ?) Les élèves répondent, le professeur pose de nouvelles questions, au fur et à mesure il approuve implicitement ou explicitement les "bonnes" réponses mais ne les formule pas lui même.

b) comment vérifier ?
Les élèves peuvent vérifier que "l'accroissement de la hauteur d'eau" (expérience a) correspond au volume écoulé (expérience b) de la façon suivante :
1. Ils remplissant *exactement* le petit récipient cubique avec de la pâte à modeler
2. Ils retirent toute la pâte à modeler du petit cube et en font un bloc (déformé ou non)
3. Ils remplissent complètement jusqu'à le faire déborder le grand récipient (qui doit avoir un bec de débordement)
4. Ils placent le petit récipient cubique sous le bec de débordement du grand récipient
5. Ils "prévoient" ce qui va se passer lorsqu'on aura immergé complètement le bloc de pâte à modeler dans le grand récipient la hauteur de l'eau devrait augmenter, mais non l'eau va seulement déborder et couler dans le petit récipient cubique. Question : pourquoi l'eau va-t-elle s'échapper du grand récipient (parce qu'elle est "chassée" par la pâte),

- elle va déborder du petit récipient cubique ?
- le remplir exactement ?
- ou ne pas le remplir tout à fait ?

La difficulté consiste à établir la signification de ce que l'on "constate ".

6. Ils font l'expérience et concluent. Difficulté de rapporter l'observation au phénomène : l'eau qui s'écoule est celle qui se serait élevée au dessus du niveau initial s'il n'y avait pas eu le bec.
L'expérience ne peut être démonstrative que pour des enfants qui ont un certain sens de la conservation des volumes. (Jean Piaget a montré qu'il fallait que l'enfant atteigne un certain développement pour comprendre la conservation des volumes grâce à la maîtrise de certains opérations "logico-mathématiques").

c) Organisation matérielle et chronologique de la séance
Les problèmes auxquels cette séquence peut répondre sont les suivants :
1. Comment comparer les capacités de divers récipients (en essayant de remplir les uns avec les autres), comment les ranger de la capacité la plus faible à la plus grande, comment décider que deux récipients ont la même capacité (ce « savoir » sera nécessaire dans la phase 3). Comment réaliser des volumes qui sont la différence entre deux capacités.
2. Comment comparer des volumes de liquides (en comparant la hauteur atteinte par leur contenu dans un même récipient). En ordonnant les hauteurs obtenues allons nous retrouver l'ordre que nous avons obtenu en 1 ? Comment évaluer des différences de volumes? Est il important que le récipient soit ou non un prisme ?
3. Comment comparer les volumes de divers cailloux (non poreux). Comment les ranger par ordre de volume croissant? (en les plongeant dans un même récipient contenant suffisamment de liquide et en comparant les hauteurs atteintes).
4. Comment montrer que l'augmentation du niveau de l'eau correspond à un volume qui est exactement celui du caillou.
Le problème unique serait peut être "comment "mesurer des volumes" des objets en mesurant la place qu'ils prennent ?

Question 4
Indépendance (relative) entre volume d'un solide et aire de sa surface.

Remarque : ce sujet ne pourrait pas être traité sérieusement à l'école primaire.

a) Variables didactiques
Le professeur doit disposer d'une situation (non didactique) où il peut faire varier
- le volume[1] (1ère variable)
- et la surface (forme et aire) (2ième variable)
- indépendamment[1] l'une de l'autre (condition).

Nous supposons que la situation didactique garde les mêmes caractéristiques.
b) Moyens matériels dont pourront disposer les élèves pour comparer aires et volumes
Trois solutions au moins
i) Dans le fil des leçons proposées on peut prendre des récipients de formes diverses, plus ou moins tourmentées et d'y verser la même quantité de liquide pour réaliser des "volumes" égaux, de diverses surfaces. La difficulté pour les élèves, c'est de mesurer les aires des surfaces (latérales, fond et surface du liquide)
ii) Un procédé ostensif pourrait consister à prendre un récipient souple (une poche en plastique) et à la remplir plus ou moins de liquide (sans air) ou de sable. La surface est constante, le volume mesuré par la quantité de liquide ou de sable est variable.
iii) Un troisième procédé consiste à calculer aire et volume de trois solides de formes appropriées par exemples des parallélépipèdes rectangles (le cube possède le plus grand volume pour la plus petite surface totale. (Défi pour les enfants : trouver une boîte de volume plus grand et de surface plus petite qu'une boite parallélépipédique donnée).
c) Exercices d'évaluation
Les exemples dépendent des connaissances géométriques des élèves, et du savoir formulé :
1. Deux récipients ont le même fond, le même couvercle et la même capacité, les aires de leurs surfaces latérales sont : les mêmes, différentes, je ne sais pas, on ne peut pas savoir.
2. Deux barres de même longueur ont la forme de prismes droits à bases rectangulaires de même périmètre.

Si l'épaisseur de la barre A (la largeur du rectangle de base) est le double de l'épaisseur de la barre B, A a un volume plus grand que celui de B ?
plus petit que celui de B ?
égal à celui B ?
on ne peut pas savoir ?

Si la largeur de la barre A (la longueur du rectangle de base) est le double de celle de B
A a un volume plus grand que B ?
plus petit que B ?
égal à B ?
on ne peut pas savoir ?

[1] Avec une aire déterminée A, il est clair qu'on ne peut obtenir que des volumes inférieurs à celui d'une sphère d'aire A (plus précisément, inférieurs à $4/3\ \pi R^3$ avec $R = \sqrt{(A/4\pi)}$)

Note des rédacteurs

Il est évident que ce sujet pose de réels problèmes. Il est démesuré :

1) La partie didactique est beaucoup trop longue. Elle ne peut pas être traitée sérieusement - même "simplement" - dans le temps imparti au concours.

Exemples : A moins de réciter une liste de termes professionnels codés, la liste des méthodes pouvant être mises en oeuvre pour présenter une leçon de mathématiques demande du temps.

L'ordre des questions est impraticable, car les candidats devraient avoir fini l'analyse qui est l'objet des questions 2 et 3 pour répondre à la première question.

La 4^{ième} question serait un sujet entier à elle seule, et elle demande une certaine invention car le sujet n'est pas traité dans la littérature classique pour les élèves.

2) Dans l'ensemble le sujet demande des connaissances qui sont hors des programmes et des prescriptions réglementaires, elles sont en particulier trop "professionnelles" pour des élèves de première année d'IUFM.

3) Les questions sont toutes très intéressantes mais trop difficiles pour des étudiants en didactique des mathématiques.

La conséquence la plus probable d'un énoncé aussi décourageant, c'est de conduire les correcteurs à accepter des réponses courtes ou très vagues, fausses, ou très éloignées des réponses "correctes" et de laisser croire que les questions de didactique ne demandent aucun savoir effectif soit qu'elles ne demande que des réponses arbitraires et "standardisées".

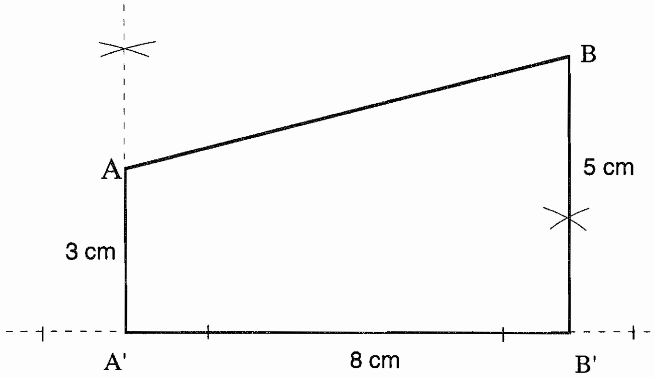
Créteil - Paris - Versailles

Corrigé rédigé par l'équipe de Bordeaux
avec l'aide des éléments communiqués par notre correspondant de l'académie de Paris

PREMIERVOLET(12POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES

1. Construction du trapèze



2. Aire de ABB'A'

aire (ABB'A') = $\frac{5+3}{2} \times 8 = \boxed{32 \text{ (en cm}^2\text{)}}$

3. Les triangles A'AM, B'BM et AMB

a) aire (A'AM) = $\boxed{\frac{3x}{2}}$ aire (B'BM) = $\frac{5(8-x)}{2} = \boxed{20 - \frac{5x}{2}}$

aire (AMB) = aire (ABB'A') - aire (A'AM) - aire (B'BM)

aire (AMB) = $32 - \frac{3x}{2} - (20 - \frac{5x}{2}) = \boxed{12 + x}$

b) aire (A'AM) = aire (B'BM) soit : $\frac{3x}{2} = 20 - \frac{5x}{2}$ d'où $\boxed{x = 5 \text{ (en cm)}}$

4. a) Calcul de AB

D'après la propriété de Pythagore, on a :

$AB^2 = 8^2 + (5-3)^2 = 64 + 4 = 68$

$AB = \sqrt{68}$ $\boxed{AB = 2\sqrt{17} \text{ (en cm)}}$

b) Expression de MH

aire (ABM) = $\frac{1}{2}$ AB.MH soit :

$12 + x = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{17} \times MH$ d'où

$MH = \frac{(12+x)\sqrt{17}}{17}$

5. Étude d'un cas particulier

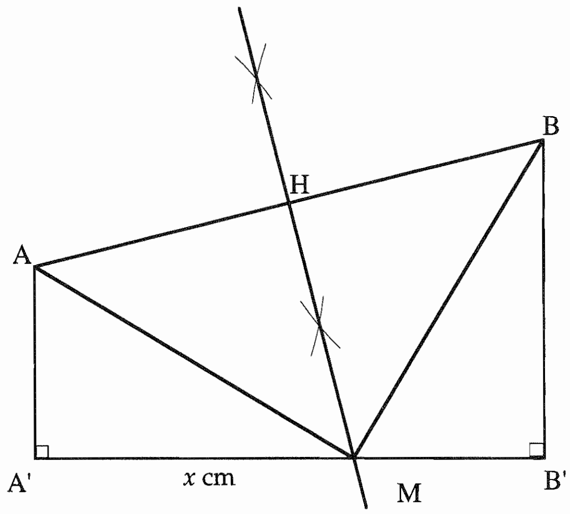
a) MA = MB ou encore, puisque ce sont des nombres positifs :

$MA^2 = MB^2$ or $MA^2 = 3^2 + x^2$ et $MB^2 = 5^2 + (8-x)^2$

$3^2 + x^2 = 5^2 + (8-x)^2$

$9 + x^2 = 25 + (64 - 16x + x^2)$ soit : $16x = 80$ d'où $\boxed{x = 5 \text{ (en cm)}}$

b) Construction de la médiatrice de [AB] :



c) $MH = \frac{(12 + x)\sqrt{17}}{17}$ avec $x = 5$ soit $\boxed{MH = \sqrt{17} \text{ (en cm)}}$

d) Le triangle AMB est isocèle puisque nous sommes dans le cas où MA = MB.
De plus, dans ce triangle on a : $AB^2 = 68$ et $MA^2 = MB^2 = 3^2 + 5^2 = 34$.
Le triangle AMB est donc rectangle en M d'après la réciproque du théorème de Pythagore (68 = 34 + 34)
Finalement, le triangle AMB est un triangle rectangle isocèle en M.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Nous pouvons "classer" les six enfants en trois groupes (voir tableau ci-dessous) :

	Exactitude des résultats	*Compétences mobilisées*	*Nature des erreurs éventuelles*
Christophe ***Cécilia***	Résultats exacts q = 1003 r = 87	Recherche du nombre de chiffres au quotient par encadrement correct du dividende (Cécilia) Répertoire multiplicatif correct Présence de calculs annexes - table complète du diviseur (Cécilia) Soustractions justes - non posées (Christophe) - posées (Cécilia)	Tableau de numération au quotient sans prévision du nombre de chiffres (Christophe) Une erreur importante dans la vérification au niveau du sens de la division (Cécilia multiplie le quotient par le reste !)
Karen ***Élodie***	Résultats faux q = 1310 r = 74 ou q = 1300 r = 67	Répertoire multiplicatif correct Présence de certains calculs annexes Ordre de grandeur exact (premier chiffre du quotient exact)	Erreur au niveau du chiffre des centaines Soustractions fausses (non posées) 456 - 369 = 197 ! (Karen) d'où un "reste" 197 > 123 456 - 369 = 67 ! (Élodie)
Olivier ***Christelle***	Résultats faux q = 10031 r = 4 ou q = 13 r = 85	Répertoire multiplicatif correct (Christelle) Soustractions justes - posées (Olivier)	Erreur de cadrage du premier chiffre au quotient (Olivier $\boxed{\text{DM}}$ et Christelle $\boxed{\text{D}}$) Erreur de répertoire multiplicatif : 3 × 123 = 329 ! (Olivier) d'où un "reste" 127 > 123 Erreur de soustraction 456 - 369 = 85 (Christelle)

SECOND VOLET (8 POINTS).
DIDACTIQUE

1. La division euclidienne de 4732 par 16

a) *Méthode sans poser les soustractions intermédiaires*

```
4732   16
153    295
 092
  12
```

b) - Choix du premier chiffre du quotient : ordre de grandeur au niveau des centaines, on regarde 47, on hésite entre 3 et 2... c'est finalement 2).

- On effectue (mentalement) le produit du diviseur par 2 et on soustrait au fur et à mesure (mentalement) le résultat du dividende. Il reste 15 centaines ou plus précisément 1532 unités dont on prend 153 dizaines (en abaissant le chiffre des dizaines 3) pour continuer l'opération.

- Même algorithme avec 153 dizaines ; 9 au quotient et il reste 92.

- Même algorithme avec 92 unités ; 5 au quotient et il reste 12.

2. **a)** Différence de traitement dans les annexes 2 et 3

	Annexe 2	*Annexe 3*
- Recherche du nombre de chiffres au quotient par encadrement du dividende	oui	oui
- Recherche des chiffres du quotient	implicite	utilisation d'un répertoire (table du diviseur)
- Soustractions posées	oui	oui
- Enchaînement de l'algorithme	chiffre abaissé	nombre traité globalement
- Vérification de l'opération	oui, sans vérification du reste inférieur au diviseur	oui, avec vérification du reste inférieur au diviseur

b) Comparaison de méthodes

- Recherche du nombre de chiffres au quotient par encadrement du dividende : un seul enfant sur six (D).

- Recherche des chiffres du quotient avec utilisation d'un répertoire : quatre enfants sur six (A, B, C, D).

- Soustractions posées : trois enfants sur six (D, E, F).

- Vérification de l'opération : un seul enfant sur six (D) avec en plus une grave erreur de “sens”.

3. Utilisation du tableau de numération

Le tableau de numération sert pour :
- fixer le nombre de chiffres du quotient ;
  - efficace pour A, B, C et D ;
  - inefficace pour E et F.
- positionner, au fur et à mesure, les chiffres du quotient (y compris les zéros intercalaires) ;
  - efficace pour A et D ;
  - inefficace pour B et C.

4. **a)** L'exercice 2 de l'annexe 2.

```
3227   55
-275   58      275 : 55 = 5
 477           440 : 55 = 8
-440           58 × 55 + 37 = 3227
  37
```

```
 378   25
 -25   15      1 × 25 = 25
 128
-125
   3
```

Les élèves feraient peut-être plutôt : 55 x . = 275

b) Compétences visées par les exercices 1, 2, 3 et 4

Exercice 1 : exercice d'application et/ou d'entraînement sur la technique étudiée.
Compétences visées : Il s'agit de « pouvoir effectuer une division euclidienne ». (cf programmes de l'école primaire, édition du CNDP, page 109) ; et de savoir « évaluer un ordre de grandeur ».

Exercice 2 : problème (complexe) de calcul sans rapport avec un entraînement sur la technique.
Compétences : Bien savoir ce que représentent les calculs intermédiaires, le quotient et le reste d'une division euclidienne.
Bien maîtriser les liens entre les différentes opérations, et de « travailler sur l'ordre de grandeur », enfin, « utiliser, à bon escient, le calcul réfléchi » (mental ou écrit). (page 108)

Exercice 3 : problème d'application directe dans un contexte donné (travail sur le sens et la technique).
Compétences : « Savoir reconnaître un problème qui relève de la division ».

Remarque : Dans le contexte de la fiche, la réponse est induite.

Exercice 4 : problème (complexe) dans un contexte donné mettant en jeu plusieurs opérations (travail sur sens et technique)
Ici, il s'agit de compétences relatives à la résolution de problèmes (cf programmes de l'école primaire, édition du CNDP, page 106). « Reconnaître, trier, organiser et traiter les données utiles à la résolution d'un problème. ».

Dijon

Corrigé effectué à partir du corrigé envoyé par notre correspondant de Dijon

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1 : (voir remarque de cours en note de bas de page)[1]

Information pour le candidat : de façon usuelle, le nombre de chiffres d'un nombre est le nombre de chiffres comptés lorsque l'écriture du nombre ne possède pas de « 0 » à sa gauche. Par exemple, 45 est un nombre à deux chiffres, mais on ne traite pas 045 ni 00045. Cette convention pose problème lorsqu'il s'agit d'évoquer le nombre zéro. Nous dirons que ce nombre s'écrit avec un seul chiffre, qui est « 0 ».

Correction :

Soit N un nombre qui répond aux conditions de l'énoncé.

N a une écriture "N" (canonique) dans le système décimal qui est formée de trois chiffres :

"c" le chiffre des centaines, le nombre de centaines est c, "d" le chiffre des dizaines, le nombre des dizaines est d, et "u" le chiffre des unités, le nombre des unités est u.

0 < c £ 9 ; 0 £ d £ 9 et 0 £ u £ 9 (attention, c π 0)

alors

$N = 100 \times c + 10 \times d + u$

Soit $P = 10 \times d + u$ P a une écriture canonique : "du".

$N = 100 \times c + P$

d'autre part le nombre de deux chiffres formé en enlevant "c" est "du" (on devrait écrire ""d""u"")

Attention, pour remplir les conditions de l'énoncé il est nécessaire que d π 0.

Donc, P dont le nom est "du" est supérieur à 9 et inférieur à 99

On sait que $N = 26 \times P$

donc $100 \times c + P = 26 \times P$

$100 \times c = 25 \times P$

$4 \times c = P$

et par conséquent $N = 104 \times c$

c peut prendre 9 valeurs {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }

N aussi : { 104, 208, 312, 416, 520, 624, 728, 832, 936 }

---

[1] **remarque de cours:**

- 1) De façon usuelle, le nombre de chiffres d'un nombre est le nombre de chiffres comptés lorsque l'écriture du nombre ne possède pas de « 0 » à sa gauche. Par exemple, 45 est un nombre à deux chiffres, mais on ne traite pas 045 ni 00045. Cette convention pose problème lorsqu'il s'agit d'évoquer le nombre zéro. Nous dirons que ce nombre s'écrit avec un seul chiffre, qui est « 0 ».

- 2°) On pourrait écrire N = cp pour signifier que c, chiffre des centaines, est un constituant de l'écriture de N, tout comme p le nombre à 2 chiffres, mais cette écriture prêterait à confusion, en laissant croire par exemple, que N est constitué de deux chiffres seulement. On écrit alors N=100xc + p. En fait, Il y a là deux usages distincts du signe c. Dans le premier cas, on pourrait convenir d'écrire « c » et « p », (N= « c » « p ») puisqu'il s'agit de l'utilisation des signes « c » et « p » comme éléments constitutifs de l'écriture de N, dans l'autre, il s'agit de l'utilisation (au travers d'un signe), du nombre pour reconstituer N. On conserve alors l'écriture N=100xc +p

Cette distinction risquerait d'alourdir les énoncés et les rédactions, aussi, « l'abus de langage » qui consiste à ne pas faire la distinction est bien compréhensible.

mais la valeur 208 ne convient pas, car le chiffre des dizaines de son écriture est 0, et la suppression du 2 ne produit pas un nombre dont l'écriture canonique a deux chiffres.
Réponse : les seules solutions sont : { 104, 312, 416, 520, 624, 728, 832, 936 }.

Note : les problèmes qui comprennent en même temps des déclarations sur les **nombres** et sur leurs **écritures** ou sur leur nom sont toujours délicats. Les abus sont fréquents et tolérés à la condition que le résultat soit juste. Mais pour éviter les erreurs, car les nombres et leurs noms n'ont évidemment pas les même propriétés, il est nécesaire de pouvoir les distinguer quand c'est nécessaire. L'usage des guillemets avec la convention des linguistes est assez commode :
Paul a 5 ans, "Paul" (lire le nom de Paul qui s'écrit Paul) a 4 lettres.
324 est un nombre, son écriture habituelle (canonique) est "324" mais "300 + 24" est une autre de ses écritures, et il en a beaucoup d'autres.
324 est pair, quelle que soit son écriture mais $(12)_3$ ne l'est pas.
L'écriture canonique de 324 est formée des chiffres "3", "2" et "4" écrits côte à côte (concaténés).
"3", le chiffre 3 (ici les guillemets sont remplacés par les mots "le chiffre", représente le nombre 3.
Un formalisme complet serait assez impraticable car il faudrait un sybole pour désigner le nombre correspondant à une écriture ou à une expression orale etc.

EXERCICE 2
Question 1) :
Remarque sur le sujet : L'énoncé est un peu ambigu : il ne précise pas si la donnée est a ou R, étant entendu que R est fonction de a (donc que a est fonction de R). On peut calculer que $a = R\sqrt{3}$

- Si R est donné : alors la construction s'effectue comme suit :
Tracer le cercle de centre O, de rayon R, puis reporter six fois le rayon sur le cercle en partant d'un point du cercle. On obtient un hexagone régulier. En reliant les points de deux en deux, on obtient un triangle équilatéral. (voir figure 1).
- Si a est donné, on trace d'abord le triangle, puis les médiatrices des côtés. On obtient ainsi O centre du cercle circonscrit. (voir figure 2).

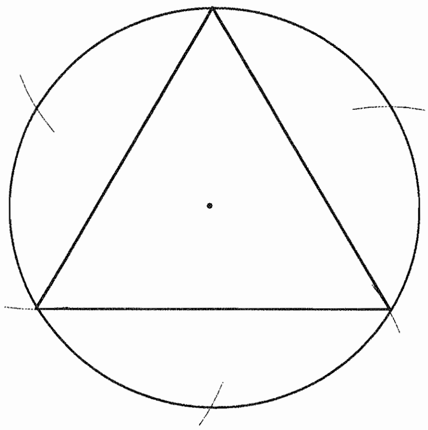


Figure 1

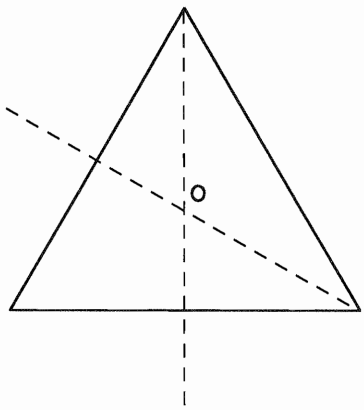


figure 2

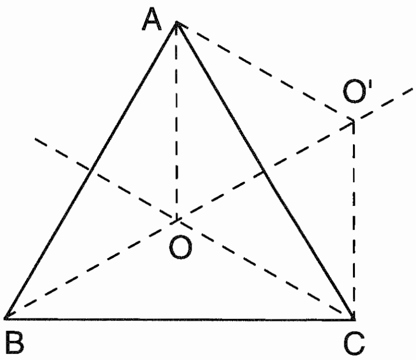


figure 3

Question 2)

a) Dans la symétrie orthogonale par rapport à (AC) : O' est symétrique de O (voir figure 3) ; A est son propre symétrique. [AO'] est symétrique de [AO], donc AO' = AO. Donc O' appartient au cercle de centre A et de rayon AO.

b) Dans la symétrie orthogonale par rapport à (AC) : A est son propre symétrique. Donc, de la même façon que précédemment, CO' = CO, donc O' est sur le cercle de centre C et de rayon CO.

Question 3)
Construction de O' : (voir figure 3)
Le point O' s'obtient en recherchant le deuxième point d'intersection des cercles (A, AO) et (C,CO). Il suffit de tracer ces deux cercles.
AO = CO = AO' = CO' donc AO'CO est un losange.

Question 4)
Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu ; il en résulte que (OO') et (AC) sont orthogonales et ce coupent en leur milieu. (HO) est donc médiatrice de [AC]. Par conséquent, elle est aussi hauteur du triangle ABC (équilatéral) donc elle passe par B.

Question 5)
a) O est aussi le centre de gravité du triangle, point de concours des médianes. Les médianes se coupent au tiers de leur longueur à partir de la base. Donc OH = $\frac{OB}{2} = \frac{R}{2}$
b) Par conséquent, OO' = 2 OH = OB = R, donc O' est sur le cercle de centre O et de rayon R.

Question 6)
En pliant selon (AC), le point O' vient donc sur O. On fait de même pour (AB) et (BC). « Les « oreilles et le front repliés » se touchent bien en le point O.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES[2]

(Voir remarque sur le sujet en bas de page).

Question 1)
Description des procédures :
Albert choisit deux points qu'il suppose diamétralement opposés et prend pour centre le milieu de ce segment.
Bernard choisit quatre points qu'il suppose sommets d'un rectangle inscrit et détermine le centre du cercle par intersection des diagonales.
Céline choisit deux segments qu'elle suppose être des cordes, prend les milieux en mesurant, puis le milieu du segment déterminé par les milieux.
David choisit trois points et trace le triangle. Il construit, par mesurage, les médianes. L'intersection de ces trois médianes constitue, pour lui, le centre du cercle.

---

[2] Les programmes du cycle trois de l'école primaire n'exigent pas une compétence comme celle D'Eléonore. Cet exercice est un exercice de recherche. On pourrait imaginer un cercle témoin avec son centre pour permettre une validation sémantique en fin d'activité (par superposition). Mais la recherche d'une preuve, qui utiliserait des propriétés géométriques validées auparavant est hors programme et en tous cas difficile d'accès pour la majorité des élèves de fin de cycle 3. Cet exercice s'adresserait à des élèves de collège.

Eléonore choisit deux segments ayant une extrémité commune et en détermine les médiatrices. Leur intersection est le centre du cercle.

Question 2)

Les procédures de Bernard et Céline sont erronées. Pour qu'elles fonctionnent, il suffirait que les points qu'ils ont choisis soient les sommets d'un parallélogramme pour que leur procédure devienne juste.
Remarque : Si le quadrilatère est un carré, un rectangle, un losange, (qui sont des parallélogrammes) leur procédure reste bien sûr juste.

Question 3)
La procédure d'Albert serait juste s'il avait choisi deux points diamétralement opposés. Mais si Albert avait eu cette exigence, il n'aurait pas pu mener son travail à bien. Comment vérifier que deux points sont diamétralement opposés si cette hypothèse ne figure pas dans l'énoncé ?
Celles de Bernard et Céline ont été vues en question 2.
David aurait « réussi » si le triangle avait été équilatéral : en effet, dans ce cas, médianes et médiatrices sont confondues. Le point d'intersection est bien équidistant des trois sommets. (On peut dire que le point de concours des médiatrices est le centre du cercle circonscrit au triangle).
Eléonore a la procédure juste dès que l'on a trois points distincts sur le cercle.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

1) A PROPOS DES ANNEXES 1 ET 2 [3]:

(voir note de bas de page)

Question 1)

1-1 :
L'annexe 2 propose 6 exercices : le potager, les vaches, le parking, les glaces, la fleuriste, le voyage scolaire.

Le potager	est un dénombrement d'objets « disposés selon une configuration rectangulaire ».

[3] **Remarques sur le sujet :**
- Les questions de la partie didactique utilisent le terme de « situation » dans un sens commun. Pour avoir une définition précise de situation en didactique des mathématiques, le lecteur pourra se référer dans « thèmes mathématiques choix de sujets de concours du CRPE 92-93-94 » au glossaire de didactique et plus particulièrement aux pages 134 et 135 qui traitent du mot « situation »..
- Le sujet ne précise ni l'époque de l'année, ni les acquis des élèves, ni leur travail antérieur sur ce thème. L'exercice qui consiste à demander alors les procédures attendues devient purement spéculatif. La note de service 94-271 du 16 nov. 96 concernant des recommandations relatives aux concours de recrutement des professeurs des Ecoles devrait être donnée aux personnels chargés de concevoir les sujets.

Les vaches (à quatre pattes) et les glaces (à trois boules)	est un dénombrement à partir de « groupements équipotents d'objets. »
Le parking	est un dénombrement d'objets qui fait appel simultanément aux deux critères vus ci-dessus.
La fleuriste	est un dénombrement à partir de « groupements équipotents d'objets. », mais cette fois, les objets ne sont pas représentés. C'est une information écrite qui doit être interprétée.
Le voyage scolaire	est la « mise en correspondance de deux grandeurs appartenant à des domaines différents. »

1-2 :
Pour l'exercice 1, on peut s'attendre aux écritures suivantes :
4x9
9x4
4+4+4+4+4+4+4+4+4
9+9+9+9

Pour l'exercice 5, on peut s'attendre à 5x12 ou à 12x5 ou à 12+12+12+12+12

Remarque : en l'absence de toute précision sur les travaux antérieurs effectués avec les élèves on ne peut répondre que cela. Mais la réalité montrerait bien d'autres configurations : par exemple :
Pour le potager : un entourage de la première ligne, avec l'étiquette 9, ainsi de suite, avec, peut-être la reprise de ces « 9 » en vue d'une addition 9+9= 18, 18+18 = 36. Tout ce qui lie addition et multiplication est fondamentalement lié à la façon dont la multiplication a été abordée. Or nous n'avons aucun renseignement sur ce point.

Les stratégies de calcul que les enfants peuvent mettre en œuvre sont :
Le comptage un à un : les collection 1 et 3 sont assez faciles à énumérer. Il n'en est pas de même pour les exercices 2 et 4. Quand aux deux autres exercices, ils incitent plus directement à un travail numérique.
Par exemple :
56+56+56
c'est 50+6+50+6+50+6
c'est aussi 150 + 18
donc 168

Remarque : cet exercice est difficile en première partie d'année de CE1.

1-3 :
Les variables didactiques (voir le sujet de CAEN où une remarque didactique est faite concernant les variables didactiques) repérées sont :
L'ordre de grandeur des nombres. Selon que le nombre est petit ou grand, un dénombrement un à un pourra s'avérer, ou non, plus efficace.

Le fait que la collection est visible ou évoquée. Dans le deuxième cas, l'enfant doit se représenter le problème. Il pourra alors faire un dessin.
Le fait que la collection visible est organisée (par tableaux, par paquets équipotents) ou non. Cette variable conditionne le mode d'exploration de la collection et peut favoriser le comptage un à un ou l'addition ou l'addition réitérée, donc la multiplication.
Le fait que l'on travaille sur une même grandeur ou sur des grandeurs appartenant à des domaines différents va augmenter la complexité du problème.

1-4
L'objectif principal de la séquence consiste à confronter des écritures additives et multiplicatives, puis à mettre en œuvre des procédés de calcul.

Remarque didactique :
Le fait que ces six exercices fassent varier autant de variables, sans qu'une gestion très claire soit définie risque fort de conduire à une séquence dans laquelle il sera difficile de faire la synthèse.

N'oublions pas que nous sommes avec des enfants de CE1...

Question 2 :

Comparer les exercices 1 et 2 de l'annexe 3 :
- Les collections sont visibles dans l'exercice 1 et non dans l'exercice 2.
-- L'exercice 1 se traite par multiplications emboîtées, de sorte que la procédure experte n'est pas communicable aux élèves (4x4x3x3 est incompréhensible des enfants.). La procédure experte est attendue dans l'exercice 2.
- L'exercice 2 est un travail sur des productions numériques (multiplications, multiplications à trous). Il n'y a pas d'additions. Pourtant 14x2 est souvent résolu en effectuant 14+14. L'exercice 1 va engager des productions numériques (sans doute additives), mais de toutes façons pas de multiplications à trous.
- L'exercice 2 demande explicitement de se servir de la table de multiplication. Le professeur acceptera-t-il qu'un enfant fasse 8+8+8+8 pour la deuxième ligne ?
- L'exercice 2 fait appel à la loi des zéros (13x10=130) dans le contexte d'une multiplication à trous.

GRENOBLE

(Corrigé effectué à partir du corrigé et remarques fournis par notre correspondant de l'Académie de Grenoble et ses collègues.)

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

Question 1 :

Réponse attendue : (voir graphique page suisvante.)

Dans cette épreuve, on utilise le fait que, pour une vitesse constante, la distance parcourue est proportionnelle au temps de parcours. En prenant pour unités le kilomètre et l'heure, on a :

Distance parcourue (en km) = vitesse (en km/h) x temps de parcours (en h).

Les cyclistes entament alors la montée à 9h+ 1h 15 mn + 25 mn, soit à 10h 40. Le temps de montée est, en heure : $\frac{16}{12}$ soit 1h 20 mn. L'arrivée se fait donc à 12h. Pour les cyclistes, le graphique peut être achevé

Pour l'automobiliste, les calculs se font en tenant compte du fait que celui-ci veut arriver 15 mn avant 12 heures. Il effectuera les 16 km de montée à 48 km, donc il mettra : $\frac{16}{48}$ heures, soit 20 mn.

L'automobiliste arrive donc au bas de la côte à 11h 25 mn. Comme il prend la route 15 mn plus tôt ($\frac{30}{120}$), il démarre à 11h 10 mn. Le graphique peut alors être effectué complètement.

Question 2 :

a) Le graphique permet de trouver comme heure approximative de rencontre : 11h 40 mn au kilomètre 42.

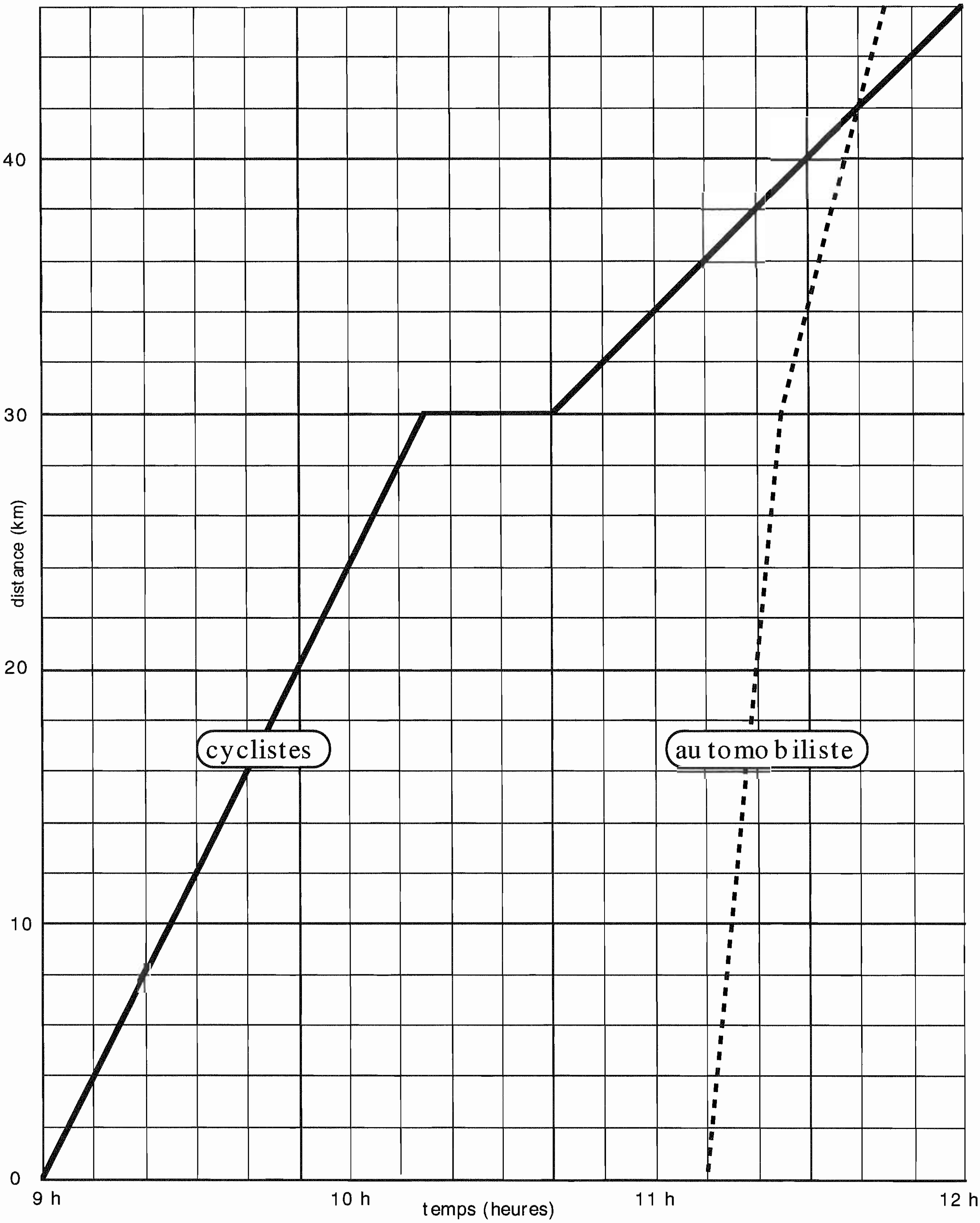
b) Par le calcul : l'automobiliste prenant le départ après 11h, les cyclistes ne peuvent être doublés que dans la montée. Nous calculons donc à partir du bas de la montée. Au moment de la rencontre, la distance parcourue par les cyclistes et l'automobiliste est la même : soit d cette distance depuis le pied de la montée et t l'heure de la rencontre :

le parcours des cyclistes permet d'écrire : $d = 12 \times (t - (11 - \frac{1}{3}))$

Celui de l'automobiliste permet d'écrire : $d = 48 \times (t - (11 + \frac{25}{60}))$.

En égalant ces deux expressions, il vient $t = 11 + \frac{2}{3}$ et $d = 12$.

La rencontre a donc lieu après 12 km de montée, à 11h 40 mn.


40
30
distance (km)
20
10
0
cyclistes
automobiliste
9 h
10 h
temps (heures)
11 h
12 h

Question 3 :

Dans la vallée, les cyclistes ont mis 1h 15 mn pour parcourir 30 km. La vitesse moyenne est donc : $\frac{30}{1,25}$, soit 24 km/h.

Question 4 :

L'automobiliste a mis 35 mn pour effectuer 46 km. Sa vitesse moyenne est donc : $\frac{46}{\frac{35}{60}} = \frac{552}{7}$.

$78,85 < \frac{552}{7} < 78,86$.

78,9 est le décimal possédant un seul chiffre après la virgule qui est le plus proche de la valeur exacte. La vitesse moyenne est donc 78,9 km/h.

