C O P I R E L E M

(Commission permanente des I.R.E.M. pour l'enseignement élémentaire)

DOCUMENTS POUR LA FORMATION DES PROFESSEURS D'ÉCOLE

EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Tome II

Ouvrage collectif, à l'initiative de la **COPIRELEM**
issu du stage de PAU, 23-27 mars 1992
(Stage de formation de la Direction des Écoles FCA 901 CE)

Mise en page : JL Oyallon, antenne de PAU de l' IUFM d' Aquitaine
Reédité par l'I. R. E. M PARIS VII - Juin 96
(1 ère Ed Janvier 93)

C O P I R E L E M

(Commission permanente des I.R.E.M. pour l'enseignement élémentaire)

DOCUMENTS POUR LA FORMATION DES PROFESSEURS D'ÉCOLE

EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Tome II

Ouvrage collectif, à l'initiative de la **COPIRELEM**
issu du stage de PAU, 23-27 mars 1992
(Stage de formation de la Direction des Écoles FCA 901 CE)

Mise en page : JL Oyallon, antenne de PAU de l' IUFM d' Aquitaine
Reédité par l'I. R. E. M PARIS VII - Juin 96
(1 ère Ed Janvier 93)

SOMMAIRE

Mise en situation d'adultes **123**

Devoirs de didactique **151**

Analyses de documents à la disposition des maîtres **157**

Les Conférences **175**

Introduction

Parallèlement à l'organisation des colloques nationaux qui, depuis 1974, rassemblent chaque année une proportion importante des formateurs en mathématiques dans les Écoles Normales d'abord, dans les I.U.F.M. maintenant, la COPIRELEM (Commission permanente des IREM pour l'enseignement élémentaire) a pris l'initiative d'éditer des documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques.

Un premier tome, produit des travaux du stage de Cahors est paru en octobre 1991.

L'intérêt que les formateurs en IUFM ont bien voulu lui porter, a constitué un réel encouragement pour les participants et les animateurs du deuxième stage, retenu par la direction des écoles dans son programme de formation 1991-1992, et qui s'est déroulé à PAU du 23 au 27 mars 1992.

Ce présent tome 2 en est le résultat, après relecture au colloque de Besançon.

Comme dans le tome précédent, le lecteur trouvera dans cette brochure :

- Des propositions et des comptes-rendus d'activités pour la formation des maîtres, sur de nouveaux thèmes
- Des reflexions sur certains concepts de didactique en discussion.
- Des éléments de réponse à des interrogations concernant l'enseignement de la didactique des mathématiques en formation des maîtres et son évaluation.

Nous espérons que ces documents constitueront une aide réelle pour les formateurs dans l'élaboration de leurs séquences, et qu'ils seront un élément unificateur non contraignant dans l'élaboration des contenus et d'un certain esprit de formation.

La COPIRELEM s'est engagée à poursuivre ce travail. Un nouveau stage se déroulera en mars 1993, à COLMAR.

La COPIRELEM

Nous invitons les collègues formateurs en mathématiques à nous faire part de leur expérience ou de leurs propositions ainsi que de leurs réactions au contenu du présent recueil, à l'adresse suivante :

COPIRELEM
IREM Paris VII
2 place Jussieu
75251 Paris Cedex 05

Liste des participants et animateurs du stage de PAU

Jean Claude AUBERTIN	IUFM Besançon
Dominique BEAUFORT	IUFM Chartres
Joël BRIAND	IUFM Bordeaux
Guy BROUSSEAU	Université Bordeaux I
Denis BUTLEN	IUFM Melun
Marie Claude CHEVALIER	IUFM Cahors
Gérard DERAMECOURT	IUFM Périgueux
Alain DESCAVES	IUFM Beauvais
Liliane DUBOIS	IUFM Amiens
Régine DOUADY	IREM Paris VII
Jacqueline ELRIAT	IUFM Nancy
Marianne FREMIN	IUFM Antony
Claudine HERVIEU	IUFM Caen
François HUGUET	IUFM Quimper
Guy JULIEN	IUFM Orléans
Alain KUZNIAK	IUFM Evreux
Nicole LABRUNIE	IUFM Antony
Mireille LAMANT	IUFM Bordeaux
Gabriel LEPOCHE	IUFM Rennes
Gérard LIPP	IUFM Guebwiller
Ginette MARCHAL	IUFM Metz
Jean Louis OYALLON	IUFM Pau
Rose PALANQUE	IUFM Toulouse
Hervé PÉAULT	IUFM Angers
Marie Lise PELTIER	IUFM Rouen
Serge PETIT	IUFM Colmar
Claude RIMBAULT	IUFM Saint Brieuc
Jean Louis RIPOCHE	IUFM Versailles
Bernard SARRAZY	IUFM Agen
Gérard VINRICH	IUFM Agen
Richard WALKER	Université de Mansfield (Pennsylvanie, USA)

Décimaux et rationnels

La formation des professeurs des écoles relative au thème "Décimaux et Rationnels" implique la prise en compte des contraintes institutionnelles telles que :

- préparation au concours,
- gestion du temps,
- hétérogénéité du public,
- absence de programme national du concours au niveau des contenus,
- ....

Après étude de diverses propositions de travail concernant les professeurs d'école. les questions suivantes ont été dégagées :

Quels **contenus** aborder avec les P.E. et comment ?

Quels outils utiliser pour **redonner du sens** aux nombres non entiers en tenant compte des connaissances disponibles et faire évoluer les conceptions tant sur les nombres décimaux que sur la transposition de ce savoir à l'école primaire ?

Peut-on faire l'**économie de l'étude préliminaire des rationnels ?** Serait-il possible. par exemple. d'exploiter d'une façon cohérente les outils de traitement de l'information, en particulier les calculettes. pour étudier directement les décimaux ?

Sans prétendre à l'exhaustivité. les documents qui suivent proposent:

- la trame d'un cours magistral conduit à l'I.U.F.M. de Bordeaux (T.P. et T.D. ne sont pas intégrés au fascicule);
- deux documents présentant des activités de mise en situation sur ce thème conduites avec des groupes (inférieurs à trente) par Gérard Deramecourt à Périgueux et Marianne Frémin à Antony.

Titre :Enseignement des rationnels et des décimaux

Date : avril 1992

auteurs : J. Briand et G. Vinrich

Type : Cours effectué en 1ère année IUFM (professeurs des écoles)

Destinataires : Formateurs IUFM

ENSEIGNEMENT DES RATIONNELS ET DES DÉCIMAUX

L'objet principal de cet article est un **témoignage** de ce qui s'est passé à l'IUFM d'Aquitaine (Bordeaux) en formation des professeurs d'écoles sur les problèmes d'enseignement des rationnels et des décimaux. **Ce compte-rendu ne constitue en aucune façon un modèle idéal** pour assurer cette formation.

En avant-propos on trouvera un rapide descriptif des modalités de fonctionnement en 1ère année IUFM (P.E.) pour les mathématiques. Ces précisions sont indispensables pour comprendre l'existence, voire l'utilité d'un **cours** ("magistral") de 2 heures dont on trouvera le détail ci-après. En dehors de ce cours, on trouvera un canevas sur les **travaux dirigés** et les **travaux pratiques** associés à ce module de formation.

En ce qui concerne le **devoir** proposé aux étudiants sur ce thème, on se rapportera à l'article sur les sujets de devoirs de didactique des mathématiques.

I - AVANT-PROPOS

Citons quelques extraits du texte sur les "contenus et volumes horaires" des enseignements obligatoires de mathématiques pour les professeurs d'écoles à l'IUFM d'Aquitaine.

1. Motivations

"L'enseignement des mathématiques sera résolument orienté vers la préparation professionnelle. Ceci implique à la fois un approfondissement spécifique de certaines des connaissances qu'ils auront à enseigner et un corps de connaissances particulières de nature plus didactique et épistémologique.

Aussi, plutôt que d'être repris dans leur présentation académique les contenus mathématiques seront organisés autant que possible suivant un plan qui correspond à la logique de leur enseignement dans les trois cycles de l'école et à celle du développement de l'enfant."

2. Forme

"Chacun des grands concepts de mathématiques abordé sera traité dans le cadre d'une étude de didactique des mathématiques comprenant la présentation :

- des situations fondamentales et de l'environnement des problèmes qu'engendrent leurs variables didactiques (cette partie contient les développements mathématiques indispensables à la compréhension du concept) ;
- des programmes du premier degré, des compétences attendues à la fin de chaque cycle et des instruments d'évaluation ;
- des comportements et des erreurs des élèves ainsi que des obstacles rencontrés ;

• des processus spécifiques d'apprentissages et d'enseignement, avec leurs supports pédagogiques ;

• des phénomènes de didactique liés à l'enseignement de cette notion et des approfondissements mathématiques, historiques et épistémologiques nécessaires."

3. Contenus

• 1ère année **90 heures**

Module 0 *4 heures*
Accueil et présentation du travail + concours "blanc"

Module 1 *12 heures*
Enseignement des nombres naturels

Module 2 *20 heures*
Enseignement de la numération
Enseignement des algorithmes de calcul

Module 3 *20 heures*
Enseignement des rationnels et des décimaux
Enseignement de la proportionnalité

Module 4 *14 heures*
Enseignement de la mesure
Enseignement de la géométrie

Module 5 *20 heures*
Principaux concepts de didactique des mathématiques
Analyse de productions d'élèves - Processus d'enseignement - Transposition didactique

• 2ème année **45 heures**

Module 6 *12 heures*
Observation et analyse des situations et des processus d'enseignement
(préparation et compte-rendu du stage en tutelle + préparation du stage en responsabilité).

Module 7 *11 heures*
L'enseignement des mathématiques dans le cycle des apprentissages premiers.
(la pensée logique et relationnelle, la construction de l'espace représentatif, les premiers nombres naturels).

Module 8 *11 heures*
L'enseignement des mathématiques dans le cycle des apprentissages fondamentaux.
(nombres naturels, opérations, mesure, espace et géométrie).

Module 9 *11 heures*
L'enseignement des mathématiques dans le cycle des approfondissements.
(rationnels et décimaux, opérations, mesure, espace et géométrie).

4. Horaire étudiant (1ère année)

- Cours (3 groupes > 100) 22 heures
- Travaux dirigés (8 groupes < 40) 58 heures
- Travaux pratiques (16 groupes < 20) 10 heures

Remarques :

- La répartition de ces formes d'intervention est déterminée en coordination pédagogique pour chaque module.
- L'existence des cours regroupant plus de cent étudiants est rendue "obligatoire" (gestion administrative) si on veut réaliser des travaux pratiques avec un effectif de moins de vingt ! L'avantage est unanimement reconnu (étudiants + formateurs) en ce sens que, pendant ces cours, chaque étudiant de l'académie assiste et participe à **"la même formation"**.

II - LE COURS SUR LES DÉCIMAUX (2h)

Le plan du cours est distribué à chaque étudiant.

1. A l'aide de l'histoire :

Il est très utile de faire un parallèle entre l'épistémologie historique et l'acquisition scolaire. C'est important pour comprendre les mécanismes de production du savoir et situer les décimaux dans leur genèse. (Hantouche DEA Vergnaud CNRS 1980)

Même si tel n'est pas toujours le cas, *"Il y a un rapport à établir entre les processus historiques de mathématisation par lesquels les hommes ont construit des modèles pour rendre intelligibles tels aspects du réel, et les processus de mathématisation que l'on s'efforce de susciter chez l'enfant pour que ce dernier s'approprie de manière active les connaissances mathématiques."* (Brossard cahier 18 IREM de Bordeaux)

Les fractions, les irrationnels : révélateurs de deux "âges" des mathématiques.

Les égyptiens manient les fractions et travaillent sur des tables de conversion. Les résultats sont confidentiels et répondent à des problèmes liés à des actions précises (papyrus de Rhind 1650 av. J.-C.). Les mathématiques elles-mêmes ne sont pas un sujet d'enseignement.

Les grecs annoncent la naissance des mathématiques : du *"comment"*, on passe au *"pourquoi"*.

Thalès de Milet (600 av. J.-C.) récupère la géométrie égyptienne et en fait une science déductive.

Pytagore de Samos (550 av. J.-C.) invente la théorie des irrationnels.

Eudème écrit la première histoire des mathématiques (IV° av. J.-C.).

Les mathématiques sont devenues une science déductive autonome, école de la vérité.

Bilan : les ensembles N, Z, D, Q, R construits pour répondre à des résolutions d'équations.

Exemple de débat historique :

- L'irrationalité de $\sqrt{2}$ (Aristote 350 av. J.-C.). La démonstration peut être faite aux étudiants à partir d'un raisonnement par l'absurde ($p/q = \sqrt{2}$? avec p/q irréductible) ou (plus difficile!) à partir de considérations géométriques.
- L'irrationalité de π ne sera prouvée qu'au XIX siècle. La question était en suspens depuis 2000 ans.

En ce qui concerne les fractions, on a longtemps considéré (depuis les égyptiens) les fractions à numérateur 1 et à dénominateur dit en quantième ("décimer" dans l'armée). La fraction était toujours inférieure à 1. $93/4$ n'était pas considéré comme une fraction mais comme un partage à effectuer. Le mot partage ne signifiait pas une division comme nous l'entendons. On disait : "nombres fractionnaires non résolus".

40 / 3 = 13 + 1/3. La "division" euclidienne (dans les entiers) est connue mais son prolongement dans D que nous utilisons ($40/3 \approx 13{,}333$) n'existe pas. Ajoutons que, s'il s'agit de 40 livres (1 livre = 20 sols, 1 sol = 12 deniers), alors le résultat est 13 livres, 6 sols et 8 deniers!

Or de nos jours, nous "poussons la division après la virgule" comme un réflexe sans toujours nous interroger sur le sens du quotient et du reste ! Une grande partie des étudiants considère la fraction comme une opération à effectuer, ce qui ne donne pas un statut de nombre à la fraction. Il existe, sans doute, là, un obstacle didactique au maniement des fractions.

Les décimaux eux-mêmes

X° siècle après J.-C. : Al-Uqlidisi (Inde) emploie les fractions décimales, mais on ne sait pas pourquoi.

1427 : Al-Kachi (Iran) utilise les fractions décimales pour les calculs astronomiques.

1579 : Viete suggère qu'en mathématiques, "les soixantièmes, les soixantaines, (système Babylonien) soient d'un usage rare ou nul." Il préconise les dixièmes, les centièmes etc. et propose une écriture du type : 12,343,<u>45</u> (de nos jours : 12343,45).

XVI° siècle : les marchands ont compris depuis longtemps que les partages à l'aide des fractions décimales sont plus aisés. Ils doivent toutefois s'accommoder des unités et utiliser ainsi de nombreuses tables.

1585 : les fractions décimales sont devenues des "affaires des hommes". Les problèmes des unités sont épouvantables. Stevin est le premier à proposer un ensemble de savoirs cohérents allant des pratiques opératoires liées à des écritures décimales au système métrique. D'où la Disme, liée au système métrique.

Les débuts chaotiques du système métrique en France et dans le monde

4/11/1800, 12/2/1812, 28/3/1812 : décrets "néfastes" qui autorisent l'emploi de mesures dites usuelles : *toise* de 2 mètres par exemple avec des subdivisions non décimales !...

1840 : retour à l'usage exclusif des mesures métriques (Louis- Philippe 1°).

A signaler la variation des unités suivant le lieu géographique. Exemple : *les boisseaux* servant à mesurer le blé (à Rouen : 2,278 dal ; à Elbeuf : 2,938 dal ; à Dieppe : 2,697 dal ; au Havre : 3,850 dal ...)

1870 : Après la convention du mètre, création de la commission internationale du mètre en réponse à l'internationalisation du système (Académie de Saint-Pétersbourg).

1875 : la convention internationale engage les pays signataires à entretenir un Bureau International des Poids et Mesures dont le siège est à Paris.

2. Mises au point mathématiques minimales

- Qu'est-ce qu'un nombre décimal ? *(On trouvera en annexe A le bilan du sondage fait auprès des étudiants)*
- Intérêt de passer aux fractions décimales et aux écritures décimales.