Question 5 :

Soit a le prix du biscuit en plaine et b le prix d'un biscuit sur le lieu du pique-nique. On a : 24 a = 18 b, c'est à dire b = $\frac{4}{3}$ a . Ainsi, le prix d'un biscuit a augmenté de $\frac{1}{3}$, soit environ 33% . C'est donc Paul qui a raison.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS) ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1 :

Enfant	**erreur repérée.**
Evelyne	considère le segment dessiné comme segment unité, ce qui est sans conséquence pour b, mais fait échouer en a et c. En d, ne se préoccupe pas de la graduation, mais des étiquettes vides. Nomme donc les étiquettes de gauche à droite sous forme d'un codage qui ressemble aux fractions .Elle prend 9 au dénominateur au lieu de 10.
Damien	Réussite.
Karine	Résultats justes lorsqu'il s'agit de coder des places sur le segment [0,1]. Au delà de 1, codage aléatoire. (ajout de 1 au dénominateur dans a et c, passage de 2 à 2 en a au numérateur alors que passage de 4 à 5 en c.

David	considère le segment dessiné comme segment unité en en a et c. en b, part de $\frac{1}{3}$et ajoute 1 au numérateur ainsi qu'au dénominateur. En d, part de $\frac{1}{10}$, puis s'appuie sur les étiquettes vides. Nomme alors les étiquettes de gauche à droite sous forme d'un codage qui ressemble aux fractions.
Christelle	Résultats justes lorsqu'il s'agit de coder des places sur le segment [0,1]. Au delà de 1, repart de $\frac{1}{n+1}$, puis ajoute 1 au numérateur.
Kevin	Résultats justes lorsqu'il s'agit de coder des places sur le segment [0,1]. Au delà de 1, n'écrit que la partie fractionnaire (pour lui les fractions sont inférieures à 1).
Thibault	considère le segment dessiné comme segment unité. Nomme les étiquettes de gauche à droite sous forme d'un codage qui ressemble aux fractions.
Vivien	considère le segment dessiné comme segment unité.

Question 2[1] :

Un premier type d'erreur semble se reproduire : « considère le segment dessiné comme segment unité. ». Ce type d'erreur peut révéler une conception des fractions comme simple marque numérique liée à une graduation d'un segment, sans référence à l'unité. Remarque : dans ce cas, les fractions supérieures à 1 sont difficilement envisageables.
Evelyne, David et Thibault conçoivent la fraction comme un couple d'entiers. Le premier (numérateur) jouant le rôle de rang de l'étiquette, le second (dénominateur) signifiant le nombre de parts faites dans le segment dessiné.
Christelle et Kevin conçoivent, à quelques différences près, les fractions au delà de 1 par incrémentation du dénominateur et reprise de la numérotation au numérateur.

[1] **Remarque didactique** : Ces exercices montrent que les enfants échafaudent, autour de ce que nous appelons les fractions, des règles de désignation d'objets que nous ne pouvons pointer. S'agit-il de coder une case, un point de la graduation, la mesure d'un intervalle ? N'étant pas informés sur les types d'exercices pratiqués dans les séquences précédentes, il est difficile de parler alors de « conception d'une fraction ». Comme le fait remarquer un correcteur de Grenoble, « Dans quelles conditions ont-ils [les élèves] été amenés à prendre conscience du codage possible de la droite numérique par des écritures fractionnaires ? ».

Question 3[2] :

Au moins deux types d'erreurs peuvent être induits par la présentation de l'exercice :

a) « considérer le segment dessiné comme segment unité » : il s'agit de compléter des étiquettes à l'aide d'écritures fractionnaires sur une demi-droite graduée, alors que les quatre dessins représentent un segment partagé qui peut être considéré de ce fait comme segment unité. Les exercices b et d induisent ce comportement.

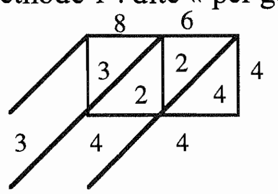
b) « Nomme les étiquettes de gauche à droite sous forme d'un codage qui ressemble aux fractions ». Dans les trois premiers exercices il n'y a pas de graduations intermédiaires sans étiquette, alors que c'est le cas dans le dernier.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

Question 1 a:

Méthode 1 : dite « per gelosia » ou encore « à la musulmane ».



Méthode 2 :

80	6	
80x4 = 320	6x4 = 24	4

320
+
24

344

86x4 = 344

---

[2] **Conseil pour le candidat** : Cette question ne doit pas faire penser aux candidats que l'exercice est remis en cause parce qu'il a induit des erreurs. Les erreurs se sont produites parce que les élèves n'ont pas une conception juste (ou pas de conception du tout) des fractions. Le risque dans une évaluation est plutôt de voir des élèves résoudre un exercice et trouver un résultat juste avec des conceptions fausses : par exemple, si les exercices n'avaient pas abordé la question de la graduation au delà de 1, Kevin et Christelle auraient juste à leur évaluation.

Méthode 3 :

	c	d	u
		8	6
x			4
		2	4
	3	2	0
	3	4	4

86x4=344

Méthode 4 :

86x4 = (80 + 6) x 4
= (80x4) + (6x4)
= 320 + 24
=344

Question 1 b[3]: (Voir la note de bas de page).
Sans faire le commentaire de la note de bas de page, l'étudiant pourra étudier les caractéristiques particulières de chaque méthode. Une réponse attendue est alors :
Dans la méthode 1, la disposition particulière adoptée exploite la numération de position. Les différentes diagonales permettent de séparer unités, dizaines et centaines. Cette méthode permet d'écrire les retenues, de s'interrompre sans dommage pour la suite, de ne pas commettre d'erreur due audécalage.
La méthode 2 demande d'expliciter la décomposition canonique des nombres suivant unité, dizaine, centaine. En outre, cette méthode utilise la distributivité de la multiplication sur l'addition.
La méthode 3 repose sur la numération de position et la distributivité de la multiplication sur l'addition.
La méthode 4 est semblable à la méthode 2, à la présentation près.

[3] **Commentaire sur la question 1 b** : la question « quelles sont les notions mathématiques sous jacentes » devrait être évitée dans une épreuve de CRPE, ou alors être affinée. Dans cette question qui vise l'étude de méthodes de production du résultat d'une multiplication, les notions mathématiques sous-jacentes sont toujours les mêmes : numération de position, décomposition du nombre selon les puissances de dix, utilisation de la distributivité de la multiplication sur l'addition, connaissance de la règle des 0 dans le calcul des produits, connaissance des produits de deux nombres de deux chiffres. Ce qui serait plus utile serait d'étudier ce que chacune des méthodes permet ou non à l'élève d'éviter de prendre en charge. Par exemple, on peut très bien imaginer une pratique purement rituelle de la méthode 1 qui ne convoquera que la table de multiplication, toutes les autres notions étant prises en charge par le tableau. Par contre, si cette méthode est progressivement élaborée en cours d'année, elle aura nécessité la connaissance des notions énumérées ci-dessus.

Question 1 c:

- Au CE1, les élèves peuvent utiliser l'addition réitérée :
86x4 c'est aussi 86+86+86+86, ou alors c'est aussi 80+80+80+80 auquel on ajoute 6+6+6+6.
- Ils peuvent utiliser des procédures hybrides :
86x4 c'est 86x2 puis encore x2, ce qui se traduira par 86 x2 = 172   172x2 = 344

Question 1 d) :

Les programmes officiels, en cycle 2 exigent que les élèves aient :
« connaissance des nombres entiers et de leur désignations écrites (chiffres ou lettres) et parlée :
- numérationdécimale. »...
une « Approche des techniques opératoires de la soustraction et de la multiplication, de la table de multiplication. »
Dans les compétences, il est dit à nouveau : « maîtriser la technique opératoire de l'addition (seule technique dont la maîtrise est exigée à la fin de ce cycle. »

La fiche (annexe B) met en présence, côte à côte des méthodes de calcul effectif du produit de deux nombres qui sont plus ou moins abouties. Les méthodes 1 et 3 sont proches de techniques automatisées. Elles ne sont pas suggérées par les programmes. Par contre, les méthodes I2 et 4 marquent une institutionnalisation des regroupements possibles pour le calcul de produits simples. Elles peuvent constituer un but de cycle 2.

Question 2 :
Voir l'analyse approfondie en fin de corrigé.

Réponse attendue pour le concours :
La fiche de l'annexe D1 vise à faire apprendre ou revoir[4] la règle de la multiplication d'un nombre par une puissance de dix ainsi que par des multiples de dix. La fin de la fiche « je retiens bien » est précise à ce sujet.
Cette fiche se compose de deux activités : en opposant deux façons de calculer 8x13, l'activité 1 montre l'intérêt qu'il y a à décomposer 13 en 10+3 plutôt qu'en 6+7. Cet intérêt apparaît plus nettement dans l'activité 2 où le choix de 3x30, 7x60, 8x300 institue la règle de multiplication par 10, 100 et par des multiples de 10 et de 100.
Les exercices de la page suivante visent à faire fonctionner ce qui a été vu dans les deux activités.

Le candidat pourra faire la remarque suivante : si la séquence s'identifie à la fiche, il s'agit d'une présentation ostensive des savoirs.

---

[4] Hors contexte du livre, il n'est pas possible de trancher.

Question 3 :

Dans le manuel de la collection « diagonale », après la fiche D1 vue en question 2 (pages 54 et 55), les auteurs proposent en début de fiche suivante (pages 56 et 57) deux activités : la première reprend l'activité de la fiche précédente. L'élève est invité à décomposer 37x28 en 30+7 et 20+8. Il est invité à trouver les résultats intermédiaires suivant deux dispositions.
La suite de l'activité 1 et l'activité 2 traitent de la multiplication d'un nombre par un nombre à un seul chiffre, ce qui semble être l'objectif final de cette fiche : l'encadré du « je retiens bien » le montre.
Dans le traitement de la multiplication par un nombre de un chiffre, le manuel expose l'intérêt (« pour aller plus vite ») qu'il y a à travailler sur les retenues.
La fiche (annexe D3) qui se situe plus tard dans le manuel (pages 92 et 93), traite de la multiplication par un multiple de 10, puis par un nombre à trois chiffres. L'objectif final est de connaître l'algorithme à l'italienne dans le domaine des nombres à trois chiffres multipliés par des nombres à deux chiffres.
Le procédé pédagogique dominant est l'ostension : « observe et explique ».

Dans le manuel de la collection « objectif calcul », page 96, en phase de découverte, les auteurs évoquent précisément « le quadrillage » et font travailler les élèves sur le passage du cadre numérique au cadre géométrique. Le manuel impose, par les deux calques successifs, deux étapes : celle du découpage par dix, puis du découpage selon la décomposition du nombre en la somme de multiples de 10 (45 = 40 + 5).
La suite de la fiche vise à faire le lien entre plan de découpage et écritures en ligne.
Un peu plus tard (pages 98 et 99), ce même manuel propose, en s'appuyant à nouveau sur le quadrillage, de comprendre la « technique usuelle ». Dans les exercices et problèmes, l'accent est mis sur le lien à continuer à faire entre plan de découpage, technique proche de la musulmane et technique usuelle.

Conclusion :

« Diagonale » fonde le sens sur une disposition en tableau sans y faire référence...
L'objectif est d'enseigner des techniques. Le sens même de la décomposition des nombres pour multiplier n'est pas objet d'interrogation..
« Objectif calcul » se fonde sur les « plans de découpage » pour donner du sens aux décompositions des nombres. Le passage imposé, mais organisé, des plans de découpage à un premier procédé, puis à un second, sans rupture avec le précédent est plus proche des objectifs assignés au cycle 2.
Toutefois, si l'on s'en tient aux fiches élèves (il y a les livres du maître) ces séquences présentent, l'une comme l'autre, les savoirs à acquérir de façon ostensive.

Remarque didactique et pédagogique sur le sujet de didactique :

- l'activité 1 vise la comparaison de deux procédures d'élèves (fictifs) afin de conclure sur la question « quels sont les calculs les plus rapides ?».

- Rien ne permet de savoir si ces deux procédures s'appuient sur une représentation schématisée d'un quadrillage. Si tel n'était pas le cas, on comprend mal quel sens peuvent mettre des lecteurs d'une telle fiche. Pourquoi un nombre est-il en haut, pourquoi l'autre est -il à gauche !

- Les fichiers pratiquent fréquemment cette façon de présenter les mathématiques dans laquelle l'élève est spectateur d'une action et doit, sans agir, mais en lisant une mise en scène, se forger une opinion et effectuer des jugements. Cette pratique de l'ostension déguisée des savoirs par l'intermédiaire de travaux d'élèves fictifs, prive l'élève d'activité mathématique proprement dite. Ceci mériterait faire l'objet d'une question en partie didactique. (Voir aussi le sujet de Reims, dans la partie didactique).

- l'activité 2 présente les savoirs visés à l'aide d'exemples. Elle impose au passage le procédé de découpage du quadrillage par dix, procédé qui aurait pu être l'aboutissement d'un questionnement lors de l'élaboration progressive de l'algorithme de la multiplication à la musulmane.
- Les exercices de la page suivante sont l'application de ce qui a été imposé dans les activités 1 et 2.

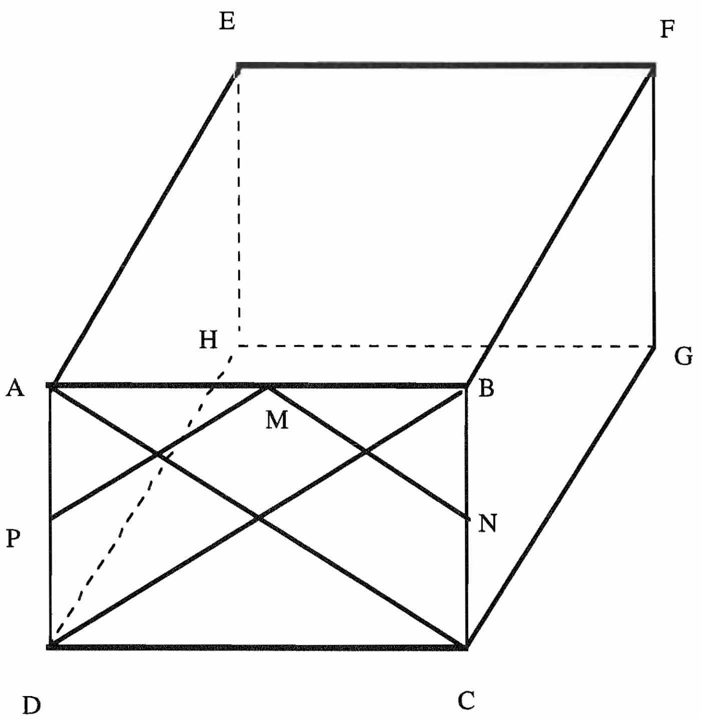
Guadeloupe - Guyane - Martinique
(Sujet de remplacement)

(Corrigé effectué par l'équipe de Bordeaux).

PREMIERVOLET(12POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

L'exercice porte sur une figure qui était donnée au candidat. Nous reproduisons cette figure.



Partie A :

Question 1 :
Pour répondre à cette question, examinons le parallélisme des droites :
(PM)//(BD) et (MN)//(AC). La condition nécessaire et suffisante pour que l'angle $\widehat{PMN}$ soit droit est que les droites (AC) et (BD) soient perpendiculaires. La condition nécessaire et suffisante pour que les diagonales d'un rectangle soient perpendiculaires est que ce rectangle soit un carré. Donc pour que $\widehat{PMN}$ soit droit, il est nécessaire et suffisant que ABCD soit un carré. Or ce n'est pas le cas, donc PMN n'est pas droit.

Question 2 :

a)
En considérant à nouveau le parallélisme décrit en question 1, et en utilisant le théorème de Thalès appliqué aux triangles, nous pouvons écrire les égalités suivantes :

Concernant les triangles ABD et APM : $\frac{MP}{BD} = \frac{MA}{AB}$ (1).

Concernant les triangles ABC et BMN : $\frac{MN}{AC} = \frac{MB}{AB}$ (2).

Or AC = BD (diagonales d'un rectangle), donc (2) équivaut à : $\frac{MN}{BD} = \frac{MB}{AB}$(3).

D'après les égalités (1) et (3), si MP = MN alors $\frac{MN}{BD} = \frac{MA}{AB} = \frac{MB}{AB}$, d'où MA = MB.

M est alors milieu de [AB].

b)
D'après le théorème de Pythagore : $AB^2 + BC^2 = AC^2$

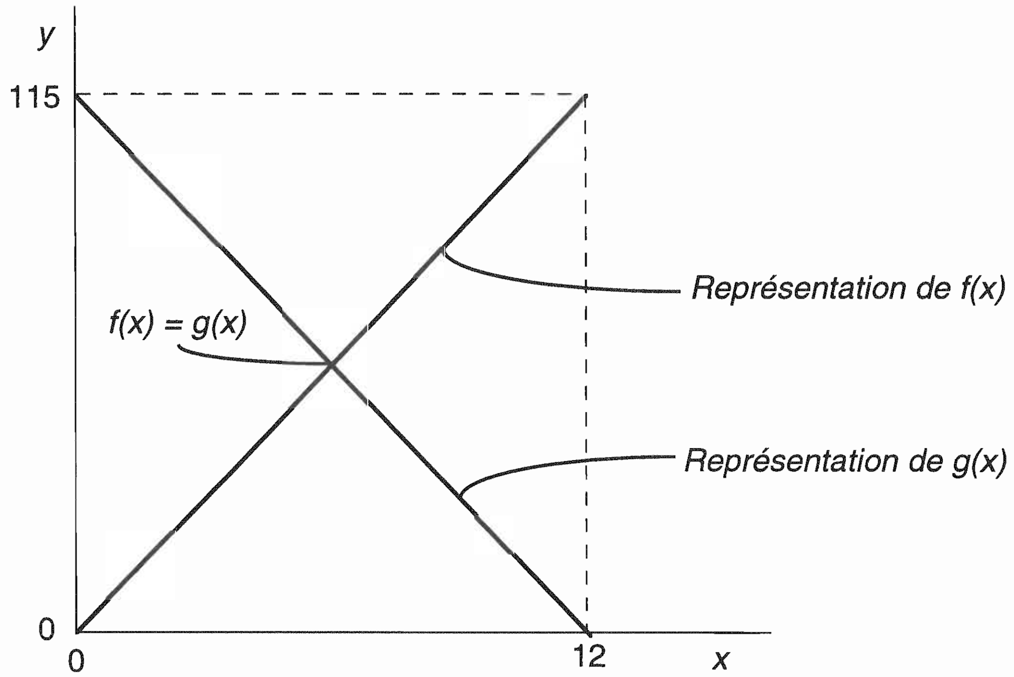
donc $AC^2 = 144 + 81 = 225$ alors AC = 15.

En utilisant (1), et en présentant une égalité issue du produit des extrêmes et des moyens, on obtient :

MP . 12 = x . 15, d'où MP = $\frac{15}{12}$ x **MP=$\frac{5}{4}$x.**

De la même façon, à l'aide de (3) : MN . 12 = 15 . (12-x) **MN =$\frac{5}{4}$(12-x)**

c) représentation graphique :



Pour retrouver la réponse du 2a), il suffit d'interpréter l'égalité MP=MN : cela signifie qu'il peut exister une valeur de x telle que f(x)=g(x) : pour x = 6, les graphes de f(x) et g(x) se coupent. Or, lorsque x = 6, cela signifie que M est milieu de AB (AB=12 en cm).

d) MN = 2 MP revient à poser l'équation g(x) = 2 f(x)

Existe-t-il x dans l'intervalle [0 ;12] tel que $\frac{5}{4}(12\text{-}x) = \frac{10}{4}x$

$$\frac{5}{4}(12\text{-}x) = \frac{10}{4}x$$
$$\Leftrightarrow$$
$$60\text{-}5x = 10x$$
$$\Leftrightarrow$$
$$60 = 15\,x$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x = 4$$

Lorsque M est à 4 cm de A, alors la distance MN est le double de la distance MP.

Partie B :

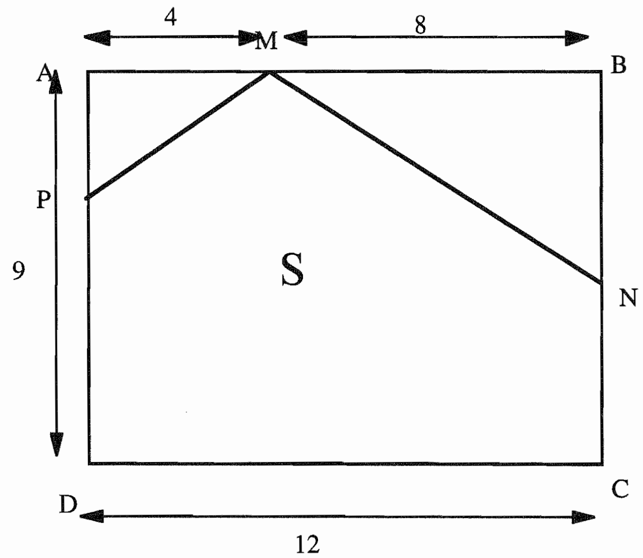
Question 1 :

Le calcul du volume de ce solide peut d'effectuer en utilisant la formule générale :

aire de base x hauteur

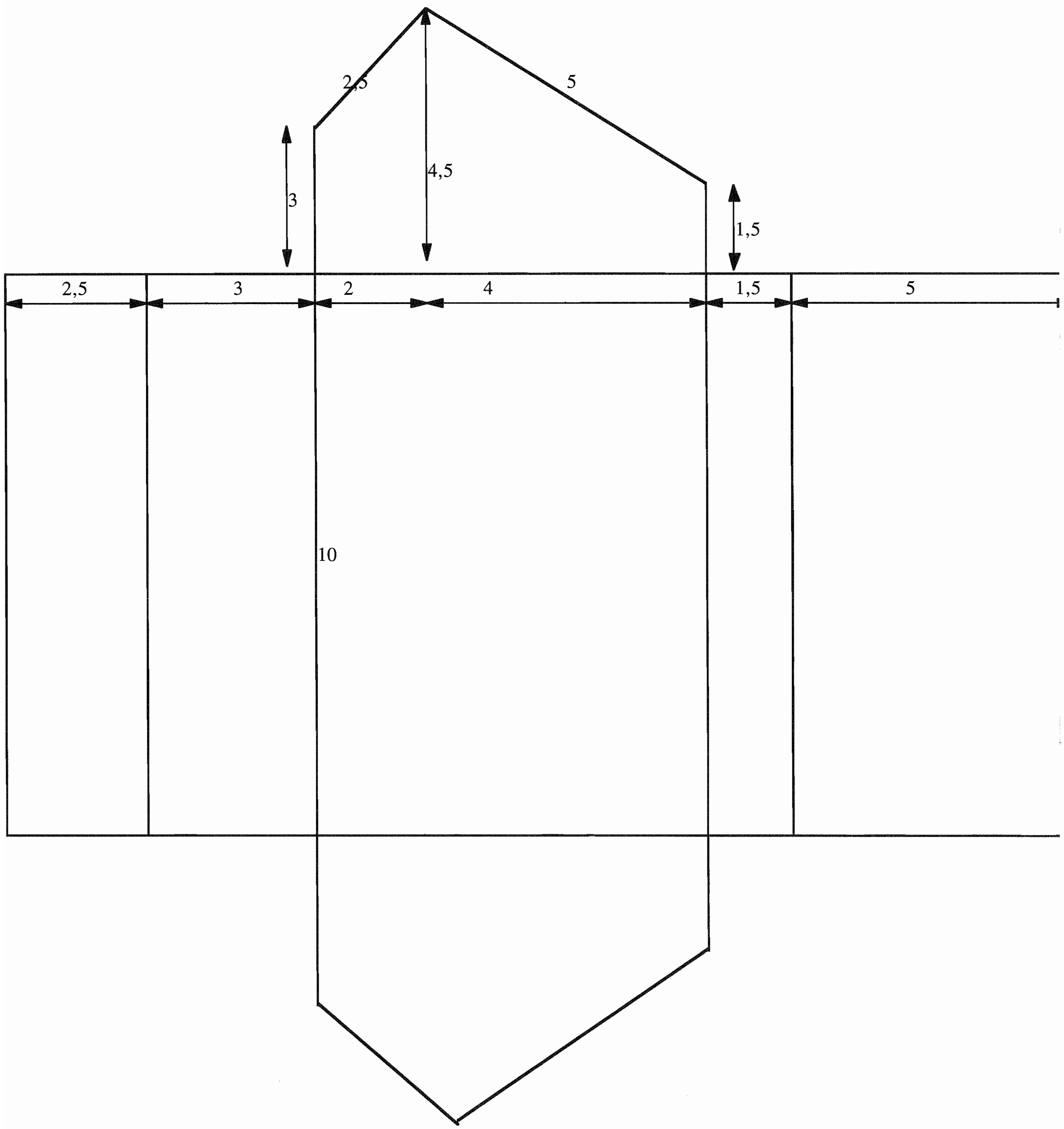
en prenant pour hauteur la distance entre les plans ABCD et EFGH, par exemple, AE, soit 20 cm.

Le calcul de l'aire de base peut se faire à partir du dessin suivant :



suite après la page suivante

Question 2 :



N.B. : les cotes sont celles de la figure à l'échelle 1/2. Ce n'était pas demandé.

En reprenant le travail sur le parallélisme (cf question 2 a) et en utilisant le théorème de Thalès, on peut écrire les égalités suivantes : $\frac{BM}{BA}=\frac{BN}{BC}$ ainsi que $\frac{AM}{AB}=\frac{AP}{AD}$ ce qui permet d'obtenir : AP = $\frac{36}{12}$= 3 et BN = $\frac{72}{12}$=6

Calculons l'aire de PMNCD par différence : aire PMNCD = aire ABCD - (aire AMP + aire MBN)

aire ABCD = 12 x 9 = 108

aire AMP = $\frac{1}{2}$ x 4 x 3= 6

aire MBN= $\frac{1}{2}$ x 8 x 6= 24

aire PMNCD = 108 - (6+24)=78

Le volume est alors : aire PMNCD x 20 = 78x20 = 1560 (en cm^3).

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1 :

Les I.O. de 1995 mentionnent trois types d'activités[1]. Cette activité proposée en cycle trois relève plus de catégories de problèmes « destinés à permettre l'utilisation conjointe de plusieurs connaissances dans des situations plus complexes. ».

Pour résoudre ce problème, les élèves mettent en œuvre leurs connaissances numériques, leur connaissance des opérations, ainsi que des connaissances sur les ordres de grandeur.

[1] Les activités relatives à la résolution de problèmes portent sur :

- de véritables problèmes de recherche, pour lesquels l'élève ne dispose pas de démarche préalablement explorée ;
- Des problèmes destinés à permettre l'utilisation des acquis antérieurs dans des situations d'application et de réinvestissement ;
- Des problèmes destinés à permettre l'utilisation conjointe de plusieurs connaissances dans des situations plus complexes.

Nous ne savons pas si les candidats de cette académie avaient les extraits des I.O. annexées à leur sujet.

Question 2 :

	hypothèse sur le raisonnement des enfants	Qualités	erreurs.
Production A	Cet élève interprète « moins de 20 » comme signifiant 19. Il trouve donc une dépense de 19x2 = 38 francs pour les boules sucrées. Ensuite, il essaie 19 pour les boîtes de jus. Pourquoi 19 ? Par souci de régularité ? Il a compris la donnée « il a pris autant de boîtes de jus que de gâteaux ». Il aboutit à 76+76+38 et conclue : « c'est trop ». Dans son deuxième essai, Il maintient 19 pour les boules et diminue de moitié la quantité de pièces (passe à 8). 38+32+32 = 102	Le deuxième essai tient compte du résultat du premier essai. L'enfant ne fait pas tout varier en même temps	L'enfant imagine une solution unique, ce qui est le contrat habituel dans les résolutions de problèmes. L'enfant approche les 114 F. alors que le problème semble signifier que les 114 F. sont dépensés. Il reste un doute sur ce point. Si l'on admet que l'interprétation de l'enfant : approcher la somme de 114 F., celui-ci aurait pu améliorer son travail s'il avait repris son deuxième essai et ajouté 4F. et 4F. pour avoir 9 jus et 9 gâteaux, ce qui aurait fait : 19 boules : 38F. 9 jus : 36 F. 9 gâteaux : 36 F. Au total : 110 F.
Production B	L'enfant décompose 114 en 52+52+10 sans que l'on puisse faire une hypothèse précise (importance du 10 ?)	Le hasard a permis de trouver une solution	L'enfant imagine une solution unique, ce qui est le contrat habituel dans les résolutions de problèmes.

Remarque : La résolution de cet exercice, à l'aide des outils de l'algèbre conduit au résultat suivant :
Soit x le nombre de boules, y le nombre de jus (qui est aussi le nombre de gâteaux).
Le système à résoudre est le suivant :

Dans NxN, existe-t-il (x,y) tels que :

1

$$2x + 8y = 114$$

et

$$x < 20$$

les couples solution sont : (1,14), (5,13), (13,11), (17,10).

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

(Voir commentaire sur le sujet en bas de page)[2]

Question 1 :

Les I.O. de 1995 mentionnent trois types d'activités[3]. Cette activité proposée en cycle trois relève plus de catégories de problèmes « destinés à permettre l'utilisation conjointe de plusieurs connaissances dans des situations plus complexes. ».

Pour résoudre ce problème, les élèves mettent en œuvre leurs connaissances numériques, leur connaissance des opérations, ainsi que des connaissances sur les ordres de grandeur.

Question 2 :

Remarque : La résolution de cet exercice, à l'aide des outils de l'algèbre conduit au résultat suivant :

Soit x le nombre de boules, y le nombre de jus (qui est aussi le nombre de gâteaux).

Le système à résoudre est le suivant :

Dans NxN, existe-t-il (x,y) tels que :

1

$$2x+8y = 114$$

et

$$x<20$$

les couples solution sont : (1,14) , (5,13) , (13,11) , (17,10).

---

[2] **Commentaire sur le sujet** : Les réponses montrent la distance énorme qui sépare les élèves de ce problème. Laisser entendre que l'on pourrait proposer sous cette forme un tel problème à des élèves du cycle trois, même sous le prétexte des Instructions officielles, serait un abus caractérisé. Il sera impossible de « faire comprendre » à la classe les « méthodes » du professeur : en effet, dans l'enseignement, l'exploration exhaustive est habituellement rejetée comme solution « définitive ».

[3] Les activités relatives à la résolution de problèmes portent sur :

- de véritables problèmes de recherche, pour lesquels l'élève ne dispose pas de démarche préalablementexplorée.
- Des problèmes destinés à permettre l'utilisation des acquis antérieurs dans des situations d'application et de réinvestissement.
- Des problèmes destinés à permettre l'utilisation conjointe de plusieurs connaissances dans des situations plus complexes.

Nous ne savons pas si les candidats de cette académie avaient les extraits des I.O. annexées à leur sujet.

	hypothèse sur le raisonnement des enfants	Qualités	erreurs.
Production A	Cet élève interprète « moins de 20 » comme signifiant 19. Il trouve donc une dépense de 19x2 = 38 francs pour les boules sucrées. Ensuite, il essaie 19 pour les boîtes de jus. Pourquoi 19 ? Par souci de régularité ? Il a compris la donnée « il a pris autant de boîtes de jus que de gâteaux ». Il aboutit à 76+76+38 et conclut : « c'est trop ». Dans son deuxième essai, Il maintient 19 pour les boules et diminue de moitié la quantité de pièces (passe à 8). 38+32+32 = 102	Le deuxième essai tient compte du résultat du premier essai. L'enfant ne fait pas tout varier en même temps	L'enfant imagine une solution unique, ce qui est le contrat habituel dans les résolutions de problèmes. L'enfant approche les 114 F. alors que le problème semble signifier que les 114 F. sont dépensés. Il reste un doute sur ce point. Si l'on admet que l'interprétation de l'enfant : approcher la somme de 114 F, celui-ci aurait pu améliorer son travail s'il avait repris son deuxième essai et ajouté 4F et 4F pour avoir 9 jus et 9 gâteaux, ce qui aurait fait : 19 boules : 38F. 9 jus : 36 F. 9 gâteaux : 36 F. Au total : 110 F.
Production B	L'enfant décompose 114 en 52+52+10 sans que l'on puisse faire une hypothèse précise (importance du 10 ?)	Le hasard a permis de trouver une solution	L'enfant imagine une solution unique, ce qui est le contrat habituel dans les résolutions de problèmes.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

Voir commentaires et compléments de cours en fin de corrigé.

Question 1) :

L'activité décrite peut être conduite dès le début du cycle 3. Les programmes de géométrie du cycle trois demandent :

- A partir d'un travail sur des solides et des surfaces divers (reproduction, description, représentation, construction), notion de :

- Face, sommet, arête ;

- côté, segment, milieu, ligne droite, angle ;

- perpendiculaire,parallèle.
- Connaissance de quelques objets géométriques usuels (cube, parallélèpipède rectangle, sphère, carré, rectangle, losange, triangle, cercle, disque).
- Action sur des figures planes : mise au point de techniques de reproduction, construction et transformation...

Question 2) :
Les compétences disciplinaires en jeu sont : connaissance des propriétés qui caractérisent les quadrilatères usuels et en particulier les rectangles. D'après la consigne, le mesurage précis des longueurs n'est pas nécessaire, puisqu'il ne s'agit que de reproduire une figure de même nom, et non pas superposable. Dans les deux cas, les élèves doivent connaître un ensemble de mots et de concepts tels que : côtés, sommets, parallélisme, angles ou coins droits, éventuellement, diagonales.
Mais les élèves du groupe B doivent organiser leurs questions et tirer des informations des réponses. Les élèves du groupe A n'ont pas de tâche analogue. Leur tâche est donc plus simple.

Question 3) :
Une première variable consiste à faire poser les questions oralement ou par écrit. La séquence ne précise pas quelle décision a été prise à ce sujet : en fait, le maître les écrit : (voir phase 4). Or selon que les questions sont posées oralement ou par écrit, on peut penser que l'élaboration de la question ainsi que le traitement des réponses ne se feront pas de la même façon
Une deuxième variable consiste à demander que les enfants posent un minimum de questions. Cette contrainte, appliquée ou non constitue une variable. C'est une variable didactique car on peut faire l'hypothèse que son changement de valeur va influer significativement sur les stratégies des enfants. Cette variable change de valeur en 5° phase.

Question 4) :
La phase 3 est une phase (qui vise la validation) au cours de laquelle les enfants vont confronter la figure d'origine à celle qui a été construite. La validation suppose un consensus sur l'allure de la figure. Il n'est pas sûr que cette phase soit très facile à mettre en œuvre.
La phase 4 vise à faire repérer les erreurs, les procédures en jeu ainsi que les savoirs, en vue d'un réinvestissement dans une action semblable.

Question 5) :
La 5° phase au cours de laquelle les enfants sont invités à poser le moins de questions possibles vise la caractérisation des quadrilatères particuliers. Les élèves doivent petit à petit sérier les questions et éliminer les questions redondantes ou inutiles.

Question 6) :

En prolongement de cette séquence, le professeur peut jouer le rôle d'informateur, chaque enfant posant un minimum de questions, en les écrivant, et construisant la figure dès qu'il juge avoir assez de renseignements. Il s'agit d'un travail individuel.

Par ailleurs le professeur pourrait mettre l'accent sur la « *mise au point de techniques de reproduction, construction* » comme le demandent les programmes du cycle 3. Il peut alors demander aux enfants de reproduire une figure en demandant tous les renseignements (cette fois ci, la mesure interviendra) utiles pour fabriquer la même figure.

Commentaires sur le sujet de didactique :
Il est assez difficile de proposer un corrigé pour cette épreuve qui se fonde sur une séquence qui nous paraît très contestable et que le candidat ne pourra, pour des raisons bien évidentes, remettre en cause. En effet, cette séquence appelle un certain nombre de remarques, quelques unes de détail, d'autres plus fondamentales :

Compléments de cours :
Dans une étude de séquence, pour déterminer les compétences des élèves, il est important d'effectuer une analyse de la tâche des élèves et il faut connaître les éléments de la situation qui sont :
- Le but recherché explicitement, pour l'élève.
- Les moyens de contrôle ou de validation
    - pour l'élève, au moment de la recherche, au moment de la correction,
    - pour le professeur vis à vis des réponses fausses.
- Les choix possibles que le dispositif permet.
- Le rapport de ces choix possibles avec les connaissances antérieures ou nouvelles.

Analyse de la tâche :
La consigne est de demander des informations permettant de « dessiner un quadrilatère du même nom que celui de son groupe A correspondant »... « il va poser des questions...mais sans utiliser de noms de figures ».
- Les tâches des groupes A et B ne sont pas identiques.
    - Analyse de la tâche du groupe A : Les élèves du groupe A doivent comprendre les questions du groupe B, étudier leur figure et répondre.
    - Analyse de la tâche du groupe B :
        - si le groupe B connaît les noms des quadrilatères du programme et les propriétés caractéristiques, il posera des questions qui lui permettront de donner un nom à la figure du groupe A : par exemple : « est-ce qu'il y a des angles droits ? », « est-ce que les côtés sont tous égaux ? »,etc. Des réponses reçues, il fera, au fur et à mesure le tri entre les quadrilatères qu'il connaît. A un moment, il estimera avoir « un losange » ou « un carré », etc.
        - si le groupe B ne connaît pas les noms des quadrilatères du programme, ou imparfaitement, il posera des questions, guidé par une recherche du ou des quadrilatères qu'il connaît. A un moment, il estimera pouvoir dessiner une figure.

Dans les deux cas, les élèves doivent connaître un ensemble de mots et de concepts tels que : côtés, sommets, parallélisme, angles ou coins droits, éventuellement, diagonales.

Mais les élèves du groupe B doivent organiser leurs questions et tirer des informations des réponses. Les élèves du groupe A n'ont pas de tâche analogue. Leur tâche est donc plus simple.

- **Eléments de la situation** : dans la phase 3 , les groupes comparent la figure du groupe A et celle du groupe B. **Comment va s'effectuer la validation ? Sur quels critères** ? Au moment de la correction, que peut-on attendre du dispositif pour qu'un groupe ayant échoué s'en rende compte lui-même. Le contrat n'est pas clair. Ce ne pourra être qu'un consensus « culturel », sans validation pragmatique. La phase 4 risque de tourner en affirmations péremptoires de part et d'autre.
La question 6 demande un exercice dans le prolongement de la séquence. On peut se poser la question : A quel moment les enfants vont savoir ce qu'est un rectangle, un carré, un losange. A quel moment y aura-t-il institutionnalisation par le professeur ? Quelle(s) définition(s) le professeur a-t-il décidé de maintenir ?

Comparaison avec un dispositif approchant :
Des séquences de communication en géométrie se pratiquent couramment. Par exemple, un groupe « écrivains » dispose d'une figure (plutôt découpée dans un carton afin d'éviter l'écueil de la première remarque). Les figures choisies sont celles du programme. Ce groupe doit écrire des renseignements qu'il juge nécessaires afin qu'un groupe « lecteur » reproduise la figure. La validation se fait par superposition entre figure d'origine et figure construite.
La différence avec la séquence proposée réside déjà dans la simplicité de la consigne : « il faut faire une figure superposable ». La validation est elle aussi sans ambiguïté. Au besoin, le professeur montre en début de séquence ce que signifie « deux figures superposables ». Les compétences mises en jeu sont celles du programme. Un travail sur les messages permet, à moyenne échéance de mettre en évidence les propriétés caractéristiques des figures.