Problème : remplacer l'addition (fastidieuse) de deux rationnels par celle de deux décimaux en gérant la précision.
Exemple : pour 12/7 + 18/13, il est naturellement "commode" de passer par des valeurs décimales approchées. Pour cela, il faut montrer que toute fraction peut être encadrée par deux décimaux dans un intervalle aussi petit que l'on veut.

Prenons un des termes :
Pour encadrer $\frac{12}{7}$ à $\frac{1}{10^6}$ près, il suffit d'encadrer $\frac{12.10^6}{7}$ par deux entiers consécutifs :

$$1714285 \leq \frac{12.10^6}{7} < 1714286 \text{ donc : } \frac{1714285}{10^6} \leq \frac{12}{7} < \frac{1714286}{10^6}.$$

- D est dense dans Q.

Remarque : les équations du type ax=b avec a et b décimaux, n'impliquent pas x décimal. (l'inverse d'un décimal n'est pas obligatoirement un décimal !).

- Les écritures périodiques.
- La structure d'ordre sur D s'apparente à celle des mots du dictionnaire.

3. Les fractions et les nombres décimaux dans les programmes de la scolarité obligatoire

Les programmes de 1887

Enseignement des unités fractionnaires. "on appelle unité fractionnaire une partie quelconque de l'unité". Elle est employée aussi comme unité pour la mesure d'une quantité. Le nombre qui exprime des unités fractionnaires est appelé nombre fractionnaire.

Les programmes de 1923 et de 1945

On met l'accent sur la relation entre la quantité à mesurer et le système d'unités. Tout problème peut alors se ramener à des coefficients constituant un nombre entier.

Les programmes de 1970

On peut, à chaque décimal, faire correspondre un entier, et réciproquement. (Une ville compte 10850 habitants, le millier étant choisi pour unité, la population s'exprime par un nombre décimal : 10,850. Inversement, 1,25 m est 125 cm mais n'est pas considéré comme 1,25 fois un mètre. 32,26 cm n'a donc pas de sens !)

Les programmes de 1983 et 1985

On suggère de construire des fractions simples, des fractions décimales, puis des décimaux. On demande de faire le lien entre les différents types d'écritures :
3,56 = 3 + 5/10 + 6/100 = 356/100.

4. Notion d'obstacle et erreurs chez les élèves

Obstacle épistémologique

Un obstacle épistémologique est une connaissance qui permet de résoudre assez bien une classe de problèmes, et qui échoue sur d'autres, pour lesquelles elle se révèle fausse ou inappropriée. Elle résiste alors au rejet que l'on a à faire, et bien qu'on la sache fausse, elle continue à se manifester par des erreurs et des fautes de raisonnement qui apparaissent inopinément, de sorte que son rejet doit être explicitement inclus dans la connaissance correcte finale.

Exemple : Le prolongement à D de la structure d'ordre de N.

"C'est en terme d'obstacle qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique" (Bachelard)

Obstacle didactique

Un obstacle didactique est un obstacle qui résulte des pratiques d'enseignement antérieures.

Notion de théorème en acte

(voir extrait de devoir n°2 dans le chapitre "Devoirs de didactique", p 156)

Evaluation 6ème 1991

L'évaluation proposée à tous les élèves en 6ème et en SES, rappelons-le, constitue le premier volet du triptyque "évaluation des élèves / formation des maîtres / réponses aux élèves".

Ce volet évaluation est conçu comme **un outil de diagnostic individuel** permettant aux enseignants, dès les premiers jours de la rentrée, de dresser un bilan de ce que savent et savent faire leurs élèves mais également de détecter chez certains d'entre eux d'éventuelles difficultés susceptibles d'entraver la bonne poursuite de leur scolarité. Rappelons aussi que les épreuves nationales standardisées sont définitivement arrêtées nationalement après avoir été expérimentées auprès de classes témoins dans différentes académies par des équipes d'enseignants.

Les résultats nationaux de septembre 1991 sont fondés sur un échantillon de 5000 élèves de 6ème tirés de façon aléatoire dans les collèges d'enseignement public et privé de tous les départements, y compris ceux d'outre-mer.

En ce qui concerne les nombres décimaux...

Dans l'annexe B[1], on trouvera les exercices se rapportant aux nombres décimaux accompagnés des pourcentages nationaux de réussite.

- L'exercice 18 montre tout particulièrement certaines difficultés des élèves sur l'aspect désignation et lecture des écritures décimales :

• confusion entre le chiffre des centaines et celui des centièmes;

• confusion entre le chiffre des dixièmes et celui des dizaines;

• détermination de la position des centaines sans tenir compte de la virgule;

• confusion entre les mots "dizaines" et "dixièmes".

- Les exercices 14c et 15b montrent un comportement significatif de certains élèves qui traitent séparément la partie entière et la partie décimale quand ils comparent ou rangent des nombres décimaux.

- L'exercice 16c montre une difficulté qui tient à la nature des nombres décimaux (densité) dont le concept est en cours d'acquisition.

- L'exercice 24 montre des difficultés dans l'application de la règle du décalage de la virgule et confirme une maîtrise insuffisante des nombres décimaux.

1 Extraits de "EDUCATION et FORMATIONS" (Hors série janvier 1992) Direction de l'évaluation et de la prospective

III - CANEVAS DES T. D. (8H)

n°1 *(avant le cours décrit ci-dessus)*

- Quels(s) souvenirs(s) ont les étudiants des nombres décimaux ?

- Les décimaux permettent d'encadrer et "d'approcher" des fractions quelle que soit la précision souhaitée.

- Les problèmes posés par la structure d'ordre "lexicographique" sur D.

n°2 *(après le cours)*

- Quotient de deux entiers (décimal ou non).

- Travail sur les suites infinies périodiques.(recherche de périodes et, inversement, connaissant la période, retrouver l'écriture fractionnaire).

n°3

- Les opérations sur les rationnels. (travail sur des extraits d'anciens concours E.N.).

Travail pratique

- Visionnement d'un document vidéo et analyse :"encadrer une fraction"

- Travaux pratiques avec un guide-âne.

ANNEXE A : Définitions des décimaux données par les Étudiants

D'après les définitions proposées par les étudiants, on peut faire la typologie suivante en reprenant leurs propres formulations :

Définition qui identifie le concept à son "costume"...

- Est constitué d'une partie entière et d'une partie décimale.
- Nombre à virgule.
- C'est un nombre qui a une virgule et, derrière la virgule, il n'y a pas que des zéros.
- C'est un nombre utilisant la base dix, avec un ou plusieurs chiffres après la virgule.

Définition qui situe par rapport à N

- A la différence d'un nombre entier, le nombre décimal a une virgule.
- Un nombre décimal est un nombre non entier. Il est formé de deux parties séparées par une virgule.
- C'est un nombre entier positif.(!)
- Nombre à virgule, différent du nombre entier.
- Ce n'est pas un nombre entier.

Définition qui situe par rapport à une fraction

- C'est une fraction, chiffre pouvant s'écrire sous la forme d'un entier multiplié par une puissance de dix.
- Fraction des chiffres de 0 à 10. Chiffre à virgule.
- Nombre non entier, résultat d'une fraction dont les nombres ne sont pas multiples et dont le diviseur ne divise pas totalement le dividende, le reste induit une virgule au résultat.

Définition qui situe par rapport à une division

- Est le résultat de la division des multiples de dix.
- Nombre à virgule qui exprime le résultat d'une division.
- Nombre résultant de la division euclidienne non juste.
- Résultat de la division de deux chiffres. Il est composé de deux parties séparées par une virgule.
- Nombre à virgule qui n'est plus divisible que par lui-même.

ANNEXE B : Les résultats nationaux de l'évaluation 6ème

Exercice 14

Sur chacune des lignes, entoure le plus petit des deux nombres

a. 203,95 204,25

code 1	**91.6%**
code 9	5.9%
code 0	2.5%

b. 4253,2 425,32

code 1	**85.6%**
code 9	10.9%
code 0	3.5%

c. 150,65 150,7

code 1	**63.5%**
code 9	33.1%
code 0	3.4%

Exercice 15

a. Réécris dans les cases les quatre nombres, du plus petit au plus grand :

2731	2364	2759	2345

code 1	**94.4%**
code 9	5.1%
code 0	0.5%

b. Réécris dans les cases les quatre nombres, du plus petit au plus grand :

19,9	19,19	1,991	9,191

code 1	**58.8%**
19.9 19.19	24.3%
code 9	16.2%
code 0	0.7%

Exercice 16

Dans la case vide, écris un nombre compris entre :

a. 64 et 68

64		68

code 1	**95.8%**
code 9	2.4%
code 0	1.8%

b. 64,2 et 64,47

64,2		64,47

code 1	**83.7%**
code 9	12.7%
code 0	3.6%

c. 64,6 et 64,7

64,6		64,7

code 1	**66.9%**
64,60 ou 64,70	6.8%
code 9	17.6%
code 0	8.7%

Exercice 18

Complète les phrases ci dessous :

a. dans le nombre 124,753
le chiffre des centaines est :

code 1	**60.6%**
5	3.4%
7	16.0%
code 9	17.2%
code 0	1.8%

b. dans le nombre 180,254
le chiffre des dixièmes est :

code 1	**42.4%**
5	26.6%
8	12.0%
code 9	17.2%
code 0	1.8%

c. dans le nombre 328,315
le chiffre des dizaines est :

code 1	**60.6%**
3	4.6%
1	15.5%
code 9	17.3%
code 0	2.0%

d. dans le nombre 13,456
le chiffre 4 est celui des :

code 1	**42.2%**
dizaines	4.6%
centaines	21.0%
code 9	27.8%
code 0	4.4%

Exercice 24

Donne le résultat des multiplications suivantes :

a. 63 × 10 =

code 1	**94.3%**
code 9	5.2%
code 0	0.5%

b. 1,54 × 1000 =

code 1	**68.9%**
1.54000	7.7%
15.4	7.6%
1000.54	2.8%
code 9	10.9%
code 0	2.1%

c. 7,14 × 100 =

code 1	**72.8%**
7.1400	8.0%
71.4	6.2%
700.14	3.2%
code 9	6.8%
code 0	3.0%

Donne le résultat des divisions suivantes :

d. 67 : 100

code 1	**58.3%**
0	0.5%
6700	4.1%
code 9	22.8%
code 0	14.3%

e. 325,6 : 10

code 1	**62.1%**
32	0.7%
3256	5.6%
3.256	4.3%
code 9	11.2%
code 0	16.1%

f. 3000,6 : 1000

code 1	**53.2%**
3	1.9%
30.006	8.3%
3.6	5.2%
code 9	12.1%
code 0	19.3%

BIBLIOGRAPHIE

(1) Brochure A.P.M.E.P. : Aides Pédagogiques pour le cours moyen Nombres décimaux.

(2) ERMEL : Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. CM Tome II.- Hatier

(3) Liaison Ecole - Collège : nombres décimaux. (Régine Douady) Brochure n°62. IREM de PARIS VII.

(4) Ordre dans les décimaux. (collectif - IFM de Grenoble - 1987)

(5) Problèmes de didactique des décimaux. (G.Brousseau - IREM de Bordeaux - 1981)

(6) Une expérience d'épistémologie sur l'enseignement des décimaux. (G.Brousseau - IREM de Bordeaux - 1988)

(7) Histoire universelle des chiffres. (G.Ifrah - Seghers)

(8) La Disme. (S.Stevin - éd. reproduite par l'IREM de Paris VII)

(9) Problèmes posés par l'acquisition des nombres décimaux. (A. Hantouche - DEA 1980 Direction Gérard Vergnaud CNRS)

(10) Le système métrique. (H.Moreau - Chiron)

(11) La méridienne. (R.Guedj)

(12) L'introduction du calcul décimal et du système métrique à Rouen pendant la révolution. (1980 - IREM de Rouen - groupe histoire et épistémologie des mathématiques)

Titre : Décimaux et autres nombres

Auteur : Marianne FREMIN (IUFM de Versailles, Centre Antony Val de Bièvre)

Date : Mars 1992

Type : Compte-rendu d'activités avec des Élèves Professeurs des Écoles de première année (PE1).

DÉCIMAUX ET AUTRES NOMBRES

I - Introduction

A. Contexte :

à l'IUFM de Versailles, le thème "décimaux, fractions et réels" apparaît en première année à la rubrique maîtrise des contenus uniquement, pas à celle de l'ouverture professionnelle. Les préoccupations d'ordre pédagogique sont donc repoussées en deuxième année.

B. Mes choix :

Je n'ai pas cherché à présenter une construction propre de ces ensembles de nombres. J'ai voulu d'abord regarder, prendre en compte les connaissances des PE1 et leur préférence pour les "nombres à virgule", pour ensuite organiser les acquis. J'ai essayé d'intégrer les nouveaux outils de calcul (place à la calculette et à un petit peu d'analyse numérique)

II - Le test

A. Le test lui même : *(voir en annexe 1).*

Il est livré aux étudiants, qui spontanément discutent entre voisins et confrontent leurs interrogations et points de vue. Nous faisons ensuite une synthèse des acquis, des questions, je complète selon les besoins.

B. Les points soulevés :

1. définition (questions 1 et 3)

Un décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $n/10^p$, ou sous forme d'une écriture à virgule finie

2. écriture à virgule et nombre décimal (questions 1 et 2)

Un décimal a d'autres écritures qu'à virgule; une écriture à virgule illimitée désigne rarement un décimal

3. 0,999999.... = 1 (!..) (question 1)

Mal accepté. Deux arguments sans réplique, mais peu convaincants : "s'il est différent de 1, quel est donc l'écart à 1?", et "$0,33333... = 1/3$, donc $3 \times 0,333333... = 0,999999... = 3 \times 1/3 = 1$".

4. reconnaître qu'une fraction est un décimal (question 3)

a/b irréductible, et $b = 2^p \times 5^q$

5. densité (questions 1, 7, 8)

Un langage topologique intuitif de "fonctions continues et valeurs intermédiaires", de "suites majorante et minorante coinçant un nombre" semble évocateur.

6. approximation (question 4)

Toujours de la topologie intuitive.

7. précision (question 4)

A propos de la contradiction, pour certains, qui considèrent que "3,14 est π", que "3,140 n'est pas π", mais que, cependant, "3,14 = 3,140", on précise que, pour les matheux, 3,14 = 3,140 = 3,1400 = 3,14000 ... (des écritures formelles du même nombre), alors que pour les physiciens, ce sont des nombres issus de mesures, avec une précision au centième, au millième, au dix-millième.... (les écritures portent une indication sur la fiabilité des décimales).

III - Cours après le test

A. *N Z D Q R (..C..)*

Quels nombres contiennent-t-ils? (appel aux souvenirs)

Les souvenirs leur permettent de donner quelques specimens de nombres qui sont ou qui ne sont pas dans chaque ensemble.

Inclusions: $N \subset Z \subset D \subset Q \subset R \subset C$

B. Leurs propriétés algébriques

(point de vue du matheux algébriste)

On cherche à plonger un ensemble de nombres dans un ensemble plus vaste, en gardant toutes les bonnes propriétés, et en les améliorant :

En passant de N à Z, on gagne les symétriques, et le fait que toutes les équations $a + x = b$ ont une solution.

En passant de Z à D, on ne gagne rien (D n'est pas une invention d'algébriste)

En passant de Z à Q, on gagne les inverses, et le fait que toutes les équations $a\,x = b$ $(a \neq 0)$ ont une solution.

En passant de Q à R, on gagne des solutions à des équations qui n'en avaient pas (par exemple $x^2 = 3$)

En passant de R à C, on gagne des solutions à des équations qui n'en avaient pas (par exemple $x^2 = -1$)

C. Leurs propriétés topologiques

N et Z sont discrets.

D et Q sont denses, mais pas complets.

R est complet: c'est le seul dans lequel deux suites (une minorante, l'autre majorante) dont l'écart tend vers zéro "attrapent" à tout coup un nombre.

D. facilités d'emploi

(point de vue mesure et utilisation)

1. pour mesurer on a besoin

- d'un ensemble de nombres (prolongeant N), de l'ordre, de l'addition, de la multiplication sur cet ensemble,
- de quelques qualités algébriques et topologiques: avoir des inverses, la densité, les "valeurs intermédiaires" (exemple: l'aire d'un carré croît de 4 à 9 quand le côté croît de 2 à 3, on aimerait, quand l'aire du carré vaut 6, avoir une valeur pour le côté),
- d'un ensemble de nombres facile à utiliser.