Autres remarques :

- dans la phase 2 : il est dit que les groupes B se consacrent à la réalisation de la figure. Il ne s'agit pas d'une figure précise, mais d'une figure représentative d'une famille (les rectangles, les carrés, les losanges). Comment les groupes B pourront-ils choisir LA figure qu'ils traceront ?

- Les noms des quadrilatères n'impliquent pas une classification disjointe de ceux-ci. Par exemple, les carrés sont aussi des rectangles, les losanges sont aussi des parallélogrammes, etc.
Comment les élèves feront-ils le tri entre les carrés (qui sont des rectangles), les rectangles non carrés, etc. ? Un groupe B qui pense avoir terminé et dessine un rectangle alors qu'il s'agit d'un carré se verra contesté par le groupe A, alors que sa démarche est correcte. On imagine bien sûr un discours du professeur qui mettra tout le monde d'accord, mais n'aurait-t-on pas pu y penser avant ?...

Lille

Corrigé rédigé par l'équipe de Bordeaux avec l'aide des éléments communiqués par notre correspondant de l'académie de Lille

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES

1ère PARTIE

1. Les points r, p, s et les points t, q, s :

Traitons les égalités suivantes sur les angles :

$$\widehat{rps} = \widehat{rpw} + \widehat{wpq} + \widehat{qps}$$

$$\text{or : } \widehat{rpw} = \widehat{aed} \,;\, \widehat{wpq} = \widehat{bef} \,;\, \widehat{qps} = \widehat{fed}$$

$$\text{donc : } \widehat{rps} = \widehat{aed} + \widehat{bef} + \widehat{fed} = 180° \text{ (sur la figure 1)}$$

$\widehat{rps}$ est un angle plat, ce qui prouve que les points r, p, s sont alignés.
On démontrerait de la même façon que les points t, q, s sont alignés.

2. Les segments [pq] et [rt]

Il est immédiat d'affirmer que p et q sont les milieux respectifs de [rs] et [ts].
[pq] est donc le segment joignant les milieux de deux côtés du triangle rst. il est donc parallèle au troisième [rt] et égal à sa moitié :
[pq] // [rt] et $pq = \frac{rt}{2}$

3. Le point w

(tp) et (rq) sont deux médianes du triangle rst, leur intersection w est donc le centre de gravité du triangle rst.

4. Aire du triangle rst

aire (rst) = aire (T1) + aire (T2) + aire (T3) + aire (T4) + aire (twr).
twr est un triangle rectangle isocèle d'aire $\frac{4x4}{2}$.
aire (rst) $= 4 \,.\, 4 + \frac{4x4}{2} = 24$ (en cm^2)

Remarque : il est possible de trouver cette aire en calculant la hauteur du triangle rst issue de s. Cette hauteur est : $sw \,.\, \frac{3}{2} = 4\sqrt{2} \times \frac{3}{2} = 6\sqrt{2}$.

D'où aire (rst) $= \frac{1}{2} \,.\, 4\sqrt{2} \,.\, 6\sqrt{2} = 24$ (en cm^2)

5. Hauteur th du triangle rst

$(1/2) \,.\, sr \,.\, th = 24$ d'où $sp \,.\, th = 24$ or sp est l'hypoténuse du triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour mesure 2 et 4.

$sp^2 = 4^2 + 2^2 = 20$ $\quad sp = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Donc $th \,.\, 2\sqrt{5} = 24$ $\quad th = \frac{24}{2\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5} \approx 5{,}37$ (en cm)

2ème PARTIE

1. Nature du polygone ABCD

ABCD est un parallélogramme car il a ses côtés opposés de même longueur.
En effet : AD = BC = 4 (en cm) et AB = DC (longueur du segment [de] fig. 1).

Remarque : il est possible aussi de montrer que le quadrilatère ABCD a deux côtés opposés parallèles et de même longueur. (AD) // (BC) car perpendiculaires à une même droite ou encore comme correspondantes aux droites (be) et (cd) du carré initial.

2. Nature du polygone MNPQ

Remarquons que MNPQ s'obtient à partir de ABCD en déplaçant uniquement le triangle T_1 (par une symétrie orthogonale).

MNPQ est un trapèze isocèle.
En effet : (MN) // (PQ) et QM = PN (voir question précédente).

3ème PARTIE

1. Les angles opposés du quadrilatère WXYZ

En X, on retrouve d du carré (figure 1) d'où un angle droit (90°).
En Z, on retrouve b du carré (figure 1) d'où un angle droit (90°).
Le quadrilatère WXYZ possède donc deux angles droits opposés en X et en Z. Les deux autres angles en Y et en Z sont donc aussi supplémentaires car la somme des angles d'un quadrilatère est égale à 360°.

Remarque : il est possible aussi de montrer directement que les angles en Y et en Z sont supplémentaires.

2. Le quadrilatère WXYZ

Le quadrilatère WXYZ est inscriptible dans le cercle de diamètre WY.
En effet : tout triangle rectangle est inscrit dans un demi-cercle de diamètre égal à l'hypoténuse.
- Le centre est le milieu de [WY].
- Le rayon est la moitié de l'hypoténuse, soit :

$WY^2 = 6^2 + 2^2 = 40 \qquad WY = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

d'où le rayon : $\sqrt{10} \approx 3{,}16$ (en cm)

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

1. Lien entre les différents exercices

Les trois exercices relèvent d'une même notion : la proportionnalité.
Ex 1 : La distance parcourue est proportionnelle à la durée (mouvement uniforme).
Ex 2 : Les réductions sont proportionnelles aux prix (notion de pourcentage).
Ex 2 : Les distances sur la figure agrandie sont proportionnelles aux distances sur le modèle initial (notion d'échelle).

2. Analyse des réponses de l'élève

Exercice 1

L'élève détermine le coefficient de proportionnalité (ici 3) et utilise ce coefficient pour déterminer la distance parcourue.
La réponse est correcte.

Exercice 2

a) L'élève remplit le tableau en s'aidant des résultats donnés.
Il a sans doute complété d'abord la première ligne (sans erreur) puis a ensuite complété la première colonne (10 %) en étant influencé par les mêmes nombres 5 et 15 déjà en place (utilisation implicite "d'une symétrie" qui n'est pas correcte) d'où les deux erreurs (10 et 20).
Il a sans doute poursuivi son travail en complétant les autres cases colonne par colonne (ou ligne par ligne) en doublant, triplant, quadruplant chaque colonne par rapport à la première colonne (procédure correcte) ou par rapport à la première ligne (procédure incorrecte).
Finalement, la deuxième et la quatrième ligne du tableau sont inexactes.

b) - Pour la réduction de 20 %, il utilise l'une des deux propriétés de la linéarité : l'additivité $[f(x + y) = f(x) + f(y)]$. La procédure est correcte (225 = 150 + 75) mais la réponse est inexacte car il s'est trompé en complétant le tableau.

- Pour la réduction de 30 %, il utilise l'autre propriété de la linéarité : la multi-plication par un scalaire $[f(kx) = kf(x)]$. La procédure est correcte (300 = 2 x 150) et la réponse est exacte.

Exercice 3

L'élève n'a pas utilisé de procédure liée à la proportionnalité. Il a utilisé le "modèle" faux suivant : "pour agrandir il faut ajouter". Il a donc utilisé ici le fait que 3 = 2 + 1 au lieu de la procédure correcte 3 = 1,5 x 2.

Remarquons que l'élève n'a peut-être pas l'habitude de reconnaître une situation de proportionnalité dans le cadre géométrique (agrandissement) !

3. Pour la validité de l'exercice 3

La construction de chacune des pièces du puzzle agrandi a l'avantage de fournir à l'élève une validation de son travail (rétroaction) :

- si les mesures sont correctes, les pièces doivent s'emboîter exactement.
- si les mesures sont incorrectes (addition de 1) :
  soit certains angles ne seront pas conservés ;
  soit les alignements ne seront pas respectés.

Remarquons cependant que certains élèves risquent de ne pas mettre en cause leur procédure fausse (addition de 1) en pensant que les erreurs viennent des imprécisions du découpage...

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

1. ***À propos des cinq problèmes***

a) Catégorisation des cinq problèmes

	collection d'objets partagée en deux ou plusieurs parties disjointes	transformations où intervient le temps	comparaison entre collections
problème S1	✖	✖	✖
problème n°1	✖		
problème n°2		✖	
problème n°3	✖		
problème n°4	✖	✖	

Remarques

Problème S1 : on peut ranger ce problème dans les trois catégories !

- réunion de quatre "collections" disjointes (35, 37, 25 et 3) ;
- succession de transformations (dépenses) permettant de passer de l'état initial (100 F dans l'enveloppe) à l'état final (inconnu) ;
- comparaison du contenu initial (100 F) avec le total des dépenses (97 F).

Problème n°4 : on peut ranger ce problème dans les deux premières catégories !

- réunion de deux collections disjointes (24 boules achetées et 17 boules déjà accrochées) ;
- transformation (ajout de 24 boules) permettant de passer de l'état initial (inconnu) à l'état final (41 boules).

b) Problèmes adaptés à l'addition à trous.

Le problème n°3 (35 + ... = 57) et le problème n°4 (24 + ... = 41) sont adaptés à l'addition à trous.

c) Autres sources de difficultés

- Nombre de données numériques à prendre en compte ;
  (4 pour S1, 3 pour n°2 et 2 seulement pour n°1, n°3 et n°4)
- Le choix des nombres ;
  (calculs "faciles" pour n°2 et n°3, plus "difficiles" pour n°4)
- Nécessité d'un calcul intermédiaire pour S1.
- Difficultés liées à la "lecture" des énoncés
  (syntaxe, sémantique, le temps des verbes, le repérage dans le temps...)

Remarque

Dans chaque cas, le contexte est familier et ne pose pas vraiment de difficulté.

2. *Objectif principal*

Reconnaître des problèmes soustractifs dans des situations différentes de la situation introductive (distinction avec des problèmes additifs).

3. *À propos de la situation S1*

a) Hypothèse sur la première réaction des élèves

L'hypothèse la plus vraisemblable est que les élèves traitent depuis le début de l'année des problèmes additifs ! C'est par "habitude, par facilité" qu'ils proposent cette première solution. Il s'agit donc d'un phénomène de contrat didactique.

b) Pertinence du problème

La situation S1 semble trop complexe ; il faut calculer un résultat intermédiaire (somme des dépenses) avant de mettre en œuvre une addition à trou ou une soustraction pour répondre à la question.

Il aurait été, sans doute, plus judicieux de proposer une série de problèmes additifs ou soustractifs sans calculs intermédiaires.

Exemples [Biblio : Apprentissages numériques CE1 - ERMEL (Hatier) p.132]

1. Il y a des cubes dans la boîte. J'en enlève 15. Maintenant il y en a 22, Combien y avait-il de cubes dans la boîte au début ?
2. Il y a 47 cubes dans la boîte. J'en enlève 14. Combien reste-t-il de cubes dans la boîte ?
3. Il y a 15 cubes dans la boîte. J'en ajoute. Je ne vous dis pas combien. Maintenant il y a 37 cubes dans la boîte. Combien en ai-je ajouté ?
4. Il y a des cubes dans la boîte. Je ne vous dis pas combien. J'en ajoute 18. Maintenant il y a 42 cubes dans la boîte. Combien y avait-il de cubes au début ?

4. *À propos du problème n° 2*

Au niveau de la démarche, on peut penser que ces élèves ont bien traduit la situation par la composée de deux transformations (un retrait suivi d'un ajout).
Cependant la pose des opérations, comme les élèves ont l'habitude de la faire pour l'addition de plusieurs nombres, peut engendrer par la suite de nombreuses erreurs "techniques". Ici la réponse 112 est correcte sans doute par le fait qu'il n'y a pas de retenue !

5. *À propos des problèmes soustractifs*

a) Procédures de Nathalie et Pierre

	problème n°2	*problème n°3*	*problème n°4*
Nathalie	Gère mentalement le retrait de 35 à 135 pour obtenir 100. Pose l'addition pour l'ajout de 12 ! Bonne démarche, résultat correct et explicite.	Enlève à 57 les 35 voitures rouges en posant directement la soustraction. Bonne démarche, résultat correct et explicite. (noirs sans "e")	Enlève à 41 les 24 boules d'Alain en posant directement la soustraction. Bonne démarche mais erreur de calcul due à l'existence de la retenue.

	problème n°3	*problème n°4*
Pierre	Traite le problème sous forme d'addition à trous. Bonne démarche, résultat correct et explicite.	Traite le problème sous forme de soustraction à trous. Bonne démarche, résultat correct (malgré la retenue) et explicite.

b) Accord avec les attentes du maître

- La production de Nathalie n'est pas conforme aux attentes ; au problème n°2, elle gère mentalement le résultat et se croit obligée de fournir une technique écrite (effet de contrat implicite mais qui ne s'imposait pas du tout ici) ; aux problèmes n°3 et n°4, elle fournit la technique culturelle qui n'a pas encore été enseignée.

- La production de Pierre n'est pas non plus totalement conforme aux attentes : il produit une addition à trous bien adaptée au problème n°3. Il ne le reconduit pas au problème n°4 car il semble reconnaître une situation soustractive et sait apparemment traiter la technique usuelle de la soustraction Par effet de contrat, il produit une soustraction à trous qui ne s'impose pas et dont la maîtrise va bien au delà des compétences visées.

c) L'erreur de calcul de Nathalie

Nathalie se trompe dans sa dernière soustraction où il y a une retenue à gérer au niveau des unités. Elle ne parvient pas a calculer 1 - 4 ; elle détourne la difficulté en faisant donc 1 + 4 = 5 (comme pour une addition). Elle calcule correctement les dizaines (4 - 2 = 2).

Limoges

(Corrigé effectué par l'équipe de Bordeaux)

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES

Exercice 1.

Question 1.

a) Par commodité nous nommerons A,B,C,D les sommets du carré à construire.

Tracer un segment [AB]. Construire la droite perpendiculaire en B à [AB] . Sur cette droite placer (au compas) un point C tel que BC = BA . Tracer les cercles de centres respectifs A et C et ayant un même rayon de mesure égale à AB. Ces deux cercles se coupent en deux points A (bien sûr) et D. Les points A,B,C et D sont les sommets d'un carré. Joindre C et D, A et D.

b) Tracer un segment [MN]. Les deux cercles de centres respectifs M et N et de même rayon MN se coupent en deux points P et Q, symétriques par rapport à [MN]. Le triangle MNP est un triangle équilatéral (de même que le triangle MNQ d'ailleurs), en effet MNP a ses trois côtés isométriques par construction (ils sont égaux à un même rayon).

Question 2.

Par construction, le quadrilatère ABCD est un losange (il a ses quatre côtés isométriques). C'est donc a fortiori un parallélogramme. De plus il a un angle droit (l'angle B) C'est donc un rectangle. Etant à la fois losange et rectangle, ABCD est un carré.

Question 3.

Tracer un carré ABCM dont la mesure commune des côtés est égale à 3 cm. (A, B, C et M étant rangés dans le sens direct, sens inverse de la rotation des aiguilles d'une montre).

Tracer un triangle équilatéral ABN, le point N étant situé à l'intérieur du carré ABCM (autrement dit le point N est dans le demi-plan de frontière (AB) contenant C et M).

Tracer un triangle équilatéral BCP, le point P étant situé à l'extérieur du carré ABCM (autrement dit le point P est dans le demi-plan de frontière (BC) ne contenant pas A et M).

En conservant le même écartement du compas (3 cm), tous les segments tracés ont la même mesure.

Question 4.

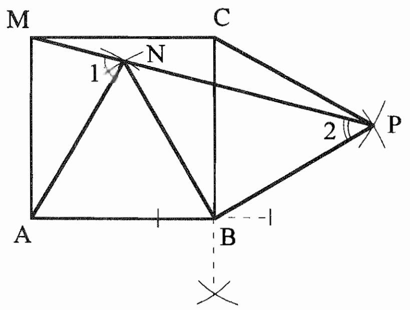
angle	A	B	C	D	E
nombre de fois pour faire un tour	12	8	6	4	3
fraction de tour	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

Note : Sur les figures I et III de l'annexe P1 on remarque que A est la moitié de C et que B est la moitié de D

Question 5.

a)

figure1 :



Considérons la figure ci-dessus : Le triangle MAN est isocèle, car AM = AN. L'angle MAN a pour mesure 90° - 60°, donc 30°.

Si l'on utilise les "fractions de tour" de la question 4. MAN a pour mesure $\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

La somme des angles d'un triangle ayant pour mesure 1/2 tour (ou encore 180°) , l'angle N_1 aura donc pour mesure $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12}\right) = \frac{5}{24}$ en fraction de tour.

(Note : en fait la moitié de 180° - 30° , c'est à dire 75°)

Le triangle BNP est un triangle isocèle puisque BN = BP . De plus NBC a pour mesure $\frac{1}{12}$ de tour et CBP a pour mesure 1/6 de tour : L'angle NBP a donc pour mesure la somme des mesures de ces angles : $\frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$. NBP est un angle droit ! Le triangle NBP est un triangle rectangle isocèle, et l'angle P_2 a donc pour mesure 1/8 de tour.

b) D'après ce qui précède, l'angle PNB a lui aussi pour mesure 1/8 de tour.
Il suffit donc de calculer la somme des mesures des angles MNA, ANB et BNP :
$\frac{5}{24} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{5+4+3}{24} = \frac{1}{2}$ (tour). L'angle MNP est donc un angle plat :

Les points M, N et P sont alignés.

Note : Au cas où le candidat ne se serait pas senti très rassuré en manipulant des mesures exprimées en "fraction de tour", il pouvait revenir à des mesures d'un usage plus conventionnel et constater que les mesures des trois angles considérés donnent, en degrés, une somme égale à 75° + 60° + 45°, ce qui fait bien 180° !

Exercice 2. "partages inégaux"

Question 1 : En utilisant la méthode proposée en exemple, on calcule la mesure de "trois fois la longueur du petit ruban" : 4,75 - 0,40 - 0,90 = 3,45 m.
La mesure du petit ruban est donc égale à 3,45 / 3 = **1,15 m.**
Le second ruban mesure 0,40 m de plus : il mesure **1,55 m.**
Le troisième et plus grand ruban mesure 0,90 m de plus : il mesure 1,15 + 0,90 = **2,05 m.**
Vérification : la somme totale 1,15 + 1,55 + 2,05 donne bien 4,75 m.

Question 2.
a) Soient a et b les deux nombres cherchés, a étant le plus grand des deux.
(On suppose implicitement qu'il s'agit d'entiers naturels !)

Le problème se traduit par les deux équations suivantes :
$a + b = 149$
$a = 11b + 5$ et $b > 5$
Remplaçons a par son expression en fonction de b dans la première égalité, il vient :
$11b + 5 + b = 149$ ce qui donne $12b = 144$ et, finalement, $\mathbf{b = 12}$
On en déduit la valeur de a : $\mathbf{a = 137}$
Réponse : **Les nombres cherchés sont 137 et 12**

b) Désignons par k le coefficient de proportionnalité liant les deux suites : La suite inconnue est de la forme (3k ; 4k ; 5k)
Ses termes sont liés par la relation 3k + 4k + 5k = 238.
On en tire la valeur du nombre k : k = 238/12 soit **k = 17**
La suite demandée est donc (51 ; 68 ; 119).

c) Soit abc ce nombre, a étant le chiffre des centaines, b le chiffre des dizaines et c le chiffre des unités :

$$abc = 100a + 10b + c$$

La première transformation se traduit par la relation : $cba = abc - 198$

Ce qui donne : $100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 198$

$99a - 99c = 198$

$99(a - c) = 198$

$\mathbf{a - c = 2}$

La seconde transformation se traduit par la relation : $acb = abc + 63$

Ce qui donne : $100a + 10c + b = 100a + 10b + c + 63$

$9c - 9b = 63$

$9(c - b) = 63$

$\mathbf{c - b = 7}$

De la première relation obtenue on peut conclure que c est inférieur ou égal à 7 (car a est au plus égal à 9). De la seconde on déduit que c est au moins égal à 7 (car b est positif ou nul). En conclusion, c ne peut prendre qu'une seule valeur : $\mathbf{c = 7}$.
On en déduit les autres valeurs de a et b : $\mathbf{a = 9}$ et $\mathbf{b = 0}$.
Le nombre cherché est 907. Cette solution est unique
Vérification : $907 - 709 = 198$ et $907 + 63 = 970$.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1. Il s'agit de résoudre un problème présenté sous la forme classique d'un énoncé écrit. Les compétences en jeu sont les suivantes, que nous nommerons C_1, C_2, C_3 et C_4 comme suit :

C_1 : donner du sens aux situations évoquées, reconnaître une situation additive pour la première partie de l'énoncé, puis reconnaître une situation multiplicative dans la seconde partie ;

C_2 : associer l'opération qui convient à chaque situation, utiliser à bon escient les données numériques de l'énoncé (il n'y a pas de données parasites);

C_3 : effectuer le calcul correctement, sans erreur (chaque partie du problème ne requiert qu'une seule opération). Il faut d'abord effectuer une addition (avec une retenue, la somme dépassant 100), puis, pour la seconde partie, soit calculer un produit simple (il s'agit de multiplier 12 par 5) soit additionner 5 fois 12 ;
Note : Au terme du cycle 2, seule la technique de l'addition est absolument requise, mais le nombre 12 x 5 peut bien sûr également être calculé correctement par une addition réitérée : le nombre de timbres est 12 + 12 + 12 + 12 + 12 .

C_4 : Ecrire la réponse correspondant à la question posée.

Ces compétences sont conformes aux programmes et instructions : les élèves du cycle 2 ont été familiarisés avec des activités de résolution de problèmes, doivent maîtriser la technique de l'addition et ont approché celle de la multiplication.
Note : cf. compétences attendues en fin de cycle 2 : l'élève doit pouvoir :
- analyser des problèmes de recherche simples ;
- choisir les données nécessaires à leur résolution ;
- mobiliser les connaissances déjà acquises ;
- exposer clairement les résultats.

Question 2. L'élève A a produit les réponses correctes souhaitées, analysons les réponses des élèves B, C, D et H en indiquant si les compétences visées sont manifestées ou non :

	C_1	C_2	C_3	C_4
Elève B exercice a	?	?	?	La réponse numérique proposée est correcte, mais non justifiée.
Elève B exercice b	Oui, mais le dessin des pages et des timbres est inachevé et ne lui permet pas de conclure par comptage	Probablement pas	Non	Non
Elève C exercice a	Il commet une erreur de compréhension : confusion entre "elle paie" et "elle a" ?	Non, l'élève fait une soustraction, et de plus, avec une erreur de calcul.		Non. La réponse ne répond pas à la question posée.
Elève C exercice b	Non	Non, il additionne les données de l'énoncé.	L'addition est juste !	Oui, mais la réponse est fausse
Elève D exercice a	Il commet une erreur de compréhension : confusion entre "elle paie" et "elle a" ?	Non, l'élève fait une soustraction, et de plus, avec une erreur de calcul.		Oui, mais la réponse est fausse
Elève D exercice b	Non	Non, l'élève soustrait le nombre de pages au nombre de timbres !	Soustraction fausse !	Oui, certes, mais la réponse est fausse.
Elève H exercice a	Oui	L'opération est bien une addition mais il compte 3 fois la même donnée, 180. (Il doit avoir deux frères ou soeurs)	Pas d'erreur de calcul	Oui, mais la réponse est fausse
Elève H exercice b	Non	Non	Non	La réponse montre la non prise en compte de la seconde ligne de l'énoncé.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

Question 1. La **première phase** (dite de dévolution du problème aux élèves), est consacrée à la lecture de l'énoncé, à l'explication et à la reformulation de certains termes, et elle a pour but de s'assurer que les élèves ont compris l'énoncé, c'est à dire qu'ils ont donné du sens au scénario évoqué, qu'ils ont les moyens de dégager les données numériques pertinentes du problème, les questions posées (il s'agit d'une situation de partage équitable où l'on doit déterminer le nombre de parts, ainsi que le reste qui en résulte). Le rôle du maître consiste à s'assurer que les élèves seront capables d'imaginer personnellement et de mettre en oeuvre une procédure de résolution.

La **deuxième phase** est une phase d'action : les élèves ont à rédiger leurs procédures de résolution. Notons qu'avant de travailler en groupes, les élèves ont eu l'occasion et le temps de se forger une opinion personnelle sur le problème. Le rôle du maître peut être alors de s'assurer que tous les groupes "travaillent" normalement et de repérer les diverses procédures produites.

La **troisième phase** consiste à comparer les diverses procédures et les résultats auxquels elles aboutissent. Les diverses stratégies sont soumises au contrôle de la classe entière, et aussi au regard du maître. L'attitude du maître doit être assez neutre afin de permettre à toutes les procédures d'être considérées le plus objectivement possible. Son rôle pourrait être d'apporter, dans certains cas, une aide à la formulation de certaines étapes par trop implicites.

Quatrième phase : La solution du problème ayant été clairement reconnue, le maître, en donnant explicitement quelques définitions ("division", "quotient" et "reste"), situe cette séance de recherche dans le cadre d'un apprentissage.

Note : Si le terme "reste" trouve naturellement son sens dans une telle situation, il n'en est pas de même pour le terme "quotient" que le maître peut seul introduire et, bien sûr, définir.

Question 2.

Groupe A	Procédure additive : addition réitérée du nombre 12 jusqu'à dépasser le dividende 105, puis retour au terme précédent. Le calcul du reste n'est pas explicité, mais la réponse est correcte.
Groupe B	Soustractions réitérées du nombre 12. Le nombre de soustractions correspond au nombre de boîtes et constitue le quotient cherché.
Groupe C	Procédure additive : addition réitérée du nombre 12 jusqu'à dépasser le dividende 105. Le calcul du reste se fait par addition (à trous).
Groupe D	Procédure multiplicative : essais successifs de calcul de multiples de 12 visant à encadrer 105. Le calcul du reste est présenté par une soustraction en ligne.
Groupe E	Soustractions réitérées du nombre 12, ou de son double, 24. Le choix de 24, au lieu de 12, a pour but de diminuer le nombre de calculs à effectuer. Le reste apparaît dans sa signification correcte et future.
Groupe F	Soustractions de multiples de 12 : 36 correspond à 3 boîtes et 24 à 2 boîtes. Le nombre de boîtes total est identifié, ainsi que le reste, correctement.

Question3.

a) En fait, "en mettant de côté" les stratégies additives des groupes A et C, seules restent les procédures de soustractions du diviseur ou de multiples de celui-ci. "Améliorer" la procédure du groupe F, c'est amener les élèves à diminuer le nombre de soustractions en retranchant un multiple du diviseur mieux adapté. On demande de modifier le problème de l'aviculteur, donc de garder la situation de base en l'adaptant en fonction du nouvel objectif.

Pour l'obtenir, deux moyens nous paraissent possibles :

- modifier les variables numériques, et principalement le quotient à déterminer ;
- donner aux élèves un répertoire des multiples du diviseur qui leur facilite la recherche des multiples successifs à retrancher.

La situation : " L'aviculteur a ramassé 2475 oeufs. Combien de boîtes de 12 oeufs peut-il remplir ? Combien d'oeufs reste-t-il ? "

Justification : En choisissant un quotient assez grand (il est égal à 206 !) les additions réitérées ou les soustractions réitérées du diviseur lui-même n'ont plus de chance de vivre. De plus les deux premiers chiffres du dividende laissent nettement apparaître un multiple simple et commode du diviseur : 2400 c'est 24 x 100 ou 12 x 200, ou encore 2 fois 12 x 100. Cela devrait inciter les élèves à retrancher 2400 au dividende. Du reste partiel 75 il reste à retrancher 72, c'est à dire 6 fois 12 (là encore les premiers chiffres sont identiques...)

b) Sur quelles autres variables agir ? Sur le nombre maximal de soustractions qu'il est autorisé d'effectuer. Dans la situation proposée ci-dessus deux soustractions bien choisies (et non trois !) permettent d'obtenir le quotient car le second chiffre du quotient est égal à 0. La présence de ce chiffre particulier parmi ceux qui permettent d'écrire le quotient favorise le rapprochement "visuel" entre le dividende ou les restes partiels avec des multiples "simples" du diviseur.

Question 4. Regardons ces trois exercices en détail :

Exercice (ou problème) 5 : S'il s'agit finalement de diviser 690 par 25, ce dividende n'est cependant pas écrit dans l'énoncé. Il est le résultat d'un calcul préliminaire, lui-même sous-tendu par un raisonnement non banal et des connaissances sur la proportionnalité et de conversions d'unités de mesure. Ces données méritent une lecture et un traitement assez soigneux (l'énoncé est un peu alambiqué...) avant d'en arriver au calcul du quotient lui-même.

Notons que le choix très particulier du diviseur, égal à 25, laisse penser que l'on veuille exploiter leurs connaissances en numération puisque 100 c'est 4 fois 25 ... et que les élèves auront ainsi peu de peine à en trouver des multiples.

Exercice (ou problème) 7 : Cet énoncé est assez proche du précédent, quoique le calcul préalable du dividende paraisse plus simple. Une fois encore, les élèves doivent analyser les données avant d'identifier et de calculer le dividende. De plus le diviseur est encore égal à 25. Notons que l'énoncé 7 fait rechercher un quotient entier approché par excès : il faut 14 cartons, soit un de plus que la valeur du quotient euclidien !

Exercice (ou problème) 8 : Cet énoncé, comme les précédents, demande de déterminer d'abord le dividende (le nombre de places occupées), avant de faire chercher combien de rangs de 13 fauteuils seront occupés. Ici également le quotient attendu est un quotient entier approché par excès.

Ces trois problèmes demandent donc tous des compétences générales liées à la résolution de problèmes : savoir identifier, organiser et traiter les données utiles à la résolution du problème, savoir élaborer une procédure de résolution, et cela avant d'aborder le calcul d'un quotient entier (dans ces trois situations de partage, on cherche à déterminer le nombre de parts).

Lyon

(Le corrigé s'appuie sur des éléments de correction fournis par notre correspondant)

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

Exercice 1

1) Construction : Tracer [BC], le milieu O de ce segment, puis les cercles de centre B et O, de rayon égal à 3 cm. L'un de points d'intersection de ces cercles sera le point A.
Justification : Le triangle ABC est rectangle en A (la somme des angles d'un triangle mesurant 180° et les mesures respectives des angles B et C étant de 60° et 30°, l'angle A mesure 90°). Le triangle ABC rectangle en A est donc inscrit dans un cercle de diamètre [BC]. Soit O le milieu de [BC]. Le triangle OBA est isocèle puisque OB = OA , ce qui entraîne que l'angle BAO soit égal à l'angle ABO et mesure également 60°, et, par conséquent, que l'angle BOA mesure aussi 60° (Le triangle OAB est donc un triangle équilatéral). Ses côtés sont des rayons de deux cercles, l'un de centre O, l'autre de centre B, et de rayon de même mesure, égale à $\frac{BC}{2}$, soit 3 cm.

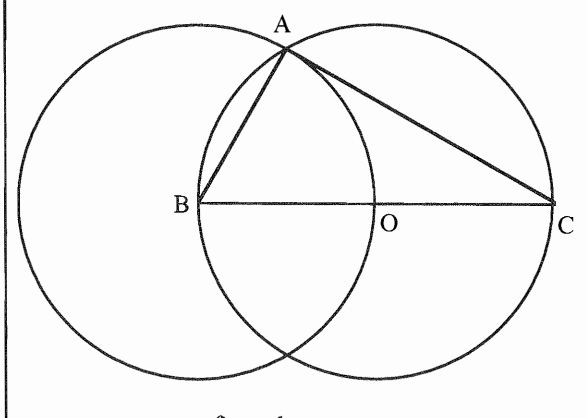


figure1

2) A est le milieu de [BD] et (CA) est perpendiculaire à [BD] .

(CA) est donc la médiatrice de [BD].

3) Comparons les mesures des côtés du triangle BCD :
BD = 2 BA puisque A est le milieu de [BD] , donc BD = BC ;
CB = CD puisque C appartient à la médiatrice de [BD].

Le triangle BCD est un triangle équilatéral.

4) Comme C est le milieu de [DE] , CE = CD et, comme CB = CD, par suite, CE = CB.
Le triangle BCE est donc isocèle.
Puisque CD = CB et CB = CE, C étant le milieu de [DE] , le triangle BDE est inscrit dans un demi-cercle, de centre C, de diamètre [DE] :

Ce triangle est donc un triangle rectangle en B.

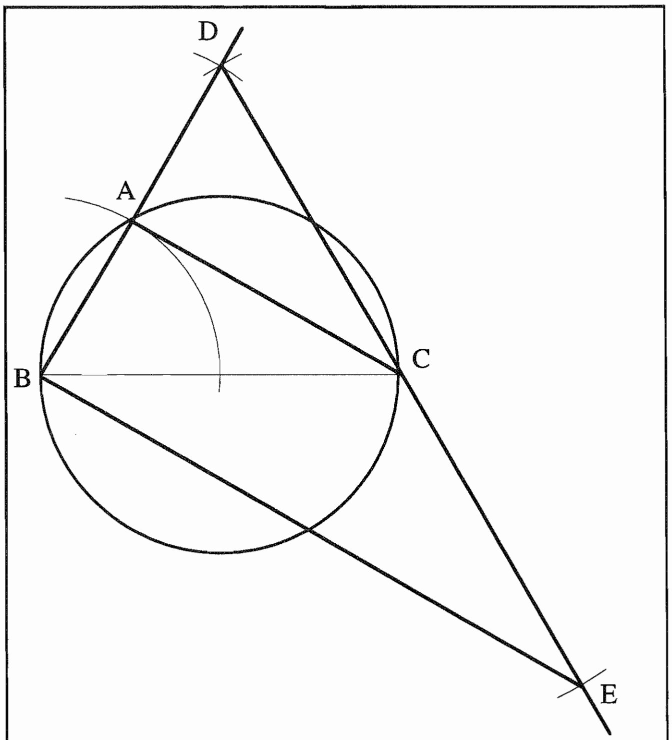


figure 2 :

Note : Nous suggérons succinctement une autre démonstration reposant sur l'application du théorème des milieux dans le triangle BDE, qui permet de montrer que les droites (AC) et (BE) sont parallèles et ont, par conséquent, une perpendiculaire commune, la droite (BD).

Exercice 2

1) Pour tout nombre entier n (n supérieur ou égal à 1), n - 1 , n , et n + 1 sont trois entiers consécutifs et leur somme s'écrit S = n - 1 + n + n + 1 . Soit S = 3n.
Cette écriture montre que S **est un multiple de 3**.

2) En gardant notre condition "n supérieur ou égal à 1" , n - 1, n , n + 1 et n + 2 sont quatre entiers consécutifs et leur somme s'écrit : n - 1 + n + n + 1 + n + 2 = 4n + 2.
Le nombre N étant égal à 4n + 2 , N - 2 = 4n
Cette écriture traduit le fait que **N - 2 est un multiple de 4**.

Réciproquement, soit N un nombre entier naturel tel que N - 2 soit multiple de 4. Il existe alors un nombre entier naturel k tel que N - 2 = 4k
N = 4k + 2 = (k - 1) + k + (k + 1) + (k + 2). N sera la somme de quatre nombres entiers naturels consécutifs si k - 1 est lui-même un entier naturel, donc si k est au moins égal à 1.

Cela implique par conséquent que **N soit au moins égal à 6**.

3) Soit n le plus petit de ces 51 nombres consécutifs.

$$1785 = n + (n+1) + (n+2) + ... + (n+50)$$
$$1785 = 51n + (1 + 2 + ... + 50)$$
$$1785 = 51n + 50 \text{x} \frac{51}{2}$$
$$510 = 51n$$
$$n = 10$$

Les nombres cherchés sont **les nombres entiers compris entre 10 et 60**, ces bornes étant incluses.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

1) On constate **trois types de procédures** :

- Détermination du terme médian par division par 3 et ajustement pour trouver les deux autres nombres.

L'élève A utilise correctement cette procédure.
L'élève C réalise un ajustement incorrect, de la forme $n - 2, n, n + 2$.

- Essais de calculs de sommes de trois nombres entiers consécutifs.

L'élève B effectue des essais progressivement organisés en tenant compte de l'ordre de grandeur de la somme obtenue : Le résultat est "trop petit" ou "trop grand" par rapport au nombre visé, 42.
L'élève D fait des essais apparemment inorganisés, mais des erreurs de calcul parasitent sans doute sa recherche.

- Recherche d'une décomposition additive de 42.

Toutes les contraintes ne sont plus satisfaites : les nombres ne sont pas consécutifs pour E, et, pour l'élève F, la représentation de 42 objets l'amène à dessiner un partage en deux parties seulement.

Les connaissances et les compétences utilisées varient selon les cas et les procédures données en exemple :

- Dans le domaine numérique : évaluer un ordre de grandeur, calculer soit mentalement, soit en ligne ou en colonne, une somme de trois nombres, celle-ci étant inférieure à 100, comparer deux nombres pour gérer les essais successifs, respecter la condition d'obtenir des entiers consécutifs, effectuer une division par 3, et, pour l'élève F, décomposer 42 en une somme à l'aide d'une représentation.
- Dans le domaine méthodologique, il fallait reconnaître les données du problème, élaborer une démarche originale (en principe non enseignée), gérer simultanément trois contraintes (trois nombres, consécutifs, dont la somme est 42), gérer des essais successifs, et, enfin, contrôler sa réponse.

2)

	difficultés, erreurs	origine probable
Elève A	Difficulté provisoire à gérer la contrainte de nombres consécutifs.	La division produit des "parts" égales.
Elève B	Difficulté provisoire à ajuster et organiser les essais.	La tâche est complexe : essayer, calculer, comparer, afin de prendre une décision et de recommencer...
Elève C	Les nombres obtenus ne sont pas consécutifs, mais vont de 2 en 2.	Confusion avec suite "régulière" ?
Elève D	Ne prend pas en compte la contrainte de trouver des nombres consécutifs dans la réponse finale. Erreurs de calcul (retenues).	Les difficultés de calcul lui ont fait perdre le respect de cette contrainte.
Elève E	N'a pas pris en compte la contrainte de nombres "qui se suivent".	Il a retenu les termes les plus familiers de la consigne et il résout un problème plus simple.
Elève F	Respecte une seule contrainte : la somme doit être égale à 42.	Difficulté à gérer plusieurs contraintes simultanées. Peut-être se borne-t-il à reproduire la solution d'un exercice qu'il a déjà fait et sait faire.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

1) Toutes les situations proposées relèvent de la division euclidienne. Le classement est le suivant :

	D1 recherche de la valeur unitaire (Valeur d'une part)	D2 recherche de la quantité d'unités (Nombre de parts)	D3 produit de mesures (recherche d'une des mesures composantes)
1 Le rectangle		x	x
2 Les oeufs		x	
3 Les pirates	x		
4 Les achats 1		x	
4 Les achats 2	x		

Note : Deux réponses sont possibles pour la première situation (le rectangle).

2) Il s'agit de partager 344 pièces entre 8 pirates, en faisant des parts égales.
344 est un multiple de 8. En effet 344 = 43 x 8. La réponse est 43 pièces.
Exemples de procédures correctes :

Procédures additives :

- Dessin de 8 cassettes, affectation d'un même nombre de pièces pour chaque cassette, puis addition et essai d'un autre nombre ou ajustement (si la somme obtenue est assez proche de 344) jusqu'à obtenir le bon total.
- Dessin de 8 cassettes, affectation d'un même premier nombre de pièces pour chaque cassette, puis addition, ajout d'une quantité supplémentaire (sans remise à zéro des cassettes) puis addition jusqu'à obtenir le bon total.
- Additions successives de 8 ou de multiples de 8 sans dépasser 344.

Procédures multiplicatives :

Choix d'un nombre de pièces, multiplication de ce nombre par 8, comparaison du produit avec 344 et choix d'un autre nombre à tester (ou ajustement si le produit obtenu est proche de 344) pour atteindre 344.
L'élève traduit le problème par une multiplication à trou ... x 8 = 344 et cherche par essais successifs le nombre manquant.

Procédures soustractives :

Soustractions successives de 8 ou de multiples de 8 : Si je distribue une pièce à chacun cela en fait 8 de moins, mais je peux en distribuer plusieurs à chacun (le même nombre !) pour aller plus vite : Si j'en distribue 10 à chacun, cela en fait 80 de moins, alors il en reste :
344 - 80 = 264, je peux recommencer ... il en reste 264 - 80 = 184 etc... La part de chacun est la somme des valeurs de toutes les distributions : 10 + 10 + 10 + 10 + 3.

3) Variables didactiques de la situation "des pirates".
Pour ce problème (situation a-didactique), les variables didactiques sont essentiellement :
- La taille des nombres (dividende, diviseur, quotient) et leur nombre de chiffres (notamment du diviseur).
- Les propriétés arithmétiques des nombres jouent un rôle dans la phase de découvertes par les stratégies « opportunistes » qu'elles offrent (et qui ne sont pas généralisables). Exemple : division par 8 ou 16 qui conduit à des suites de divisions par 2. Autre exemple : diviseurs multiples de 10, de 100, etc.

Le fait que le reste soit nul ou non n'influe pas sur les procédures des élèves, mais un reste non nul peut cependant conduire les élèves à remettre en cause leur calcul au moment de la conclusion.
- Les formes conceptuelles évoquées par l'énoncé : D1 recherche de la valeur d'une part, D2 recherche du nombre de parts, D3 recherche d'une composante d'une mesure produit, ou même D4 recherche du terme inconnu d'une composition d'opérateurs multiplicatifs, D5 transformation de transformation, etc.[1]
- Les termes de l'énoncé : partager, répartir, distribuer, etc. qui peuvent induire des solutions différentes.

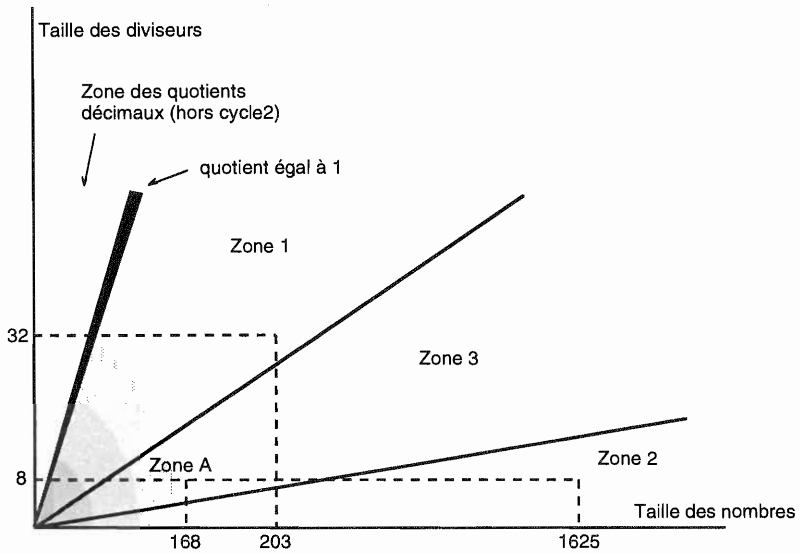
Ces variables « taille des nombres » ne sont pas indépendantes.

Trois situations :

203 pièces pour 32 pirates (quotient = 6) : favorise des stratégies additives ou soustractives.
(Zone 1).
168 pièces pour 8 pirates (quotient = 21) 168 = 160 + 8 favorise une procédure multiplicative de calcul mental.
(Zone 3 près de la zone A)
1625 pièces et 8 pirates (quotient = 203) : favorise la soustraction de multiples de 8, par 100 ou mieux, par 200, puis par 3 .
(Zone 2).

[1] Voir G. Vergnaud « mathématiques et réalité ».

Complément d'analyse (non exigé des candidats) : les possibilités peuvent être représentées sur un graphe. Les régions de ce graphe peuvent indiquer les effets sur les procédures des élèves.



(Soit D le dividende, d le diviseur, q le quotient de la division).
La zone A correspond à D, d, q petits. Les problèmes sont résolus par calcul mental et connaissance des tables.
La zone 1 D et d voisins, correspond à des quotients petits. Les procédures soustractives et additives seront assez efficaces (si la nature des grandeurs le permet).
La zone 2 : le quotient est grand, les procédures soustractives trop longues deviennent inefficaces, les procédures multiplicatives, au contraire, sont favorisées.
La zone 3 : est la zone des calculs standards.

4) La fonction (probablement envisagée par les auteurs de la fiche) de la "feuille de résolution" doit être d'aider à la compréhension de la situation : Il y a 8 cases portant chacune le prénom d'un "pirate". Il convient donc de trouver et d'écrire dans chaque case le nombre constituant la solution. Le nombre de pirates ne devrait pas être l'occasion d'une erreur.
Elle peut favoriser l'adoption d'une procédure additive : on essaie un nombre, on l'écrit dans chaque case, on additionne les 8 nombres : on compare la somme et 344 et on effectue d'autres essais s'il le faut. La seconde fonction serait donc une aide à la résolution, évitant qu'un élève ne sachant pas quoi faire ne fasse rien.

Cette feuille favorise aussi sans doute la formulation de la réponse finale.

Note : Il nous semble que cette feuille, avec la représentation adoptée, pourrait être un obstacle à la production de stratégies de calcul plus évoluées, stratégies soustractives ou multiplicatives visées par l'enseignant pour la construction du sens de la division. Elle pourrait inciter à dessiner les pièces, si sa fonction n'était pas bien précisée par le maître.

5) Les différentes mises en commun pourraient avoir pour but :

Séance 1 :
Après avoir inventorié les diverses procédures et corrigé les erreurs, la « feuille de résolution » permet au professeur de bien préciser le but des opérations : trouver les parts et la condition à satisfaire : parts égales, somme égale au contenu du trésor.
Le nombre de parts, « 8 » est bien adapté (trop de parts ou pas assez auraient contrarié cette fonction).

Séance 2 :
La correction croisée met l'accent sur la vérification introduite la veille. Puisqu'il n'y a plus de feuille de résolution, les élèves devront produire eux-mêmes pour vérifier ou justifier le résultat de leurs calculs lors de la confrontation finale.
On travaille sur des procédures diverses, mais ce qui est mis en évidence, parce que c'est ce qui est correct, c'est que la vérification indique la validité du résultat, quelle que soit la méthode.
Le texte ne permet pas de savoir quelles méthodes sont privilégiées : partager plusieurs fois en 2 ?
1380 : 2 = 690   690 : 2 = 345
1320 : 2 = 660   660 : 2 = 330   330 : 2 = 165

Séance 3 :

Le moyen de vérification (quotient x dividende = diviseur) devient un moyen de calcul. Le professeur insiste pour activer un répertoire de multiplication par 12 avec l'espoir (ou la volonté) que les élèves l'utiliseront pour effectuer 13268 pièces divisé par 12 en utilisant les résultats pour décomposer le dividende.

Exemple : 3268 = (200 x 12) + (70 x 12) + (2 x 12) + 4

ou bien 3268 = (90 x 12) + (100 x 12) + (80 x 12) + (1 x 12) + (1 x 12) + 4,

etc.

	x 12		
200	→	2400	
70	→	840	3268 décomposé en 3264 + 4
2	→	24	

Cette méthode demande l'utilisation mentale d'encadrements successifs du diviseur.

	x 12			
300	→	3600	trop grand	
200	→	2400	trop petit.	Etc.

Le professeur peut alors soit faire procéder au calcul du reste pour continuer à utiliser son répertoire et aboutir à la méthode standard, soit laisser faire des élèves qui risquent alors simplement de raffiner le quotient, ce qui ne conduit pas à la méthode standard et peut même la bloquer.

	x 12
250	→
270	→

à moins que l'utilisation du répertoire ne puisse continuer ainsi :

250 = 200 + 50, et on applique x 12 à 200 et 50 etc.

Montpellier

(Corrigé effectué par l'équipe de Bordeaux.)

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES

Exercice 1

Question 1)

Les nombres s'écrivent en base huit avec les chiffres de 1 à 7; donc le plus grand nombre de deux chiffres en base huit s'écrit (77)en base huit.

Son écriture en base dix est donc: $7 + 7 \times 8 = 63$

Autre solution: Le plus petit nombre de trois chiffres en base huit (comme dans toutes les bases) s'écrit (1OO)

Son écriture en base dix est donc: $0 + 0 \times 8 + 0 \times 8 \times 8 = 64$.

Le plus grand nombre de deux chiffres en base huit est donc le nombre juste avant, soit 63

Question 2)

Pour écrire les nombres en base douze, il faut introduire deux "chiffres" supplémentaires : a=10 et b=11.

Le plus grand nombre qui s'écrit avec deux chiffres en base douze s'écrit donc (bb)

Son écriture en base dix est donc: $b + b \times 12 = 11 + 11 \times 12 = 143$

Autre solution: le plus petit nombre de trois chiffres est (100)= $12 \times 12 = 144$; le plus grand nombre de deux chiffres est le nombre précédent.

Question 3)

a) Le plus grand nombre de deux chiffres en base n s'écrit avec deux chiffres égaux à (n-1)

Son écriture en base dix est donc: $(n-1) + (n-1) \times n = (n-1)(n+1) = n^2 - 1$

Autre solution: le plus petit nombre de trois chiffres en base douze s'écrit (100);
il s'écrit donc en base dix: n^2. *Le plus grand nombre de deux chiffres est le nombre juste avant, soit* n^2-1

b) Pour que le nombre 224 s'écrive avec deux chiffres en base n, il doit être inférieur ou égal au plus grand nombre de deux chiffres dans cette base ; on doit donc avoir, d'après a) :

$224 \leq n^2-1$ donc $225 \leq n^2$; or $225 = 15^2$

Donc le plus petit entier n pour lequel le nombre 224 s'écrit avec deux chiffres en base n est le nombre 15.

Exercice 2

Aire de A : aire du triangle = $\dfrac{\text{base x hauteur}}{2} = \dfrac{28x}{2} = 14x$

Aire de B: aire du rectangle + 2(aire du demi- disque) = $28y + 2\left(\frac{1}{2}\pi 7^2\right) = 28y + 49\pi$

Aire de C: aire du demi- disque = $\dfrac{1}{2}\pi 14^2 = 98\pi$

Aire de A = Aire de C d'où: $14x = 98\pi$ d'où $x = 7\pi$

Aire de B = Aire de C d'où : $28y + 49\pi = 98\pi$ d'où $28y = 49\pi$ d'où $y = \dfrac{7}{4}\pi$

Exercice 3

1) La masse de protéines dans 30g de muesli est 1,8g

Donc dans 100g : $\dfrac{1{,}8 \times 100}{30} = 6$ Il y a 6g de protéines dans 100g de muesli.

2) La masse de glucides dans 100g de muesli est 63,5g

Donc dans 30g: $\dfrac{63{,}5 \times 30}{100} = 19{,}05$ Il y a 19,05g de glucides dans 30g de muesli.

3) La valeur énergétique de 100g de muesli est 440 kcal

Donc pour 30g: $440 \times 0{,}3 = 132$ la valeur énergétique de 30g de muesli est 132 kcal

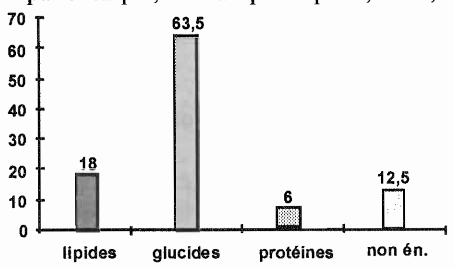
Autre solution: 1840kJ équivaut à 440 kcal; or nous lisons que la valeur énergétique de 30g de muesli est 552kJ; ce qui équivaut donc à: $\dfrac{552 \times 440}{1840} = 132$

4) Dans 100g de muesli, nous lisons qu'il y a : 18g de lipides et 63,5g de glucides.
Nous avons vu qu'il y a 6g de protéines.

D'où la masse d'éléments énergétiques: 18+63,5+6= 87,5.
D'où la masse d'éléments non énergétiques: 100-87,5 = 12,5.
Il y a 12,5g d'éléments non énergétiques dans 100g de muesli.

5) D'après ce qui précède, si l'on prend des bâtons de même largeur, les hauteurs doivent être proportionnelles aux nombres: 18;63,5;6 et 12,5.

Nous pouvons prendre par exemple, en multipliant par 0,2: 3,6cm ; 12,7 cm; 1,2 cm et 2,5 cm.



Commentaire: toutes les questions précédentes relèvent de la proportionnalité et peuvent être résolues par différentes procédures au choix du candidat.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1)

1)	**Procédures**	**Erreurs - hypothèses sur les causes**
A	*il multiplie par dix la partie entière, puis la partie décimale; en notant respectivement "f" et "c", montrant par là qu'il considère la partie entière comme le nombre de francs et la partie décimale comme le nombre (entier) de centimes; * il convertit les centimes obtenus en francs * il ajoute les deux nombres et trouve le bon résultat	Il fait une erreur en écrivant sa phrase réponse; * est-ce une erreur tout à fait fortuite (inattention, fatigue) ? * ou bien , sa vigilance ayant baissé , revient-il à une conception fausse des nombres décimaux (cf C) , qui le conduit , en quelque sorte, à "rectifier" son bon résultat ?
B	*il pose la multiplication par 10 et fait fonctionner correctement l'algorithme usuel, sans prendre en compte la spécificité du zéro.	résultat juste *erreur dans le placement de la virgule dans le deuxième produit partiel (qui manifeste une mauvaise compréhension du fonctionnement de l'algorithme usuel de la mult.: il s'agit ici d'un produit par 10 et non par 1) *la pose du produit partiel par zéro confirme une utilisation mécanique des algorithmes sans effort de compréhension.
C	*il effectue la multiplication en ligne, en multipliant seulement la partie entière, et en gardant la même partie décimale.	cette erreur manifeste la difficulté rencontrée par de nombreux enfants, qui n'arrivent pas à considérer le nombre décimal comme UN nombre, mais le conçoivent toujours comme la juxtaposition de deux nombres entiers, qu'ils traitent séparément.
D	*il pose le calcul en ligne; il ajoute un zéro à la partie entière, puis à la partie décimale, mais il n'arrive pas à placer la virgule et n'écrit pas de phrase réponse.	difficulté analogue à celle de C: il commence par multiplier 15 et 25 par 10, en les considérant comme des nombres distincts (le c après 15,25 laisse penser qu'il oralise "15Francs et 25 centimes"), mais il a du être très embarrassé pour mettre la virgule, car, avec des francs, ce troisième chiffre après la virgule n'a pas de sens.
E	*il pose le calcul en ligne et écrit le bon résultat, puis la phrase réponse. *on peut supposer qu'il connait la règle et sait l'appliquer	pas d'erreur
F	il pose l'addition (10 termes égaux à 15,25) et fait fonctionner correctement l'algorithme usuel; il écrit la bonne phrase réponse.	résultat juste mais, nous retrouvons dans sa première tentative multiplicative toujours la même conception fausse des décimaux : il multiplie par dix séparément la partie entière et la partie décimale; il ajoute ensuite les résultats (comme deux entiers) ;peu convaincu sans doute par son résultat, il a préféré revenir à une opération qu'il maîtrise bien.

Question 2)

a) L' élève G n'a pas appliqué en effet la règle qu'il énonce, car il aurait du écrire: 152,5F

On peut supposer qu'il connaît la règle (ou du moins son énoncé), qu'il a effectivement commencé par l'appliquer , mais qu'il a ajouté ensuite le zéro pour avoir une écriture de prix "acceptable" (parce que cette écriture n'avait pas de sens pour lui, en particulier ce chiffre 5 après la virgule, si l'on se réfère aux écritures usuelles de prix)[1].

Il a ensuite reproduit l'énoncé connu de la règle sans le compléter, considérant sans doute l'ajout du zéro comme un aménagement local sans importance, voire plus ou moins illicite.

Une autre hypothèse, moins vraisemblable, pourrait être admise: pour trouver le produit, l'élève G applique la règle connue dans les entiers "on ajoute un zéro" et place ensuite la virgule de façon à avoir une écriture de prix acceptable. L'énoncé de la règle ensuite serait alors la reproduction d'une règle apprise, ou du moins entendue, sans que la relation avec la procédure effective soit très claire pour l'élève.

b) L'élève H n'énonce pas une règle générale mais explique ce qu'il fait sur ce nombre-là : on ne pourra pas savoir ce qu'il faut faire avec un autre nombre.

D'autre part, contrairement à l'élève G qui énonce la règle "officielle" et l'aménage "subrepticement", l'élève H n'a pas peur de dire tout haut : "on rajoute le zéro". Il semble donc qu'il connaisse moins bien que l'élève G la "bonne règle" énoncée par le professeur.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

Question 1)

a) Cette activité permet un rappel des connaissances apprises sur la multiplication, que les élèves pourront utiliser pour résoudre les problèmes suivants.

- un rappel du sens de l'écriture multiplicative comme nombre d'éléments d'une collection disposée en lignes et colonnes, ou en paquets égaux et de la commutativité de cette écriture (on peut supposer que le professeur donnera deux réponses possibles 4x7 et 7x4)
- un rappel des deux écritures additives liées à cette écriture multiplicative, en redonnant du sens aux égalités du type bxa= axb= a+a+...+a = b+b+...+b (la présence de la collection permet de les associer au dénombrement par lignes ou par colonnes).

Ces rappels devraient :

- faciliter la reconnaissance de l'écriture multiplicative dans les problèmes de dénombrement de collections (1 et 2)

Dans le premier, on ne retrouve pas la disposition en rectangle, mais une formulation identique liée à la situation "paquets égaux": 5 lots; 6 bouteilles PAR LOT <------> 4 étages; 7 fenêtres PAR ETAGE

- faciliter, dans tous les problèmes, le passage d'un écriture multiplicative à une des deux écritures additives associées.

b) Cette activité se distingue des 5 problèmes car ici, il s'agit de dénombrer une collection visible, alors que dans les autres problèmes il y a un énoncé qui décrit , soit des collections à dénombrer (problèmes 1 et 2, et la deuxième question de 5), soit des grandeurs à mesurer (en points dans le problème 3; en francs dans le problème 4 et la première question du 5).

c) les écritures attendues par l'auteur du manuel: 4+4+4+4+4+4+4 et 7+7+7+7,
d'autres écritures utilisant la disposition: 8+8+8+4 14+14,
l'écriture liée à la numération 10+10+8,
des écritures avec des paquets quelconques: 6+8+4+7+3 .....

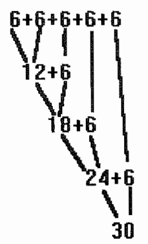
d) Pour écrire le nombre de fenêtres, l'élève peut :

- recopier le nombre qu'il vient de trouver à la ligne précédente en calculant à partir de l'écriture additive; ce calcul peut s'effectuer soit de proche en proche ("4 et 4 ; 8 ; et 4 ; 12 etc...") soit en regroupant les termes autrement, à l'aide d'un arbre.
- en dénombrant directement la collection:
  - soit en comptant un à un
  - soit en utilisant les paquets de dix: ("2 paquets de dix et 8 ; c'est 28")

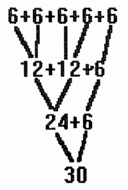
Question 2)

[1]**Remarque didactique** : : Ceci confirme l'hypothèse que les écritures de ce type (mesures de prix en franc) n'ont pas le statut de nombre décimal, mais fonctionnent comme deux nombres entiers: le nombre de francs et le nombre de centimes. Leur usage fréquent en classe renforce (voire provoque) une conception fausse des nombres décimaux, comme couple d'entiers.

a)



b)



Question 3)

a) Sa connaissance de la numération lui permet de dire que "8 paquets de dix" s'écrit "80"

b) - dans le problème 3, un élève de CE1 peut effectuer mentalement :
"20+20=40 ; 40+20=60".
Ici, c'est le tout petit nombre de termes (3) qui rend la forme additive "facile à calculer" .
Nous avons donc dégagé deux éléments qui rendent facile le calcul de sommes :
- la présence de termes égaux à 10, (ou à 100) qui permettent d'utiliser les connaissances sur la numération,
- le petit nombre de termes (2 ou 3).

c) pour la première : 9x10
pour la deuxième: 2x23.

4) a) - Dans les problèmes 4 et 5, contrairement aux problèmes 2 et 3, il n'est pas demandé d'écriture multiplicative.

- D'autre part, aucune indication n'est donnée en 4 et 5 sur la façon de calculer, alors que, dans les problèmes 2 et 3, il est conseillé à l'élève de choisir le calcul le plus facile .

Nous pouvons déduire de ces deux éléments que la tâche est plus guidée, dans les problèmes 2 et 3 que dans les problèmes 4 et 5.

- Dans les problèmes 2 et 3, deux nombres sont donnés dans l'énoncé (si l'on ne tient pas compte de ceux de l'illustration dans le 3), alors qu' il y a 3 nombres dans l'énoncé des problèmes 4 et 5 :
* dans les problèmes 2 et 3, la situation multiplicative est simple : deux nombres sont donnés, il s'agit d'en faire le produit,
* dans le 4, il n'y a qu'une situation multiplicative, mais le résultat est donné et il s'agit de le vérifier ; il y a donc trois nombres à gérer correctement,
* dans le 5, les trois nombres décrivent deux situations multiplicatives, que l'élève doit résoudre successivement en choisissant les données pertinentes.

Nous pouvons en déduire que la tâche est plus complexe dans les problèmes 4 et 5 que dans les problèmes 2 et 3 (même si, pour ce dernier, la présence des nombres de l'illustration et d'une dernière question portant sur la comparaison des nombres, introduit une difficulté plus grande que dans le problème 2).

b) Le problème 4 porte sur un produit par 4 ; et le problème 5 sur deux produits par 6 ; les élèves de CE1 ne devraient donc pas avoir de difficultés à faire correspondre directement à ces situations les écritures additives : 200+200+200+200 ; 20+20+20+20+20+20 et 15+15+15+15+15+15 : et à calculer ensuite les sommes correspondantes.[2]
Nous ne voyons donc rien dans ces énoncés qui pourraient empêcher de les proposer tels quels avant l'étude de la multiplication.

[2] le passage par une écriture multiplicative n'apporterait rien, sinon qu'il risquerait d'engager l'enfant dans un calcul plus difficile (4+4+4+...+4 200 fois; ou 6+6+...+6 20 fois ou 15 fois)

NANCY-METZ

(Corrigé effectué à partir du corrigé détaillé fourni par notre correspondante de l'Académie de Nancy-Metz)

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES

Exercice 1

Les correcteurs proposent deux solutions :

Solution 1 :

Sachant que le prix du menhir est un nombre entier compris entre 70 et 90 et la calculatrice étant autorisée, on peut calculer le prix possible des **18** menhirs :

70 x 18 = 1260	75 x 18 = 1350	80 x 18 = 1440	85 x 18 = 1530
71 x 18 = 1278	76 x 18 = 1368	81 x 18 = 1458	86 x 18 = 1548
72 x 18 = 1296	77 x 18 = 1386	82 x 18 = 1476	87 x 18 = 1566
73 x 18 = 1314	78 x 18 = 1404	83 x 18 = 1494	88 x 18 = 1584
74 x 18 = 1332	79 x 18 = 1422	84 x 18 = 1512	89 x 18 = 1602
			90 x 18 = 1620

Le chiffre des centaines est 5 : il reste 5 possibilités : 1512 - 1530 - 1548 - 1566 - 1584
Le chiffre des unités est inférieur à 5 : il reste 3 possibilités : 1512 - 1530 - 1584
Le chiffre des dizaines est supérieur à 5 : il reste 1 possibilité : 1584
Le prix des 18 menhirs est donc 1 584 sesterces.

Solution 2

Soit P le prix, en sesterces, des 18 menhirs livrés par Obélix.

- P est le produit de deux nombres entiers (prix d'un menhir et 18) ; c'est un nombre entier.
- Le prix d'un menhir est compris entre 70 et 90 ; par conséquent P vérifie la double inégalité:
  $70 \times 18 \leq P \leq 90 \times 18$
  $1\,260 \leq P \leq 1\,620$
- Cette double inégalité montre que le nombre P s'écrit avec quatre chiffres, dont le premier (chiffre des milliers) est 1.

  P s'écrit 1cdu. De plus le chiffre des centaines est 5 ; P = 15du

  Le chiffre des unités est inférieur à 5 : $0 \leq u \leq 4$
  Le chiffre des dizaines est supérieur à 5 : $6 \leq d \leq 9$
  P est divisible par 18, donc par 2 et par 9 ;
  P est donc un nombre pair : u ne peut prendre que 0, 2 ou 4 comme valeur.
  P est divisible par 9 : 1 + 5 + d + u est divisible par 9.

$0 \leq u \leq 4$ et $6 \leq d \leq 9$ impliquent $12 \leq 1 + 5 + d + u \leq 19$; on déduit $6 + d + u = 18$ et $d + u = 12$.

$u = 12 - d$ et $6 \leq d \leq 9$ impliquent $4 \leq u \leq 6$

Or $0 \leq u \leq 4$. On en déduit que $u=4$ et $d = 12-4 = 8$

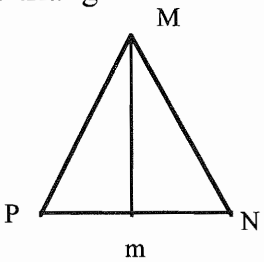
par suite $P = 1584$.

Le prix des 18 menhirs est 1 584 sesterces.

Exercice 2

Question 1

1-1) : m est le milieu du côté [NP] du triangle MNP, (Mm) est la médiane relative à [NP] dans ce triangle.



Le triangle MNP est équilatéral, ses médianes sont aussi hauteurs. Il en résulte que (Mm) est la hauteur relative au côté [NP] dans le triangle MPN et par conséquent :

La droite (Mm) est perpendiculaire à la droite (NP)

1.2) ***Les correcteurs proposent deux solutions*** :

solution 1 : Dans un triangle équilatéral de côté a, une hauteur a pour mesure : $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

solution 2 D'après la question 1-1 le triangle MmP est rectangle en m ; il vérifie le théorème de Pythagore : $MP^2 = Mm^2 + mP^2$

On a MP = a; et comme m est le milieu du segment [NP] de longueur a, $mP = \frac{a}{2}$

Par suite : $a^2 = (\frac{a}{2})^2 + Mm^2$; $Mm^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = 3\frac{a^2}{4}$; $mM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

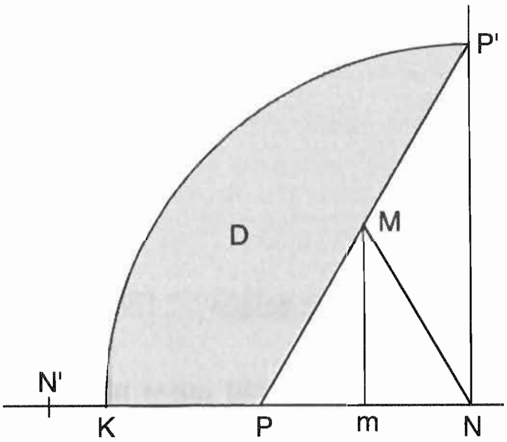
1.3)

Le triangle MmP est rectangle en m, son aire est égale au demi-produit des mesures des côtés de l'angle droit : aire (Mmp) = (mP.mM)/ 2

$$\text{aire (Mmp)} = \frac{1}{2}(\frac{a}{2} \text{x} \frac{a\sqrt{3}}{2})$$

$$\text{aire (Mmp)} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$$

Question 2



2. 1 ***Les correcteurs proposent deux solutions*** :

solution 1
P' est le symétrique de P par rapport à M, donc M est le milieu de [PP'].Par suite MP =MP'. Le triangle MNP est équilatéral : MP = MN =a
M P et P' sont donc sur le cercle de centre M de rayon a.
PP' est un diamètre de ce cercle.
Il en résulte que l'angle PNP' est droit.
Le triangle P'NP est rectangle en N.

solution 2
Dans le triangle P'NP, m est le milieu de [PN], M est le milieu de [PP'] ; d'après le théorème de la droite des milieux on a : (mM) // (NP') et mM = NP'/ 2.
On a montré que (mM) était perpendiculaire à (PN) ; on en déduit (NP') perpendiculaire (NP).
Le triangle P'NP est rectangle en N.

2-2 ***Les correcteurs proposent deux solutions***
solution 1
M est le milieu de [PP'], donc PP' = 2 x PM
m est le milieu de [PN], donc PN = 2 x Pm
Les triangles P'NP et MmP ont l'angle P commun
Il en résulte que le triangle P'NP est l'image du triangle MmP dans l'homothétie de centre P et de rapport 2. D'où aire (P'NP) = 2^2x aire(Mmp)

aire (P'NP) $= 4 \times \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

solution 2 (en utilisant la droite des milieux)
Le triangle P'NP est rectangle en N, son aire est égale au demi-produit des mesures des côtés de l'angle droit. Soit PN x NP'.

PN = a et NP' = 2 x Mm $= 2 \times \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$; aire (P'NP) $= \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

2-3 Aire de *D*
Le domaine D et le domaine limité par le triangle PNP' sont disjoints et leur réunion est un quart de cercle de rayon P'N. (P'N = $a\sqrt{3}$)
aire (D) $= \pi \dfrac{(a\sqrt{3})^2}{4} - \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{(3\pi - 2\sqrt{3})a^2}{4}$

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1[1].
D'après les travaux des élèves, si les objectifs du maître étaient atteints, les élèves devraient classer les chenilles selon le nombre de ronds qui les constituaient et signifier, par une étiquette, le critère de rangement.

Question 2[2] : Les tâches demandées aux élèves sont :
- découper les portions de plan où figurent les chenilles.
- classer les chenilles selon le nombre de ronds.
- les coller.
- puis mettre une étiquette signifiant le classement.

Question 3 : Analyse et commentaires
Margaux:
Elle coupe une chenille de quatre en deux chenilles de deux.
Elle regroupe les chenilles de longueur 2, celles de longueur 3, puis les autres.
Elle range les collections de chenilles selon l'ordre 2, 3, 4.
L'étiquette indique la taille des chenilles de la collection de façon imagée (dessin d'une chenille). Elle ne différencie pas les chenilles de longueur 5 des chenilles de longueur 4.

Kenny:
Le découpage fait disparaître une chenille de longueur 4 et apparaître une chenille de longueur 3. (une gommette est perdue : 35 sur le modèle, 34 sur la production de Kenny).
Il regroupe les chenilles de même taille.
L'étiquette indique la taille des chenilles de la collection, le nombre étant symbolisé par une configuration de petits carrés.

Aurélie :
Effectue un découpage correct et classe les chenilles sans erreur.
L'étiquette indique le nombre de chenilles de la collection.

---

[1] **Remarque sur le sujet** : faire deviner les objectifs du maître au travers de productions écrites d'élèves ne peut que conduire à des suppositions variées. On peut s'interroger sur l'intérêt de cette demande le jour d'un concours.
Par exemple, le maître peut avoir donné la consigne suivante : « Vous allez compter le nombre de ronds par chenille et mettre ensemble celles qui ont le même nombre », ou bien, « vous allez mettre ensemble celles qui ont pareil de ronds ». La première consigne fait appel explicitement au comptage, ce qui peut être un objectif, l'autre non, même si des enfants comptent. Par ailleurs une perception globale du cardinal des collections va permettre à certains élèves de réussir cette activité.
[2] **Remarque didactique** : cette activité de classement, fréquente en maternelle, ne répond pas à un problème effectif. Les enfants classent parce que le professeur le demande.

Le nombre est symbolisé façon domino, par une figuration de points.

Alan:
Effectue un découpage correct et classe les chenilles sans erreur.
L'étiquette indique la taille (le nombre de gommettes) des chenilles de la collection.
Le nombre est écrit en chiffres.

Adrian:
Il perd une chenille. (10 sur le modèle, 9 sur la production d'Adrian).
Il regroupe les chenilles de même taille.
L'étiquette indique le nombre total de gommettes collées dans une collection, (les chenilles n'existent plus), ceci sans erreur. On peut faire l'hypothèse qu'il n'a pas compris la consigne concernant la désignation des classes.
Le nombre est écrit en chiffres.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

Question 1 : intentions pédagogiques :

a) Amener les élèves à résoudre des problèmes de division euclidienne par des méthodes empiriques : c'est le cas dès la situation de découverte.
b) Apprendre aux élèves à encadrer un nombre par des multiples d'un autre nombre (multiples consécutifs si possible).

Question 2 : Procédures possibles

Additions successives :
25 + 25 = 50 2 boîtes
50 + 25 = 75 3 boîtes

Soustractions successives
325 - 25 = 300 1 boîte
300 - 25 = 275 encore 1 boîte

Multiplications successives
25 x 11 = 275
25 x 12 = 300
25 x 13 = 325
25 x 14 = 350 donc 25 x 13 < 335 < 25 x 14
Méthodes mixtes
exemple 1
25 x 11 = 275
335 - 275 = 60

25 x 2 = 50
60 - 50 = 10 donc 11 + 2 = 13 boîtes restent 10 truffes.

exemple 2

25 x 4 = 1 00
3 x 100 = 300
300 + 25 = 325 restent 10 truffes

Remarque : Les correcteurs attendaient d'un candidat qu'il donne au moins trois procédures.

Question 3 : Variables didactiques

Le problème se situe dans la classe des problèmes de division - distribution ou partage.

a) La taille des nombres mis enjeu (dividende et diviseur) :
une résolution par recours à un dessin ou à une résolution mentales sont-elles possibles ? le traitement complet par une suite d'additions ou de soustractions répétées est-il possible à un coût peu élevé ?

b) La valeur du quotient (rapport dividende / diviseur) :
Si le quotient est élevé, on favorise des procédures multiplicatives ou mixtes.
Si le quotient s'exprime par un nombre entier de dizaines (ou de centaines), certains multiples du diviseurs sont favorisés et leur emploi apparaît naturel et efficace.

c) L'existence ou non d'un reste non nul.
Cette existence oblige à un encadrement ; si le reste est nul le problème se traduit par une égalité.
Le résultat est lisible ou non directement dans une table de multiples du diviseur.

d) La « sympathie » du diviseur:
certains nombres (exemples: multiples de 10, ou 25 ...) permettent l'emploi d'autres règles de calcul des multiples (autres que poser la multiplication traditionnelle), de relations arithmétiques connues (ex : 25 x 4 = 100).
La table des multiples est plus facile à construire.

e) D'autres variables peuvent être en rapport avec l'énoncé du problème : selon que l'on demande le nombre de parts ou la valeur d'une part ou le reste, les calculs ne sont pas envisagés de la même façon : si on utilise des soustractions successives, le dernier résultat fournit directement le reste alors qu'il faut rechercher par d'autres calculs le quotient.
La recherche du reste favorise l'utilisation de soustractions.

Question 4[3] : Lien phase de découverte - ensemble des exercices

Dans la phase de découverte, on travaille sur plusieurs procédures (celles exposées dans la question 2) et dans la suite de la séquence, on ne travaille plus que sur une seule procédure : l'encadrement du dividende par des multiples du diviseur (peut-être celle favorisée lors de la réponse à la dernière question de la situation de découverte). On peut se demander si la phase de découverte est vraiment et suffisamment exploitée.

Question 5 : Difficultés de l'exercice 7

a) Lecture de la représentation conventionnelle du cube : fournir 27 petits cubes afin de réaliser effectivement le gros cube.

b) Compréhension du problème: il s'agit de trouver le nombre maximum de gros cubes.
poser des questions différentes : avec 527 petits cubes, peut-on fabriquer 10 gros cubes, 15 gros cubes, 20 gros cubes ?

c) Lecalcul :
proposer une calculatrice ou des tables de multiplication.

d) Enchaîner deux questions. Il faut utiliser le résultat de la première question pour résoudre la deuxièmeet
faire une synthèse à la fin de la première question.

e) Élaborer une stratégie de recherche et la mettre en oeuvre.
Utiliser une des procédures proposées lors de la situation découverte et rechercher d'abord les multiples de 27 (construire la table).

---

[3] **Remarque concernant la question 1** : Si le professeur suit la fiche du manuel, il va devoir réserver beaucoup de temps à la situation de découverte qui, à elle seule, peut constituer une séquence entière. Il serait utile de la construire mieux en imaginant comment les élèves, qui produiront des procédures variées (voir question 2), sauront quel est le résultat juste. Par exemple, un groupe d'enfants qui effectueraient effectivement la manipulation (avec des cubes à la place des truffes hélas...)serait le garant de la bonne réponse.Dès lors, on peut s'interroger sur les places respectives de l'activité de découverte et des activités d'encadrement par deux multiples consécutifs.

Nice.

Corrigé effectué par l'équipe de Bordeaux

PREMIERVOLET(12POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES

Exercice 1

solution arithmétique (celle des élèves)

1) Le capital qui placé à 3,5 %, rapporte 1050 francs d'intérêt en un an est 30 000 F

car $100 \times \frac{1050}{3,5} = 30\,000$

(par exemple, le nombre de fois que 1050 contient 3,5 est le nombre de fois que le capital contient 100 F)

2) La somme qui n'a pas été donnée à une association s'élève à 92 000 F

car 30 000 + 62 000 = 92 000

3) Les économies s'élevaient au $\frac{5}{4}$ de cette somme.