2. parmi les extensions de N citées ci-dessus

- R a les meilleures propriétés, mais est difficile d'emploi.
- D est loin d'être parfait (l'inverse d'un décimal est rarement un décimal, $\sqrt{6}$ n'est pas un décimal...), mais il permet d'approcher d'aussi près qu'on veut $1/7$, $\sqrt{6}$, π... et surtout,
- D est très facile à manipuler, parce que lié à la numération en base dix (ce qui facilite les calculs et l'accès à l'ordre).

· IV - Développement décimal d'une fraction

J'ai choisi de me placer sur le terrain des élèves en utilisant les "nombres à virgule" et la calculette qu'ils affectionnent, pour y perfectionner leurs compétences, tout en raccrochant les ensembles de nombres cités ci-dessus.

A. Calculer $\frac{43}{13}$ avec au moins 40 décimales

La plupart des étudiants foncent sur leur calculette, obtiennent immédiatement 7 ou 8 décimales, ne savent pas continuer, et se mettent à calculer à la main, ce qui leur permet d'aboutir. Ce n'est que plus tard, à ma demande, qu'ils réessayent un calcul à la machine.

1. à la main

Techniques de calcul: des questions émergent sur le sens de "abaisser un zéro", établir une table des multiples de 13 est économique vu la longueur des calculs.

2. à la Galaxy

La touche "béquille" de la division euclidienne permet de calquer la technique manuelle, en faisant la transposition "abaisser un zéro", c'est "multiplier le reste par 10".

J'ose, parfois, suggérer d' "abaisser trois zéros à la fois", ou "multiplier le reste par 1000". On obtient alors trois décimales d'un coup, et on peut repérer sur la division à la main le bloc traité d'un coup. Emerveillement garanti, et réflexion intéressante sur la technique de la division.

3. autre calculette

La difficulté est bien perçue: la machine donne un maximum de décimales, et on ne peut pas continuer pour en avoir plus tant qu'on n'a pas accès "au reste" (au sens de "ce qu'elle a laissé tomber dans son approximation")

Pour retrouver ce reste, certains multiplient naturellement par 13, et retrouvent 43. C'est l'occasion de travailler avec eux sur les chiffres cachés de la machine et la manière de les faire apparaître (en soustrayant la partie entière et en multipliant par dix).

D'autres suspectent la (ou les) dernière(s) décimale(s), ne prennent en compte que la partie conforme à leurs calculs manuels, multiplient par 13, calculent l'écart à 43, et trouvent le reste (sous forme 0,0000007)

On a de toutes façons un travail sur la numération décimale.

Il est intéressant, pour reprendre l'idée d'approximations successives et différencier troncature et arrondi, de comparer les premières décimales obtenues avec ce que dit la machine en faisant FIX 1, puis FIX 2, FIX 3, FIX 4,...

4. conclusion

L'écriture est périodique, parce qu'on retrouve les mêmes restes, et qu'alors le calcul se déroule de la même façon.

B. Calculer $\frac{44}{13}$

C'est l'occasion de réinvestir les méthodes de calcul à la machine.

L'écriture est périodique, la période est la même (6), les restes sont ceux qui n'apparaissaient pas dans $43/13$.

Les plus rapides et courageux calculent d'autres fractions ($21/17$ ...) et déclarent que c'est toujours périodique parce que on retombe toujours sur un reste déjà vu.

C. Contemplations

(feuille jointe annexe 2 : les fractions $1/n$)

1. où l'on reconnait les fractions décimales et les autres

Les fractions décimales sont celles "qui tombent juste", "qui finissent par n'avoir que des zéros" (on les repère, on vérifie que ce sont bien celles dont le dénominateur est $2^p \times 5^q$)

Les autres ont une écriture périodique: on le vérifie, on l'explique: "c'est toujours périodique parce que on retombe toujours sur un reste déjà vu". (quasiment tous les étudiants font le travail consciencieusement pour toute la feuille: incrédulité? besoin de renforcement?)

On peut affirmer que la période de $1/n$ est toujours inférieure à n (les restes possibles sont 0, 1,... n-1). Une question est régulièrement soulevée et reste en suspens : peut-on prévoir la longueur de la période en fonction de n ? On peut faire des conjectures, confirmées ou infirmées par l'examen de la feuille. Ce problème est certainement résolu, je n'en connais pas la solution, mais suis avide de m'instruire... (ceci est un appel aux collègues)

2. qui dit périodicité dit fraction?

Le problème est régulièrement soulevé par les étudiants.

Je le traitais très classiquement sur un ou deux exemples :

$$x = 2,456456456456456456.....$$

$$\begin{array}{lll} & 2456,456456456456456... & (= 1000\,x) \\ - & \underline{2,456456456456456456...} & (= x) \\ = & 2454 & \end{array}$$

$$999\,x = 2454$$

d'où $x = \frac{2454}{999}$

c'est perçu comme un tour de passe-passe peu crédible.

Gérard Deramecourt m'a donné une idée plus dans le style manipulatoire de ces activités: commencer par chercher une fraction "qui marche", en s'aidant de la liste jointe en annexe.

Ceci devrait rendre moins miraculeux mon tour de passe-passe.

3. "rareté" relative des décimaux, des fractions et des réels

Ayant bien colorié leur feuille en cherchant les périodes, les étudiants remarquent que les décimaux sont de plus en plus "rares" parmi les fractions.

Je me garde bien de parler du cardinal de R et de Q (personne ne me croirait). Par contre, j'en profite pour glisser qu'une suite illimitée de décimales tout à fait banale, sans rien de remarquable du point de vue de la période, est un réel non fractionnaire, et que donc les fractions sont rarissimes parmi les réels. (ce qu'ils imaginent volontiers, vu sous cet angle, alors qu'ils ne sont capables de citer que très peu de réels non rationnels)

V - Approximations décimales et rationnelles de π

A. Chasse aux décimales (un peu d'histoire)

Voir l'article paru dans "Tangente" n° 12

B. Activités avec calculette

Extraites de "aventures aves votre calculateur" L. Råde et B. A. Kaufman Cedic 1979. (*Voir annexe.3*)

1. les buts visés sont de deux ordres:

- fréquenter des suites ou des séries qui convergent plus ou moins rapidement, des approximations décimales ou rationnelles.
- pratiquer le calcul numérique (organiser les calculs, connaître les touches et les priorités de sa machine, utiliser les mémoires...)

2. formes du travail

C'est l'occasion d'un travail "à la carte": chacun selon ses capacités et celles de sa machine se lance dans les activités de son choix. J'interviens localement, à la demande.

3. commentaires sur les activités

La question a permet de pointer, parmi les 7 ou 8 décimales obtenues à la calculette pour chaque fraction, celles qu'on peut retenir pour π

$3 + 10/71 \quad = \quad 3{,}1408445$

$3 + 1/7 \quad = \quad 3{,}1428571$

$\pi \quad\quad 3{,}14...$

Ce sont celles qui sont communes aux deux. Travail sur encadrement et approximation.

Question b :
Travail sur le "sens" de la formule des (b_i), et la prise en compte des priorités de la machine.

Organisation des calculs, utilisation de la touche mémoire pour éviter des recopies (on débouche sur une suite algorithmique de touches à taper)

Avec les calculettes actuelles, même sommaires, je n'ai pas rencontré de suites qui cessaient de converger (possibilité évoquée par L. Råde)

La question c est du même genre que la b. Les calculs sont plus simples à comprendre. Une calculatrice à deux registres de mémoire serait la bienvenue pour "croiser" les suites. Les étudiants qui ont tâté de la question b laissent tomber celle-ci (elle peut cependant intéresser un virtuose bien équipé)

Question d: pas de difficulté de compréhension ou de calcul. La première série converge avec une lenteur remarquable et désespérante.

Question e. Il est plus intéressant de rechercher des approximations rationnelles de π (ou π^2, ou $\sqrt{\pi}$) que de faire des constats. Méthode: rechercher parmi les multiples de π (π^2, $\sqrt{\pi}$) ceux qui sont "presque entiers" (NB on prend le π de la calculette). Il faut déterminer ce qu'on choisit d'appeler "presque entier". On peut regarder toutes les décimales fournies, ou utiliser FIX. On trouve $7\pi = 22$ (d'où l'approximation $22/7$) et quelques autres (dont $14\pi = 44$, bien sûr).

ANNEXE 1 : Le test proposé aux étudiants

Dominique Valentin
Marianne Frémin, février 1992

1

Parmi ces nombres, quels sont les nombres décimaux? pourquoi?

0,33

2,4758

$\frac{1}{4}$

3

3,14

$\frac{22}{7}$

$\frac{427}{10}$

-4

$\frac{40}{10}$

$\frac{3}{5}$

$\sqrt{2}$

$\frac{1}{3}$

π

7,0

$\frac{117}{125}$

$\frac{117}{3}$

17,999.. (infinité de 9)

2

Mettre sous forme d'écriture "à virgule", quand c'est possible

$\frac{1}{5}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{22}{7}$

$\frac{1}{25}$ $\frac{35}{100}$ $\frac{3}{100}$

$\frac{1}{64}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{111}{37}$

3

Comment reconnaître qu'une fraction désigne un décimal?

4

Parmi les écritures suivantes, regrouper celles qui désignent un même nombre. Justifier.

$\frac{3}{5}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{22}{7}$ $\frac{810}{1000}$ $\frac{44}{14}$ $\frac{81}{100}$ $\frac{355}{113}$ 3+1/7

0,810 π 3,14 8,10 6÷10 0,33 3,140 0,81

regroupement	justification

5

Compléter le tableau:

x100					
	0,03		47,2725		
		1465		13	3,271

6

Les nombres sont rangés dans l'ordre croissant

① placer 3,245 parmi | 2,9 | 3 | 3,1 | 3,2 | 3,3 | 3,4 |

② placer 0,027 et 7,32 parmi | 0,001 | 0,01 | 0,1 | 1 | 1,1 | 10 | 100

7

Quel nombre décimal inférieur à 6 est le plus proche de 6?

8

Combien de décimaux y a-t-il entre 1 et 2?

...et entre 1000 et 1001?

9

Quels nombres correspondent aux points A, B, C, et D?

Placer le point E correspondant au nombre 1,55.

10

Trouver un nombre entre 12,09 et 12,1 qui soit "juste au milieu" (c'est à dire dont l'écart à 12,09 et à 12,1 soit le même)

11

Trouver un nombre entre 1,1 et 1,01 qui soit "juste au milieu" (c'est à dire dont l'écart à 1,1 et à 1,01 soit le même)

12

Compléter le tableau suivant:

écriture à virgule	avec puissance de 10	écriture "calculette"
42,53	4253×10^{-2}	4,253 E1
	37×10^{-3}	
0,8512		
27,1		
	1×10^{-4}	
		3,14 E-5

colonne 2: un entier multiplié par une puissance de 10

colonne 3: un nombre entre 1 et 10 multiplié par une puissance de 10

13

Effectuer les opérations suivantes:

29 + 17,09 + 132,8 =

4,13 - 2,844 =

38 - 2,43 =

109 x 5,66 =

4,8 x 3,08 =

27 ÷ 0,005 =

1,03 x 1,03 =

ANNEXE 2 : Les fractions 1/n

1/2 =0,5000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000....
1/3 =0,3333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333....
1/4 =0,2500000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000....
1/5 =0,2000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000....
1/6 =0,1666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666....
1/7 =0,1428571428571428571428571428571428571428571428571428571428571428....
1/8 =0,1250000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000....
1/9 =0,1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111....
1/10=0,1000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000....
1/11=0,0909090909090909090909090909090909090909090909090909090909090909....
1/12=0,0833333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333....
1/13=0,0769230769230769230769230769230769230769230769230769230769230769....
1/14=0,0714285714285714285714285714285714285714285714285714285714285714....
1/15=0,0666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666....
1/16=0,0625000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000....
1/17=0,0588235294117647058823529411764705882352941176470588235294117647....
1/18=0,0555555555555555555555555555555555555555555555555555555555555555....
1/19=0,0526315789473684210526315789473684210526315789473684210526315789....
1/20=0,0500000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000....
1/21=0,0476190476190476190476190476190476190476190476190476190476190476....
1/22=0,0454545454545454545454545454545454545454545454545454545454545454....
1/23=0,0434782608695652173913043478260869565217391304347826086956521739....
1/24=0,0416666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666....
1/25=0,0400000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000....
1/26=0,0384615384615384615384615384615384615384615384615384615384615384....
1/27=0,0370370370370370370370370370370370370370370370370370370370370370....
1/28=0,0357142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857....
1/29=0,0344827586206896551724137931034482758620689655172413793103448275....
1/30=0,0333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333....
1/31=0,0322580645161290322580645161290322580645161290322580645161290322....
1/32=0,0312500000000000000000000000000000000000000000000000000000000000....
1/33=0,0303030303030303030303030303030303030303030303030303030303030303....
1/34=0,0294117647058823529411764705882352941176470588235294117647058823....
1/35=0,0285714285714285714285714285714285714285714285714285714285714285....
1/36=0,0277777777777777777777777777777777777777777777777777777777777777....
1/37=0,0270270270270270270270270270270270270270270270270270270270270270....
1/38=0,0263157894736842105263157894736842105263157894736842105263157894....
1/39=0,0256410256410256410256410256410256410256410256410256410256410256....
1/40=0,0250000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000....
1/41=0,0243902439024390243902439024390243902439024390243902439024390243....
1/42=0,0238095238095238095238095238095238095238095238095238095238095238....
1/43=0,0232558139534883720930232558139534883720930232558139534883720930....
1/44=0,0227272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727....
1/45=0,0222222222222222222222222222222222222222222222222222222222222222....
1/46=0,0217391304347826086956521739130434782608695652173913043478260869....
1/47=0,0212765957446808510638297872340425531914893617021276595744680851....
1/48=0,0208333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333....
1/49=0,0204081632653061224489795918367346938775510204081632653061224489....
1/50=0,0200000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000....
1/51=0,0196078431372549019607843137254901960784313725490196078431372549....
1/52=0,0192307692307692307692307692307692307692307692307692307692307692....
1/53=0,0188679245283018867924528301886792452830188679245283018867924528....
1/54=0,0185185185185185185185185185185185185185185185185185185185185185....
1/55=0,0181818181818181818181818181818181818181818181818181818181818181....
1/56=0,0178571428571428571428571428571428571428571428571428571428571428....
1/57=0,0175438596491228070175438596491228070175438596491228070175438596....
1/58=0,0172413793103448275862068965517241379310344827586206896551724137....
1/59=0,0169491525423728813559322033898305084745762711864406779661016949....
1/60=0,0166666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666....
1/61=0,0163934426229508196721311475409836065573770491803278688524590163....
1/62=0,0161290322580645161290322580645161290322580645161290322580645161....
1/63=0,0158730158730158730158730158730158730158730158730158730158730158....
1/64=0,0156250000000000000000000000000000000000000000000000000000000000....
1/65=0,0153846153846153846153846153846153846153846153846153846153846153....

1/9 =0,1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111...
2/9 =0,2222222222222222222222222222222222222222222222222222222222222222...
3/9 =0,3333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333...
4/9 =0,4444444444444444444444444444444444444444444444444444444444444444...

1/99=0,0101010101010101010101010101010101010101010101010101010101010101...
2/99=0,0202020202020202020202020202020202020202020202020202020202020202...
3/99=0,0303030303030303030303030303030303030303030303030303030303030303...
4/99=0,0404040404040404040404040404040404040404040404040404040404040404...
5/99=0,0505050505050505050505050505050505050505050505050505050505050505...
6/99=0,0606060606060606060606060606060606060606060606060606060606060606...
7/99=0,0707070707070707070707070707070707070707070707070707070707070707...
8/99=0,0808080808080808080808080808080808080808080808080808080808080808...
9/99=0,0909090909090909090909090909090909090909090909090909090909090909...
10/99=0,1010101010101010101010101010101010101010101010101010101010101010...
11/99=0,1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111...
12/99=0,1212121212121212121212121212121212121212121212121212121212121212...
13/99=0,1313131313131313131313131313131313131313131?1313131313131313131313...
14/99=0,1414141414141414141414141414141414141414141414141414141414141414...
15/99=0,1515151515151515151515151515151515151515151515151515151515151515...
16/99=0,1616161616161616161616161616161616161616161616161616161616161616...