Le don à l'association est donc le quart de cette somme, soit 23 000 F

car 92 000 : 4 = 23 000

Vérification : 92 000 + 23 000 = 115 000 (économies)

$\frac{1}{5} \times 115000 = 23\,000$ (don)

$\frac{4}{5} \times 115\,000 = 92\,000$ (somme utilisée)

92 000 - 62 000 = 30 000 (somme placée)

$30\,000 \times \frac{3,5}{100} = 1050$ (intérêts pour un an)

solution algébrique (celle du professeur)

Soit x la somme d'argent placée, l'énoncé se traduit par la relation

$x \,.\, \frac{3,5}{100} = 1050$ donc $x = 1050 \,.\, \frac{100}{3,5}$ $x = 30\,000$

Soit y le montant du don, traduction de l'énoncé

$\frac{x + 62000 + y}{5} = y$

donc $5y - y = x + 62\,000 = 92\,000$

d'où $y = \frac{92000}{4} = 23\,000$

Exercice 2

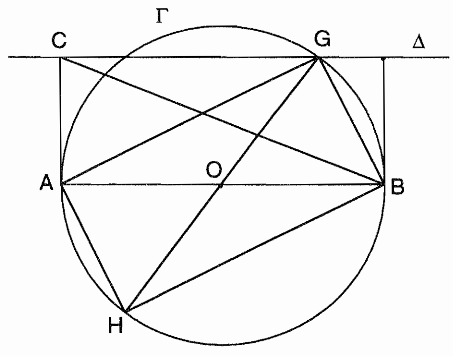
a) Le triangle demandé est la moitié d'un rectangle de longueur 10 cm et d'aire 40 cm^2 . Sa largeur est 4 cm. Le côté AC de l'angle droit du triangle rectangle BAC mesure donc 4 cm.

b) l'aire de 20 cm2 du triangle ABD est obtenue par le produit de la longueur de sa base AB, 10 cm, par la moitié de la hauteur, soit 2 cm. Cette aire est donc déterminée par une hauteur de 4 cm. ($4 \times \frac{10}{2} = 20$).

Le point D se trouve sur l'une ou l'autre des 2 droites Δ et Δ' parallèles à AB et distantes de lui de 4 cm ; Δ passe par C.

c) AEF est la moitié d'un rectangle, l'angle en E est droit, E se trouve sur le cercle Γ de diamètre AB. F lui est diamétralement opposé sur Γ.

d) Pour que l'aire du rectangle AGBH soit 40 cm^2 , il faut et il suffit que celle de AGB soit 20 cm^2. G doit donc se trouver à l'intersection de Γ et de Δ et H, diamétralement opposé à G se trouve sur l'intersection de Γ et de Δ'



Exercice 3
Solution algébrique
soient x, y et z les parts des trois ouvriers, l'énoncé se traduit par
$x = 3h$, $y = 4h$, $z = 5h$ $x + y + z = 9\,000$
d'où $15.h = 9\,000$ et $h = \frac{9\,000}{15} = 600$ et
$x = 1\,800$ $y = 2\,400$, $z = 4\,800$

solution arithmétique
Le total des années de services primées est 15 ans car $3 + 4 + 8 = 15$
La prime par année de travail est 600 F car $9\,000 : 15 = 600$
La part du premier ouvrier est 1 800 F car $600 \times 3 = 1800$
La part du second est 2 400 F
Celle du troisième est 4 800 F
Vérification : $1\,800 + 2\,400 + 4\,800 = 9\,000$

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Analyse de l'exercice:
La situation met en relation deux grandeurs : la quantité de peinture (l'unité étant le pot de peinture) et l'aire (l'unité étant le m^2) .

quantité de peinture	aire
1	11
7	70

On peut considérer, dans un premier temps, que l'exercicerelève de la simple proportionnalité et dire qu'il faut $\frac{70}{11} = 6 + \frac{4}{11}$ (6 pots et 4 onzièmes de pots) pour couvrir les 70 m^2.
Pratiquement il faudra acheter 7 pots...
Remarques :
$\frac{70}{11} = 70 : 11$ est le quotient exact de 70 par 11
$70 = 6 \times 11 + 4$ 6 est le quotient euclidien
comme
$7 \times 11 - 70 = 7$
la réponse 7 est le quotient entier **par excès**
il restera assez de peinture pour couvrir 7 m^2
Pour répondre à la seconde question, on peut reprendre l'exercice avec 140 m^2 à la place de 70 m^2, ou tenir compte du reste de 7 m^2 et chercher le nombre de pots pour recouvrir $(70-7)\ m^2 = 63\ m^2$.

ELEVE A :
1- L'enfant résout la division euclidienne de 70 par 11 par un encadrement de 70 au moyen des 2 multiples de 11, 6x11 et 7x1 1. Il procède par calcul réfléchi (la donnée 11 permet de ne faire appel ni à la technique opératoire de la division ni à celle de la multiplication). Il interprète bien les données du problème et il donne comme réponse le quotient entier par excès en précisant que la peinture supplémentaire permet de couvrir 7 m^2.
2- Pour cette question, bien que l'égalité 6x11 + 4 = 73 soit dans un premier temps fausse, (4 au lieu de 7), les commentaires et les résultats fournis montrent que l'élève a tenu compte des 7 m^2 supplémentaires pour obtenir la réponse 6 pots (car 6x11 + 7 = 73) et préciser qu'il restera de quoi peindre 3 m^2".
Il procède par calcul réfléchi en cherchant un nombre x tel que
$11.x + 7$ dépasse 70.
La démarche et les résultats sont corrects. La procédure est bien décrite et justifiée.

ELEVE B :
1- L'élève reconnaît une situation de division et utilise la technique opératoire pour calculer un quotient décimal approché au centième. Il réinterpréte bien son calcul en liaison avec le sens du problème et il donne comme résultat le quotient entier par excès.
On peut remarquer que l'enfant pose les soustractions intermédiaires et qu'il commet une erreur de calcul (6,35 au lieu de 6,36 , il n'a pas remarqué que le reste 15 est supérieur à 11.
2- L'enfant utilise implicitement une propriété de linéarité de la fonction linéaire intervenant dans cette situation de proportionnalité : l'aire doublant, la quantité de peinture double aussi. Il obtient 12,70 qu'il convertit judicieusement en 13 pots

(l'entier immédiatement supérieur à 12,70). Le résultat est obtenu ensuite par le calcul de 13 - 7 . Il pose systématiquement les opérations en colonnes. En rédigeant, il intervertit l'ordre : la soustraction avant la multiplication.
Sa démarche et ses résultats sont corrects. Elle est moins bien justifiée que celle de A.

ELEVE C :
1- L'élève utilise la même méthode que B, mais sans erreur de calcul. Il justifie le choix du quotient entier par excès en faisant une bonne interprétation de la partie entière de 6,363 dans les termes du problème.
2- L'élève reprend la même démarche avec 140 m^2 à la place de 70 m^2. Le quotient décimal approché 12,72, qui fournit la quantité de peinture, est bien converti en 13 pots. Le résultat est obtenu par calcul mental de 13-7.
Il utilise la technique opératoire de la division en posant les soustractions intermédiaires.
Sa démarche est correcte et bien justifiée.

ELEVE D :
1- L'élève reconnaît une situation de division euclidienne qu'il traduit par une relation du type a = b.q + r . (l'opération est posée, la disposition est celle dite de la "potence" ...). Il fournit alors le quotient entier par excès. Sa démarche, correcte, est peu justifiée.
2- Il applique, comme B, le modèle de la proportionnalité mais avec une valeur approchée par excès à l'unité près (nombre entier de pots) à la place d'une valeur approchée au centième (quantité de peinture). Sa démarche non justifiée correspond au raisonnement : "l'aire double donc aussi le nombre de pots". Il n'obtient pas ainsi le nombre minimal de pots de peinture.
On peut aussi remarquer qu'il ne répond pas vraiment à la question posée : nombre de pots supplémentaires.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

calcul réfléchi de produits.

1$^{\text{ère}}$ Question

A:

La décomposition additive canonique : 24 = 20 + 4 permet d'utiliser la valeur positionnelle des chiffres. Le calcul correspond à la multiplication standard, mais, plus logiquement, pour obtenir un approximation progressive du résultat, il commence par le chiffre de valeur la plus élevée.
(20 + 4) x 4 = (20 x 4) + (4 x 4) . Cet élève utilise la distributivité de la multiplication sur l'addition.

(La fin du calcul n'est pas décrite : le calcul de 20 x 4 pourrait renvoyer à 2 x 10 x 4 et donc à l'associativité de la multiplication et au produit par une puissance de dix, mais « quatre vingt » est assez évocateur de « quatre fois vingt » pour ne demander aucun calcul).

B:

1$^{\text{ère}}$ interprétation :

4 = 2 + 2

alors 24 x 4	= 24 x (2 + 2)	substitution par un terme égal
	= (24 x 2) + (24 x 2)	**distributivité de « x » sur « + »**[1]
	= 24 x (1 + 1) + 24 x (1 + 1)	substitution
	= (24 + 24) + (24 + 24)	**distributivité de « x » sur « + »**
	= 48 + 48	calcul des termes (substitution par leur valeur)
	= 96	calcul d'un terme

2$^{\text{ème}}$ interprétation :

4 = 2 x 2

alors 24 x 4	= 24 x (2 x 2)	substitution par un terme égal
	= (24 x 2) x 2	**associativité de la multiplication**
	= (24 x (1 + 1)) x 2	substitution par un terme égal
	= (24 + 24) x 2	**distributivité de « x » sur « + »**
	= 48 x 2 = 48 x (1 + 1)	calcul d'un terme puis substitution
	= 48 + 48	distributivité
	= 96	

3$^{\text{ème}}$ interprétation :

4 = 1 + 1 + 1 + 1

donc 24 x 4	= 24 x ((1 + 1) + (1 + 1))	**associativité de l'addition** et substitution
	= (24 + 24) + (24 + 24)	**distributivité** appliquée deux fois successivement
	= 48 + 48	calcul des termes
	= 96	

Cette procédure renvoie à la définition de la multiplication comme addition réitérée

[1] les propriétés des opérations mises en œuvre sont en gras, les règles générales du calcul en caractères ordinaires

C :

	24 = 25 - 1	décomposition soustractive de 25 pour utiliser 25 x 4 = 100
alors	24 x 4 = (25 - 1) x 4	substitution
	= (25 x 4) - (1 x 4)	**distributivité** de la multiplication sur la soustraction.

D:

D applique mentalement l'algorithme standard, il utilise les mêmes propriétés que l'élève A, mais en commençant par les unités (la fin du calcul n'est pas décrite).

E :

1ère interprétation :

	24 = 12 x 2	
alors	24 x 4 = 4 x 24	**commutativité** de la multiplication
	= 4 x (12 x 2)	substitution
	= (4 x 12) x 2	**associativité** de la multiplication
	= 48 x 2	calcul d'un terme
	= 48 x (1 + 1)	substitution
	= 48 + 48	**distributivité** de la multiplication sur l'addition
	= 96	

2ème interprétation :

	24 = 12 +12	
alors	24 x 4 = (12 + 12) x 4	substitution
	= (12 x 4) + (12 x 4)	**distributivité** de la multiplication sur l'addition
	= 48 + 48	

F :

De la même façon que pour E

	24 = 3 x 8	
alors	24 x 4 = (3 x 8) x 4	substitution
	= 3 x (8 x 4)	**associativité**
	= 3 x 32	calcul d'un terme
	= 96	

2ème Question

Nous avons volontairement détaillé cette réponse. Il ne s'agit donc pas de la réponse attendue d'un candidat.

L'objectif a

La stratégie la plus «élégante » est C. La plus proche de l'algorithme écrit standard est D... L'économie de chaque méthode dépend de la familiarité des élèves avec un répertoire de résultats directement connus (par exemple les doubles) et de la complexité des opérations décrites en 1. L'exercicen'est donc pas bien adapté pour montrer qu'il existe une stratégie « meilleure » ; mais il peut permettre la recherche éventuelle d'une stratégie meilleure.

L'exercice est assez bien adapté par contre à l'objectif b

Mais cet objectif met l'accent sur un aspect mineur de l'exercice et est lui même assez mineur. Dire et montrer qu'il existe de nombreuses stratégies est un discours métacognitif, un discours sur la connaissance mais une connaissance ici presque vide d'intérêt, qui ne permet par elle-même d'en établir aucune autre.

Montrer quelques stratégies et leur mode de fonctionnement (décomposer en sommes, en différences avec des nombres « faciles », en sommes régulières, en produits, suivant la base 10, etc. est déjà plus productif, encore qu'il ne faudrait pas transformer en « cours » ce qui doit être apporté spontanément par l'élève et qui constitue son « calcul réfléchi.

Il s'agit moins de « **montrer** » un éventail de stratégies, que de **faire utiliser et apprendre** les égalités nécessaires. Chaque fois, les calculs mentaux qui n'utilisent pas la méthode standard ou une de ses variantes, utilisent les opportunités offertes par les nombres et débutent par une décomposition, une égalité, un calcul familier choisi et pris à rebours. Le but principal des exercices semblables à celui qui est proposé ici est de développer ces connaissances. Cet objectif qui ne figure pas dans la liste.

L'objectif γ est ambigu.

Oui l'exercice fait bien utiliser les propriétés de la multiplication, mais il le fait de la même façon que parler en français fait utiliser la grammaire française. Il fait d'ailleurs utiliser aussi, comme nous le montrons dans 1, les propriétés des égalités (le droit de substituer à un nombre une expression égale) qui sont plus générales et aussi importantes.

Mais non, cette utilisation n'exige à ce moment là aucun commentaire ni aucune formulation relative aux propriétés des opérations qui constituerait alors essentiellement un élément qui distrait l'attention.

Les « règles » permettent de justifier les calculs lorsqu'on se pose la question de savoir si tel traitement formel est utilisable ou non. Elles ne déterminent aucune méthode de calcul (ce qui est l'objet ici). Pour évaluer ces expressions arithmétiques, (où ne figure aucune « inconnue », aucune lettre, la « sémantique » (le recours aux valeurs) donne la réponse bien plus facilement que la syntaxe.

L'objectif d ne concerne pas l'exercice lui même mais éventuellement la « leçon » dans laquelle le maître pourrait l'insérer.
Le calcul mental facilite l'apprentissage des tables nécessaires à l'exécution de la technique opératoire écrite standard. Le calcul réfléchi favorise en outre la recherche de méthodes alternatives et de ce fait ne favorise pas le passage à cette méthode. Au contraire il risque de faire ressortir qu'elle est rarement la plus rapide (dans les cas envisagés en calcul mental) et finalement de « contrarier », de retarder l'usage mécanique et familier de la méthode standard.
Par contre le professeur pourra utiliser les réponses de ses élèves pour réviser, expliquer, commenter la méthode standard puisqu'elle est utilisée par A et par D qui la connaissent déjà. Il est improbable que des élèves qui ne la connaîtraient pas l'inventent spontanément, surtout au cours d'une séance de calcul mental.

3ème Question

Mathématiquement équivalentes les méthodes de A et de B sont très proches et ne diffèrent que du point de vue de l'adaptation à des situations différentes. D utilise la technique habituelle du calcul écrit de la multiplication. A utilise la même décomposition mais il intervertit l'ordre des calculs et commence par les dizaines.
La méthode de D permet d'écrire les chiffres successifs du produit dans l'ordre d'obtention et sans rature. Mais cet ordre est l'inverse de l'ordre de lecture qui, lui, permet de connaître dès que possible l'ordre de grandeur du résultat. Elle est adaptée à l'écriture sur papier (sur planche à sable, les choses seraient différentes..
La méthode de A exige soit de se souvenir mentalement du résultat obtenu pendant le calcul du produit suivant pour lui ajouter ensuite la retenue, soit éventuellement de raturer si on écrit au fur et à mesure. Par contre, elle suit une règle implicite du calcul mental pratique : contrôler en permanence l'ordre de grandeur du résultat et pour cela utiliser des méthodes d'approche progressive.

4ème Question

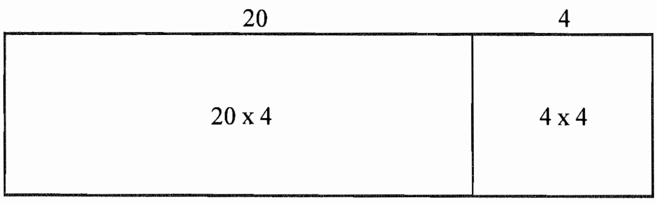
Il suffit

- de contrarier E, F et pour cela de rendre difficile les décompositions initiales des deux termes, donc de prendre des couples de nombres premiers parmi les suivants :
5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 : 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43
37 x 7 , 7 x 13 = 5 x 31 17 x 13 5 x 29
- de contrarier de plus B en éloignant les nombres des puissances de 2
ce qui tendrait à éliminer 7
- de contrarier C en les éloignant des sous multiples de 100 ce qui élimine 5, et des nombres entiers de dizaines, ce qui élimine aussi 11 ; 19, 29, 31 et 41
par exemple 13 x 29 = 13 x 30 - 13 = 390 - 13 = 377
- contrarier D, est plus difficile car les calculs sont très proches
Peut-être en prenant un grand chiffre des dizaines et un petit chiffre des unités pour faciliter l'approche de A ? Ex. 7 x 43 est peut être un peu plus facile pour A ? ?

Il reste des produits comme 13 x 17 ; 13 x 23 ; 13 x 37 mais ils nécessitent des produits de nombres de deux chiffres, sinon on peut retenir 7 x 43 ; 7 x 37 ; 7 x 23 ; 7 x 17 ; 7 x 13
avec le risque (plutôt limité et sans danger) de voir B effectuer 43 et 43, 86 ; 86 et 86, 172 ; 172 et 172, 344 ; moins 43, 301 !

5ème Question

5°) La stratégie A peut être justifiée
- dans un cadre géométrique (mesure-produit) :



- ou dans le cadre numérique par retour à l'addition réitérée :
24 c'est 2 dizaines et 4 unités ; 4 fois 24 c'est 4 fois (2 dizaines) et 4 fois (4 unités)
- ou se référer à la technique de l'addition .

On peut d'ailleurs s'appuyer sur le matériel de numération : en particulier sur la monnaie.
24 c'est 2 pièces de dix et 4 pièces de 1 F; par suite 4 fois °4 c'est 4 fois 2 ; 8 pièces de dix et 4 fois 4 pièces de 1 F...

6ème Question

Comme signalé plus haut la méthode D est la lecture de la technique opératoire écrite standard du calcul en ligne et A en est dérivée de façon presque évidente.

Le calcul de A pourra se traduire dans un premier temps par :

```
  24
x  4
  16
  80
  96
```

Orléans-Tours

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES

A. Etude des rectangles de périmètre donné.

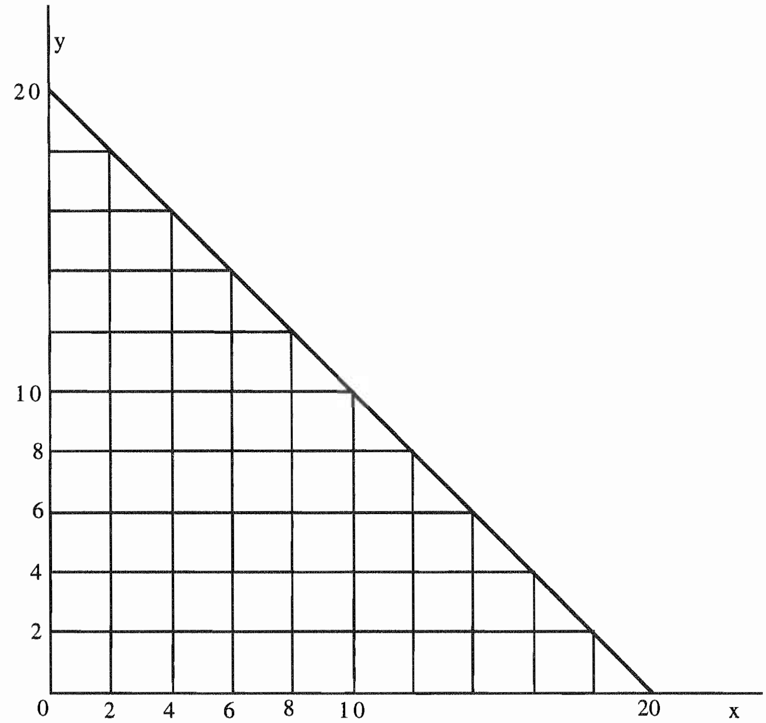
1. Le périmètre étant fixe et égal à 40 cm, x et y étant les mesures de chacun des couples de côtés, x et y sont liés par la relation $x + y = 20$

y est un nombre positif (ou même éventuellement nul), donc **x prend ses valeurs dans l'intervalle [0 , 20].**

2. On en déduit également la relation **$y = 20 - x$**

3. représentation graphique :

Orléans



graphique 1

4. Tableau des mesures respectives :

x	2	4	6	8	10	12	14	16	18
y	18	16	14	12	10	8	6	4	2
mesure de l'aire du rectangle en cm2	36	64	84	96	100	96	84	64	36

B. Recherche du rectangle d'aire maximale.

1. L'aire $A(x)$ du rectangle dont un côté a pour mesure x est égale à $x(20 - x)$

$A(x) = x(20 - x)$

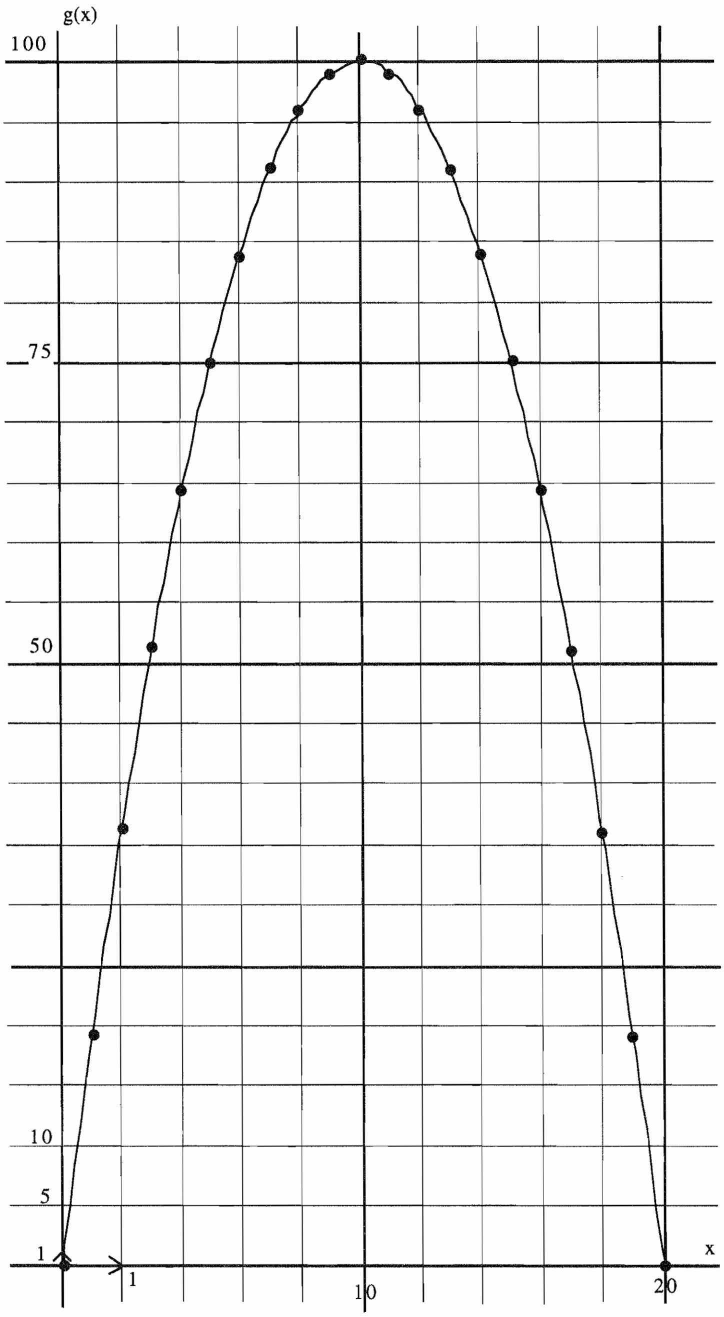
2. On développe l'expression $(x - 10)^2$, ce qui donne $x^2 - 20x + 100$

g(x) est donc égal à $-x^2 + 20x$, qui correspond à $x(20 - x)$. Donc **$g(x) = A(x)$**

3. On obtient le tableau suivant :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
g(x)	19	36	51	64	75	84	91	96	99	100	99	96	91	84	75	64	51	36	19

4. Voir le graphique n°2 ci-dessous.



5. Par lecture du tableau ou du graphique on peut répondre que le rectangle de périmètre 40 cm ayant l'aire maximale est le carré de côté 10 cm et d'aire égale à 100 cm2.
Note : une preuve plus formelle tient à l'expression algébrique de g(x) qui traduit la différence de 100 et d'un nombre positif ou nul...

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

1. La division euclidienne permet de résoudre ce problème de partage où l'on doit déterminer le nombre de parts : Le nombre de sucettes est le dividende, le nombre de sucettes dans chaque paquet est le diviseur et le nombre de paquets de 5 sucettes est le quotient euclidien. Le quotient étant entier, il peut bien sûr y avoir un reste.
Cette notion ne figure naturellement pas au programme du cycle 2, et, en l'occurrence du Cours préparatoire, **deuxième année de cycle 2.**

Les élèves peuvent cependant avoir l'occasion d'explorer des démarches de résolution de problèmes tels que celui-ci, en utilisant leurs connaissances : dessiner des collections et réaliser des partitions (des paquets de 5), procéder par additions successives, et, pour certains, utiliser des connaissances de numération 5 et 5 ça fait 10 donc deux paquets de 5 pour 10 enfants etc...
On peut donc considérer ce problème comme un exemple d'une "situation de recherche, amenant les élèves à explorer des démarches de résolution et à approcher ainsi des notions et des outils nouveaux" , comme le recommandent les I.O.

2. Les élèves ont en général dessiné 20 sucettes et nettement isolé la vingtième, mise de côté et parfois attribuée à Marie (la maîtresse sans doute ?). Véronique a procédé par un calcul, en comptant de cinq en cinq jusqu'à 20. Si ce dernier nombre obtenu est resté implicite (il n'est pas écrit), il ne lui a pas échappé qu'avec 20 sucettes cela faisait une sucette de trop. Alfred a dessiné exactement dessiné 19 sucettes et donné une décomposition additive de ce nombre :
$5 + 5 + 5 + 4 = 19$. Tous donc, à l'exception de Jacques, ont clairement utilisé le nombre 19 comme étant le nombre d'élèves.
Revenons sur le travail de Jacques : Il a dessiné 4 paquets de 5 sucettes. Ce dessin est complété par l'écriture additive : $5 + 5 + 5 + 5 = 20$. Il signifie donc probablement que 20 sucettes suffisent pour tous les élèves, dont le nombre n'est pas explicité. Ce nombre pourrait donc être compris entre 16 (puisque 3 paquets de 5 ne suffisent pas) et 20.

Le maître n'a pas porté cette information dans le texte de l'énoncé écrit. Il a donc probablement souhaité que les élèves prennent conscience que cette donnée était indispensable et manquait pour qu'il soit possible de poursuivre et répondre à la question posée. Ce travail de réflexion préalable a sans doute permis aux élèves de s'approprier le problème : " De quoi s'agit-il ? Que veut-on faire ? Combien de sucettes faut-il ? Combien de paquets faut-il acheter ? "
On peut raisonnablement faire l'hypothèse que le nombre 19 a été choisi parce que c'était le véritable nombre d'élèves de la classe de ces enfants. Cela permettait ainsi de donner un contexte familier à ce problème et même d'en prévoir une validation finale, concrète et effective, ce dernier aspect ne manquant pas d'intérêt, surtout au Cours Préparatoire.

3. La question connue est : Combien faut-il acheter de paquets ? C'est la question 1.
Les questions dont les réponses apparaissent dans les travaux des élèves et qui ne figuraient pas explicitement dans l'énoncé du problème sont les suivantes :

Question 2 : Combien faut-il de sucettes ?
Question 3 : En restera-t-il après la distribution ? (Y en a-t-il en trop ?)
Question 4 : Restera-t-il une sucette pour Marie ?

Le tableau ci-dessous indique si les élèves ont répondu soit par un dessin , soit explicitement, à ces questions et si la réponse est adéquate.

	Question 1	Question 2	Question 3	Question 4
Alice	Oui, réponse juste.	Oui, par un dessin.	Oui.	Oui.
Véronique	Non, elle compte cependant **4 fois,** de 5 en 5.	Oui, implicitement.	Oui.	Oui.
Nicole	Oui, réponse juste.	Oui, comme Alice.	Oui, mais de façon implicite : une sucette est mise à l'écart, sortie du quatrième paquet.	Non.
Jacques	Oui, par un dessin de 4 paquets de 5.	Oui, en dessinant 20 sucettes, en 4 paquets.	Non.	Non.
Léon	Oui, réponse juste.	Oui, en dessinant 20 sucettes, en 4 paquets.	Oui.	Non.
Alfred	Oui, mais sa réponse "3" est fausse.	Oui, explicitement : "Il me faut 19 sucettes"	Non.	Non.

Note relative à cette question : la suggestion de réaliser un tableau pour répondre nous paraît peu utile, voire artificielle, mais nous conseillons aux candidats, par prudence, de prévenir les demandes des auteurs d'un sujet.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

Voir commentaire des correcteurs sur ce deuxième volet en note de bas de page[1]

Première partie.

1. Note préliminaire relative à la première question :
On peut envisager plusieurs méthodes, plausibles pour des élèves de CM 1. Elles vont dépendre des instruments utilisés et par conséquent varier par les propriétés qui découlent de leur utilisation. Mais avant tout, elles vont dépendre des propriétés que les élèves peuvent percevoir sur l'ébauche du carré. L'essentiel est donc de préciser les hypothèses implicites qui sont admises a priori : Quelles sont les propriétés initiales que l'on peut reconnaître dans la figure inachevée, à compléter ?
- **Les deux segments qui doivent former les deux premiers côtés du carré mesurent 3,2 cm, ils ont la même longueur** (cela peut se vérifier également à l'aide d'un compas).
- **L'angle formé par ces deux segments est un angle droit.** (cela "se voit" mais peut être aussi vérifié à l'aide d'une équerre).
- **L'angle formé par le côté inachevé et le côté qui lui est adjacent est un angle droit.**

Si les deux propriétés précédentes s'imposent aisément, celle-ci est nettement plus difficile à voir (les élèves de CM 1 peuvent très bien ne pas y voir d'angle du tout !) et surtout plus aléatoire à vérifier étant donné la faible longueur du petit trait...

Faire la part de **ce que l'on voit** et de **ce que l'on sait** des propriétés d'une figure géométrique est une difficulté très importante de la géométrie, qu'il nous paraît utile de signaler ici.

Réponse : Voici, compte tenu des hypothèses précédentes, trois méthodes. Par commodité, nommons [A,B] et [B,C] les deux côtés donnés.

Première méthode : avec un compas et une règle non graduée (figure 1).
On place le quatrième sommet par intersection de deux arcs de cercle ayant pour centres les points A et C, et pour rayon la mesure commune aux deux côtés déjà tracés du carré. On joint ce point aux centres des deux arcs avec la règle (aucune mesure n'est requise !).

Preuve : Le quadrilatère tracé a quatre côtés de même longueur par construction : c'est un losange, et par conséquent un parallélogramme particulier. L'angle de sommet B déjà tracé étant droit, ce parallélogramme est un rectangle. C'est donc un carré.

Seconde méthode : avec un double-décimètre seul (figure 2).
On prolonge (du bon côté !) le côté amorcé de sorte qu'il ait une longueur suffisante, aussi grande que les deux premiers côtés tracés. On mesure et reporte avec le double-décimètre la longueur de ces côtés de façon à obtenir un troisième segment de même longueur. On peut alors tracer le dernier côté.

Preuve : N'ayant que **trois** côtés de même longueur par construction, il faut nécessairement utiliser la troisième propriété évoquée en note préliminaire, c'est à dire la présence de **deux angles droits** consécutifs de sommets respectifs A et B. Ainsi le troisième côté que l'on trace est parallèle au côté [BC] opposé. De plus, par construction, il a la même longueur. Le quadrilatère formé est donc un parallélogramme. Comme il a un (et même deux) angle droit (s), c'est un rectangle. Deux côtés consécutifs ont la même mesure : C'est un carré.

Troisième méthode : Avec une équerre et une règle non graduée (figure 3).
Prolonger (toujours du bon côté !) le côté amorcé de sorte qu'il ait une longueur suffisante, aussi grande que chacun des deux premiers côtés déjà tracés. Placer l'angle droit de l'équerre en C et tracer la perpendiculaire en C à [BC]. Elle recoupe le côté précédemment prolongé au point cherché.

Preuve: Les trois hypothèses initiales sont indispensables : Le quadrilatère formé a trois angles droits. Le quatrième angle est droit. Le quadrilatère est un rectangle. Deux côtés consécutifs étant isométriques, c'est un carré.

---

[1] Ce genre d'exercice est tout à fait inapproprié pour les élèves de l'école élémentaire. Les preuves ne peuvent être exigées des enfants. Elles ne peuvent même pas leur être données pour être exigées des enfants. Elles ne peuvent même pas leur être données pour expliquer leurs méthodes en cas d'erreur. C'est toute l'ambiguïté de l'introduction forcée de la géométrie à l'école élémentaire.
Les questions qui demandent, dans la première partie, de faire des constructions géométriques, de fournir leur démonstration ou leur justification mathématique, puis, dans la seconde partie, d'effectuer des calculs algébriques assortis de démonstrations, sont toujours d'ordre algébrique ou géométrique (calcul et comparaison d'aires). Aucune ne relève des questions d'ordre "pédagogique" ou "didactique" qui devraient officiellement constituer le second volet d'une épreuve d u C.R.P.E. En fait, cela fait deux volets mathématiques..

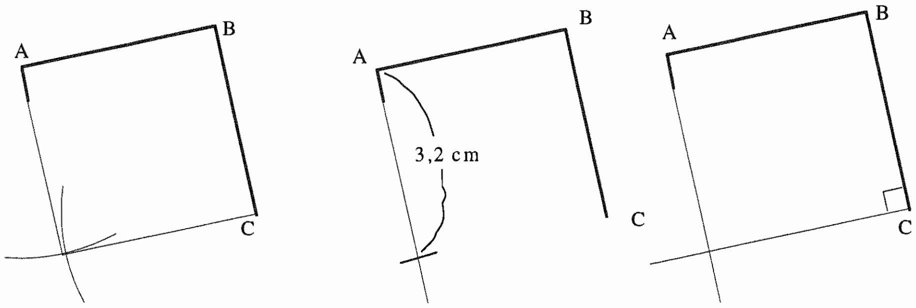


figure 1 *figure 2* *figure 3*

2. Nommons A et B les extrémités du segment tracé qui représente la longueur du rectangle à construire (On sait qu'il s'agira bien de la "longueur" du rectangle puisque ce segment est plus grand que les côtés du carré). Appelons c la longueur des côtés du carré.

Prolonger [AB] . Sur la droite (AB), placer un point E tel que B soit entre A et E et tel que AE ait une mesure égale à 2c. Pour cela, il suffit de reporter deux fois, à l'aide d'un compas, sur (AB), la longueur c , en prenant l'écartement du compas égal à c . Prolonger avec la règle non graduée les traits amorcés de façon à obtenir deux demi-droites [Ax) et [By) , situées dans le même demi-plan de frontière (AB), qui seront supports des petits côtés du futur rectangle. En admettant l'hypothèse que ces demi-droites sont implicitement perpendiculaires à [AB], elles sont, de ce fait, parallèles. Voir figure ci-dessous. Avec le compas, choisir un écartement égal à BE. Avec cet écartement, tracer les arcs de cercles centrés en A et B qui recoupent [Ax) et [By) respectivement en D et C.
ABCD est un rectangle.
La mesure de son périmètre est égale à 2(AB + BC) or BC = BE et AB + BE = 2c.
Le périmètre du rectangle ABCD a pour mesure 4c, il est égal au périmètre du carré.

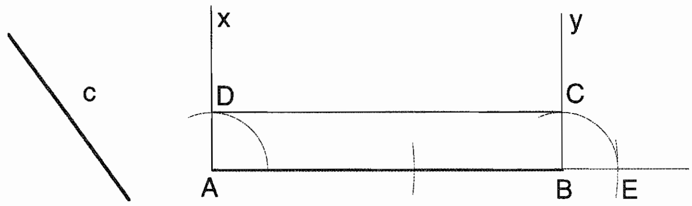


figure 4

3. Les figures pour lesquelles le problème posé admet plusieurs solutions sont le parallélogramme et le triangle.
Le côté du carré mesure 3,2 cm. Le périmètre du carré a pour mesure 12,8 cm. Le grand côté tracé du parallélogramme mesurant 4,4 cm, le petit côté du parallélogramme devra donc mesurer 2 cm, ce qui est la seule contrainte.
Pour le triangle, la somme des mesures des deux côtés à tracer doit être égale, exprimée en cm, à 12,8 - 3,9. Ici encore, il y a plusieurs solutions.

Deuxième partie.

1. Le rectangle ayant pour mesure d'aire 66 petits carreaux, il fallait trouver un carré dont l'aire se rapproche le plus de 66. Un carré de 8 carreaux de côté a une aire égale à 64 carreaux, ce qui est une meilleure réponse que celle de Karine. C'est aussi la meilleure possible si on ne considère que des carrés ayant pour côté un nombre entier de carreaux (ce qui paraît raisonnable, la racine carrée de 66 étant environ 8,120...).

2. Karine "calcule" une longueur qui s'exprime par l'expression $\frac{X+Y}{2}$
C'est la moyenne arithmétique des mesures des côtés du rectangle.

3. L'aire du rectangle "de départ" est égale à **XY**
Le périmètre du rectangle "de départ" est égal à **2(X + Y)**

Le périmètre du carré qu'elle obtient avec sa méthode est égal à $4\,\frac{X+Y}{2}$.

En simplifiant, on obtient **2(X + Y)**
Le carré de Karine a le même périmètre que le rectangle initial.

L'aire de ce carré est égale à $\dfrac{(X+Y)^2}{4}$.

Les aires du carré et du rectangle seront égales si les deux expressions algébriques le sont :

$XY = \dfrac{(X+Y)^2}{4}$ ce qui est équivalent, successivement, à

$4XY = X^2 + 2XY + Y^2$
$X^2 - 2XY + Y^2 = 0$
$(X - Y)^2 = 0$
$X = Y$

Les deux aires ne peuvent être égales que si X et Y le sont, autrement dit, que si le rectangle initial est lui-même un carré. En conclusion, la méthode de Karine n'est valable que pour des rectangles carrés ! Elle ne permet jamais de trouver un carré de même aire qu'un rectangle initial si celui-ci est un "vrai" rectangle, un rectangle qui ne soit pas un carré.

4. Note à propos de cette dernière question : Nous nous sommes efforcés de fournir une justification qui soit la plus simple possible, mais nous doutons cependant que tous les élèves de fin de cycle 3 puissent la comprendre aisément, en tirer profit, et encore moins la reproduire.

Réponse : Aidons-nous de la figure construite ci-dessous :

Il faut remarquer, puis admettre, que le carré BFGE a pour mesure de côté la moyenne arithmétique des mesures des côtés du rectangle ABCD .
En effet , E est le milieu de [AM] , donc AE = EM.
BA + AD = BA + BM
BA = BE + EA et BM = BE - EM.
De ce fait, **BA + AD = 2 BE**

Il s'agit ensuite de fournir une preuve "visuelle", d'illustrer à l'aide de la figure proposée le fait que le rectangle et le carré ne peuvent avoir la même aire. Comparons ces aires.

Le rectangle ABCD a pour aire la somme des aires des trois rectangles R_1, R_2 et R_3.