1/999=0,001001001001001001001001001001001001001001001001001001001001001010...
2/999=0,002002002002002002002002002002002002002002002002002002002002002020...
3/999=0,003003003003003003003003003003003003003003003003003003003003003030...
4/999=0,004004004004004004004004004004004004004004004004004004004004004040...
5/999=0,005005005005005005005005005005005005005005005005005005005005005050...
6/999=0,006006006006006006006006006006006006006006006006006006006006006060...
7/999=0,007007007007007007007007007007007007007007007007007007007007007070...
8/999=0,008008008008008008008008008008008008008008008008008008008008008080...
9/999=0,009009009009009009009009009009009009009009009009009009009009009090...
10/999=0,010010010010010010010010010010010010010010010010010010010010010100...
11/999=0,011011011011011011011011011011011011011011011011011011011011011110...
12/999=0,012012012012012012012012012012012012012012012012012012012012012120...
13/999=0,013013013013013013013013013013013013013013013013013013013013013130...
14/999=0,014014014014014014014014014014014014014014014014014014014014014140...
15/999=0,015015015015015015015015015015015015015015015015015015015015015150...
16/999=0,016016016016016016016016016016016016016016016016016016016016016160...

314/999=0,314314314314314314314314314314314314314314314314314314314314314314314...

Un nombre se présente sous forme d'écriture périodique, peut-on trouver une fraction qui lui est égale?

Si la période commence juste après la virgule, la liste ci-dessus laisse deviner une solution:
0,456456456456456...= 456/999
2,456456456456456...= 2+ 456/999 et on peut mettre sous forme de fraction :2454/999

Sinon, on peut se ramener au cas précédent:
12,34565656565656...=12,34+0,01x0,5656565656...=1234/100+1/100x56/99

ANNEXE 3 : Le nombre π

Extrait de "Aventure avec votre calculateur" L Rade et B.A. Kaufman Cedic 1979

Si la longueur du diamètre d'un cercle est 1, alors la longueur de sa circonférence est π.

Si la longueur du rayon d'un cercle est 1, alors la mesure de son aire est π.

Le réel π est l'un des nombres les plus fameux en mathématique. Vous pourrez lire l'histoire fascinante de ce nombre dans le livre de D.E.SMITH, *History of Mathematics*, Volume II (New-York, Dover Publications, 1958).

Voici une approximation de π avec 35 décimales :

$\pi \approx 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288$

Cette approximation a été calculée par Ludolf Van CEULEN (1540-1610), qui était à partir de 1600, professeur de génie militaire à l'université de Leyden en Hollande. Cette approximation a été gravée sur sa tombe.

a) Approximation d'Archimède

Le mathématicien grec Archimède (287-212 av J.C.) a montré que :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

Il a trouvé ces approximations en utilisant deux polygones réguliers de 96 côtés, respectivement circonscrit et inscrit dans un cercle.

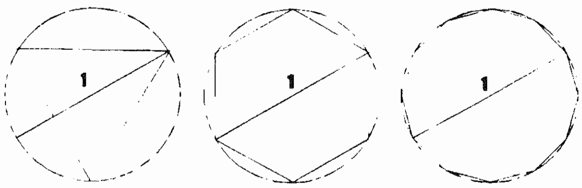
Calculez des approximations décimales de $3 + \frac{10}{71}$ et $3 + \frac{1}{7}$: déterminez jusqu'à quel ordre le résultat d'Archimède donne un renseignement exact sur π.

Déterminez aussi la moyenne de ces approximations décimales et dites si on a amélioré ainsi la précision sur π.

b) *La méthode d'Archimède pour approximer π*

Considérez un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de diamètre 1. Comme nous l'avons signalé plus haut, la longueur de ce cercle est π, et ainsi le périmètre du triangle équilatéral est une approximation de π.

Si vous considérez alors la suite constituée par les polygones réguliers de 6 côtés, de 12 côtés, etc... les périmètres de ces polygones sont des approximations de plus en plus précises de π.



Cette méthode qui consiste à trouver des approximations de plus en plus fines de π peut être décrite de la manière suivante (nous ne donnons pas ici de démonstration) : on construit trois suites (a_i), (b_i) et (x_i) avec

1) $a_1 = 3$ et $b_1 = 1$

avec $x_1 = a_1 b_1$

2) $a_2 = 2a_1$ et $b_2 = \dfrac{b_1}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - b_1^2}}}$

avec $x_2 = a_2 b_2$

3) $a_3 = 2a_2$ et $b_3 = \dfrac{b_2}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - b_2^2}}}$

avec $x_3 = a_3 b_3$

plus généralement :

4) $a_{n+1} = 2a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - b_n^2}}}$

avec $x_{n+1} = a_{n+1} b_{n+1}$

La suite (x_i) donne des approximations de plus en plus fines de π.

En calculant $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$, déterminez les dix premières approximations de π.

Si votre calculateur ne vous permet pas de calculer avec plus de 8 décimales, vous allez trouver quelque chose de particulier au cours des calculs. Nous en dirons plus à ce sujet dans les commentaires.

c) *Méthode de CUSANUS pour approximer* π

Le philosophe, théologien et mathématicien allemand Nicolaus CUSANUS (1401-1464) a mis en évidence une méthode simple pour approximer π. Sa méthode est basée sur l'étude d'une suite de polygones réguliers de périmètre 2. voici une description de cette méthode :

1) $a_1 = \frac{1}{4}$ et $b_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$

on a $\frac{1}{b_1} < \pi < \frac{1}{a_1}$

2) $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ et $b_2 = \sqrt{b_1 a_2}$

on a $\frac{1}{b_2} < \pi < \frac{1}{a_2}$

3) $a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2)$ et $b_3 = \sqrt{b_2 a_3}$

on a $\frac{1}{b_3} < \pi < \frac{1}{a_3}$

plus généralement :

4) $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ et $b_{n+1} = \sqrt{b_n a_{n+1}}$

on a $\frac{1}{b_{n+1}} < \pi < \frac{1}{a_{n+1}}$

Déterminez $\frac{1}{b_{10}}$ et $\frac{1}{a_{10}}$ et trouvez ainsi un encadrement de π.

d) *Séries infinies et* π

Nous pouvons aussi obtenir des approximations de π en calculant la somme d'un nombre fini de termes de certaines séries dont la somme est π.

Ainsi, par exemple, on peut établir que

$$\pi = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots)$$

et

$$\pi = \sqrt{12}\,(1 - \frac{1}{3\times 3} + \frac{1}{3^2\times 5} - \frac{1}{3^3\times 7} + \ldots)$$

Essayez de calculer des approximations de π en utilisant ces séries.

La formule suivante, cependant, est bien meilleure pour obtenir des approximations de π :

$$\pi = 16\,(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\times\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\times\frac{1}{5^5} - \ldots) - 4(\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\times\frac{1}{239^2} + \frac{1}{5}\times\frac{1}{239^5} - \ldots)$$

Elle porte le nom de formule de MACHIN.

Utilisez cette formule pour calculer des approximations de π.

e) *Approximations rationnelles de* π

Archimède a trouvé les approximations suivantes de π :

$\frac{22}{7}$ et $\frac{223}{71}$.(Les nombres $\frac{22}{7}$ et $\frac{223}{71}$ sont *rationnels* alors que le nombre π est *irrationnel*).

L'ingénieur chinois TSU CH'UNG-GHIH (430-501) a trouvé une remarquable approximation rationnelle : $\frac{355}{113}$.

En utilisant votre calculateur essayez de trouver d'autres approximations rationnelles de π. Pour chacune d'entre elles, trouvez jusqu'à quelle décimale votre approximation est en accord avec le développement décimal de π.

f) *L'approximation de RAMANUJAN*

En 1914, le mathématicien indien RAMANUJAN a donné l'approximation curieuse de π :

$$\sqrt{\sqrt{\frac{2143}{22}}} = \left(\frac{2143}{22}\right)^{1/4}$$

en d'autre termes, $\frac{2143}{22}$ est une approximation rationnelle de π^4.

Vous pouvez trouver des approximations analogues de π à l'aide de votre calculateur. Pour chacune d'entre elles, trouvez jusqu'à quelle décimale votre approximation est en accord avec le développement décimal de π

Titre : MISES EN SITUATIONS A PROPOS DES DECIMAUX

Auteur : Gérard DERAMECOURT (Antenne de Périgueux de l'I.U.F.M. d'Aquitaine).

Date : mars 1992

Origine : Enseignement en formation professionnelle.

Type : Problèmes relatifs aux rationnels et décimaux.

Résumé : Il s'agit de problèmes envisagés pour donner (ou redonner) du sens à certaines notions relatives aux rationnels et aux décimaux en formation initiale des instituteurs. L'exploitation sous forme de débats a concerné des groupes inférieurs à 30 personnes.

Mots-clés : addition, soustraction, multiplication, division, rationnel, décimaux, approximation, période, intervalles emboîtés.

MISES EN SITUATION A PROPOS DES DÉCIMAUX

I - Déroulement des activités

Les problèmes ont d'abord fait l'objet le plus souvent d'une recherche individuelle en dehors de la classe.

Des recherches en classe par équipes de deux ont été conduites au cours de certains débats, pour prouver, infirmer des affirmations, mettre au point une méthode de calcul, chercher une réponse à une question nécessitant une aide.

Exemple (à propos du problème 2 ci-dessous) : "trouver un rationnel p/q pour lequel une approximation décimale par défaut est par exemple 0,72727272 (période 72), ou par exemple 0,684684 (période 684) ?".

Aucune réponse n'ayant été produite, une aide est apportée en classe: chercher des problèmes plus simples pour lesquels une réponse pourra être trouvée ; exemple : un seul chiffre pour la période, ce qui est le plus "simple" apparaît sous la forme 0,11111111, puis 0,22222222 ; 0,77777777 ; ..... puis 0,01010101 ; 0,08080808 ; 0,26262626 ; .....

0,999999999 sera considéré en fin de problème.

Les débats ont été des occasions d'une réflexion sur les démarches mobilisées, les types d'aide, le langage, des concrétisations élémentaires.

Des mises au point substantielles (définitions par exemple, rappels de certains termes) ont eu lieu au cours de ces débats. Les récapitulations et des apports éventuellement nécessaires, plus construits, ont été considérés à leur issue.

II - Les problèmes considérés

A. Vers les rationnels.

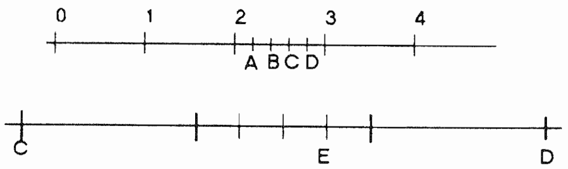
A l'aide d'un guide-âne (ou du théorème de Thalès), on peut diviser un segment [O B] en un nombre donné (3 par exemple) de segments superposables, et construire un segment [O C] de longueur $4 \times OB/3$ par exemple. Par convention, on note aussi $OC = 4/3\ OB$.

Des écritures telles que $4/7$; $9/5$; ..... ; peuvent être interprétées comme expressions de mesures de longueurs, une fois un segment [O B] choisi pour représenter l'unité, elles peuvent aussi être considérées comme des désignations de positions des extrémités des segments ayant pour origine O et pour longueur les longueurs considérées.

• Ci-dessous, on a réalisé un agrandissement du segment [C D].

Les segments d'une même subdivision sont superposables.

Quelle désignation peut-on considérer pour la position du point E ?



(les deux graduations sont évidemment différentes)

• Montrer que si à la position d'un point, correspondent deux codes p/q et s/t par exemple, alors nécessairement $p \times t = q \times s$. Inversement, montrer que si cette égalité est vérifiée à propos de deux désignations p/q et s/t, alors ces deux désignations relèvent du même point.

• Calculer $5/4 + 3/8$; $13/12 + 9/16$ et de façon générale $p/q + s/t$. Donner une interprétation dans la concrétisation considérée ci-dessus.

• Comparer $11/8$ et $5/4$; $23/14$ et $16/11$. De façon générale, comment comparer p/q et s/t ? Donner une interprétation dans la concrétisation ci-dessus.

• Prouver à l'aide des écritures, que l'on peut toujours trouver une longueur comprise entre deux longueurs p/q et s/t données différentes.

• A partir de ce qui a été considéré en début de problème, se trouvent définies une addition et une méthode de calcul :

$(p/q \cdot s/t) \rightarrow p/q + s/t$: $p/q + s/t = (pt + qs)/qt$

A partir de cette addition, trouver une définition de la soustraction, et le calcul associé.

• Calculer $2/3 \times 5/4$, et de façon générale $p/q \times s/t$.

Donner deux interprétations de ce calcul :

- l'une à l'aide de la représentation des éléments du type p/q, sur la demi-droite en considérant par exemple la détermination de $2/3$ de $5/4$;

- l'autre à l'aide d'un calcul d'aire ; l'unité d'aire sera définie par le carré dont le côté a pour longueur l'unité.

• On considère un segment de longueur 9 partagé en 7 parties superposables. La longueur d'une partie est $9/7$. Pourquoi ? D'une façon générale, pourquoi a-t-on $9 : 7 = 9 \times 1/7$?

• A l'aide de l'un des aspects précédents, se trouve définie une multiplication :

$(p/q \cdot s/t) \rightarrow p/q \times s/t$; $p/q \times s/t = ps/qt$

A partir de cette multiplication, trouver une définition de la division, et le calcul associé. Donner une interprétation à l'aide d'une concrétisation.

II - Vers les décimaux.

• Des deux rationnels suivants a, b, quel est le plus grand ?

$a = 2 + 5/6$
$b = 2 + 2/3 + 5/6^2 + 5/6^3 + 5/6^4 + 5/6^5$

- Calculer leur différence.

- Trouver un rationnel compris entre a et b.

- Quelle est la fraction irréductible qui désigne le rationnel c ?

$c = 3 + 5/6 + 1/6^2 + 4/6^3$

- Pour chacun des rationnels suivants : $47/36$; $87/9$; $77/108$; trouver l'écriture de la forme :

$a_0 + a_1/6 + a_2/6^2 + a_3/6^3 + \dots + a_n/6^n$ (1)

où a_0 est un naturel et où a_1 ; a_2 ; a_3 ; ..... ; a_n sont des naturels inférieurs à 6.

Donner une interprétation dans la concrétisation à l'aide de la demi-droite et des subdivisions successives en 6 parties égales (représentation du "filtre des découpages par 6").

- Soit N/D une fraction irréductible désignant un rationnel r, trouver la condition nécessaire et suffisante que doit vérifier D pour que r puisse être désigné par une écriture de la forme (1); par exemple $48/7$; $21/5$ ne peuvent pas s'écrire sous la forme (1).

• On convient d'appeler nombre décimal un nombre rationnel qui peut s'écrire sous la forme $A/10^n$ avec A entier. Parmi les rationnels suivants, quels sont les décimaux ?

$7/2$; $3\,425/1\,000$; $143/125$; 7 ; $81/3$; $14/3$; $11/7$; $27/16$

• Soit N/D une fraction irréductible désignant un rationnel. Trouver une condition nécessaire et suffisante que doit vérifier D pour que r soit décimal.

• - Pour chacun des décimaux de la liste ci-dessus, trouver l'écriture de la forme :

$a_0 + a_1/10 + a_2/10^2 + a_3/10^3 + ... + a_n/10^n$ (2)

où a_0 est un naturel et où a_1 ; a_2 ; a_3 ; ..... ; a_n sont des naturels inférieurs à 10.

- On convient d'adopter l'écriture $a_0,a_1a_2a_3....a_n$ pour désigner $a_0 + a_1/10 + a_2/10^2 + a_3/10^3 + ... + a_n/10^n$

Donner les fractions irréductibles qui désignent les décimaux suivants :

4,536 ; 0,625 ; 10,24 ; 1,379 ;

• - A partir de la règle utilisée pour la comparaison des rationnels, justifier la méthode utilisée habituellement pour comparer les décimaux lorsqu'on utilise l'écriture décimale.

- Trouver un nombre décimal et un nombre non décimal compris entre 3,0001 et 3,01.

- Peut-on trouver un décimal juste avant 2,04 ? Justifier.

Peut-on trouver un décimal plus grand que 3,099 et n'ayant qu'un chiffre après la virgule ?

- A partir des règles de calcul relatives à l'addition, la soustraction, la multiplication dans les rationnels, retrouver les techniques opératoires de ces opérations lorsqu'on utilise des écritures décimales.

• Le filtre des décimaux :

A propos de $2/3$, vérifier que :

$2/3 = 6/10 + 2/30 \qquad = 0,6 + 2/30$
$2/3 = 6/10 + 6/100 + 2/300 = 0,66 + 2/300$
...
$2/3 = \quad 6/10 + 6/100 + ... + 6/100000 + 2/300000$
$2/3 = 0,66666 + 2/300\,000$

Ainsi : $0,66666 \leq 2/3 \leq 0,66667$

Déterminer 2 décimaux différents de $1/100\,000$ qui encadrent $9/11$ et de même, 2 décimaux différents de $1/1\,000\,000$ qui encadrent $11/7$. Montrer qu'il est toujours possible de trouver 2 décimaux aussi voisins que l'on veut, qui encadrent un rationnel non décimal.

• Montrer que dans les parties decimales des approximations décimales par défaut du type précédent, figure nécessairement une période. Exemples :
$0,666666\underline{6}$; $2,41414141\underline{41}$; $51,319319319\underline{319}$

• Inversement, peut-on trouver un rationnel p/q pour lequel une approximation décimale par défaut est par exemple 0,72727272 (période 72), ou par exemple 0,684684 (période 684) ?

• Retrouver et justifier la technique de calcul du quotient de deux décimaux.

III - Approximation dans les décimaux.

• Des inégalités : $2,34 \leq x < 2,35$; $4,13 \leq y < 4,15$, déduire les meilleurs encadrements possibles pour $x + y$ et $x - y$.

En utilisant maintenant des nombres dont les écritures décimales ont deux chiffres après la virgule , donner les meilleurs encadrements pour $x \times y$ et $x : y$.

• Montrer qu'il n'existe pas de rationnel p/q tel que $(p/q)^2 = 2$ (une démonstration consiste à établir que l'existence d'une telle fraction p/q irréductible se contredit).

Trouver d'autres nombres a pour lesquels il n'existe pas de rationnel p/q tel que $(p/q)^2 = a$.

Ci-après, les résultats relatifs à une méthode élémentaire de calculs d'une suite de décimaux (colonne de gauche) dont les carrés (colonne de droite) sont inférieurs à 2, mais qui se rapprochent de plus en plus de 2.

N	N^2
1,0	1.00
1,1	1,21
1.2	1,44
1,3	1,69
1,4	1,96
1,5	2,25

$$(1{,}4)^2 < 2 < (1{,}5)^2$$

il faut donc exclure 1,5 de la liste de gauche.

1,4 et 1,5 sont les bornes d'un intervalle $[x_1 ; y_1]$ à l'intérieur duquel vont se trouver les valeurs suivantes.

La recherche se poursuit :

N	N^2
1,40	1.9600
1.41	1,9881
1,42	2.0164

$$(1{,}41)^2 < 2 < (1{,}42)^2$$

De même il faut exclure 1,42.

1,41 et 1,42 sont les bornes d'un intervalle $[x_2 ; y_2]$ à l'intérieur duquel vont se trouver les valeurs suivantes.

N	N^2
1,410	1.988100
1.411	1.990921
1.412	1.993744
1.413	1.996569
1,414	1.999396
1,415	2.002225

$$(1{,}414)^2 < 2 < (1{,}415)^2$$

1.414 et 1.415 sont les bornes d'un intervalle $[x_3 ; y_3]$ à l'intérieur duquel vont se trouver les valeurs suivantes.

N	N^2
1.4140	1.99939600
1.4141	1.99967881
1.4142	1.99996164
1.4143	2.00024449

$$(1{,}4142)^2 < 2 < (1{,}4143)^2$$

On obtient ainsi successivement des intervalles $[x_i ; y_i]$ tels que chacun est contenu dans le précédent, et tels que les extrémités x_i, y_i vérifient $x_i^2 < 2 < y_i^2$.

A l'aide d'une calculatrice, ou d'un calcul à la main, poursuivre la méthode précédente pour déterminer les deux intervalles suivants.

Quelles sont les longueurs des intervalles successifs ?

• Quelle est la suite des intervalles emboîtés, bornés par des décimaux qui définit $9/11$.

IV - Liaison avec l'enseignement élémentaire

Suite à l'étude des aspects théoriques considérés dans les problèmes précédents, on aborde une réflexion sur les situations à considérer en classe et sur l'enchaînement de ces situations.

Problèmes multiplicatifs

Titre : Eléments pour un cours. Catégorisation et unification des problèmes multiplicatifs.

Date : 1992

Auteurs : A. Descaves. J. Euriat. A. Kuzniak. G. Julien

Rédacteur : Alain DESCAVES (IUFM de Picardie. Beauvais)

Résumé : Recensement des diverses catégorisations possibles des problèmes multiplicatifs

Mots-clés : Structures multiplicatives. catégorisation. conceptions. modélisation. signification

CATÉGORISATION DES PROBLÈMES MULTIPLICATIFS ET TENTATIVES D'UNIFICATION

1 - Qu'est-ce qu'un problème multiplicatif ?

On désigne ordinairement par problème multiplicatif un problème qui exige la mise en oeuvre d'une multiplication ou d'une division. Cette définition est insuffisante. voire dangereuse. car elle peut limiter la pragmatique de la résolution de ces problèmes à la reconnaissance et à l'exécution d'une technique opératoire.

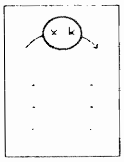
On peut. comme le fait le psychologue G. Vergnaud, étendre le champ des problèmes multiplicatifs à l'intérieur du champ conceptuel des structures multiplicatives (cf.2.2). On est alors confronté à un champ immense qui met en jeu aussi bien les concepts de multiplication et de division. que ceux de proportion. de fonction linéaire. de rapport. de multiple. de diviseur. de nombre rationnel. de fraction. etc.

On peut également recenser. comme le fait le didacticien G. Brousseau (cf.2.1). différentes connaissances enseignées dans la scolarité obligatoire liées à la multiplication et à la division et utilisées dans des problèmes. ainsi qu'identifier les conditions de leur emploi par les élèves (difficultés. réussites. échecs). et les rattacher aux connaissances culturelles visées et utilisées dans diverses institutions. On décrit alors la diversité des savoirs dans le cadre de leur contextualisation.

Il nous a paru souhaitable de donner une définition plus formelle des problèmes multiplicatifs.

Ainsi nous appellerons problème multiplicatif. tout problème susceptible. dans un certain domaine de validité. d'une modélisation par des équations à une inconnue du type $a \times b = c$ ou $a \div b = c$. a ou b ou c étant l'inconnue. ou d'une mise en signes par un tableau de proportionnalité du type :

l'inconnue x occupant une des quatre places.



c'est à dire d'une modélisation de la forme $f(a) = b$ où f est une fonction linéaire. Un problème multiplicatif n'a pas forcément une solution dans le champ de validité considéré (notamment si le champ n'est pas étendu aux rationnels).

Cette définition ne répond pas à la question de la résolution. Les élèves peuvent bien sûr résoudre un problème multiplicatif sans le modéliser.

2 - Catégorisation des situations modélisables par un problème multiplicatif.

2.1. Approche didactique

Catégorisation liée aux pratiques scolaires de référence (conceptions).

Brousseau identifie un certain nombre de variables pertinentes des situations : les nombres, les types de grandeur, la situation didactique, les connaissances antérieures des élèves (liées par exemple à des techniques), etc.

Pour G. Brousseau "*la connaissance dont les enseignants s'occupent en tant que but ou en tant qu'obstacle à leur activité n'est pas une simple collection de composantes : celles-ci sont organisées en conceptions. Une conception permet de traiter (reconnaître et résoudre) une sous-classe de situations considérées comme comparables (identifiées) à l'aide des mêmes schèmes, des mêmes termes et avec des procédures voisines, justifiées par des "raisonnements semblables" ou traitées à l'aide de propriétés et de connaissances logiquement et fortement liées.*

Des conceptions sont différentes si l'une ne permet pas d'appréhender sans difficulté les problèmes que l'autre permet de maîtriser. Un même élève peut utiliser plusieurs conceptions en ignorant leurs relations ou au contraire en les reliant en une conception plus générale. L'ensemble de ces conceptions ainsi articulé et les problèmes qu'elles peuvent traiter forment le champ conceptuel de la notion mathématique." (1)

Les catégorisations proposées sont donc liées au concept de **conception**.

Brousseau identifie cinq grandes catégories de conceptions liées à la division, elles-mêmes subdivisables :

1) Les partages.
2) La recherche du terme inconnu d'un produit.
3) La division "fraction".
4) L'application linéaire.
5) La composition d'applications linéaires.

De même pour la multiplication il est possible de repérer des conceptions liées :

- à l'addition répétée ;
- au produit cartésien (arbre et tableau) ;
- au produit-mesure, les conceptions attachées aux grandeurs continues se distinguant de celles attachées au "discret".

2.2 Approche cognitive et mathématique

Catégorisation liée à des représentations symboliques.

(1). G.Brousseau. Représentations et didactique du sens de la division in Didactique et acquisition des connaissances scientifiques. La Pensée Sauvage. Grenoble. 1989.

Vergnaud replace les problèmes multiplicatifs dans le **champ conceptuel** des structures multiplicatives. Ce champ est "*à la fois l'ensemble des situations dont le traitement implique une ou plusieurs multiplications ou divisions, et l'ensemble des concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations : proportion simple et proportion multiple, fonction linéaire et n-linéaire, rapport scalaire direct et inverse, quotient et produit de dimensions, combinaison linéaire et application linéaire, fraction, rapport, nombre rationnel, multiple et diviseur, etc.*" (2).

Un certain nombre de théorèmes donnent dans ce champ leur fonction aux concepts, par exemple les propriétés de linéarité :

$f(nx) = n\,f(x)$ et $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$.

Les relations de base les plus simples sont pour G. Vergnaud quaternaires et non ternaires contrairement aux structures additives.

La relation :

.	.
.	.

permet de générer 4 classes de problèmes élémentaires :

1 - La multiplication.

ex : "J'ai 3 paquets de yaourts. Il y a 4 yaourts dans chaque paquet. Combien ai-je de yaourts ?"

1	a
b	.

2 - La division-partition.

ex : "J'ai payé 40 francs pour trois bouteilles de vin. Quel est le prix d'une bouteille ?"

1	.
b	c

3 - La division-quotition.

ex : "Pierre a 24 francs et veut acheter des paquets de bonbons à 6 francs le paquet. Combien de paquets peut-il acheter ?"

1	a
.	c

4 - La 4ème proportionnelle.

ex : "3 pelotes de laine pèsent 200 g. Il en faut 8 pour faire un pull. Combien pèse le pull ?"

a	b
c	.

Les problèmes ternaires existent également, par exemple les produits de mesure, reliés aux dimensions simples (longueur, temps, etc.), aux

(2). G. Vergnaud. Théorie des champs conceptuels in Revue de didactique des mathématiques. Vol.10/2.3. La Pensée Sauvage. Grenoble. 1991.

dimensions produits (aire, volume, etc:), aux dimensions quotients (vitesse, densité, etc:).

La difficulté des problèmes multiplicatifs dépend aussi, selon G. Vergnaud, de la taille des nombres, de la nature et de la valeur des quotients et du coefficient de proportionnalité, de la dimension, des grandeurs continues ou discrètes, etc.

2.3. Point de vue cognitiviste

Catégorisation liée aux représentations cognitives (iconiques en particulier) déclenchées par la lecture des énoncés.

Les significations déclenchées par la lecture des énoncés reposent sur la reconnaissance de "formes", sur leur mise en relation et leur traitement symbolique. Une "forme" peut par exemple être attachée à un mot déclencheur (partager, en tout, etc.).

Pour catégoriser les problèmes multiplicatifs, le point de vue cognitiviste oblige à penser le problème de l'interprétation des énoncés en fonction des possibilités de représentation et de traitement dont dispose le sujet, sachant que les représentations cognitives sont de différents types (iconiques, symboliques de type linguistique ou liées à l'écrit mathématique et à sa correspondance orale), et en fonction des possibilités de correspondance entre les différents systèmes de représentation.

Pour caractériser les problèmes multiplicatifs il convient donc d'intégrer différents niveaux d'analyse : cognitif, pragmatique et culturel.

Pour sensibiliser les professeurs d'école à ces différentes catégorisations, il est possible de leur fournir un corpus d'énoncés de problèmes multiplicatifs et de leur demander de les classer. Il est également possible de leur demander d'inventer un ou des énoncés correspondant aux différentes classes liées à ces catégorisations.

3 - Approches pédagogiques des problèmes multiplicatifs.

3.1. L'éclatement des conceptions.

L'absence de modèles unificateurs (en particulier dans les manuels) débouche sur l'éclatement des conceptions. L'apprentissage consiste, dans un cadre behavioriste, à multiplier les connexions stimulus-réponses : une opération est associée à chacun des modèles.

Les manuels scolaires présentent parfois un corpus de problèmes afin que les élèves identifient le "bon outil". Mais aucune aide n'étant fournie à ces derniers, ils restent confrontés à la diversité des situations.

3.2. Tentatives d'unification.

Parmi les tentatives d'unification des problèmes multiplicatifs on peut retenir trois conceptions :

L'unification se fondant sur une structuration spontanée chez les élèves (maturation, équilibre) suite à la confrontation avec les différentes conceptions.

L'unification provenant de la représentation par des tableaux de proportionnalité, les opérateurs jouant un très grand rôle dans cette approche (exemple des années "mathématiques modernes").

L'unification par l'algébrisation (liée essentiellement à la possibilité de pouvoir nommer l'inconnue) qui permet la découverte de règles de transformation de l'écrit (ex : $X \times a = b$ implique $b : a = X$). Ce sont les modélisations mathématiques et leurs relations qui permettent l'unification des problèmes multiplicatifs. Les structures de sens sont internes aux mathématiques. Ce sont, dans cette conception, les mathématiques qui déterminent les formes de la réalité et non les mathématiques qui sont en rapport d'application avec le monde (3). L'algébrisation n'exclut ni le recours à d'autres systèmes symboliques du type G. Vergnaud, ni la réflexion sur les différentes conceptions type G. Brousseau.

(3). A. Descaves. Comprendre des énoncés et résoudre des problèmes. Pédagogies pour demain. Didactiques. Hachette. 1992.

Titre : Pavage et PGCD

Auteurs : Marie-Lise PELTIER et Catherine HOUDEMENT (Pr. I.U.F.M. Rouen)

Type : Activités en formation initiale ou continue

Résumé : à partir d'une situation problème de pavage de rectangles, dégager les notions de PGCD, de partie aliquote commune, d'irrationalité, puis pointer quelques concepts de didactique : aspects outil-objet d'une notion, variable didactique, seuil épistémologique.

Origine : problème tiré de *Problème ouvert et Situation Problème* (IREM de Lyon No 64, 1988).

Durée prévue : deux séances de trois heures.

En annexe : développements mathématiques.

PAVAGE ET PGCD

I - OBJECTIFS

Objectifs mathématiques

Il s'agit de proposer aux étudiants une situation durant laquelle ils vont "faire des mathématiques" : résoudre un problème, d'apparence géométrique, en utilisant un outil mathématique numérique, le PGCD, et prétexte à une réflexion plus poussée sur la "nature" des nombres-mesures (rationalité et irrationalité, incommensurabilité de deux réels).

Objectifs didactiques

A l'occasion certaines notions de didactique peuvent être pointées dans cette activité (notions d'outil et d'objet, variable didactique, contextualisation....), mais elle reste à visée essentiellement mathématique.