Le carré BFGE a pour aire la somme des aires des rectangles R_2 , R_3 , R_4 , et R_5.

Or les rectangles R_1 et R_4 ont la même aire. R_2 et R_3 sont communs aux deux quadrilatères.

L'aire du carré BFGE est donc plus grande que celle du rectangle ABCD.
La différence est égale à l'aire du carré R_5.

La différence est égale à l'aire du carré R_5. Cette aire n'est nulle que si D vient en G, donc si
AD = AB

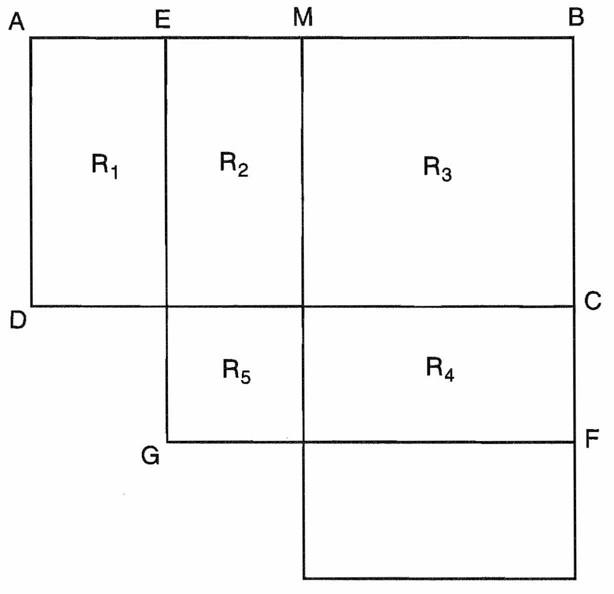


figure 5

Il peut être commode d'utiliser des couleurs différentes pour les différents rectangles. Par contre, il serait peut-être plus facile de vérifier que le rectangle ABCD a le même périmètre que le carré BFGE en comparant les divers segments qui les composent, mais ce n'est pas demandé.

Reims

Corrigé effectué par l'équipe de Bordeaux

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES

PROBLEME (6 POINTS) :

Etude du placement P1 :

Question 1 : Le placement rapporte 8% par an et il ne faut considérer que les (100-15=85) 85% après imposition, donc les intérêts après imposition sont :

$(10000\text{x}\frac{8}{100}) \times \frac{85}{100} = 640$ (en francs).

Question 2 : Ces intérêts nets représentent $\frac{640}{10000}$ du capital, soit 6,4%.

Question 3 : a) au bout d'une année la somme capitalisée est de 10000+640, au bout de deux années, la somme est 10000 + 2x640. Au bout de x années :

$$S = 10000 + 640x.$$

b) La forme de la représentation graphique de S est celle des fonctions de type :
f(x)= ax + b (ici, a= 640 et b= 10000). Il s'agit d'une fonction affine dont la représentation graphique est une droite.

Etude du placement P2 :

Soit C le capital. Au bout d'un an, le capital est devenu $C+\frac{5}{100}C$, soit $C(1+\frac{5}{100})$.

Au bout de deux années, le capital devient : $C(1+\frac{5}{100})+\frac{5}{100}(C(1+\frac{5}{100}))$, soit $C(1+\frac{5}{100})^2$

On peut constater qu'au bout de x années, le capital devient $C(1+\frac{5}{100})^x$

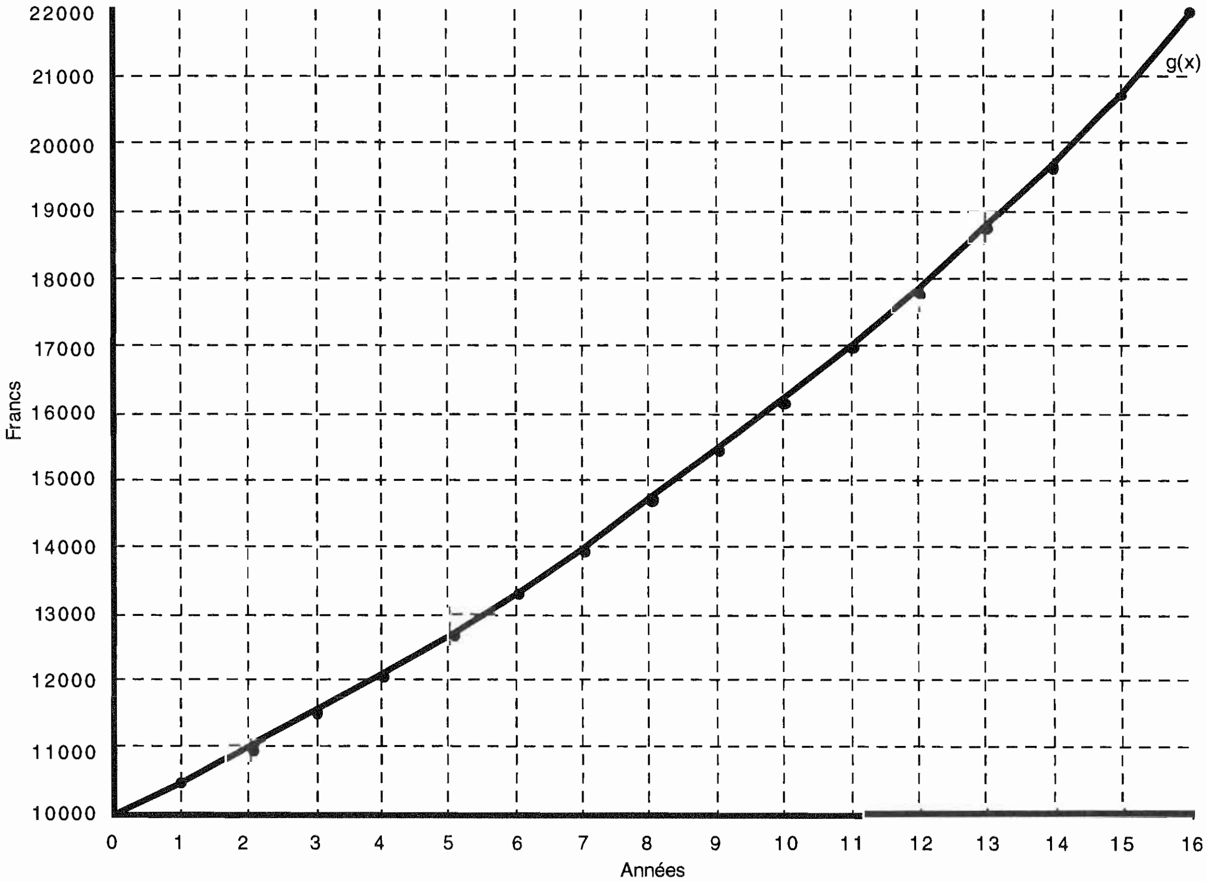
Information pour le candidat : *Aucune démonstration n'est demandée. La démonstration de cette formule est un exemple de démonstration par récurrence. Le principe est le suivant. On constate qu'une propriété ou une formule est vraie pour le rang 1, puis on suppose qu'elle est vraie pour le rang n. On démontre alors qu'elle est vraie pour le rang n+1. Une fois ceci montré, il suffit de poser n=1, donc la propriété (ou formule) est vraie pour 2, n=2, la propriété (ou formule est vraie pour 3 et ainsi de suite. Du point de vue historique, cette forme de démonstration a longtemps été contestée.*

Supposons la formule vraie pour le rang n, on a alors :

$C(1+\frac{5}{100})^n$ *et montrons qu'elle est vraie pour n+1, en l'année n+1, le nouveau capital est :*

$C(1+\dfrac{5}{100})^n + \dfrac{5}{100}(\,C(1+\dfrac{5}{100})^n\,)$, soit $C(1+\dfrac{5}{100})^{n+1}$. La formule reste vraie. Elles est vraie pour n=1, donc pour n=2 et ainsi de suite.

Cette formule est appelée la formule des intérêts composés.



Comparaison des deux placements[1] **:**

Question 1 :Pour x=0, f(x)=10000 et pour x= 16, f(x)=20240. La droite représentative de f(x) passe par ces deux points.

Question 2 :Pour x=8, f(x)>g(x), donc Monsieur Martin a intérêt à choisir le premier type de placement.

Question 3 :

a) L'intersection des deux courbes est au voisinage de x=11. Donc, n_0=11

b)Il suffit de calculer f(x) et g(x) pour x=11.

Note : graphiquement, l'écart devrait être nul.

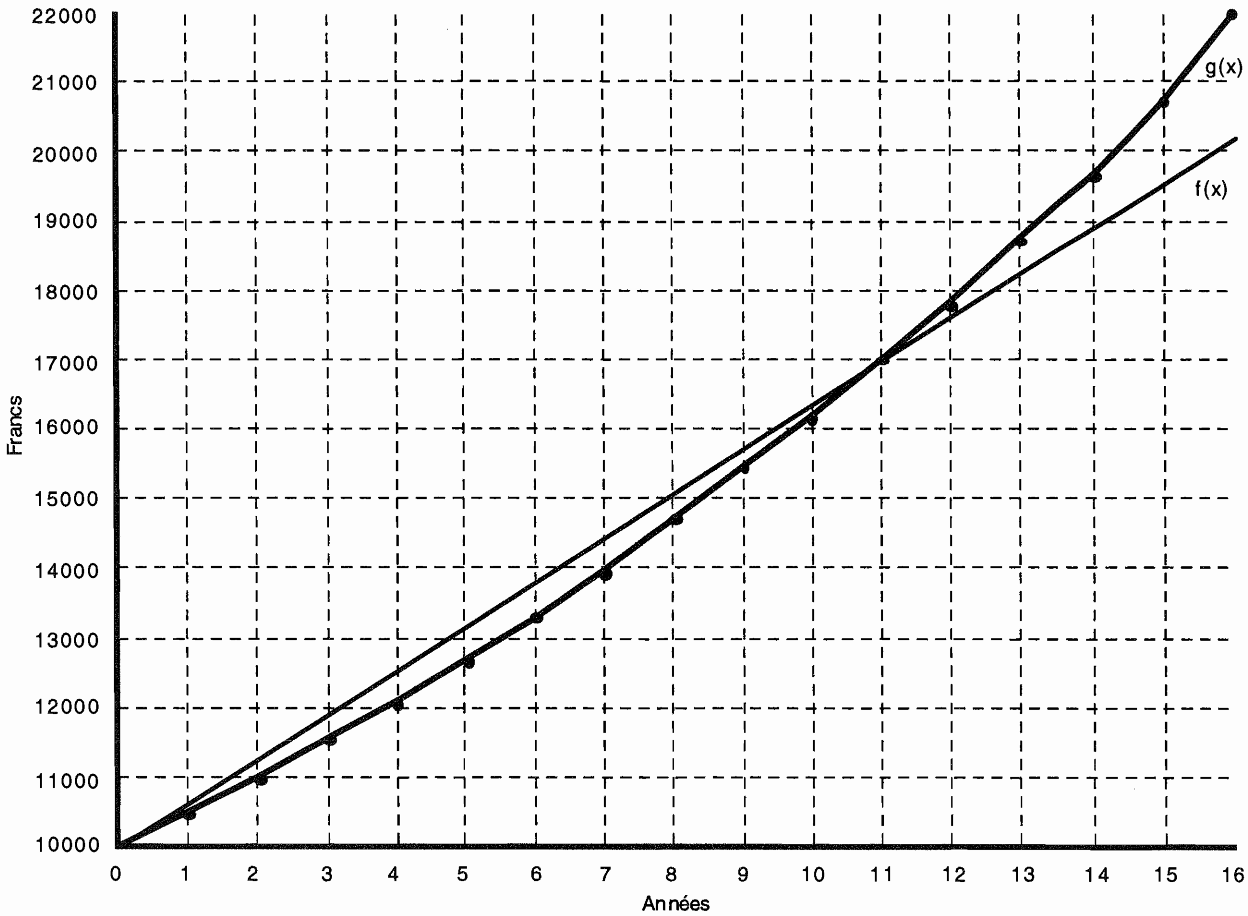
f(11)=10000+640x11=17040 (en francs).

---

[1] Remarque : Les deux fonctions étudiées f(x) et g(x) sont des fonctions de l'ensemble des réels vers l'ensemble des nombres réels. La question I-3)b) signifie bien « x étant un réel quelconque », c'est à dire que x ne représente plus le nombre d'années. Pour g(x), le sujet ne précise plus. On passe donc de l'étude de fonctions de N vers R à l'étude de fonctions de R vers R ; Du point de vue représentation graphique, les premières seraient représentées par un ensemble (infini) de points, alors que les secondes sont représentées par une droite (pour f(x)) et une courbe (pour g(x)). Or la feuille proposée aux candidats, sur laquelle figure déjà g(x) représente un graphique constitué d'une série de segments joignant des points. C'est pour le moins regrettable.

$g(11)= 10000(1+\frac{5}{100})^{11}$ soit : 17103 (en francs).

l'écart est de 17103 -17040 =63 (en francs).



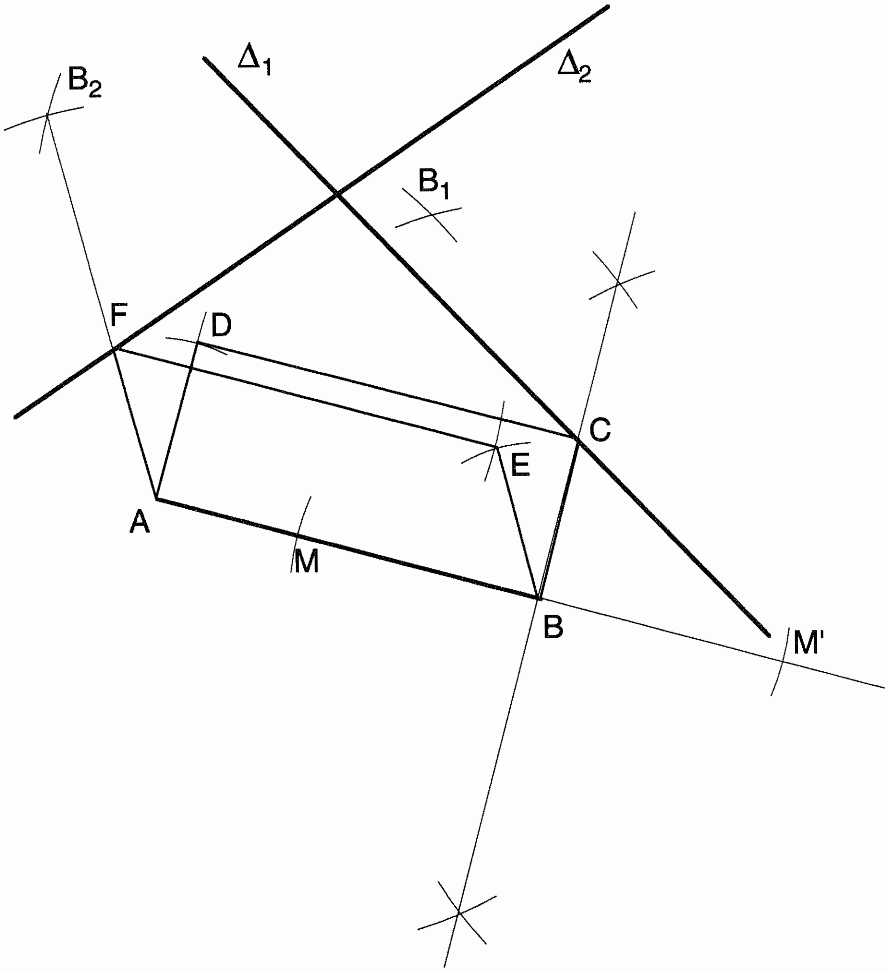
EXERCICE 2 ;

Question 1)[2] :

Conseils pour le candidat : bien que le sujet ne le demande pas, une explication rapide des constructions demandées peut éclairer le lecteur.

[2] Pour la partie a) de cette question, l'énoncé demande de tracer « le rectangle ABCD ». Or, en l'absence de toute précision sur l'ordre dans la désignation, il y a deux solutions possibles. On suppose que le rédacteur a voulu faire tracer un seul des deux rectangles possibles...Nous nous en tiendrons à un seul tracé.

Pour la partie b), le même problème se pose a priori, l'angle de 120 n'étant pas orienté, mais dans un cas, la demi-droite [AF) coupe $\Delta_{1°}$ et pas dans l'autre.



a)

Prolonger [AB], Prendre deux points M et M' symétriques de B sur (AB). Construire la médiatrice de MM'. (C'est une façon de construire une droite perpendiculaire à (AB) en B. On obtient le point C. A partir de ce point, prendre une ouverture de compas de mesure AB, puis à partir de A prendre une ouverture de compas de mesure BC. Ces deux cercles se coupent en deux points. Un est à rejeter (non respect des angles droits), l'autre est le point D.

b)Voirfigure.
Pour construire un angle de 120°, on reporte deux fois un angle de 60° obtenu par construction de deux triangles équilatéraux adjacents : ici, on construit d'abord ABB_1 (ouverture de compas AB), puis AB_1B_2. On joint AB_2 qui coupe Δ_2 en F. On construit ABEF par report de mesures à l'aide du compas.

Question 2)

a) La condition nécessaire et suffisante pour que le quadrilatère GHIJ soit un parallèlogrammeest que ses diagonales se coupent en leur milieu. Soit O l'intersection de Δ_1 et de Δ_2, I est élément de Δ_1 et J est élément de Δ_2. GHIJ parallèlogramme signifie donc O milieu de [HJ] et O milieu de [GI]. Pour construire les points I et J, il suffit de construire les symétriques par rapport à O, de, respectivement G et H. Ce qui s'effectue par report de mesure à l'aide du compas.

b) ABGH parallélogramme équivaut à : AB//GH et AB=GH.
HGJI parallélogramme équivaut à : GH//JI et GH=JI.
D'où, AB//IJ et AB=IJ, ce qui signifie que ABJI est un parallélogramme.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1)

Pour répondre à cet exercice, l'élève doit :
- savoir ce que signifient rectangle et périmètre.
- Etre capable de trouver la mesure d'un côté d'un rectangle connaissant son périmètre et la mesure d'un autre côté (chacun jouant son rôle de largeur et de longueur).
- Etre capable de construire deux sommets d'un rectangle connaissant la position de deux sommets consécutifs : cela peut nécessiter la construction d'un segment perpendiculaire à un segment donné en son extrémité[3].
- Etre capable de reporter une mesure donnée.
- Etre capable de joindre les points d'une figure.

Question 2)

	Compétences	**erreurs**	**interprétation**
Elève A	Possède les compétences numériques attendues. La présentation de ses calculs est formellement fausse (21-14=7 :2=3,5). On suppose qu'il a construit les angles droits à l'équerre et qu'il a reporté 3,5 cm	réussite. L'erreur sur la présentation des calculs est fréquente.	En cours de recherche, les écritures ont un statut (privé) qui ne sera plus le même lors d'une démonstration (publique).
Elève B	Sait ce qu'est un rectangle, (les traces laissent penser qu'il a effectivement reporté 3 cm précisément) et sait en construire un, mais ne traite sans doute pas l'information numérique.	Les deux petits côtés mesurent 3 cm et non 3,5 cm.	Cela peut être un erreur de calcul (qui aurait été fait de tête) ou une absence de prise en compte de l'information numérique.
Elève C	Ses calculs montrent un contrôle de 3,5 plutôt que la découverte de 3,5. L'écriture en ligne est juste. La construction géométrique s'effectue sans doute à l'aide de l'équerre, puis du compas pour reporter 3,5 cm	réussite.	

[3] Tout dépend alors des outils autorisés : s'il s'agit de l'équerre, il suffit de construire l'angle droit. S'il s'agit du compas, la construction est plus complexe. Elle ne relève pas du cycle trois.

Remarque : l'élève A produit une écriture formellement fausse, alors que l'élève C produit une écriture juste. Et pourtant, la production de A reflète bien la recherche de 3,5, ce que ne reflète pas la production de B.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

A) ETUDE DU DOCUMENT 2 :

Question 1)[4]

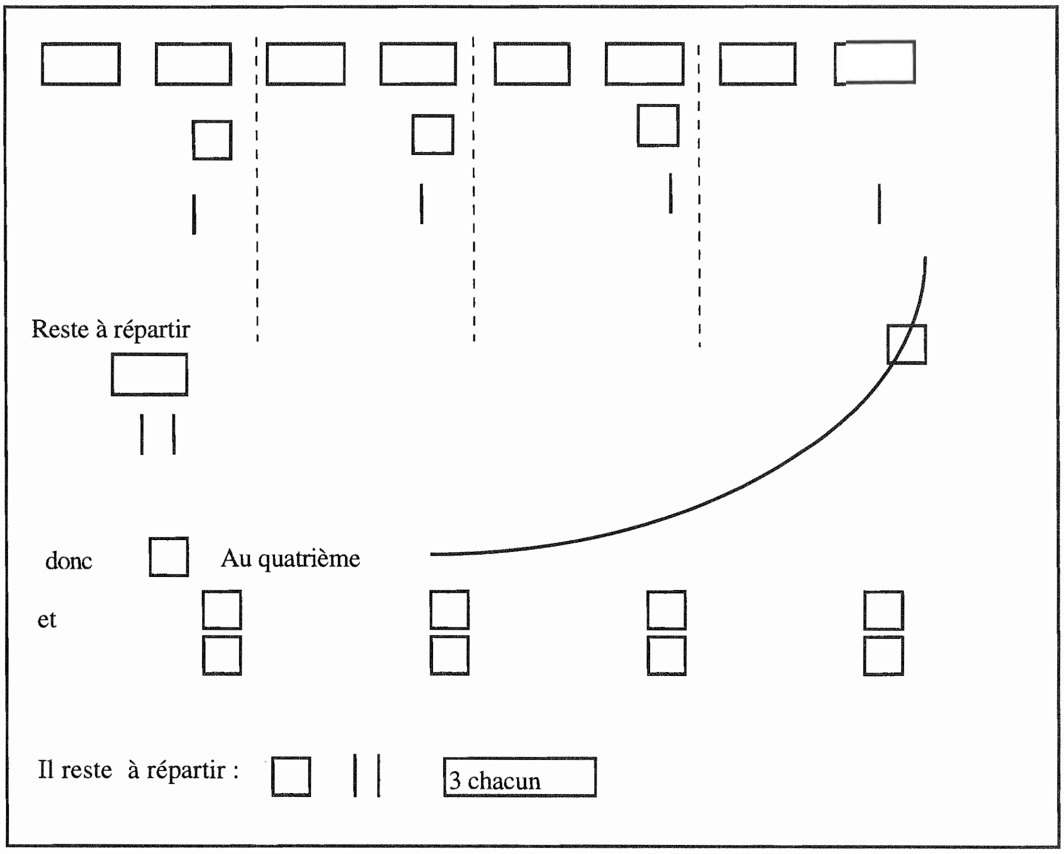
Pour aborder les activités proposées dans le document 2, l'élève doit donner du sens à la multiplication à trou : ceci concerne les six premiers exercices de révision. Il doit être capable ensuite de compléter une égalité inhabituelle (le mot « plus » étant en toutes lettres) : ceci concerne les deux exercices qui suivent. Enfin, dans le dernier exercice, il doit envisager plusieurs réponses possibles sans en oublier.
Pour la partie II (division), l'élève devra comprendre la notion de partage équitable. Il devra maîtriser la numération pour les nombres ayant au plus trois chiffres.

Question 2)
La démarche utilisée dans le II-1 est celle du partage équitable des centaines, puis des dizaines, puis des unités. Pour cela, sont mis côte à côte une présentation de l'algorithme de la division et une exposition de la décomposition du nombre.

Question 3)

[4] Commentaire sur le sujet : A propos du document 2, voici encore une fois une question malheureuse. La fiche du document 2 engage plusieurs types d'activités. Les six premiers exercices et les trois derniers ont été étudiés. Mais que dire de « l'activité » qui serait celle de la division. Rien n'est proposé à l'élève, sauf celle de lire un exposé de deux situations de partage. Le concepteur du sujet aurait pu attirer l'attention du candidat sur le fait que la « révision » attend explicitement une activité mathématique (les petits points l'attestent), alors que la partie « division » n'est qu'une compilation de procédés d'exposition d'un procédé de calcul. Il est difficile pour un candidat, le jour d'un concours, d'affirmer que la deuxième partie de la fiche n'engage pas d'activité mathématique a priori. La prudence commandera alors une réponse passe-partout « incolore inodore et sans saveur ».

936 divisé par 4 :



Un partage équitable selon les centaines, les dizaines, et les unités (démarche du II-1) va laisser de côté une centaine et 2 unités, dont l'élève ne saura pas quoi faire. Il pourra recommencer la distribution en partageant au mieux : par exemple, en distribuant 10 au quatrième, puis en répartissant les 9 dizaines et deux unités qui restent à chacune des 4 parts. Par exemple, distribuer 2 dizaines, il reste une dizaine et deux, soit douze, ce qui se traite directement (3).

Question 4 :
a) La variable qui a été modifiée entre le II-1 et le II-2 est définissable par un prédicat : tous les coefficients des puissances de dix dans la décomposition du nombre sont des multiples du nombre de parts. Ce prédicat est vrai en II-1 et faux en II-2.

b) On peut proposer un exemple numérique où le partage fonctionne au moins une fois selon le modèle de II-1 :
par exemple : 947 en trois parts égales.

Question 5)
26 = 9x2 + 8
34 = 9x3 + 7
49 = 9x1+40
49 = 9x2 + 31
49 = 9x3 + 22
49 = 9x4 + 13
49 = 9x5 + 4

b) Le lien mathématique entre I et II vient du fait qu'une division de a par b est la recherche du couple de nombres q et r tels que a = bxq + r (avec r<b).
c) Dans la partie II, le manuel propose une façon d'effectuer un partage et ne conclut pas sous la forme d'une écriture en ligne, ce qui permettrait d'une part de vérifier si le partage est juste, d'autre part de faire le lien avec I.

B) ETUDEDU DOCUMENT 2 :

Question 1)
Le calcul élaboré par Lucile met en œuvre l'approche du nombre (153) par un produit de type 6x...., mais en travaillant sur un nombre de dizaines, puis en contrôlant ce qui reste à partager, et en approchant ce reste, puis en additionnant les nombres trouvés. L'« autre façon » proposée par sa mère n'est qu'une présentation différente se fondant sur la même démarche.
Trois étapes possibles de cette progression seraient :
1°) Approcher un nombre à partir du produit d'un nombre donné par un nombre.
2°) Tenir compte des essais précédents, donc, ne pas reprendre tout le travail.
3°) Apprendre à faire une approche à l'aide de produits simples (donc des dizaines, centaines entières).
Enfin, mettre en forme ce travail (comme le propose la maman de Lucile).

Question 2) :
L'objectif principal de cette activité est la mise en place de l'algorithme de la division à partir de l'approche multiplicative.

C) COMPARAISON DES DEUXDOCUMENTS :

Le document 3 montre une construction de l'algorithme de la division dans laquelle la variable didactique proposée à la présentation en document 2 n'est plus efficiente. Le document 2 évoque une division qui se comprend bien dans un contexte précis (voir prédicat vrai de la variable). Mais pour apprendre une division par un nombre entier quelconque, ce document risque d'être plus un obstacle à l'apprentissage. Le document 3 est mieux adapté à une construction générale.

Remarques didactiques :
Nous venons d'écrire ce que l'on pense raisonnable d'attendre d'un candidat. Mais ces deux documents soulèvent des questions didactiques qui nous semblent plus importantes que celles qui ont retenu l'attention des rédacteurs du sujet :
Nous en aborderons une, voici deux fiches dans lesquelles on montre le savoir, certes c'est très caricatural dans le document 2 (ostension d'un modèle qui ne fonctionne bien que sur des cas rares..), mais le document 3 est aussi dangereux, s'il permet de faire croire qu'en le lisant, l'élève et le professeur font des mathématiques. Il s'agit en effet du procédé bien connu du « faire valoir » : Lucile et sa maman s'adonnent, devant l'élève lecteur à une activité mathématique. L'élève spectateur d'une pièce dans laquelle se jouent des mathématiques, pratique-t-il pour autant une activité mathématique ? Est-ce que l'on pratique le football en le regardant à la télévision ? Cette conception fréquente de la transmission des savoirs aurait pu être un point d'étude didactique dans ce sujet. Faire croire, par absence de remarque, à un candidat à la profession de Professeur des Ecoles, que, finalement, la fiche du document 3 est une bonne démarche, est très dommageable.

Rennes

(Corrigé effectué à partir du corrigé très détaillé de nos correspondants)

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES

Exercice 1.

1) Calcul du rayon de la sphère :

OIC est un triangle rectangle, on peut appliquer la propriété de Pythagore

$OC^2 = OI^2 + IC^2$

$R^2 = (R-2)^2 + 4^2$

$R^2 = R^2 - 4R + 4 + 16$

$4R = 20$

$R = 5$ **Le rayon de la sphère vaut 5 cm**

2) Calcul du volume de la calotte sphérique :

L'application de la formule donnée avec une hauteur h = 2 cm et R = 5 cm donne :

$V = \pi\ 4\ \dfrac{15-2}{3}\ cm^3$ $V = 52\ \dfrac{\pi}{3}\ cm^3$

$54 < V < 55\ cm^3$, la **valeur approchée par défaut à 1 cm^3 près est 54.**

Question 3

3a) Calcul de l'aire B du disque :

Le rayon mesurant 4 cm, l'aire B est égale à $16\pi\ cm^2$

3b) Calcul du volume du cône :

En appliquant la formule donnée avec h = 8 cm et $B = 16\pi\ cm^2$ on obtient

$V = \dfrac{1}{3}\ (16\ \pi.8)\ cm^3$ $\mathbf{V = 128\ \dfrac{\pi}{3}\ cm^3}$

3c) Calcul du volume total :

$V_t = 52\ \dfrac{\pi}{3} + 128\ \dfrac{\pi}{3}\ cm^3 = 60\ \pi\ cm^3$

La valeur approchée à un cm^3 près par défaut est 188 .

Exercice 2

1) Calcul de la longueur du rayon des "petits" cercles :

Soient A le centre du "grand" cercle, B et C les centres des petits cercles, H le milieu de [BC].

(AH) est un axe de symétrie de la figure. Le triangle AHC est un triangle rectangle.

AH = 4 cm et HC =2,5 cm. Le rayon du grand cercle mesure 3,5 cm. Soit r le rayon du petit cercle. Les deux cercles étant tangents, on peut écrire : AC = 3,5 + r

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle AHC permet d'écrire :

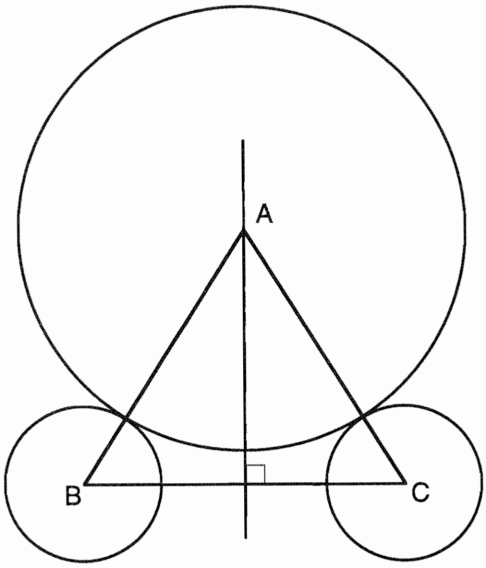
$AC^2 = AH^2 + HC^2$,

$(3,5 + r)^2 = 42 + 2,52$

$r + 3,5 = \sqrt{22,25}$

$r = \sqrt{22,25} - 3,5$

r = 1,2 cm, à un mm près (par défaut).



2) Exemple de message.
La figure à construire est constituée de 4 cercles. Pour repérer et situer leurs centres :
Tracer dans la partie centrale de la feuille un segment [BC] de 5 cm de longueur.
Placer son milieu H et tracer la médiatrice de [BC]. Sur cette médiatrice, dans le même demi-plan limité par [BC], placer A à 4 cm de H et D à 9,5 cm de H (A se trouve entre H et D).
Tracer le cercle de centre D et de rayon égal à 2 cm.
Tracer le cercle de centre A et de rayon égal à 3,5 cm.
Ce dernier cercle coupe les segments [AB] en I et [AC] en J.
Tracer le cercle de centre B passant par le point I.
Tracer le cercle de centre C passant par le point J.
Effacer les traits rectilignes de construction afin de ne conserver que les 4 cercles.

Note : il est important que les messages permettent une construction sur du **papier blanc**.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1. Si l'on se réfère aux instructions officielles, parmi les compétences en jeu on peut relever :
- Savoir décrire quelques figures simples, savoir les identifier dans une figure complexe ;
- Savoir utiliser un vocabulaire précis, savoir communiquer les résultats d'une démarche... ;
- Savoir utiliser des outils usuels tels que le compas... ;
- Savoir construire une figure à partir d'un scénario, c'est-à-dire un texte indiquant les étapes de cette construction.

Note : Cette liste de compétences énoncées dans les I.O. ne saurait suffire comme réponse : Il convient de bien comprendre que dans une telle situation de communication, les compétences attendues pour l'émetteur sont bien différentes de celles attendues pour le récepteur.

Il est essentiel que l'émetteur ait la capacité de prendre en compte le travail futur du récepteur. L'émetteur doit d'abord analyser la figure afin de pouvoir décrire dans un langage clair et précis les étapes qui permettront de la construire. Cela montre l'intérêt de bien maîtriser l'usage d'un vocabulaire géométrique adapté, de savoir désigner les points particuliers de la figure afin de permettre de tracer les cercles. L'émetteur devra également savoir mesurer avec précision et, aussi, bien connaître des techniques de repérage pour situer les éléments de la figure les uns par rapport aux autres (le quadrillage est une aide considérable pour faciliter ce repérage).
Enfin, l'émetteur doit savoir organiser sa description pour faciliter la tâche du récepteur.
De son côté, le récepteur doit bien sûr savoir lire et interpréter le message de l'émetteur, comprendre le langage géométrique utilisé, suivre son scénario de construction, mettre en oeuvre ses propres compétences de repérage, de mesure et d'utilisation des instruments.

Note : La plus grande difficulté de cette situation tient au fait que l'émetteur ayant le modèle sous les yeux, certaines relations perçues visuellement demeureront totalement implicites, alors qu'elles seraient indispensables au récepteur qui, en principe, n'a pas d'idée sur le modèle.

Question 2

2a) Le choix du papier blanc oriente cette activité vers le **mesurage**, nécessitant le recours à des instruments comme la règle graduée, le compas ou l'équerre, alors que le support papier quadrillé l'oriente vers un simple exercice de **repérage.**

2b) Le tracé des deux segments est une aide importante pour situer les centres des cercles ou mettre en évidence des propriétés de symétrie de la figure.

Question 3

3a) Comparaison des démarches des élèves 1 et 2.

Ces descriptions diffèrent par divers aspects : Tout d'abord par l'ordre des tracés des segments qui permettent successivement de situer les centres des cercles (l'élève 1 commence par le grand cercle tandis que l'élève 2 commence par les deux petits cercles). Par la signification du vocabulaire employé (pour l'élève 1, "une perpendiculaire de 2,2 cm" désigne un segment, tracé "vers la droite", et perpendiculaire au segment précédemment tracé ; pour l'élève 2 la "perpendiculaire 95 mm" coïncide avec un segment vertical : ces deux notions ne semblent pas différenciées...). Les mesures sont exprimées en cm pour l'un, avec usage de nombres décimaux, et en mm pour le second, ce qui lui permet ne n'utiliser que des nombres entiers. Les mesures semblent un peu plus rigoureuses pour le second (élève 2) que pour l'autre, si l'on pense que 53 mm, la dernière mesure communiquée, ne peut être due à une erreur de mesurage. L'élève 2 sait, au contraire du premier, désigner un point particulier par une lettre. Cela a le mérite de clarifier l'ensemble de son message. Dans la description de l'élève 1 l'expression "ce point" correspond toujours implicitement au dernier point tracé.

3b) Pour l'élève 2, l'erreur "53 mm de rayon" en fin de message, au lieu de 35 mm, peut être une erreur grossière d'étourderie comme l'inversion des chiffres, une erreur de transcription.

Par ailleurs le message produit ne peut être toujours opérationnel, du fait des deux positions de placement pour le point E, sur la droite (AO).

Note : L'élève 2 utilise le mot "droite" au lieu de "segment", et, ayant tracé un segment, il n'a pas conscience de cette ambiguïté...

Question 4. L'élève 3 a dessiné un bonhomme, avec une tête et des pieds... Son dessin pourrait-il pour autant être exploité en biologie ? (Ah Oui ! l'image du corps...). La référence faite au "nord" incite-t-elle à penser plutôt à une exploitation en géographie ? Il pourrait s'agir également d'une exploitation en arts plastiques des réalisations figuratives à partir de formes géométriques...

Note : Cette question paraît bien éloignée de préoccupations mathématiques et, pour être franc, propre à faire écrire n'importe quoi. Il y avait pourtant un demi-point à glaner en proposant deux "suggestions"...

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

1) Réponse possible[1] : le plus important semble être de travailler en parallèle la numération écrite et la numération orale. Le fait de se limiter à 16 semble justifié (pour les auteurs) par le fait que jusqu'à ce nombre il existe un mot et un seul, suffisant pour désigner les nombres. A partir de 17 (dix-sept), les choses se compliquent pour la numération orale. Ce choix est contestable pour ce qui concerne la numération écrite en chiffres.

2) Réponse possible[2]: La principale difficulté pour des enfants de cet âge consiste à comprendre la différence entre "valeur" et "quantité". L'intérêt d'utiliser la monnaie "à ce moment" peut être :

- d'expérimenter la notion d'échange (une pièce de 5F vaut deux pièces de 2F et une pièce de 1F) ;
- d'apprendre à décomposer des nombres en sommes de deux ou de plusieurs nombres ;
- de faire apparaître le rôle de 10 (exercices 2 et, surtout, 3) ;
- de donner la possibilité d'aborder des quantités et des nombres plus importants dans un contexte cardinal.
- de permettre des validations concrètes à l'aide d'un matériel.

[1] Commentaires sur la question 1: Les quelques éléments dont nous disposons pour répondre sont à extraire du préambule écrit en italiques : les éléments fournis dans le texte paraissent vraiment insuffisants pour identifier la progression et les intentions des auteurs du manuel.

[2] Commentaire sur la question 2: : L'expression "activité" employée dans cette question est bien vague : On ne dispose que des énoncés sous-jacents aux dessins et non de scénarios d'activités. Quels sont les objectifs du maître ? Quelle est la tâche des élèves ? (S'agit-il seulement de regarder les images avant de cocher des cases ?) Est-ce une situation d'apprentissage ? Est-ce une épreuve d'évaluation ? Quel usage peut-il être fait du matériel ?