II - ACTIVITÉ

Problème général présenté aux étudiants

"Il s'agit de paver un rectangle de dimensions données avec des carrés tous exactement superposables, les plus grands possible. Nous appelons "paver" le fait de placer les carrés bord à bord, sans chevauchement, sans trous, sans débordement. On pourrait encore dire qu'il s'agit de réaliser un "carrelage" du rectangle."

Phase 1 :

rectangles de **dimensions entières**.

Objectif

Faire émerger la notion de PGCD en tant qu'outil de résolution du problème.

Consigne 1

"Vous devez carreler un rectangle de dimensions 42 cm sur 96 cm."

Les diverses propositions sont recensées. Si l'échec est total, la nouvelle consigne est de carreler un rectangle de 8 cm sur 12 cm, afin de permettre un dessin effectif du rectangle et de ses carrelages.

<u>Remarques</u>

Les étudiants proposent généralement, dans un premier temps des carrés de 2 cm sur 2 cm, et progressivement essaient d'autres valeurs.

Certains étudiants ne sont pas convaincus que des carrés de 6 cm sur 6 cm sont les plus grands possible répondant à la question, ils essaient des valeurs décimales non entières supérieures à 6.

Consigne 2 :

reprise de la consigne 1 avec divers rectangles :

- 462 cm sur 165 cm
  pour qu'il soit impossible de faire le dessin.

- 1620 cm sur 1650 cm
  pour mettre en évidence une propriété du PGCD.

- 105 cm sur 176 cm
  pour dégager la notion de nombres premiers entre eux.

- 67320 cm sur 245700 cm
  pour faire évoluer les procédures de recherche et se libérer des unités.

Synthèse

1 - Quelles procédures ont été utilisées pour résoudre le problème ?

- Le tâtonnement et la recherche de diviseurs successifs.
- L'utilisation des dessins.
- La décomposition des nombres en facteurs premiers, soit par décompositions multiplicatives successives, soit avec l'algorithme traditionnel.

2 - Quelle propriété vérifie le côté du carré répondant à la question ?

- C'est un diviseur des deux nombres, pour que l'on puisse "paver"
- C'est le plus grand diviseur des deux nombres, pour que ce soit le carré le plus grand possible.

La notion mathématique ainsi dégagée est celle de **plus grand diviseur commun** à deux nombres.

3 - Quelles propriétés ou définitions ont déjà été rencontrées ?

- PGCD (ka, kb) = k PGCD (a, b)
- Si PGCD (a, b) = 1 , a et b sont dits **premiers entre eux** (on dit aussi **étrangers**).

Institutionnalisation sur les points suivants

- Définition du **PGCD** de deux nombres entiers.
- Définition de la notion de nombres entiers **premiers entre eux** ("étrangers")
- Recensement des **méthodes de recherche du PGCD** de 2 nombres entiers :

• **1ère méthode,** utilisant la structure factorielle de **N** : décomposition en facteurs premiers des deux nombres.

• **2ème méthode**, utilisant la structure euclidienne de **N** : algorithme d'Euclide.

– Présentation géométrique de la méthode des soustractions successives (utilisant la propriété **si d/a et d/b alors d/a-b)** : antéphérèse (cf. annexe 1).
– Algorithme d'Euclide sous sa forme usuelle. Traitement informatique de cet algorithme.
– Lien avec les fractions continues.

Phase 2 :

rectangles de dimensions **non entières.**

On étend maintenant le problème de l'existence d'un carré le plus grand possible permettant de paver un rectangle **de dimensions quelconques**.

Objectifs

- Faire émerger la notion de "partie aliquote commune" à deux rationnels.
- Poser le problème de irrationalité de certains nombres.

Consignes successives

- *Paver un rectangle de 72,45 sur 61,2.*
- *Paver un rectangle de 21/15 sur 49/14*
- *Paver un rectangle de 25/3 sur 40/11.*

Recensement des résultats et des procédures utilisées.

- 72,45 et 61,2 sont remplacés par 7245/100 et 6120/100 : des méthodes utilisées pour les entiers sont réinvesties.

- 21/15 et 49/14 remplacés par 7/5 et 7/2 : or 1/5 = (1/10) x 2 et 1/2 = (1/10) x 5 ; donc 7/10 convient.

- 25/3 et 40/11 sont remplacés par 275/33 et 120/33 ; des méthodes utilisées pour les entiers sont réinvesties (soit décomposition en facteurs premiers, soit algorithme d'Euclide).

Synthèse

1 Les **décimaux** sont "naturellement" transformés en **fractions décimales** pour travailler à nouveau sur les entiers : $\mathbf{D^+}$ se trouve naturellement plongé dans $\mathbf{Q^+}$.

2 L'extension à $\mathbf{Q^+ - D^+}$ se fait "en douceur", le dénominateur commun retrouve son sens et la "commune mesure" sa définition.

3 Le côté du carré solution est un nombre ayant des propriétés comparables à celles du PGCD lorsque les dimensions étaient entières, c'est la **commune mesure** aux deux dimensions du rectangle ou encore la **partie aliquote commune** aux deux nombres qui les mesurent.

Nouvelle consigne

"Est-il toujours possible de paver un rectangle avec des carrés?"

Généralement la réponse des étudiants est oui. Ceci va permettre d'introduire la notion d'**incommensurabilité** de certaines grandeurs et de comprendre qu'il n'est par exemple pas possible de paver un rectangle de dimension 1 et $\sqrt{2}$ avec des carrés.

Ici il est possible de donner un aperçu historique et philosophique de ce problème car la méthode décrite dans le livre X des Elements d'Euclide est analogue à celle de la recherche du PGCD par soustractions successives : "étant données deux grandeurs inégales et la plus petite retranchée de la plus grande, si le reste ne mesure jamais le reste précédent, les deux grandeurs sont incommensurables".

On peut également proposer une démonstration géometrique de l'**incommensurabilité de 1 et de $\sqrt{2}$** s'appuyant sur cette propriété et prolonger cette méthode au **développement en fraction continue de $\sqrt{2}$** (cf. annexe 2).

Remarque

Le problème de l'incommensurabilité de 1 et de $\sqrt{2}$ revient à celui de irrationalité de $\sqrt{2}$, mais il est à rappeler que deux nombres irrationnels peuvent mesurer des grandeurs commensurables par exemple $3\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ puisque leur rapport est 3.

Exemples d'autres rectangles "classiques" que l'on ne peut théoriquement pas paver avec des carrés :
- les "rectangles d'or"
- les rectangles correspondant aux formats standard des feuilles de papier (A_4, A_3, A_2...).

Il est intéressant de **noter la différence entre le problème théorique et la manipulation pratique**, car il est évidemment possible matériellement de paver la feuille A_4 avec des carrés puisqu'il s'agit alors de travailler sur des valeurs approchées décimales qui sont donc toujours "commensurables".

Institutionnalisation

Pour traiter le problème du pavage par des carrés d'un rectangle de **dimensions décimales ou rationnelles**, la méthode est **identique à celle utilisée pour les entiers**.

La notion dégagée est alors celle de **"partie aliquote commune"** à deux rationnels (ou deux décimaux).

Le problème n'a pas de solution si les deux dimensions sont **incommensurables**, c'est à dire si les deux nombres qui les mesurent ont un rapport irrationnel.

ANALYSE DE L'ACTIVITÉ

1 - Analyse mathématique

- Notion de **PGCD**, avec approche de diverses méthodes pour le trouver. Vision "géométrique" du PGCD.
- Réinvestissement de connaissances numériques telles que critères de **divisibilité**,...
- Différenciation de **N**, **D**, **Q**, **R** "en acte".
- Modélisation du problème en accord avec la réalité pour **N**, **D** et **Q**, en désaccord avec la réalité pour **R**. Limites de l'approximation.

2 - Analyse didactique

Diverses notions didactiques peuvent être pointées dans cette séquence.

- L'aspect outil d'une notion

(dans la construction des connaissances par dialectique outil-objet).

Le **PGCD** de deux nombres est introduit ici en tant qu'outil de résolution du problème et non présenté en tant qu'objet de savoir par une définition. Ceci permet de donner du sens à la notion de PGCD.

A l'issue de la phase d'institutionnalisation, le PGCD a acquis un statut d'**objet** mathématique ayant sa place dans "l'édifice" des connaissances mathématiques.

- Variable didactique

- dans la phase 1, le choix des dimensions des différents rectangles pour faire évoluer les procédures de calcul du côté du carré est un exemple de variable didactique.
- dans la phase 2, les dimensions du rectangle imposent des méthodes de démonstration de niveaux fort différents : à ce titre ce sont des variables didactiques.

- La notion de preuve :

cette situation permet de montrer les limites de la preuve pragmatique et la nécessité de preuves intellectuelles.

- La "contextualisation" d'une notion

(ici celle de PGCD dans la phase 1) : cette contextualisation est à la charge du maître, c'est sa pertinence qui assurera la prise de sens de la notion par les élèves.

ANNEXE 1

Seconde méthode (utilisation de la structure euclidienne)

convention d'écriture : **p/n** *signifie ici :* **p est un diviseur de n**

Propriété utilisée :

Si d/a et d/b alors d/(a-b)
car a = nd, b = md, et donc a - b = (n - m)d.

Cette méthode est présentée dans les éléments d'Euclide (300 av. J.C.) au livre VII mais semble être connue depuis l'époque pythagoricienne (540 av. J.C.)

Position du problème avec le rectangle 96 x 42 :

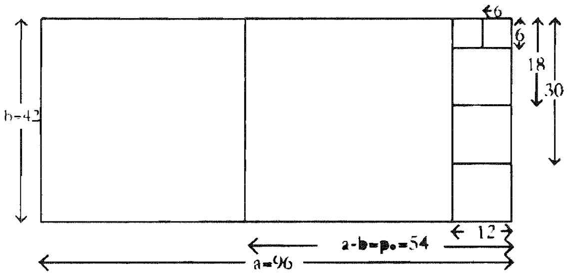
Pour a > b, si on peut paver le rectangle a sur b, on peut paver le carré b sur b et donc aussi le rectangle b sur a - b, et ainsi de suite...

Soustractions successives

Si d/96 et d/42 **alors** d/(96 - 42) **soit** d/54
Si d/54 et d/42 **alors** d/(54 - 42) **soit** d/12
Si d/42 et d/12 **alors** d/(42 - 12) **soit** d/30
Si d/30 et d/12 **alors** d/(30 - 12) **soit** d/18
Si d/18 et d/12 **alors** d/(18 - 12) **soit** d/6
Si d/12 et d/6 **alors** d/(12 - 6) **alors** d = 6.

Ce procédé porte le nom d'antéphérèse.
Pourquoi ce procédé a-t-il une fin ?

Toutes les différences obtenues sont nécessairement inférieures à 96 et il n'y a qu'un nombre fini d'entiers entre 0 et 96 donc au bout d'au plus 96 soustractions, 2 restes seront égaux.



On peut "améliorer" ce procédé en effectuant la division euclidienne de 96 par 42 :

96 = 2 x 42 + 12 : d/96 et d/42 donc d/12
42 = 3 x 12 + 6 : d/42 et d/12 donc d/6
12 = 2 x 6 : donc d = 6

C'est **l'algorithme d'Euclide** que l'on peut définir par :

pgcd (a, 0) = a
pgcd (a, b) = pgcd (b, a-bq)
et pgcd (a, b) = r_n, dernier reste non nul.

C'est une méthode récursive facile à traiter en informatique :

ordonner a et b
si b = 0
alors pgcd (a, b) = a
sinon pgcd (a, b) = pgcd (b, a mod b)

(Le procédé a une fin car la suite des restes est une suite d'entiers positifs strictement décroissante)

Lien avec les fractions

$$\frac{96}{42} = 2 + \frac{12}{42} = 2 + \frac{1}{\frac{42}{12}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{6}{12}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}$$

Cette décomposition est due à l'Hindou Aryâbhata (500 ap. JC)

ANNEXE 2

Dans le livre X, Euclide utilise pour démontrer l'incommensurabilité de 2 grandeurs une méthode analogue à celle de la recherche du pgcd par soustractions successives :

"Etant donné 2 grandeurs inégales et la plus petite retranchée de la plus grande, si le reste ne mesure jamais le reste précédent, les 2 grandeurs sont incommensurables".

On s'arrête dès que l'on trouve deux restes successifs p_n et p_{n+1} qui se trouvent dans le même rapport que les grandeurs initiales a et b.

$\frac{a}{b} = \frac{p_n}{p_{n+1}}$: les 2 grandeurs sont alors incommensurables.

Démonstration

Supposons qu'il existe n tel que $\frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{a}{b}$

(a et b non nuls)

alors, en continuant les soustractions successives on obtiendra 2 nouveaux restes p_m et p_{m+1} tels que $\frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{p_m}{p_{m+1}}$

En effet, $\frac{a}{b} = \frac{p_n}{p_{n+1}}$ donc $\frac{a}{p_n} = \frac{b}{p_{n+1}} = \frac{1}{k}$

D'où $p_n = ka$, $p_{n+1} = kb$
et $p_{n+2} = p_n - p_{n+1} = ka - kb = k(a-b) = kp_0$
et $p_{n+l} = kp_{l-2}$ pour $l \geq 2$

La suite de nombres suivante est "pseudo-périodique" :

b , p_0, p_1, ... p_{n-1}, p_n, p_{n+1}, p_{n+2}...p_{2n+1}, p_{2n+2}...
b , p_0, p_1, ... p_{n-1}, ka, kb, kp_0, kp_n, kp_{n+1},
b , p_0, p_1, ... p_{n-1}, ka, kb, kp_0, k^2a, k^2b,...

($p_{n+r} = kp_{r-2}$)

d'où $\frac{p_{2n+2}}{p_{2n+3}} = \frac{kp_n}{kp_{n+1}} = \frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{a}{b}$

et d'une façon générale

$\frac{p_{n+a(n+2)}}{p_{n+a(n+2)+1}} = \frac{a}{b}$

Montrons qu'alors on ne pourra jamais trouver deux restes successifs égaux.

Soit n le plus petit entier tel que $\frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{a}{b}$

Supposons qu'il existe s tel que $\frac{p_s}{p_{s+1}} = 1$

Alors nécessairement s > n+1. On divise s-n par n+2

$q(n + 2) < s - n < (q + 1)(n + 2)$
$s - n = q(n + 2) + r$ avec $r < n - 2$
$p_s = p_{n+r+q(n-2)} = k^q p_{n+r} = k^{q-1} p_{r-2}$

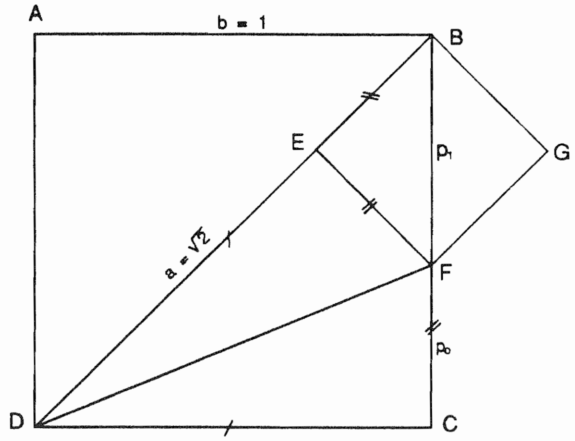
Alors $\frac{p_s}{p_{s+1}} = \frac{k^q p_{n+r}}{k^q p_{n+r+1}} = \frac{p_{n+r}}{p_{n+r+1}} = \frac{p_{r-2}}{p_{r-1}} = 1$
ce qui est contradictoire.

Donc a et b sont incommensurables.

$a = \sqrt{2}$
$b = 1$
$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$
$p_0 = a - b = \sqrt{2} - 1$
$p_1 = b - p_0 = 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2} = \sqrt{2}\,(\sqrt{2} - 1)$
$\frac{p_1}{p_0} = \frac{\sqrt{2}.(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2}$

On en déduit que 1 et $\sqrt{2}$ sont incommensurables.

Démonstration géométrique : antéphérèse



$a = BD$
$b = BC = DE$
La perpendiculaire en E à DB coupe BC en F

$p_0 = a - b = BD - BC = BD - DE = BE$
$p_1 = b - p_0 = BC - BE = BC - FC = BF$

Les triangles rectangles EDF et CDF sont isométriques car ils ont l'hypoténuse commune et un côté de même longueur.

Donc EF = FC. Or BEF est rectangle isocèle, donc EB = EF = FC

On construit le carré EFGB, il est semblable à ABCD

On a donc $\frac{p_1}{p_0} = \frac{a}{b}$

Développement en fraction continue de $\sqrt{2}$

(idée datant de la Chine, de l'Inde, de la Grèce antique).

Théorie précisée par Fermat (1601-1665), Euler (1700-1783), Lagrange (1700-1783), Legendre (1752-1833)

$a = \sqrt{2}$ $\quad b = 1 \quad p_0 = a - b \quad p_1 = b - p_0$ et $\frac{a}{b} = \frac{p_1}{p_0}$

$a = b + p_0 \quad b = p_0 + p_1$ donc $a = 2p_0 + p_1$

$$\frac{a}{b} = \frac{2p_0 + p_1}{p_0 + p_1} = 1 + \frac{p_0}{p_0 + p_1} = 1 + \frac{1}{\frac{p_0 + p_1}{p_0}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{p_1}{p_0}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{a}{b}}$$

d'où itération du processus.

On a donc $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + 1 + \cfrac{1}{1 + \sqrt{2}}}$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \sqrt{2}}}$$

D'où $\boxed{\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}$

Titre : Proportionnalité

Auteur : Hervé Péault (PIUFM Angers)

Date : mars 1992

Type : activités et fiches de travail en formation initiale des professeurs d'école

PROPORTIONNALITÉ

J'ai consacré sur ce thème 3 séances en première année de formation des professeurs d'école. L'objectif de ce travail était très général : permettre à chacun d'améliorer sa maîtrise de la notion de proportionnalité et de pouvoir envisager des séquences sur ce thème à l'école élémentaire.

Avec le point de départ (activité 1), j'ai essayé de les amener à réfléchir sur les procédures qu'ils utilisent spontanément pour résoudre un problème de proportionnalité puis à comparer ces procédures à celles utilisées par les enfants.

Les activités suivantes visaient à préciser les caractérisations mathématiques de la proportionnalité, à les resituer dans différents cadres et à amorcer une réflexion didactique à partir de manuels ou de projets de séquences.

La plupart de ces activités sont très directement inspirées de "La proportionnalité existe, je l'ai rencontrée..." (IREM de Rouen), p. 15 sq.

J'ai ensuite remis aux étudiants 3 documents (non présentés ici) : une série d'exercices sur la proportionnalité, des fiches de travail permettant de reprendre individuellement le travail sur les aspects mathématiques de la proportionnalité et un document de synthèse sur la proportionnalité à l'école.

ACTIVITÉ 1

Objectif

Première analyse de procédures utilisées en situation de proportionnalité.

Problème

Le problème choisi est le suivant, extrait d'un document de l'APMEP pour l'évaluation en sixième :

"Trois plateaux de fruits sont à l'étalage d'un marchand de primeurs. L'étiquette du premier plateau indique que l'on peut avoir 8 oranges pour 4 F, l'étiquette du second plateau indique 2 F pour les 3 citrons et celle du troisième plateau indique 4 F pour les 7 poires.

Quel est le fruit le plus cher ? Quel est le fruit le moins cher ?"

1) Résolution par les étudiants.

Après un premier temps de recherche individuelle, on recense et on classe les procédures utilisées. On essaie d'analyser toutes les procédures envisageables. Celles-ci visent à se ramener à des éléments de comparaison communs pour chaque type de fruit et peuvent se résumer à 4 catégories :

- recherche du prix unitaire
- recherche de la quantité de fruits pour 1 F
- recherche de la quantité de fruits pour un même prix (2 F et 4 F sont les plus utilisés)
- recherche du prix pour une même quantité de fruits (à partir du plus petit multiple commun, ici 168)

Prix	1		a	
Quantité		1		b

Les deux premières conduisent à un calcul de division, les deux autres à l'utilisation de la linéarité

2) Étude de procédures d'élèves.

Les étudiants sont d'abord invités à essayer de prévoir les réactions d'élèves de sixième devant ce problème et les difficultés qu'ils risquent de rencontrer.

Je leur donne ensuite le document en annexe 1 recensant des procédures d'élèves de sixième telles qu'elles ont été expliquées par les enfants. Ils doivent comparer ces procédures à la classification déjà faite et analyser les erreurs.

Outre des procédures d'interprétation directe des données (Chrystèle) ou de calculs sans lien avec la situation (Tony, Sébastien), on retrouve les procédures déjà évoquées plus haut avec une difficulté majeure dans la recherche du prix unitaire : répugnant à diviser par un nombre plus grand, certains élèves inversent les termes.

3) Modifications de l'énoncé

Le problème posé est le suivant : *quels éléments peut-on changer dans le problème, susceptibles de modifier les procédures utilisées (variables didactiques)* ?

Les étudiants sont invités à imaginer des énoncés changeant éventuellement de contexte et jouant sur ces variations.

3 variables paraissent importantes : la valeur de chaque rapport prix/quantité (entier ou non, plus grand ou plus petit que 1), les rapports entre les prix, les rapports entre les quantités.

ACTIVITÉ 2

Objectif

Permettre d'en arriver à une caractérisation mathématique de la proportionnalité.

1) Lecture de graphiques

Les 6 situations suivantes sont proposées :

S1 : Trouver, en fonction de leur nombre, le prix de brochures valant 25 F pièce, avec 10 F de port.

S2 : Trouver, en fonction de leur nombre, le prix de places de cinéma valant 39 F l'une.

S3 : Trouver, dans un carré quadrillé régulièrement, le nombre de cases intérieures en fonction du nombre de cases dans chaque ligne

S4 : Trouver, en fonction d'un prix initial, le prix réel à payer après une réduction de 25 %.

S5 : Trouver, en fonction du prix, un montant à payer compte-tenu de frais fixes s'élevant à 6,5 F.

S6 : Trouver, en fonction de sa longueur, la largeur d'un rectangle de 840 cm^2.

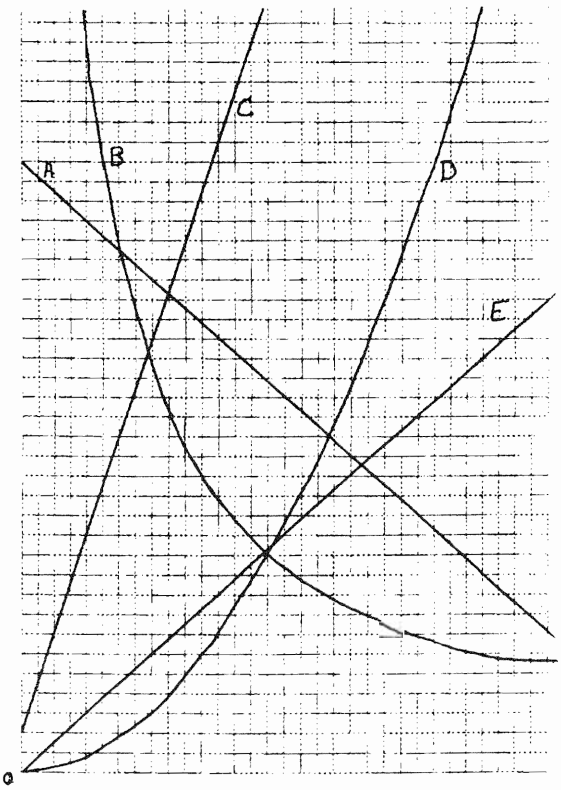
Les graphiques ci-après sont projetés à l'aide du rétro-projecteur

Consigne

Pour chacun des graphiques, et sans faire de calculs écrits, dites s'il vous paraît possible d'établir une graduation sur les axes telle que le graphique corresponde à l'une des situations.

Recherche

La recherche s'effectue par petits groupes avant une mise en commun (où on fait s'exprimer en dernier les groupes qui recourent à la formalisation fonctionnelle de chaque situation..)



Chacun reçoit ensuite un exemplaire qu'il peut utiliser pour le travail qui suit.

2) Caractérisation de la proportionnalité

Le tableau suivant est proposé :

3	5	7	8	15

Consigne

"Pour chaque situation, essayez de trouver le maximum de procédures différentes possibles pour remplir le tableau"

La mise en commun permet de mettre en évidence des procédures liées

- à l'utilisation d'une *formule* (calcul d'un produit dans le cas des fonctions linéaires)
- à l'utilisation de *propriétés* indépendantes de cette formule (linéarité, conservation des

écarts, considérations sur les écarts et la linéarité pour les fonctions affines...)

- à l'utilisation de *graphiques*

Synthèse

Définition de la proportionnalité : caractérisation par une fonction multiplicative, la linéarité, la représentation graphique. Démonstration de l'équivalence fonction multiplicative/fonction linéaire

Définition de la proportionnalité inverse et présentation sommaire de divers autre types de fonctions (fonction affine, fonction puissance, fonction exponentielle)

3) "La règle de trois"

Chaque étudiant doit résoudre l'un des problèmes suivants (chaque problème est donné au tiers des présents) :

Pb1 : "*Un mobile se déplaçant à vitesse constante parcourt 25 m en 6 minutes. Quelle distance parcourt-il en 15 minutes ?*"

Pb2 : "*6 cm³ de minerai pèsent 25 g. Combien pèsent 15 cm³ de ce même minerai ?*"

Pb3 : "*6 objets identiques sont vendus 25 F. Pour appliquer un tarif identique, à quel prix doit-on vendre 15 de ces objets ?*"

La mise en commun s'effectue sur les procédures utilisées et leur comparaison. C'est seulement à cette occasion que j'ai vu apparaître une procédure utilisant les "produits en croix". Cela a été l'occasion de démontrer l'équivalence entre cette propriété et les autres propriétés liées à la proportionnalité.

A cette occasion, je présente l'évolution des programmes concernant la proportionnalité (cf. fiches), les termes "*règle de trois*" et "*recherche d'une quatrième proportionnelle*".

4) Proportionnalité et croissance

Objectif

Réinvestissement

Première partie

La fiche ci-dessous est donnée à chacun :

Quelles sont les situations pour lesquelles il y a proportionnalité entre les variables indiquées?

1) colis postaux : *masse tarif*
2) cercle : *diamètre périmètre*
3) cylindre de base donnée : *longueur volume*
4) individu : *taille poids*
5) ressort avec poids suspendu : *poids allongement*
6) plaque de métal homogène : *poids aire*
7) entier quelconque : *nombre somme des chiffres*
8) carré : *côté périmètre*
9) carré : *côté aire*
10) rectangles de longueur constante : *largeur aire*
11) rectangles de périmètre constant : *longueur largeur*
12) rectangles d'aire constante : *longueur largeur*
13) gaz de ville : *consommation tarif*
14) déclaration de revenus : *revenu montant de l'impôt*
15) soldes à pourcentage fixe : *prix initial prix à payer*
16) cercle : *aire carré du diamètre*
17) sphère : *volume carré du rayon*
18) parcours (distance fixe) : *vitesse moyenne durée*
19) parcours (vitesse donnée) : *distance durée*
20) parcours (durée donnée) : *vitesse moyenne distance*

Mise en commun

Etude des désaccords. C'est l'occasion de mieux mettre en évidence la non-équivalence entre croissance et proportionnalité

Deuxième partie

Divers graphiques sont donnés (cf. document cité de l'IREM de Rouen). Il faut les associer, quand c'est possible, à l'une des situations ci-dessus.

ACTIVITÉ 3

Objectif

Réflexion sur des aspects didactiques de l'enseignement de la proportionnalité

1) Exposé

Dans un premier temps, je donne quelques indications sur l'approche des fonctions numériques et de la proportionnalité à l'école élémentaire (indications qui seront développées dans des fiches complémentaires) et sur le comportement des élèves

(cf. article de M. Pézard "*Proportionnalité*" dans le bulletin inter-IREM "*Suivi scientifique sixième 85-86*", p. 205)

2) Comparaison de séquences extraites de manuels

Travail par groupes puis mise en commun. J'ai choisi les extraits suivants :
- "*Maths : Calcul et géométrie CM2*" (Nathan 89), p. 140
- "*Math-hebdo CM1*" (Hachette 84), p. 130

Les deux extraits proposent chacun une situation de départ de comparaison de prix dans les magasins.

La consigne est d'analyser la tâche de l'élève dans chacun des extraits proposés puis de proposer une nouvelle situation sur le même thème en s'attachant à bien définir la tâche des élèves.

Il pourrait aussi être intéressant d'utiliser le texte de l'épreuve du concours P.E. 92 de l'Académie de Nantes. Celui-ci propose la comparaison de deux situations sur la proportionnalité, extraites l'une de "Objectif calcul" CM2 (Hatier), p. 104, Situation 1, l'autre de "Maths et Calcul" CM2 (Hachette), p. 194, Deuxième situation.

Dans chacun des cas il s'agit de l'étude de la consommation d'essence d'une voiture.

ACTIVITÉ 4

Objectif

Réinvestir, dans un cadre géométrique, les propriétés liées à la proportionnalité.

1) Première partie

Les étudiants reçoivent une série de cartes par groupe (en papier fin, suffisamment transparent) de même format. Sur chacune d'elles se trouve l'un des 12 rectangles de la page suivante (positionnés différemment sur les différentes cartes). Les diagonales sont tracées sur quelques rectangles.

Le rapport longueur/largeur est 1,27 pour 4 rectangles (A), 1,63 pour 4 autres (B), 1,41 pour les 4 derniers (C)

Les rectangles sont dans les rapports suivants :

rectangles de type A : 1 - 1,5 - 2 - 3
rectangles de type B : 1 - 1,85 - 2 - 2,7
rectangles de type C : 1 - 1,5 - 1,85 - 3.

Consigne

Quels sont les rectangles qui peuvent être considérés comme des agrandissements ou des réductions les uns des autres ? Classez-les selon ce critère. Vous avez le droit de mesurer mais vous n'êtes pas obligés.

Mise en commun

Elle vise à mettre en évidence et valider les procédures utilisées. Celles-ci ont été les suivantes :

- des procédures géométriques visant à superposer les rectangles, soit par un coin soit par leurs centres
- des procédures numériques après mesurage des côtés, voire des diagonales :
  . calcul du rapport longueur/largeur.
  . recherche de linéarité sur des valeurs entières (les rectangles aux dimensions doublées ou triplées sont repérés, mais pas les autres).
  . calcul du périmètre et recherche de rapports entiers entre les périmètres.
  . calcul de l'aire et recherche de rapports entiers entre les aires.

Ces deux dernières procédures conduisant bien sûr à des conclusions erronées.

La mise en commun est l'occasion, pour valider les procédures géométriques, d'une référence au théorème de Thalès.

2) Deuxième partie

Un rectangle de type B est choisi

Consigne

Construisez un nouveau rectangle à l'intérieur de telle façon que la longueur de ce rectangle soit la largeur du grand rectangle et que les 2 rectangles puissent être considérés comme identiques à un agrandissement près. Cherchez des procédures utilisant des calculs sur les dimensions et des procédures ne faisant intervenir aucun calcul.

Nouvelle consigne

Construisez un rectangle puis effectuez le même travail que précédemment. Le deuxième rectangle doit partager le premier exactement en deux parties.

Mise en commun

Elle vise à faire apparaître que le rapport doit être égal à $\sqrt{2}$ et se prolonge par l'étude des formats commerciaux de papier. Le format A0 étant conventionnellement établi à 1 m^2, on montre que les dimensions du format A4 sont 21 x 29,7

ACTIVITÉ 5

Objectif

Etude de la proportionnalité multiple

Problème

Dans une entreprise, des machines travaillent à rythme régulier pour produire une certaine substance. 8 machines produisent 6 kg de cette substance en 5 jours. Comment prévoir la quantité produite pour un nombre donné de machines et un nombre donné de jours ?

Recherche et étude des procédures. Synthèse à l'aide d'un tableau.