3) Stratégies "possibles" :
Utiliser des procédures de calcul : "Luc a 9 F et Marie a 5F, et 5 c'est moins que 9, donc..."
Utiliser des procédures de comparaison : "Luc a deux pièces de 2 F et Marie aussi. C'est pareil, mais il reste encore une pièce de 5 F à Luc et une pièce de 1 F à Marie. Luc a plus d'argent que Marie."
Utiliser un raisonnement logique pour répondre "non" à la troisième question en tenant compte de la réponse "oui" à la première question.
Utiliser les jetons, bien que la confusion entre jetons et pièces soit un parasite prévisible.

4) On augmente le nombre de collections à comparer (quatre au lieu de trois), et surtout les sommes à comparer, qui sont toutes des nombres supérieurs à 20, donc supérieurs à 16 qui était la limite du domaine numérique en principe fréquenté par les enfants. Ce choix délibéré semble destiné à décourager des procédures de calcul au profit des procédures de comparaison.
Pour comparer l'argent du chat et celui de l'ours, l'élève peut par exemple enlever à chacun une pièce de 10 F et une pièce de 5 F. Il reste 8 F au chat et 6 F à l'ours. Cette comparaison est donc intéressante à étudier pour faire constater que ce n'est pas celui qui a le plus de pièces qui a le plus d'argent.

5) Qu'apporte l'activité 3 ? Cette activité permet d'aborder la décomposition de 10 en une somme de deux ou de plusieurs nombres. Elle vise explicitement la compréhension de la différence entre "valeur" et "quantité" : Line et Eric n'ont pas le même nombre de pièces mais ont la même somme d'argent. C'est donc la notion, difficile, de "autant que" qui est visée.

Note : le libellé de la première question posée risque d'ailleurs de poser quelques problèmes de compréhension aux élèves.

6) Proposition d'exercice : Nous proposons de valoriser une situation "fonctionnelle" dans laquelle la résolution d'un problème nécessite effectivement une décomposition de 10 , par rapport à des exercices imposant de le faire sans autre justification que le respect d'une consigne. Voici un exemple simple, le "jeu de la marchande" :
Des élèves "acheteurs" ne disposent que de pièces de 10 F. Ils doivent acheter divers objets valant 7 F, 12 F, 8 F etc... Ils sont donc contraints de faire des échanges et amenés à décomposer 10 pour payer la somme exacte correspondant au prix des objets qu'ils désirent acheter.

Rouen

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES

Exercice 1

Question 1) Un entier naturel à deux chiffres peut s'écrire " a + 10b " où a est le chiffre des unités et b le chiffre des dizaines.
Si cet entier est égal au double de la somme de ses chiffres, nous avons: $a + 10b = 2(a+b)$
d'où $a+10b = 2a+2b$, d'où $8b=a$.
Or a et b sont au plus égaux à 9, et $b \neq 0$ (nombre à deux chiffres), donc la seule solution est a=1 et b= 8.
<u>Le nombre 18 est le seul nombre qui répond à la question.</u>

Question 2) Si le nombre était égal à la somme de ses chiffres, on aurait:
$a+10b = a+b$ d'où $9b = 0$ d'où $b = 0$ impossible car le nombre a deux chiffres
<u>Il n'existe pas de nombre qui réponde à la question.</u>

Question 3) Si l'on effectue la division de 100 001 par 11, on constate que 100 001 = 11x9091 = 11k avec k nombre entier.
Donc <u>100 001 est un multiple de 11.</u>

- On peut aussi appliquer le caractère de divisibilité par 11 : somme des chiffres de rang pair : 1 somme des chiffres de rang impair : 1 différence : 1-1=0 ; 0 est multiple de 11 donc le nombre est multiple de 11.

Question 4) On cherche les diviseurs premiers de 1001 en examinant la liste des nombres premiers (2,3,5,7,11...) et en utilisant éventuellement les caractères de divisibilité .
1001 n'est pas divisible par 2 (dernier chiffre "1" non divisible par 2), ni par 3 (somme des chiffres "2" non divisible par 3) ni par 5 (dernier chiffre "1" différent de 0 ou 5).
La division par 7 donne: 1001= 7x143 et la division de 143 par 11 (qui s'effectue mentalement) donne:
143= 11x13 d'où la décomposition:
$\boxed{1001 = 7 \times 11 \times 13}$

- on peut trouver aussi par des décompositions astucieuses de 1001. Exemple:
1001= 990+11= 11x90 + 11 = 11x(90+1)= 11x91= 11x13x7

Question 5) $\dfrac{1001}{100001} = \dfrac{7x11x13}{11x9091} = \dfrac{7x13}{9091}$
Or 9091 n'est divisible ni par 7 ni par 13. En effet:

solution 1:	solution 2:
La division euclidienne de 9091 par 7 donne : 9091=1298x7+5 et celle de 9091 par 13 : 9091=699x13+4	En tapant sur la calculette 9091÷7 nous obtenons 1298,7142 qui est une valeur approchée du quotient; ce quotient n'est donc pas un nombre entier; de même pour 9091 par 13(nous obtenons 699,30769)

La dernière fraction de l'écriture ci-dessus ne peut donc pas être simplifiée. D'où:

$$\boxed{\frac{1001}{100001}=\frac{91}{9091}}$$

* $\frac{2500025}{825}=\frac{25x100001}{25x33}=\frac{11x9091}{33}=\frac{9091}{3}$ en simplifiant par 25, puis en utilisant la question 3), puis en simplifiant par 11.
Or 9091 n'est pas multiple de 3 (la somme de ses chiffres est 19, ce n'est pas un multiple de 3)

La dernière fraction est donc irréductible. D'où:

$$\boxed{\frac{2500025}{825}=\frac{9091}{3}}$$

Question 6) Un nombre de la forme donnée peut s'écrire:
a+10c+100c+1000b+10000b+100000a= 100001a+11000b+110c
= 11x9091a + 11x1000b + 11x10c = 11 (9091a +1000b+10c) = 11xK K entier
Donc le nombre proposé est bien un multiple de 11.
On peut aussi utiliser le critère de divisibilité par 11: la somme des chiffres de rang pair est a+c+b; la somme des chiffres de rang impair est c+b+a; la différence est nulle , donc multiple de 11. Donc le nombre est multiple de 11.

Question 7) Un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
Donc le nombre donné est divisible par 9 si et seulement si : a+b+b+c+c+a est divisible par 9
soit : 2(a+b+c) divisible par 9;
comme 2 et 9 sont premiers entre eux, cela équivaut à : (a+b+c) divisible par 9.
Les nombres a,b,c sont au plus égaux à 9, et ne sont pas nuls.
Donc <u>les seules valeurs possibles pour a+b+c sont 9 ; 18 et 27</u>

Le nombre 788 337 est bien de la forme précédente avec a=7 ; b=8 et c=3 ; donc, d'après la question 6), il est divisible par 11.
D'autre part, dans ce cas, a+b+c=18, donc d'après ce qui précède, il est aussi divisible par 9.
Or 9 et 11 sont premiers entre eux, donc il est divisible par leur produit.
Donc <u>788 337 est divisible par 99.</u>

Question 8-1) 14= 2x7   21= 3x7   42= 2x3x7   le PGCD de ces nombres est donc 7.

Question 8-2) si 7 est un diviseur commun à $\overline{ab}$ et $\overline{bc}$, nous avons: $\overline{ab}$= 7xk et $\overline{bc}$=7xm avec k et m entiers.

D'où 10a+b=7k (1) et 10b+c=7m (2)

$\overline{ca}$ = 10c+a et d'après (2),

10c = 70m-100b d'où en reportant dans $\overline{ca}$, on a $\overline{ca}$ = 70m-100b+a.

D'après (1) 100b = 700k - 1000a d'où en reportant dans $\overline{ca}$ $\overline{ca}$ = 70m-700k+1000a+a

d'où $\overline{ca}$ = 7x10m - 7x100k + 1001a= 7x10m - 7x100k + 7x143a = 7 (10m-100k+143a) = 7×h avec h entier.

Donc $\overline{ca}$ est bien divisible par 7.

$\overline{abbcca}$ = $\overline{ab}$x10000 + $\overline{bc}$x100 + $\overline{ca}$

Si $\overline{ab}$ et $\overline{bc}$ sont divisibles par 7, $\overline{ab}$x10000 et $\overline{bc}$x100 sont aussi divisibles par 7, d'autre part, d'après ce qui précède, $\overline{ca}$ est aussi divisible par 7.

$\overline{abbcca}$ est une somme de nombres divisibles par 7, il est donc divisible par 7.

$\overline{abbcca}$ est donc aussi divisible par 7

Question 8-3) Nous dressons d'abord la liste des multiples de 7 s'écrivant avec deux chiffres (excepté 70 car a, b et c sont non nuls) : 14; 21; 28; 35 etc. jusqu'à 98.

Pour chaque nombre $\overline{ab}$ de la liste , nous cherchons le ou les nombres $\overline{bc}$ en déterminant c pour que $\overline{bc}$ soit un multiple de 7; le nombre $\overline{ca}$ s'en déduit aussitôt.

Exemple pour $\overline{ab}$ = 14; on cherche le ou les multiples de 7 commençant par 4; on trouve soit $\overline{bc}$=42 soit $\overline{bc}$=49 ; et par conséquent soit $\overline{ca}$= 21 soit $\overline{ca}$ = 91.

D'où la liste:

144221 / 144991	211442	288442	355663	422114 / 422884
499114 / 499884	566335			
633556	777777	844228 / 844998	911449	988449.

D'après la question 8-2) tous ces nombres sont divisibles par 7.

D'après la question 6) ils sont tous divisibles par 11.

7 et 11 étant premiers entre eux, tous ces nombres sont donc divisibles par le produit 7x11.

Donc tous les nombres de la liste ci-dessus sont divisibles par 77.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1) L'énoncé ne précise pas sur quel support le récepteur du texte doit reproduire la figure:

- papier blanc? quadrillé avec le même format? quadrillé avec un format différent?
- certains codages de points figurent-ils déjà? (parmi les neuf points désignés sur le modèle).

La façon de supprimer l'imprécision est de donner les informations qui manquent au sujet du support, en complétant la consigne de l'exercice

Par exemple:

" ... sur du papier quadrillé identique à celui du modèle, et sur lequel aucun point n'est indiqué "

Remarque: Nous supposons qu'il s'agit de construire une figure superposable au modèle, c'est à dire que la reproduction est "en vraie grandeur". S'il s'agissait seulement de construire une figure semblable (à une autre échelle que 1, éventuellement), on pourrait supprimer dans la réponse ci-dessus l'information "identique à celui du modèle"

Question 2) Les indications qui doivent figurer dans le texte :

Nous supposons dans cette question et dans la suivante:
- qu'il s'agit de construire la figure en vraie grandeur
- que l'énoncé a été complété par notre proposition ci-dessus[1]

Exemple d'indications suffisantes:

a) pour coder les neuf points	ABCD carré de 4 carreaux de côté; O le centre ; I,J,K,L milieux respectifs de [AB], [BC],[CD], [DA]
b) pour tracer le demi-cercle	le centre (O) ,les extrémités (I et K) et la position ("passant par J", ou "dans le demi-plan contenant B ")
c) pour tracer les quarts de cercle	pour chacun, le centre (A ou D) et les extrémités (I et L; K et L)
d) pour colorier la partie convenable	la surface délimitée par les trois arcs de cercle

Remarques:
1) Nous avons considéré ici que l'orientation de la figure sur la feuille n'avait pas d'importance. Si la consigne précisait que la figure construite devait avoir la même orientation que le modèle, il faudrait ajouter des indications dans a). Par exemple:" A est en haut à gauche, et B en haut à droite".
Cette indication doit également être ajoutée si nous voulons utiliser par la suite l'orientation pour préciser la position des arcs de cercle (exemple: "le demi-cercle à droite dans le carré" (cf. les travaux d'élèves).

2) Les indications ci-dessus ne sont pas toutes indispensables. Il existe d'autres façons de réaliser a) b) et c), ce qui donne de très nombreux ensembles d'indications suffisantes:
- a) pour le codage des neuf points ,
** la référence au carré n'est pas indispensable . D'autres méthodes (moins géométriques) sont possibles: par exemple, en utilisant les déplacements sur quadrillage "place le point A au hasard; à deux carreaux vers la droite, le point I; etc.", méthode qui a l'avantage de donner en même temps l'orientation.*
** si l'indication des extrémités des arcs de cercle est remplacée par celle des rayons , il n'est pas indispensable de placer les points I J K L.*
- b) pour le demi-cercle: si le texte précise "demi-cercle" il suffit d'indiquer:
** le centre, le rayon et la position*
** les extrémités et la position*
** si l'orientation a été précisée, la position peut être indiquée par "dans la partie droite du carré"*

[1] d'autres réponses sont possibles, bien sûr, en faisant d'autres hypothèses: il serait fastidieux de les envisager toutes ici ; il est clair que la cohérence entre les réponses et les hypothèses sera appréciée pour le concours.

- c) <u>les quarts de cercle:</u> *si le texte précise "quart de cercle", il suffit d'indiquer:*
** le centre, le rayon et l'indication "à l'intérieur du carré"*
**le centre, un point et l'indication "à l'intérieur du carré"*

- pour le codage des points, ou pour l'indication des longueurs des rayons, le dénombrement des carreaux peut être remplacé par la mesure en cm.

Question 3) Grille d'analyse:

	A	B	C	D	E	F
codage des points						
carré longueur côté A,B,C,D centre I,J,K,L	oui - "coin" D et A O -	 *I,L,K,A,D* *sont utilisées*	oui 4 carreaux sur des angles - I,J,K confus	oui 6,1cm oui - -		oui - oui - J,K,L confus
autre codage des points		*sans être définies*			disposition des lettres	
demi-cercle						
demi-cercle centre extrémités rayon position	oui - - - - confus	oui - - - -	oui oui(milieu du c.) - - oui(orientati on)	"demi-lune" oui (milieu) - - oui(orientati on)		oui - oui - -
quarts de cercle						
quarts de c. centre extrémités rayon position	"tiers" confus - confus -	oui confus oui - -	oui oui - - oui	1/5 oui - oui oui		oui - oui - -

<u>**Etude des productions des élèves:**</u>

* Aucun enfant n'a donné d'indications sur le coloriage de la figure; c'est pourquoi nous ne l'avons pas mis dans le tableau..
Dans l'étude qui suit, quand nous parlons de "réaliser la figure", il s'agira donc du contour.
* Il faut noter également qu'aucun élève n'a défini l'orientation du carré sur le quadrillage.

<u>**La lecture de la grille nous montre qu'aucune production ne donne les indications suffisantes pour réaliser la figure:**</u>

<u>A et B :</u> Il manque beaucoup d'informations. Par exemple, pour le demi-cercle, nous ne trouvons dans A qu'une indication confuse sur la position, et dans B, rien.

C : Il n'a indiqué ni les extrémités, ni le rayon pour les trois arcs de cercle. D'autre part, la position du demi-cercle utilise l'orientation sur la feuille, et il ne l'a pas définie.

D : Il n'a indiqué ni les extrémités, ni le rayon pour le demi-cercle ; les mesures sont visiblement fausses (3,3 n'est pas la moitié de 6,1) ; et même problème d'orientation que C.

E : Aucune mention des arcs de cercle !

F : Il manque la position pour le demi-cercle; la position et le centre pour les quarts de cercle. Aucune indication sur les dimensions.

COMPLEMENT

Nous donnons ci-dessous , pour l'information des candidats, une analyse plus approfondie que celle qui était attendue avec ce sujet.

Une analyse plus fine des productions nous montre que C, F, et surtout D, pourraient, avec des interprétations favorables, conduire à la "bonne" figure

Nous pouvons admettre en effet que le récepteur d'un tel texte "décode" les informations données en fonction de connaissances implicites (sur le codage des points, sur l'allure finale de la figure, etc.)

Production C

- Les indications pour les quarts de cercle utilisent le codage des points A et D, et celles pour le demi-cercle utilisent l'orientation dans la feuille. La figure sera donc différente si le récepteur place les points A, B, C et D différemment sur le carré ; cependant, les figures obtenues de cette façon sont très différentes de celles rencontrées habituellement ; nous pouvons donc supposer que le récepteur fera le bon choix.

- D'autre part, C ne donne pas d'indications sur les rayons des arcs de cercle ; nous pouvons admettre que le récepteur comprendra que le demi-cercle occupe toute la partie droite du carré; mais pour les quarts de cercle, plusieurs interprétations sont possibles (cf figure 1).

Il faudra un peu de chance pour que le récepteur construise la bonne figure (peut-être en supposant que les arcs de cercle doivent se toucher ?).

Production D:

- Nous pouvons faire la même hypothèse que pour C quant au choix de l'orientation sur la feuille ;

- Nous supposerons qu'un récepteur peut comprendre "milieu" et "demi-lune" ; et comprendre aussi que le demi-cercle occupe toute la partie droite,

- Nous pouvons supposer aussi qu'un récepteur peut rectifier les erreurs de mesure (6,1 au lieu de 6,2 et 3,3 au lieu de 3,1) s'il pense qu'il faut utiliser le quadrillage.

- Nous supposerons enfin que certains récepteurs peuvent lire "1/5 de cercle" comme "arc de cercle" et interpréter "dans le carré" comme "allant d'un côté à l'autre du carré"

Avec ces interprétations, certains récepteurs peuvent réaliser la figure à partir de ce texte.

Nous pensons qu'elle est moins hasardeuse que C, car les quarts de cercle sont mieux définis, et quand ils sont tracés, un demi-cercle trop petit a des chances d'être écarté, car il ne rejoint pas les quarts de cercle (cf fig.2)

Production F:

- Pour le demi-cercle, il manque "passant par J", il y a donc deux possibilités,

- Pour les quarts de cercle, il manque le centre; il y a donc pour chacun deux possibilités (la bonne et le centre O) ; mais celles de centre O peuvent paraître "suspectes" au récepteur puisque, soit elles complètent le demi-cercle passant par J (pourquoi ne pas avoir dit de tracer le cercle entier ?) soit elles coïncident avec le demi-cercle passant par L ; on peut supposer que le récepteur choisira les "bons" quarts de cercle, ce qui ne laisserait que deux possibilités (cf fig. 3).

- D'autre part, les dimensions du carré ne sont pas données: il faudra donc un petit peu de chance pour obtenir la figure identique!

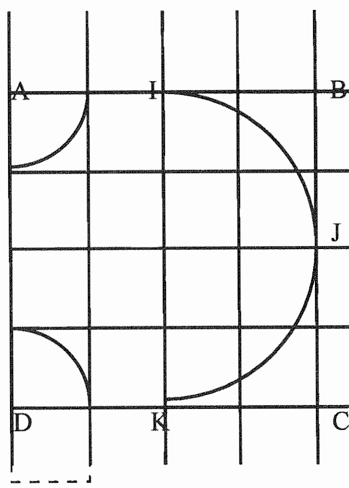


Fig. 1

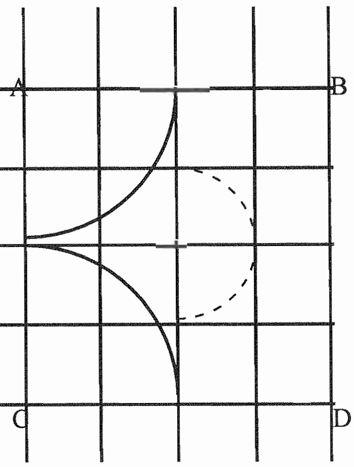


Fig. 2

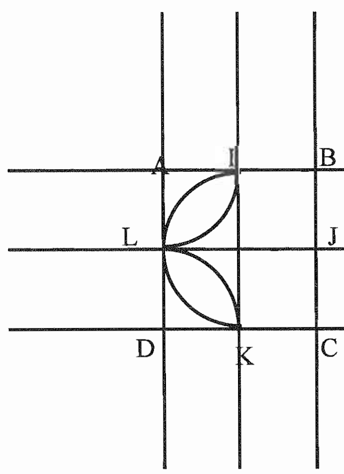


Fig. 3a

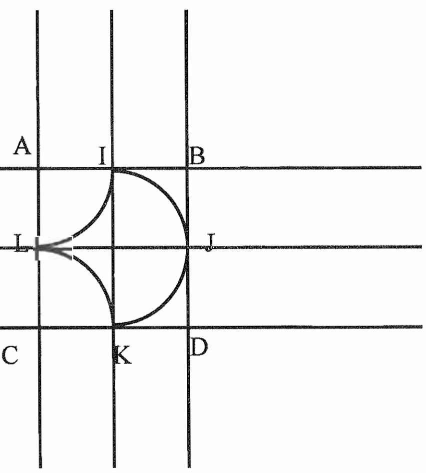


Fig.3b

Commentaire sur le sujet : cette question " étudier les productions des élèves" est très vague ; l'étude pourrait porter sur d'autres points (connaissances mises en jeu, vocabulaire utilisé...)
Nous avons choisi de l'interpréter comme " dire, pour chaque production, si elle permet ou non de réaliser la figure", ce qui parait cohérent avec la fin de la question et avec la question 2).
L'étude aurait pu porter aussi sur **l'analyse des difficultés des élèves** :
* difficulté pour prendre du recul par rapport à la figure que l'on a sous les yeux, et pour s'imaginer à la place de celui qui ne la voit pas; c'est le cas en particulier de B (qui utilise les lettres sans les définir), et de E (qui prend la peine de bien expliquer le contour de la figure alors qu'il n'a pas défini les arcs de cercle!).
* difficulté pour formuler clairement les informations.

Nous pourrions ajouter que c'est en organisant de véritables situations de communication entre les élèves, et en leur permettant ainsi d'être alternativement émetteurs de textes qui devront être compris par d'autres élèves, pour construire une figure identique, puis récepteurs de textes écrits par d'autres, que nous les faisons progresser dans ce type d'activité.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

INFORMATIONS PRELIMINAIRES

Avant de nous lancer dans l'analyse de la situation proposée en annexe 2, nous devons dire d'abord qu'elle n'est pas pertinente en CM et expliquer pourquoi.

Cette situation avait été expérimentée en CM, en 79, par un groupe de l'IREM de Poitiers et son compte-rendu figure dans un document de cet IREM, intitulé "Situations-problèmes au cycle moyen" et paru en Février 81.
Après avoir décrit un déroulement sur deux séances, et une résolution essentiellement collective, avec la participation constante du maître, les auteurs concluent:

"Nous avions préparé cette situation par une série de leçons sur plans et échelles, pensant que ce serait la difficulté majeure pour les enfants. Or ils se sont heurtés encore, et surtout, à des problèmes de langue avec les expressions "à moins de" et "à plus de", et à des problèmes géométriques. D'autre part, ils ont découvert par des constructions le plus souvent point par point, le disque comme ensemble de points du plan distants de moins de x d'un point donné (le centre), et la bande comme portion de plan comprise entre deux lignes droites parallèles. Nous n'avions pas soupçonné ces difficultés, croyant les notions de disque-cercle et bandes parallèles acquises au niveau CM. C*es objets géométriques sont souvent observés mais rarement construits en réponse à un problème posé.*

E**n conclusion, nous estimons que cette situation ne doit pas être proposée sous une forme si globale à des enfants de CM"** et les auteurs proposent ensuite de la scinder en deux (disques et bandes) et de la dissocier du problème de plan-échelle.

Il faut noter que cette expérimentation s'inscrivait dans une tentative de mise au point de "situations-problèmes" faisant fonctionner les connaissances mathématiques enseignées, ici les notions de cercles et de droites parallèles. Mais les auteurs se sont heurtés à des difficultés imprévues, que certaines recherches en didactique des mathématiques sont venues éclairer depuis.

Par exemple, on sait maintenant qu'il est très difficile pour des élèves de CM d'envisager le cercle comme ensemble de points (cf l'article de M.Artigue dans *Petit x N°27* "A propos des conceptions du cercle"). A la demande " marque des points à 3cm du point O" , ils commencent par tracer [OA] horizontal, A à 3cm de O ; il faut insister pour qu'ils envisagent le point à gauche de O, puis les points à 3cm de O, verticalement. Et il faut encore une relance du professeur pour qu'ils envisagent d'autres directions.
D'autre part, même après avoir construit un grand nombre de points à 3cm de O , ils ont du mal à comprendre qu'il suffit de tracer le cercle pour les avoir tous: un trait continu n'est pas perçu comme un ensemble (infini!) de points.
Il est vrai que l'on trouve sur quelques manuels des séquences où les élèves, après avoir tracé un cercle de rayon R, sont invités à mesurer la distance du centre à un point du cercle, ou du centre à un point du disque, ou du centre à un point extérieur au disque et à constater : que d = R, d<R et d>R. Mais ces observations ne suffisent pas pour construire une conception du cercle (ou du disque) comme ensemble de points. (c'est sans doute ce que les auteurs du compte-rendu pressentaient dans la phrase en italiques).

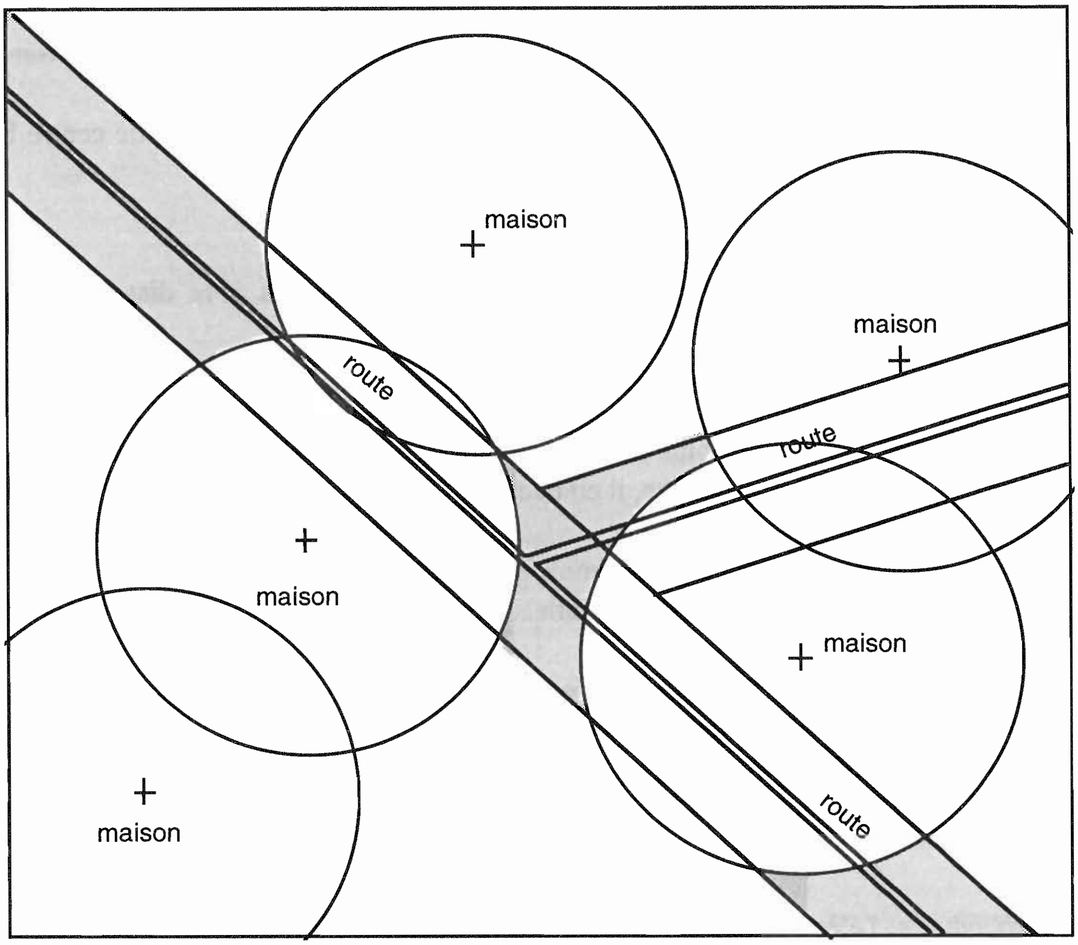
Les élèves rencontrent les mêmes difficultés pour trouver "tous les points qui sont à 1cm d'une droite."
A la difficulté de la notion de ligne continue comme ensemble de points, s'ajoute celle de mesurer la distance d'un point à une droite. Or cette notion ne figure ni au programme, ni dans les évaluations 6°, ni dans la plupart des manuels de CM...On n'y trouve que la distance de deux droites, et encore de façon tout à fait implicite, quand on utilise des bandes de différentes "largeurs" pour définir les parallélogrammes comme intersection de deux bandes.

Il faut ajouter que ces deux problèmes "points à plus de 3cm de O" et "points à moins de 1cm de (D)", qui pourraient chacun constituer une situation de recherche en CM, déjà un peu marginale par rapport à l'enseignement de la géométrie à l'école primaire, ne sont ici qu'une petite partie d'une situation très difficile sur le plan logique (conjonction de plusieurs propriétés), et nécessitant en outre une maîtrise de la notion de plan.
Il n'est donc pas étonnant que cette situation, proposée souvent en formation initiale (depuis les années 70), conduise tous les ans des étudiants à de nombreuses erreurs!

Après l'analyse précédente, nous ne pouvons faire qu'un corrigé formel, en imaginant un élève fictif, dont il est difficile de situer le niveau, sinon qu'il est plus proche de celui d'un élève de collège que de l'élève de C.M...

Etude de l'annexe 2.

Question 1)



(Attention, cette figure n'est qu'une approche. En particulier, les mesures sont approximatives).

Pour la condition "à plus de 600m de chaque maison", j'ai tracé les cercles de rayon 3cm, centrés sur chaque maison.
Pour la condition "à moins de 200m d'une route", j'ai tracé des droites parallèles aux routes, de part et d'autre de celles-ci, à 1cm du bord le plus proche.
J'ai hachuré l'ensemble des points qui sont à la fois à l'intérieur d'une des deux bandes axées sur les routes et à l'extérieur de tous les disques.

Question 2) Pour simplifier l'analyse, nous supposons que l'élève commence par appliquer l'échelle, et se pose le problème "trouver les points qui sont à plus de 3cm de ce point O".[2]

* procédure 1 (procédure experte) :
L'élève connait déjà la partition du plan liée à la distance à un point:

[2] La réalité est sans doute plus complexe, certains élèves raisonnant tantôt en mètres, sur les "vraies" maisons, tantôt en cm, sur les points représentant les maisons, faisant ainsi des va-et-vient entre le macro-espace des routes et des maisons, et le micro-espace de la feuille ; ce qui, bien sûr, ne simplifie pas leur recherche...

- l'ensemble des points M tels que d(M,O)=R est le cercle C(O,R).
- l'ensemble des points M tels que d(M,O)<R est l'intérieur du disque de centre O et de rayon R.
- l'ensemble des points M tels que d(M,O)>R est l'extérieur du disque de centre O et de rayon R.

Pour éviter des répétitions fastidieuses, nous appellerons "théorème 1" l'ensemble de ces trois résultats.

Il reconnaît ici la condition qui définit l'extérieur du disque, il trace le cercle de centre la maison et de rayon 3cm, et hachure la partie convenable .

* procédure 2 (semi-experte) :
L'élève sait déjà que le cercle C(O,R) est l'ensemble des points à la distance R du point O (théorème 1-bis)
Après éventuellement quelques tâtonnements (cf procédure 3), il pressent qu'il existe une frontière entre les points convenables et les points interdits, et que cette frontière est l'ensemble des points qui sont exactement à 3cm du point O. Il trace alors le cercle convenable, et en mesurant, pour quelques points, leur distance au centre, il en déduit la zone convenable.

* procédure 3 (procédure de base):
L'élève n'a aucune conception du cercle comme ensemble de points.
Il utilise sa règle graduée (ou bien une punaise et une ficelle) pour chercher des points isolés vérifiant la condition.
Cette procédure ne peut pas lui permettre de trouver "tous les points"; mais elle peut constituer la "procédure de base" dans la résolution de ce problème.
Dans certaines conditions didactiques, les élèves pourront faire évoluer cette procédure , découvrir la propriété caractéristique du cercle comme ensemble de points, et passer à la procédure 2.

* autres procédures: l'élève peut décider d'emblée de chercher plutôt l'ensemble des points interdits, c'est à dire ceux qui sont à moins de 3 cm de O ; il peut alors utiliser une des procédures de 1 à 3.

Note des auteurs : nous préférons répondre d'abord à la question 4)a) car nous nous servirons de l'analyse de la tâche de l'élève pour essayer de prévoir les erreurs des élèves

Question 4) a) tâche de l'élève:
1- comprendre qu'il s'agit d'un plan, et utiliser l'échelle pour trouver la longueur correspondant à 200m (il suffit de lire l'échelle) et celle correspondant à 600m (cas très simple de proportionnalité ; il suffit de multiplier par 3),
2- comprendre qu'il ne faut pas chercher directement des points qui vérifient toutes les conditions, mais qu'il faut examiner successivement les 7 conditions (concernant 5 maisons et 2 routes),
3- déterminer pour chaque maison l'ensemble des points vérifiant la condition "à plus de 3cm" (cf question 2),
4- déterminer pour chaque route l'ensemble des points vérifiant la condition "à moins de 1cm" (nous pourrions faire une analyse analogue à celle de la question 2),
5- en déduire l'ensemble des points qui vérifient toutes les conditions et le hachurer.

Question 3) Examinons les erreurs possibles dans les 5 étapes dégagées en 4)a):
1- erreur dans la prise en compte de l'échelle ;

* par exemple "6cm" pour "600m" et "2cm" pour "200m" pour ceux qui n'auront pas lu l'échelle et qui prendront celle qui leur parait la plus simple,
* ou bien "5cm" pour "600m" pour ceux qui mélangeront proportionnalité et modèle additif ("5=6-1" comme "1=2-1" dans 200m<-->1cm).

2- l'élève a trouvé un ou des points isolés vérifiant bien toutes les conditions (ou bien une partie des conditions)

3-4 erreur dans la détermination des points à plus de 3cm d'une "maison" , ou de ceux qui sont à moins de 1cm d'une route

* détermination de points isolés vérifiant la condition, sans prise de conscience d'une frontière continue
* une frontière est tracée en reliant des points isolés par des segments, ce qui donne un polygone au lieu d'un cercle ; ou bien des segments disjoints au lieu de droites parallèles aux routes
* pour la route, erreur dans la recherche point par point : la distance n'est pas prise perpendiculairement à la route *(soit par manque de connaissances - notion de distance d'un point à une droite- ; soit par manque de savoir-faire - tracé d'une perpendiculaire)*
* confusion entre "à moins de " et "à plus de "

5 erreur dans la prise en compte de toutes les conditions

Quand les cercles et les droites convenables sont tracés, le passage de l'énoncé des contraintes, à la détermination de la zone convenable nécessite des raisonnements logiques difficiles et peut donner lieu à de nombreuses erreurs. [3]

b) connaissances supposées acquises avant cette séance

Pour comprendre le problème posé:

* notion d'échelle, utilisation de la proportionnalité pour trouver une longueur sur la carte
* distance de deux points, savoir la mesurer, savoir tracer des points à une distance donnée d'un point donné
* distance d'un point à une droite, savoir la mesurer, savoir tracer des points à une distance donnée d'une droite donnée (donc savoir tracer des droites perpendiculaires à une droite donnée)
* notions de logique suffisantes pour comprendre les contraintes.

Pour résoudre le problème en une séance:

* avoir déjà rencontré le théorème 1, pour résoudre le problème des points "à plus de 600m d'une maison"
* avoir déjà rencontré le théorème 2 , pour résoudre le problème des points "à moins de 200m d'une route" :
    - l'ensemble des points à une distance d d'une droite D est constitué de deux droites parallèles, de part et d'autre de D
    - l'ensemble des points à une distance inférieure à d de la droite D est la bande comprise entre ces deux parallèles
    - l'ensemble des points à une distance supérieure à d de la droite D est l'extérieur de la bande formée par les deux parallèles.

---

[3] En effet, pour hachurer la zone convenable,
il faut comprendre qu'il suffit que l'usine soit à moins de 200m d'une des deux routes, et donc prendre la réunion des deux bandes ,
et comprendre aussi que l'usine doit être à plus de 600m de toutes les maisons et donc prendre l'intersection de tous les extérieurs des disques;
et pour finir, puisque les deux contraintes doivent être réalisées en même temps, il faut prendre l'intersection des deux parties précédentes...
on peut encore prendre la réunion des deux bandes, et éliminer dans cette réunion les zones interdites, c'est à dire les intérieurs des disques: ce raisonnement nous parait plus simple, bien que les opérations logiques sous-jacentes ne le soient pas, et qu'il présente la difficulté d'obliger l'élève à raisonner sur "ce qu'il ne faut pas prendre" au lieu de "ce qu'il faut prendre"

c) connaissances pouvant être construites par les élèves au cours de la séance

La situation proposée ne permet pas, en une séance, de construire véritablement des connaissances nouvelles. Si les élèves connaissent déjà, comme nous le supposons, les partitions du plan liées aux distances (théorème 1 et 2), alors la situation peut leur permettre de consolider ces connaissances, en s'en servant pour résoudre un problème difficile .

Autres réponses possibles pour les questions b) et c):

Nous pouvons envisager d'autres réponses cohérentes à ces deux questions.

Pour le problème de l'ensemble des points à plus de 3cm d'une maison, nous pouvons faire trois hypothèses (qui correspondent à l'analyse de la question 2):

1) l'élève connaît le théorème 1, la situation permet une consolidation
2) l'élève connaît seulement le théorème 1-bis, la situation permet d'en déduire le théorème 1
3) l'élève n'a aucune connaissance sur l'ensemble des points à une distance donnée d'un point donné, la situation lui permet de construire le théorème 1-bis ; puis le théorème 1.

Nous pouvons faire de la même façon, trois hypothèses pour le problème de l'ensemble des points à moins de 1cm d'une route.

Nous obtenons ainsi neuf réponses cohérentes, dont la pertinence dépend du niveau de raisonnement de l'élève, et de la façon dont la situation est conduite en classe[4].

d) L'institutionnalisation pourrait porter sur les connaissances mises en jeu dans la séance:

* les connaissances sur les ensembles de points liés à la distance à un point et à une droite (théorème 1 et 2)

* les raisonnements logiques nécessaires pour mettre en relation les contraintes, et la gestion des ensembles de points, sous forme de schémas, représentant des zones correspondant soit à la conjonction de deux propriétés ("à moins de 3cm du point A et à plus de 5 cm du point B") soit à la disjonction de deux propriétés (" à moins de 5cm de l'un ou l'autre des points A et B").

Etude de l'annexe 3

Question 5) a) tâche de l'élève:

1- comprendre qu'il s'agit d'un plan, et utiliser l'échelle - pour trouver les longueurs sur le plan, ou pour trouver les longueurs réelles de celles mesurées sur le plan - (très facile ici)

2- comprendre la troisième donnée comme la conjonction de deux contraintes: "à moins de 300m de l'école **et** à moins de 300m de la mairie"

3- comprendre qu'il faut envisager d'abord séparément chacune des quatre contraintes

4- pour chacune des quatre contraintes, chercher l'ensemble des points convenables et reconnaître la frontière parmi les courbes déjà tracées; en déduire la zone convenable pour cette contrainte[5]

5- hachurer la zone demandée , en prenant l'intersection des 4 zones précédentes

6- rédiger la solution.

---

[4] Si, comme c'était le cas dans le compte-rendu évoqué dans les informations préliminaires, l'ensemble du problème est résolu "collectivement", c'est à dire essentiellement "par le maître", et que les enfants ne sont vraiment confrontés seuls qu'aux deux problèmes élémentaires d'ensemble de points (à plus de 3cm d'un point; et à moins de 1cm d'une droite) , on peut envisager une réponse aux questions b) et c) avec moins de connaissances préalables, et plus de construction de connaissances.

[5] Il faudrait commencer par corriger les erreurs de cette fiche: les cercles ne représentent pas l'ensemble des points à 300m de l'école, ou de la mairie, car l'école et la mairie sont représentées par des rectangles; il faudrait remplacer ces rectangles par des points pour que les cercles conviennent.

Vous trouverez en fin du du corrigé la courbe représentant l'ensemble des points à 300m de l'école --- qui nous montre que la recherche de l'ensemble des points à une distance donnée d'une figure donnée n'est pas un problème tout à fait élémentaire !...

b) connaissances supposées acquises avant cette séance
- les mêmes connaissances pour comprendre le problème que pour la situation de l'annexe 2.
- la capacité à lire et à comprendre un texte complexe
- la capacité à formuler et valider sa démarche.

c) connaissances pouvant être construites dans la séance :
* les connaissances sur les ensembles de points liés à la distance à un point et à une droite (théorème 1 et 2).
La situation peut permettre une première approche de ces notions.
Nous pensons en effet que la présence des cercles et droites déjà tracés peut permettre aux élèves de découvrir la propriété de ces courbes comme ensemble de points ; l'élève commence à chercher des points à moins de 3cm du point "mairie" et se rend compte alors que tous les points du cercle sont exactement à 3cm, il peut alors en déduire la zone convenable. Nous pensons que la découverte est beaucoup plus facile qu'à partir d'une feuille blanche.
Il faut cependant, pour que cette construction de connaissances soit possible, faire une hypothèse sur la conduite de cette séance par l'enseignant ; le contrat didactique doit être tel que l'élève ne se sent pas obligé d'utiliser les droites et cercles tracés, la seule injonction est de résoudre le problème, et c'est à l'élève de voir si certaines courbes déjà tracées peuvent lui servir.

Autres réponses aux questions b) et c):
Nous pouvons bien sûr envisager ici les neuf réponses possibles définies pour l'annexe 2.
En particulier, la réponse que nous avons donnée pour l'annexe 2 (connaissance préalable des théorèmes 1 et 2; pas de construction, simple consolidation de ces théorèmes) pourrait être donnée ici si le contrat didactique ne met pas les élèves en position de résoudre le problème comme ils veulent, et limite leur activité au coloriage de la zone convenable.
d) exemples de réponse à la consigne:
1- simple description de la zone:
" il faut prendre les points qui sont à l'intérieur des deux cercles (ou dans la partie commune aux deux disques) et qui sont en même temps entre la droite bleue et la droite rouge" (il nous parait indispensable de désigner les droites)
2- description et justification de la zone en fonction des contraintes:
" le réservoir doit être à moins de 300m de l'école, alors il faut prendre les points à l'intèrieur du disque qui est autour de l'école ..." et justifications analogues pour les trois autres contraintes.
Ces textes nous paraissent très difficiles à concevoir .: nous-mêmes avons du mal à nommer certaines zones (par ex. "l'extérieur de la bande autour de la route ...") et la situation est complexe sur le plan logique.

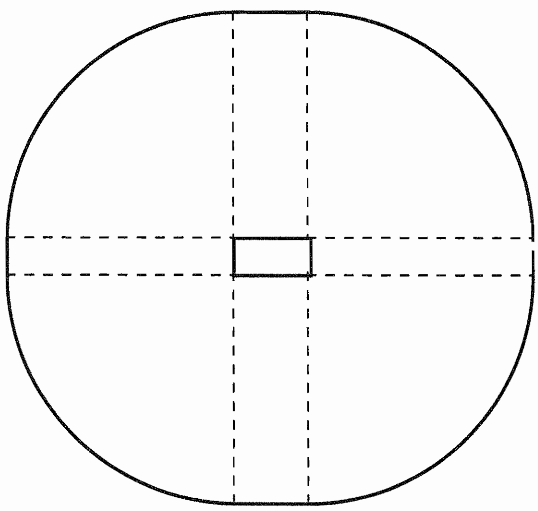
Question 6) Pour qualifier une situation de "situation de recherche", nous regardons si elle vérifie les conditions suivantes:
a) - *elle pose aux élèves un problème complexe dont la solution n'est pas immédiate*: de ce coté-là, tout va bien pour les deux situations proposées!
b)- *les élèves ont suffisamment de connaissances pour bien comprendre le problème posé*, et *envisager de "faire quelque chose" (stratégie de base)* : nous devons ici supposer des élèves assez avancés sur le plan logique, et sur l'utilisation du plan comme modélisation du macro-espace (élève de 5° ? de 4° ?). Les autres vont attendre que l'enseignant explique ce qu'il faut faire.

c) - le*s élèves peuvent résoudre le problème en utilisant toutes leurs connaissances, et par leurs procédés personnels* : tout dépendra ici de la façon dont la séance sera conduite et du contrat didactique.
d) - *les élèves peuvent contrôler leur réponse, par un moyen différent et plus facile que l'élaboration de la répons*e : là aussi, cette condition pourra être remplie en partie, si nous supposons des élèves d'un bon niveau. Une fois la zone déterminée, il peut y avoir un certain contrôle en prenant un point sur la zone et en cherchant s'il vérifie bien les conditions; mais il faut pour cela bien maîtriser la logique du problème (en CM, un élève pourrait très bien penser qu'il a réussi avec seulement un point ou deux convenable ! ou bien avec des points qui vérifient seulement deux conditions).
En conclusion, la situation de l'annexe 2, et celle de l'annexe 3, pourraient être qualifiées de situations de recherches :
- pour des élèves d'un bon niveau (logique, capacité à raisonner sur un plan)
- si la conduite de la classe et le contrat didactique le permettent (cf hypothèse ci-desssus pour l'annexe 3)

Question 7) Nous avons déjà dit que la situation de l'annexe 2 ne nous parait pas pertinente en CM. Celle de l'annexe 3 ne nous parait pas pertinente non plus car le problème posé, proche de celui de l'annexe 2, met en jeu des connaissances (logique, ensemble de points, utilisation de plans comme modélisation du réel) qui ne sont pas celles des élèves de l'école élémentaire.
On peut ajouter ici :
- la complexité de l'énoncé
- l'exigence de rédaction de la solution nous parait particulièrement inadaptée en CM
- la façon dont les courbes déjà tracées sont présentées dans la consigne, qui peut être comprise comme l'obligation de colorier une des zones définies par ces courbes. On se trouve alors dans le cas où un problème est posé, et où l'on donne en même temps une partie de la solution, sans que l'élève soit invité à en contrôler la pertinence; il est alors douteux que la zone qu'il choisira soit bien pour lui la solution du problème (alors qu'il n'a pas eu l'occasion de se le poser vraiment).

Commentaire à propos de la question posée dans « diagonale » :

L'ensemble des points à 300 mètres de l'école est le suivant :



ce qui n'est pas précisément un cercle...

Toulouse

(Corrigé de l'équipe de Bordeaux, en l'absence d'éléments de correction.)

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

Exercice 1.

1) K est l'orthocentre du triangle ABC par définition, c'est à dire le point de concours des trois hauteurs de ce triangle. Puisque ABC est un triangle équilatéral, du fait des propriétés particulières de ce type de triangles, le point K est aussi simultanément :
- centre du cercle circonscrit au triangle (car les hauteurs sont aussi les médiatrices des côtés) ;
- centre du cercle inscrit à l'intérieur du triangle (les hauteurs sont aussi les bissectrices des angles du triangle) ;
- centre de gravité du triangle (car les hauteurs sont aussi les médianes du triangle).

De ce fait, le point K est situé aux deux tiers de chacune des médianes :

$$\mathbf{AK = \frac{2}{3}AH}$$

2) Considérons le triangle ABH, rectangle en H.
Les mesures de ses côtés sont liées par la relation de Pythagore $AB^2 = AH^2 + BH^2$, et on connaît les mesures de deux côtés : AB = a et $BH = \frac{a}{2}$.

En remplaçant dans l'égalité il vient : $AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$

$$AH^2 = 3\frac{a^2}{4}$$

$$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

On en déduit l'égalité demandée : $\mathbf{AK = \frac{a\sqrt{3}}{3}}$

Question 2.

1 a) (DK) est perpendiculaire au plan ABC. (DK) est donc perpendiculaire, dans l'espace, à toutes les droites qui sont situées dans ce plan et, en particulier, aux droites (AK), (BK) et (CK).

1 b) Le triangle ADK est un triangle rectangle, d'après la question précédente, puisque (DK) est perpendiculaire à (AK). Utilisons la relation de Pythagore dans ce triangle :
$AD^2 = AK^2 + DK^2$ ou encore $DK^2 = AD^2 - AK^2$

$DK^2 = a^2 - \frac{3}{9}a^2$ $DK^2 = \frac{6}{9}a^2$ $DK^2 = \frac{2}{3}a^2$

On obtient bien la relation indiquée : **DK** = $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

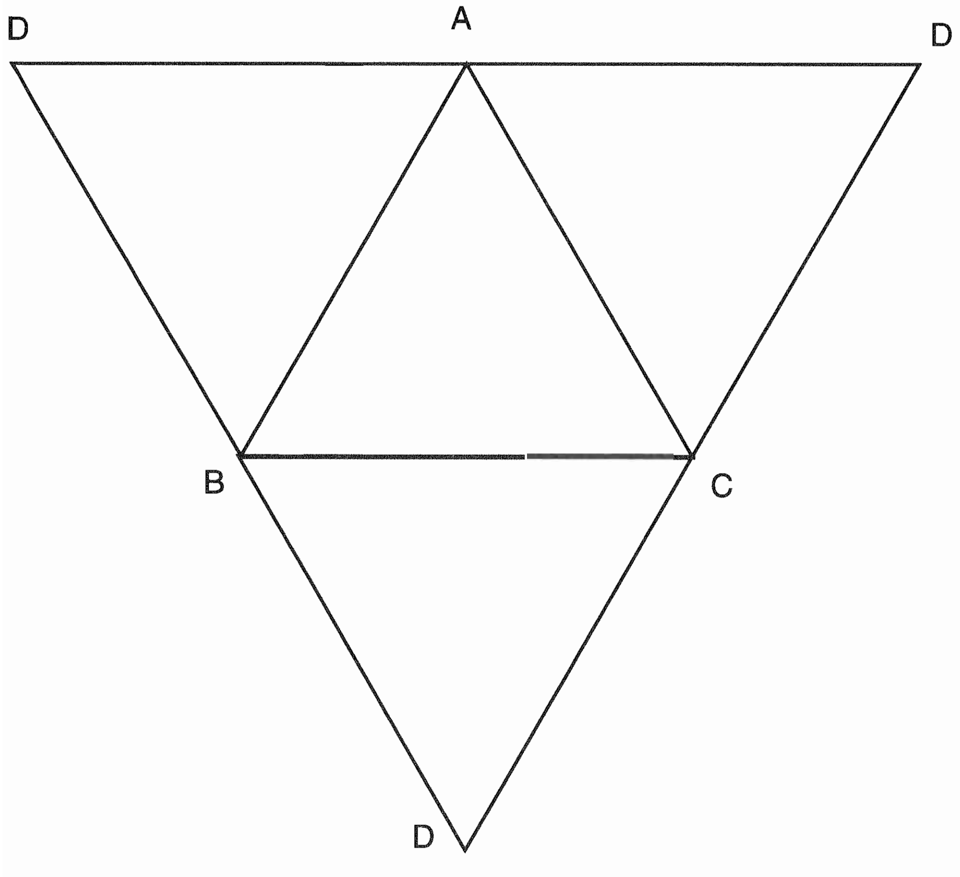
Dans le triangle rectangle DBK (cf question 1.a) on connaît DK et BK. Appliquons la relation de Pythagore, il vient $DB^2 = DK^2 + BK^2$.

$DB^2 = \frac{2}{3}a^2 + \frac{3}{9}a^2$ $DB^2 = a^2$ et donc **DB = a**

De même on montrerait que DC = a , autrement dit que les six arêtes du tétraèdre ABCD sont égales et ont la même mesure, égale à a.

Le tétraèdre ABCD est un tétraèdre régulier.

2) *Patron du tétraèdre ABCD :*



3) Les quatre faces sont superposables à la face ABC.
L'aire de la face ABC est égale à l'aire d'un triangle équilatéral de côté a.

La hauteur est égale à a $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

L'aire de ABC est égale à 1/2 (a. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$) = $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

L'aire totale des faces du tétraèdre est égale à $a^2\sqrt{3}$.

Calcul du volume V(a) du tétraèdre :

L'aire de la base ABC est connue et égale à $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

La hauteur relative à cette base est [DK] et sa mesure est donnée à la question 2.1.b.

$V(a) = \dfrac{1}{3}$ (aire ABC) . DK

$V(a) = a^3 . \dfrac{\sqrt{2}}{12}$

4) Les valeurs demandées ci-dessous sont approchées à 1 cm^3 par excès..

a cm	5	10	15	19	20	21	22
V(a) cm^3	15	118	398	809	943	1092	1255

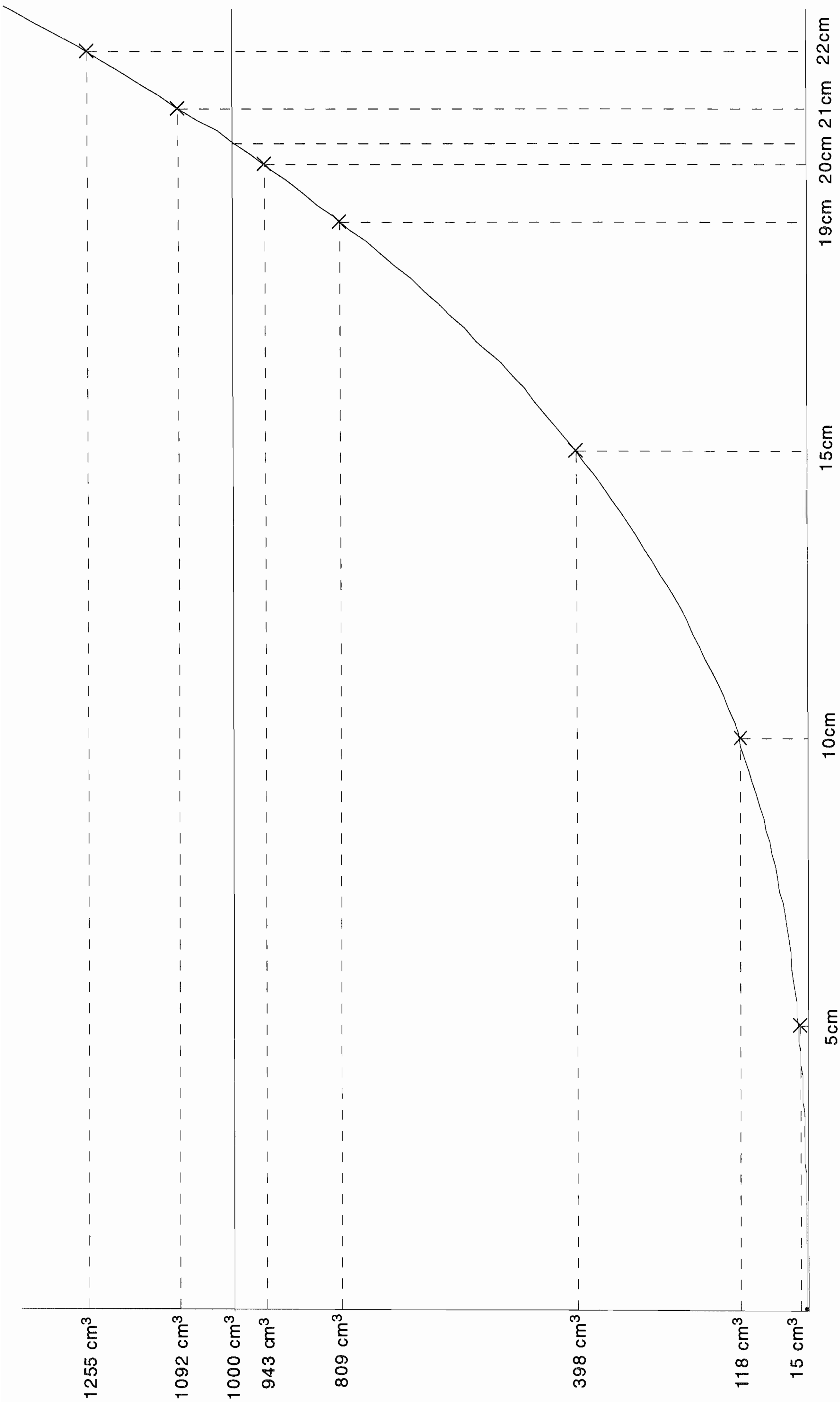
5) Voir graphique (page suivante).

Sur ce graphique il existe visiblement un point qui a pour ordonnée 1000. Le volume V(a) est alors égal à 1000 cm^3 , donc à 1 litre. L'abscisse de ce point est à peu près égale à 20,4 .
Pour une valeur de a égale à 20,4 cm, le volume du tétraèdre vaut à peu près un litre.
Note : la fonction est continue et strictement croissante sur l'intervalle [20 , 21] or $V(20) < 1000$ et $V(21) > 1000$. La fonction prend donc la valeur 1000 en un point de cet intervalle. Le calcul, non demandé ici, donne une valeur plus précise, égale à 20,396...

Exercice 2.

1) La notion mise en oeuvre est la proportionnalité. Il s'agit plus précisément de compléter un tableau de proportionnalité.
Le tableau complété est le suivant :

Nombre de personnes	**Nombre de bananes**	**Cuillerées de farine**	**Nombre d'oeufs**	**Cuillerées de sucre**	**Verres d'eau**
4	**4**	**6**	**2**	**3**	**1**
2	2	3	1	1 + 1/2	1/2
6	6	9	3	4 + 1/2	1 + 1/2
16	16	24	**8**	12	4



1255 cm³
1092 cm³
1000 cm³
943 cm³
809 cm³
398 cm³
118 cm³
15 cm³
22cm
21cm
20cm
19cm
15cm
10cm
5cm

2) On sait que f est une fonction linéaire, et que $f(4) = 60$. On peut donc en déduire $f(1)$:
- soit par le calcul : $f(4) = 15 \times 4$ donc $f(1) = 15$;
- soit en raisonnant : Si pour 4 personnes il faut 60 g de farine, pour une personne il en faut 4 fois moins, c'est à dire 15 grammes.

Donc $f(1) = 15$.

Le coefficient de proportionnalité de cette fonction linéaire est égal à 15.

Dès lors, $f(167) = 167.f(1)$ soit : $f(167) = 2505$.

De même, $f(47) = 47 .f(1)$ soit : $f(47) = 705$.

En utilisant la première propriété de linéarité on obtiendra directement $f(167 + 47)$:

$f(167 + 47) = f(167) + f(47) = 2505 +705$ et donc :

$$\mathbf{f(167 + 47) = 3210}$$

En remarquant que $167 + 47 = 214$, et que 214 est le double de 107, on peut, en utilisant la seconde propriété de linéarité (produit par un scalaire) écrire :

$f(104) = f(214 / 2) = 1/2\ f(214)$ $\qquad f(104) = 3210 / 2$

$$\mathbf{f(104) = 1605}$$

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1 : Traduction mathématique des explications de Martin

***Note à l'attention des candidats au concours** : cette question est délicate à traiter. Nous y avons aussi ajouté un complément de cours sur la proportionnalité.*
Les traductions mathématiques de ce que dit Martin sont différentes suivant leur usage:
traduction du professeur à l'intention de Martin, (i)
traduction dans le langage du professeur du savoir « officiel » correspondant à ce que dit Martin, (ii)
modèle mathématique implicite de l'explication de Martin (iii)
Il est probable que les examinateurs n'attendaient que la réponse i ou ii. Nous avons voulu la traiter de façon complète.

i) Traduction « mathématique » du professeur à ses élèves :

Analyse de la première réponse de Martin : Martin pense qu'il a un tableau de proportionnalité. Dans un tableau de proportionnalité tous les nombres de la deuxième ligne se calculent à partir des nombres de la première par une même multiplication ou une même division. Il détermine cette opération en examinant le nombre de personnes: L'opération de ce type qui donne 2 à partir de 4, c'est diviser par deux. Il divise tous les nombres de la première ligne par deux.
Analyse de la deuxième réponse de Martin : Martin utilise le fait que pour 6 personnes, il suffit d'ajouter les quantités nécessaires respectivement pour 4 et pour 2 personnes. Cela est vrai. Il additionne alors terme à terme les nombres des deux premières lignes. Il obtient de fait une troisième ligne et les nombres sont corrects.
Analyse de la troisième réponse de Martin : Dans sa troisième explication, Martin est passé de 3 à 8 (œufs) en ajoutant 5. Il passe donc de l'avant dernière ligne à la dernière en ajoutant 5. Cette stratégie est erronée.

ii) Langage de professeur et souvenirs du secondaire :

Analyse de la première réponse de Martin : Soient x les nombres de la première ligne et y les nombres correspondants de la deuxième ligne, et soit f la fonction qui permet de calculer y en fonction de x : $y = f(x)$
Cette fonction est de la forme
$y = a . x$ (elle est linéaire, c'est un opérateur multiplicatif etc.)
a, son coefficient de proportionnalité (est constant et) peut être calculé dans la première colonne :

$a = \frac{y_1}{x_1}$ où $y_1 = 2$ et $x_1 = 2$ alors $a = \frac{1}{2}$

(mais l'élève dit « diviser par deux et non pas multiplier par un demi)

donc $y = \frac{f(x)}{2}$ d'où les valeurs.

Analyse de la deuxième réponse de Martin
Si l'on considère par contre chacune des **colonnes** donnant les quantités de chaque denrée, celles-ci sont naturellement proportionnelles aux nombres de personnes auxquelles elles correspondent. On peut alors modéliser cette relation par une fonction linéaire de l'ensemble de personnes vers un ensemble denrée (par exemple, farine), et appliquer la première propriété de linéarité, additive : $f(6) = f(4 + 2)$ et, par conséquent, $f(6) = f(4) + f(2)$ Exemple : prenons les colonnes 1 et 3 du tableau : On y lit $6 = f(4)$ et $3 = f(2)$, donc $f(4 + 2) = 6 + 3$

Nombre de personnes	Cuillerées de farine
4	6
2	3
6	9

(Dans cet exemple précis, $f(x) = 1,5\ x$)

Analyse de la troisième réponse de Martin : Martin explicite l'opération qui a permis de passer de 3 à 8. Pour lui, c'est une addition. Il construit alors une fonction de passage **de l'avant dernière ligne pour obtenir la dernière ligne**. Il attribue à la fonction de passage la propriété suivante :

$$f(x + 5) = f(x) + 5.$$

C'est une fonction "additive" mais, comme elle n'est pas linéaire, elle ne lui permet pas d'obtenir une suite proportionnelle à la précédente. Ses réponses sont dont erronées.

iii) Modèle mathématique implicite de l'explication :
Martin ne considère pas tous les nombres de la première ligne de la même manière: il sépare d'une part les personnes et d'autre part les composants du gâteau : à chaque nombre de personnes devra correspondre une nouvelle composition du gâteau (ce qu'il appelle « pour 4 » ou « pour 2 ») Ces composants sont donc représentés par une suite de nombres que Martin traite en bloc. Mathématiquement il manipule des 5-uplets. Il considère qu'il peut faire des opérations collectives (d'un bloc) sur ces 5-uplets, c'est à dire les additionner entre eux ou les multiplier ou les diviser tous par un même nombre. Ces 5-uplets sont donc des vecteurs (avec la restriction qu'il n'utilisera que des nombres entiers positifs et les quantièmes $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}...\frac{1}{n}$, c'est à dire diviser par 2 , par 3, etc...)
Martin traite comme une évidence que la quantité des composants du gâteau est fonction du nombre de personnes qui devront se le partager (sous entendu pour que les parts soient constantes.)

Si nous appelons q (comme « quantité ») cette fonction, elle a pour objet le nombre de personnes. l'image du nombre 4 (personnes) est le « vecteur » $v = \{4, 6, 2, 3, 1\}$
(quantité de bananes, farine etc.)

$$q(4) = \{4, 6, 2, 3, 1\}$$

qu'on peut écrire aussi $q : x = 4 \rightarrow v = q(4) = \{4, 6, 2, 3, 1\}$

Il considère que cette fonction est linéaire ce que nous exprimons par : q(a.x) = a. q(x)
mais il la conçoit, **dans sa première explication**, sous la forme a et x nombres naturels

$$q(\frac{x}{a}) = \frac{q(x)}{a}$$

qu'il pourrait dire : « la quantité d'ingrédients pour « a fois moins de personnes que x » - vecteur image de x / a - sera la quantité d'ingrédients pour x personnes - q(x) - divisée par a. »
Dans sa deuxième explication, il utilise une propriété de cette fonction :
q(x+x') = q(x)+q(x').
q(4+2) = (4,6,2,3,1) + (2,3,1,1 1/2, 1/2) = (6,9,3,4 1/2, 1 1/2)

La preuve qu'il ne considère pas des lignes entières de nombres abstraits, contrairement aux interprétations i et ii, c'est que lorsqu'il doit utiliser une colonne d'ingrédients, (nombre d'œufs **pour sa troisième explication**) il ne voit plus le rapport, pourtant simple, avec le nombre de la première ligne et il s'abandonne à un calcul formel et faux. Martin ne domine pas le traitement « homogène » du tableau de proportionnalité formé de nombres abstraits (même si c'est que le maître a voulu lui enseigner).

Complément de cours sur les traductions mathématiques de la proportionnalité

A. Voici les objets mathématique très souvent confondus qui interviennent dans la proportionnalité.

1. Entre ***deux nombres*** a et b sont définis deux **rapports** :
b/a le nombre par lequel il faut multiplier a pour trouver b,
a/b le nombre par lequel il faut multiplier b pour trouver a, dans les naturels un seul au plus est parfois naturel (rapport multiple).
2. Entre ***quatre nombres*** est *éventuellement* définie une **proportion** : Si a/b = c/d (évidemment, ce n'est pas toujours vérifié mais si ça l'est) alors (a,b,c,d), *pris dans cet ordre* est une proportion. Dire que ces quatre nombres sont proportionnels sans distinguer leur ordre est une erreur car s'il existe d'autres expressions de la même proportion ($\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, ad = bc , $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$ etc.) on n'a pas $\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$!
3. Entre ***deux ensembles*** (ou bien deux suites) de nombres associés par une **fonction numérique et linéaire**, c'est à dire une fonction f telle que pour tout a, pour tout b et pour tout x, on ait

$$f(ax + bx') = a.f(x) + b.f(x')$$

alors f(x) = k. x k est le coefficient de proportionnalité
alors tous les rapports entre un nombre et son image sont égaux entre eux et égaux au coefficient de proportionnalité. Tous les rapports entre deux nombres d'un même ensemble sont égaux au rapport des images correspondantes
Toutes les paires de couples définissent des proportions.
On peut dire par abus que l'on a deux ensembles proportionnels (ou plutôt deux suites proportionnelles) de nombres, mais pas qu'on a deux suites de « nombres proportionnels » !

4.Un ***tableau*** tel que tout couple de lignes ou tout couple de colonnes forment deux suites proportionnelles peut être dit « tableau de proportionnalité ». Il lui correspond une grande variété de descriptions mathématiques différentes:
par exemple un tableau « de proportionnalité » à n colonnes et m lignes montre
un ensemble de n-1 fonctions numériques linéaires qui lient chaque colonne à la suivante (ou chaque ligne), ou l'ensemble des n^2 fonctions linéaires qui lient chaque colonne à toutes les autres,
une fonction numérique définie sur toutes les colonnes sauf une qui est la colonne des images,
une fonction vectorielle dont les premières colonnes du tableau sont des vecteurs dont les images sont les vecteurs formés par les autres etc. (comme le fait implicitement Martin)
un sous espace vectoriel, réduit à une droite dans R^n etc.
En général, la signification concrète des lignes et des colonnes n'est pas la même. Souvent les colonnes représentent des mesures d'un même grandeur, alors les fonctions d'une ligne vers une autre ligne sont des fonctions scalaires (c'est à dire sans dimension) elles sont caractérisées par un

rapport numérique, tandis que les fonctions d'une colonne vers une autre sont accompagnées d'une correspondance entre unités (une sorte d'équation aux dimensions).

B. Suivant les cas et les situations c'est l'un ou l'autre de tous ces points de vue qui est « implicitement » mis en oeuvre et utilisé, aussi bien par les élèves que par le professeur
Même s'il existe certaines équivalences logiques entre elles, ces interprétations ne sont pas didactiquement, ni mentalement, ni mathématiquement (dans leur usage) équivalentes. Les élèves, pas plus que les adultes, ne peuvent passer immédiatement d'un point de vue à l'autre comme vient de le montrer l'exemple de Martin.

Bien sur il n'est pas nécessaire de savoir formuler tout ce qu'on fait en termes savants, mais il est absurde d'étendre les pratiques des élèves à des cas trop complexes alors qu'on ne dispose avec eux d'aucun vocabulaire de contrôle adéquat (soit qu'on ait voulu économiser les apprentissages correspondants, soit qu'on ait été trop ambitieux dans les problèmes proposés, ou pour toute autre cause). Dans ces conditions les différents termes mathématiques qui traitent ces cas sont introduits de façon anarchique, utilisés comme synonymes, ils perdent leur identité et par là toute utilité.
Bien sur il serait tout aussi absurde de vouloir les enseigner tous, et trop tôt aux élèves comme cela est toujours tenté sur un chapitre ou sur un autre pour des raisons diverses.
Pour que le professeur puisse utiliser avec ses élèves un langage utile et signifiant il faut qu'il l'utilise avec rigueur. Pour cela il faut que ce langage soit limité et que ces limites soient assumées et traitées honnêtement par la noosphère. Ce n'est pas toujours le cas aujourd'hui.

2) Mathilde a correctement complété la seconde ligne de son tableau. Elle a divisé chaque terme de la première ligne par deux (comme Martin). Cependant, la justification qu'elle donne est incorrecte : " 4p - 2p = 2 " , au lieu de " 4 : 2 = 2 " . Mathilde confond peut-être les propriétés particulières du nombre 4 : $4 = 2 \times 2$ et $4 = 2 + 2$
C'est peut-être ce qui induit son erreur dans sa deuxième déclaration alors que la troisième est correcte.

3) Guillaume applique, quand il le peut, une fonction f, telle que $f(x) = x - 2$, pour calculer les images des nombres de la première ligne et compléter les cases de la seconde ligne. Lorsqu'il ne peut retrancher 2, parce que le nombre n'est pas assez grand, il choisit 0 pour image.

Ainsi : $f(x) = x - 2$ si $x > 2$ ou $x = 2$, $f(x) = 0$ sinon.

Cette fonction "additive" n'est pas linéaire et ne peut donner de réponse correcte.

Quels arguments seraient susceptibles de convaincre un enfant de CM2 que les zéros du tableau sont erronés ? Cela dépend bien sûr des connaissances de cet élève...
Un argument de "bon sens" : On ne peut faire raisonnablement de crêpes sans oeufs, ou sans eau !
Un argument "matériel", concret, visant à redonner du sens aux expressions : "Partage en deux, prend la moitié de ..." . On place effectivement sur la table les denrées correspondant à la première ligne, et on demande à l'élève de réaliser équitablement ce partage.
Deux arguments plus "mathématiques" : Pour effectuer l'opération inverse, il faudrait alors ajouter 2 et ... retrouver la situation initiale. Ce n'est pas le cas pour l'eau.
Enfin , si l'élève est un tant soit peu convaincu que les suites doivent être proportionnelles, 0 n'est l'image que de 0.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

1) Dans quelle classe ?

Les activités du document B paraissent pouvoir être proposées avec intérêt dans une classe de seconde année de cycle 3 (c'est à dire de CM 1), en début d'année, afin de s'assurer que les élèves

aient une bonne compréhension de l'algorithme de la multiplication et de sa technique. Celle-ci devra être maîtrisée avant de pouvoir, ensuite, aborder la division euclidienne dès que possible.
Ces activités pourraient également être proposées dans une classe de troisième année de cycle 3 (c'est à dire de CM 2), aux élèves qui éprouveraient encore des difficultés avec la technique opératoire de la multiplication. Cela existe.
Cependant, les auteurs de cette fiche semblent la proposer de façon privilégiée pour la classe de CE2 (La case "CE 2" est mise en évidence, en haut et à droite du document, par une couleur foncée). Cela ne pourrait se faire alors qu'en fin d'année. Telle qu'elle est, la fiche nous paraît ambitieuse et l'activité difficile, pour ce niveau. Elle suppose a priori une bonne connaissance de la technique à l'italienne traditionnelle et surtout d'incontestables facultés d'observation et d'analyse, peu communes au CE 2.

Les connaissances nécessaires :
- Connaissances de numération (savoir décomposer un nombre de plusieurs chiffres pour faire apparaître les unités de différents ordres : les centaines, les dizaines et les unités...) ;
- Connaissance de la technique opératoire usuelle de la multiplication ;
- Connaissance du produit d'un nombre par un multiplicateur sous la forme $a.10^n$.
- Connaissance de la règle dite "des zéros"...
- Bonne connaissance, au moins implicite, de la distributivité de la multiplication sur l'addition.

D'autres savoir-faire sont également nécessaires : Il s'agit principalement de savoir analyser des calculs, de savoir discerner des indices d'erreurs ou de modifications de l'ordre des calculs intermédiaires, de savoir reconnaître ce que représente chacun de tous les produits intermédiaires, de savoir interpréter ces indices d'erreurs pour pouvoir les décrire sans avoir effectué la multiplication. On voit bien qu'il ne suffit pas de savoir "calculer des produits de deux nombres entiers"...

2 a) 792 x 684 = (792 x 4) + (792 x 80) + (792 x 600)
Le premier zéro termine le nombre 63 360, égal à 792 x 80.
792 x 80 = (792 x 8) x 10 . 63 360 correspond à **(792 x 8) dizaines.**
Les deux autres zéros terminent l'écriture de 475 200, égal à 792 x 600.
792 x 600 = (792 x 6) x 100 . 475 200 correspond à **(792 x 6) centaines**.

Les zéros expriment ici l'ordre des unités du multiplicateur partiel.

2 b) Non dans l'exemple 275 x 649 : certains « 0 » ont la signification précédente comme le dernier 0 de 1100<u>0</u> dans l'opération 275 x 4<u>0</u>, d'autres non, et expriment qu'un produit partiel est un multiple de 10 ou de 100. Exemple, les deux « 0 » précédant le dernier « 0 » dans 275 x 40 = 11<u>00</u>0 qui expriment que 275 x 4 = 1100.

2 c) Voici des exemples où le chiffre zéro aura une signification autre :
Si 0 apparaît au multiplicateur : 275 x 0 = 0 ou au multiplicande : 2 001 x 5 ;
Pour le produit 33 334 x 3 = 100 002 , les zéros proviennent d'une cascade de retenues.

3) La "mise en commun":
Elle consiste à écrire au tableau les opérations proposées individuellement, à vérifier que les produits intermédiaires donnés correspondent (ou non) à des calculs adéquats intervenant dans l'algorithme usuel, ce qui amène le professeur à réexpliquer "éventuellement" la présence des zéros dans l'écriture de certains des produits donnés, puis à reconstituer l'algorithme usuel. On remarquera qu'un tel scénario, le déroulement évoqué, repose sur l'hypothèse implicite que les élèves auront majoritairement compris la tâche demandée et résolu le premier problème. Dès lors, il ne resterait

plus au maître qu'à valider les réponses des élèves, à faire une synthèse et à rappeler les règles essentielles à retenir d'une telle activité, à proposer enfin un problème semblable, d'application, en l'occurrence démêler le "méli-mélo".
C'est un point de vue résolument optimiste. Que devient ce scénario si les élèves ne comprennent pas le jeu ? L'étude demandée à la question 2 attire justement l'attention sur la variété des cas, la complexité de ce premier travail. Il ne s'agit pas simplement de compter des zéros, de remarquer leur absence ou leur surabondance (parfois il y en a beaucoup et c'est une erreur, parfois c'est normal, parfois encore il en manque...) rien n'est réellement simple.
En fait, cette "mise en commun" risque fort de se transformer en une sorte de leçon magistrale faite par le maître, où seuls les quelques élèves qui "ont compris et savent déjà" pourront éventuellement s'impliquer. Pour les autres, qui n'auraient rien fait ou qui auraient patiemment attendu que les réponses viennent au tableau, il leur reste à essayer de bien comprendre ce que le maître va dire ou écrire afin d'être capable ensuite de compléter seuls une fiche qui ressemble assez à la précédente.
Cette leçon repose sur un principe simple, classique : "Le maître montre, les élèves comprennent et sont donc capables de refaire la même chose dans un court délai".
On sait que ce principe n'est pas nécessairement efficace.

4 a) Les erreurs rencontrées :

opération c) 1 604 × 76	On lit 11 228 au lieu de 112 280 : Le produit intermédiaire 1 604 × 70 est remplacé par 1 604 × 7. Le résultat final correspond à 1 604 × (6 + 7)
opération e) 362 × 843	On lit 28 960 au lieu de 289 600, c'est à dire 362 × 80 au lieu de 362 × 800 . Le résultat final correspond à 362 x (3 + 40 + 80)
opération g) 436 × 148	On lit 348 800 au lieu de 3488, c'est à dire 436 × 800 au lieu de 436 × 8 ; De même, 174 400 remplace 17 440, c'est à dire 436 × 400 au lieu de 436 × 40 . . Le résultat final correspond à 436 × (800 + 400 +100)
opération h) 1 604 × 923	On lit 14 436 au lieu de 1 443 600, c'est à dire 1604 × 9 au lieu de 1 604 × 900 . Le résultat final correspond à 1604 × (3 + 20 + 9).

L'intérêt de cet exercice : L'exécution correcte et répétée d'un algorithme par un élève montre qu'il sait effectuer ce type de calcul, mais on ne peut, sans autre information, affirmer qu'il en a une bonne compréhension. On dira qu'il maîtrise le mécanisme de cette technique. Au contraire d'un simple mécanisme la résolution de l'exercice 1 prouve une connaissance plus complète et plus profonde du fonctionnement de l'algorithme de la multiplication (nous dirons même plus intelligente), une connaissance des propriétés qui le fondent, des moyens de contrôle qui en assurent une fiabilité plus durable.

4 b) La consigne pourrait être : "Cherche dans les opérations de l'exercice 1 les résultats qui te permettent de calculer les produits suivants sans effectuer une seule multiplication, en ne faisant que des additions !"

Notes

Notes

Achevé d'imprimer en novembre 1997 par Normandie Roto Impression s.a., 61250 Lonrai. N° d'imprimeur : 972497
Dépôt légal : novembre 1997