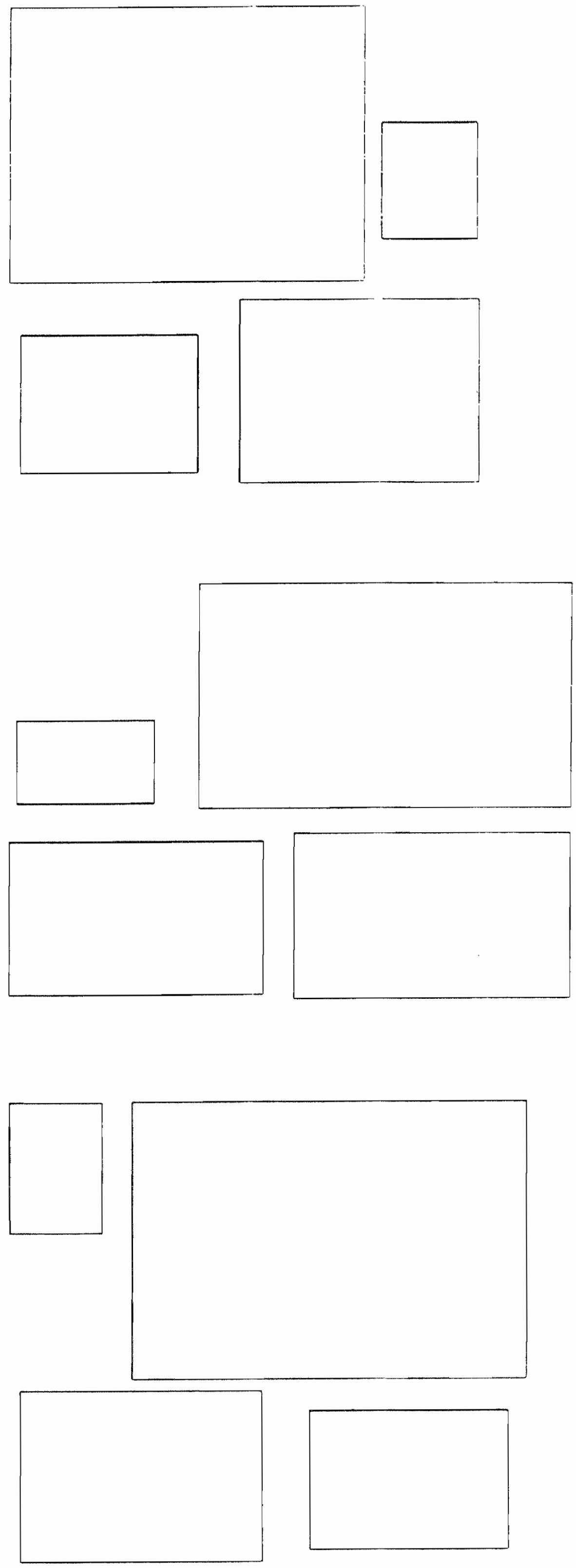
Présentation de la notion de bilinéarité et des fonctions de type $(x, y) \rightarrow axy$.

ACTIVITÉ 6

Analyse didactique sur le thème "Agrandissement et proportionnalité à l'école"

Le document en annexe 2 est remis aux étudiants et fait ensuite l'objet d'un échange à partir des questions posées.

Il est présenté comme un sujet possible de concours et le "corrigé" joint est remis aux étudiants à l'issue de la discussion (annexe 3)



ANNEXE 1

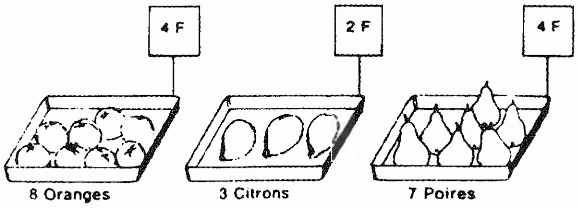
Ce problème est extrait d'un document de l'A.P.M.E.P. (questionnaire d'approfondissement pour l'évaluation en fin de sixième)

Voici trois plateaux de fruits à l'étalage d'un marchand de primeurs.

L'étiquette du premier plateau indique que l'on peut avoir 8 oranges pour 4 F, l'étiquette du second plateau indique 2 F pour les 3 citrons et celle du troisième plateau indique 4 F pour les 7 poires.

Quel est le fruit le plus cher ?

Quel est le fruit le moins cher ?



Voici quelques réponses d'élèves d'une classe de sixième (à qui il avait été demandé d'expliquer leur solution)

Fabien. Le plus cher des fruits, c'est l'orange. Car si on divise 4 par 8, 2 par 3 et 4 par 7, ça nous donne 2, 1 et 1. Et donc le citron et la poire sont sont les moins chers.

Tony. J'ai fait $4 \times 8 = 32$ puis $2 \times 3 = 6$ puis $4 \times 7 = 28$ et je constate que les fruits les plus chers sont les oranges et les moins chers les citrons.

Cindy. Si on divise les 8 oranges par son prix, on obtient la valeur totale des 8 oranges (8 oranges à 4 F, ça fait 2 F pour une orange).

Si on divise les 3 citrons par son prix, on obtient la valeur totale des 3 citrons (3 citrons à 2 F, ça fait 1,50 F pour un citron)

Si on divise les 7 poires par son prix, on obtient la valeur totale des 7 poires (7 poires à 4 F, ça fait 1,75 F pour une poire).

Donc les plus chers sont les oranges, les moins chers sont les citrons.

Mathieu. Le fruit le plus cher est le citron car si on multiplie 3 par 2, ça fait 6 ; ça sera aussi cher que les oranges et les poires, mais il y aura un fruit de moins.

Le fruit le moins cher est l'orange, parce que 6 citrons ça ferait 4 F et 7 poires ça fait 4 F et 8 oranges ça fait 4 F ; c'est le même prix, mais il y a une orange de plus que les autres fruits.

Chrystèle. Le fruit le plus cher c'est les oranges et les poires car il vaut 4 F ; le fruit le moins cher c'est les citrons car il vaut 2 F.

Ludovic. $8 : 4 = 2$ F pour une orange ; $3 : 2 = 1,50$ F pour un citron ; $7 : 4 = 1,75$ F pour une poire. Le plus cher c'est l'orange, le moins cher c'est le citron.

Alexandre. En divisant le prix par le nombre de fruits, nous trouvons le prix d'un fruit. Orange : 0,50 F, citron : 0,66 F, poire : 0,57 F. Donc les citrons sont les plus chers et les oranges les moins chères.

Jérémie. J'ai cherché pour le même nombre d'oranges et de citrons, ça fait 24. 24 oranges coûtent 12 F et 24 citrons coûtent 16 F. Donc les citrons sont plus chers et les poires il n'y en a que 7 pour 4 F donc les oranges sont moins chères.

Alice. On calcule en faisant une division. $4 : 8 = 0,50$ $2 : 3 = 0,66$ $4 : 7 = 0,57$. Le fruit le plus cher est le citron à 0,66 F et le moins cher est l'orange à 0,50 F.

Karine. Si on divise les oranges par 2, ça fait 4 oranges, alors le prix serait à 2 F. 4 oranges à 2 F et 3 citrons à 2 F il y a une orange de plus donc les oranges sont les moins chers et les citrons les plus chers.

Sébastien. Pour les oranges, j'ai trouvé 12. Pour les citrons, j'ai trouvé 6. Pour les poires, j'ai trouvé 11. Les plus chers c'est les oranges et les poires, les moins chers c'est les citrons.

Elodie. Pour 4 F on peut avoir 8 oranges, 6 citrons et 7 poires. Donc c'est les oranges les plus chers et les citrons les moins chers.

Cécile. L'orange coûte 50 centimes car 8×50 c = 400 c et 400 c c'est 4 F...

Cyrille. Avec 1 F, on a 2 oranges mais moins de 2 avec les citrons et les poires. Donc les oranges sont moins chères.

Peggy. Les 8 oranges coûtent 4 F et les 7 poires aussi. Alors le plus avantageux ce sont les 8 oranges à 4 F parce qu'il y en a plus et les plus chers c'est les poires mais les citrons encore plus car pour 4 F on n'en a que 6.

Julien. L'orange coûte 2 F, le citron 1,50 F et la poire 1,50 F. Donc le plus cher c'est l'orange, et le citron et la poire sont pareils.

ANNEXE 2
LE PUZZLE

Voici une situation pour une classe de CM2.

Les enfants sont regroupés par équipes de 4 ou 5. Chaque équipe reçoit le puzzle ci-dessous.

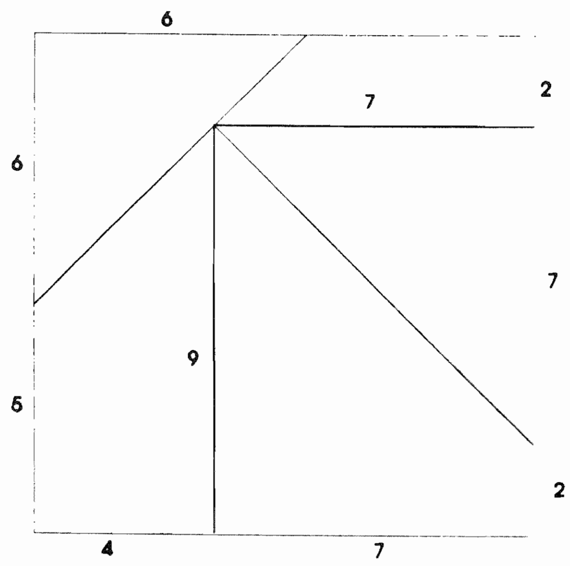
La consigne donnée est la suivante :

"Chaque équipe a reçu un puzzle et doit en reconstruire un autre, mais plus grand. Pour cela il faudra respecter la règle suivante : "un segment qui mesure 4cm sur le puzzle que je vous ai donné devra mesurer 6cm sur le puzzle que vous construirez."

De plus chaque élève de l'équipe doit fabriquer une seule pièce du puzzle.

Lorsque chaque élève de l'équipe aura terminé, vous assemblerez les pièces. Vous devrez alors obtenir un puzzle identique au modèle, mais plus grand."

Après la recherche par équipes, les différentes solutions sont communiquées lors d'une mise en commun.



1) Quelles sont les connaissances mathématiques concernées par ce travail ?

2) Quel est l'intérêt d'organiser un travail de groupe dans lequel chaque élève a une seule pièce à reconstituer ?

3) Voici quelques-unes des procédures couramment utilisées par les élèves dans cette situation :

- "On ajoute à chaque fois 2, puisque 4 doit faire 6"
- "Il faut ajouter la moitié de la longueur de départ"
- "Il faut multiplier chaque longueur par 1,5"
- "Puisque 4 donne 6, 2 donne 3, 6 donne 9...."

Comparez ces différentes procédures et les représentations de la situation auxquelles elles correspondent.

4) Que peut attendre l'enseignant de la mise en commun ?

5) Voici deux modifications de la consigne :

- *"ce qui mesure 4 cm devra mesurer 8 cm..."*
- *"ce qui mesure 4 cm devra mesurer 7 cm..."*

Quelles modifications ces changements de consigne sont-ils susceptibles d'introduire dans les procédures utilisées par les élèves ?

ANNEXE 3
Eléments de réponse

1) Ce problème de la reproduction d'un puzzle permet d'aborder le thème de la **proportionnalité** dans un **cadre géométrique**.

Il s'agit ici de reconnaître une situation de proportionnalité et de la traiter convenablement :

- remise en cause du modèle "*pour agrandir, il faut ajouter*",
- usage des fonctions numériques adaptées et des propriétés de linéarité.

Cela s'accompagne d'un travail sur les **nombres** (décimaux, éventuellement fractions) et sur les **figures géométriques** (reproduction de figures simples)

2) L'organisation du travail retenue ici a d'abord l'avantage de permettre une implication directe de chaque enfant.

Par ailleurs, il est important que le travail soit organisé par équipes et que chaque membre de l'équipe ait à réaliser une pièce, de façon à provoquer les échanges, la concertation et le débat sur le choix d'une procédure.

Mais surtout, c'est la reconstitution du puzzle par assemblage des pièces construites qui permettra de **valider** la stratégie utilisée par le groupe. Il s'agit ici d'une validation interne à la situation : les enfants peuvent déterminer seuls s'ils ont réussi, sans recours à une autorité externe.

Si un enfant ou une équipe avait la charge globale de l'ensemble du puzzle, une procédure vraisemblable consisterait à tracer d'abord un grand carré agrandi sur lequel s'effectueraient des tracés avant découpage. La justesse de la construction de chaque pièce ne pourrait plus être validée directement, puisque le puzzle serait de toutes façons reconstituable.

3) Seules les trois dernières procédures permettent de reconstituer le puzzle.

- La première procédure recouvre une erreur fréquente sur la conception de l'agrandissement. Pour beaucoup d'élèves, " ***agrandir, c'est ajouter***." Il est à noter que les tentatives infructueuses de reconstituer le puzzle dans ce cas, ne suffisent pas en général pour remettre en cause chez les élèves le modèle additif utilisé (ils se reprochent par exemple de mauvais dessins ou de mauvais découpages..). Il est donc important que le puzzle choisi soit tel que la reconstitution à l'aide de la règle "ajouter 2" conduise à des pièces nettement incorrectes.
- La seconde procédure traduit la persistance du modèle additif, mais cette fois-ci la **quantité à ajouter dépend de la quantité initiale**. C'est la traduction d'une fonction numérique du type $x \rightarrow x + \frac{x}{2}$, assez facilement identifiable compte tenu des données numériques choisies. Elle correspond à une représentation correcte de l'agrandissement, mais qui risque d'être fragile pour un éventuel réinvestissement.
- La troisième procédure s'appuie sur une représentation juste de l'agrandissement : "***agrandir, c'est multiplier***". C'est la reconnaissance d'une fonction multiplicative et du coefficient de proportionnalité.
- La quatrième procédure s'appuie aussi sur une représentation juste de l'agrandissement, liée cette fois non plus à un coefficient de proportionnalité, mais à la **linéarité**. Cette procédure permet de retrouver un résultat de plusieurs façons, notamment si elle est organisée autour de la constitution d'un tableau de valeurs.

4) La mise en commun permet de revenir sur la **validation**. La validation dans les groupes a permis de répondre à la question "*est-ce que ça marche ?*" ; la mise en commun est l'occasion d'essayer d'envisager la question "*pourquoi ça marche ?*"

Par ailleurs elle doit permettre la **confrontation des différentes procédures**. C'est une étape importante car elle permet à certains de s'approprier une solution qu'ils n'ont pas élaborée.

Elle permet également de **faire des rapprochements entre des procédures différentes** (par exemple, ceux qui ont été amenés à rechercher l'image de 1 en utilisant des propriétés de linéarité ont finalement mis en évidence le coefficient de proportionnalité).

C'est enfin l'occasion de confronter les élèves à différents aspects de la proportionnalité qu'on retrouvera dans d'autres situations.

5) Le rapport de proportionnalité est une variable didactique essentielle de la situation et une analyse a priori est nécessaire de la part de l'enseignant avant de faire un choix sur cette variable.

La consigne "*4 cm devient 8 cm*" a toutes les chances de conduire directement les élèves à doubler toutes les mesures et d'autres procédures ont peu de chances d'apparaître. L'"évidence" de cette procédure risque de faire perdre l'intérêt du travail sur la proportionnalité et ses liens avec l'agrandissement.

La consigne "*4 cm devient 7 cm*" conduira à rendre plus délicat le recours à la deuxième ou la troisième procédure. En effet, le coefficient d'agrandissement n'étant plus aussi simple, son utilisation devient plus délicate pour des enfants de CM2 ; d'autre part l'équivalent de la seconde procédure consisterait à "*ajouter la moitié de la longueur initiale et encore la moitié de cette moitié*"...ce qui rend faible sa probabilité d'apparition.

Cette nouvelle consigne conduit donc à marquer plus nettement l'opposition entre le modèle additif ("*ajouter 3*") et celui utilisant la linéarité. On a pu constater que certains enfants ayant réussi avec la consigne "*4 cm devient 6 cm*" régressent avec cette nouvelle consigne, revenant quelque temps à un modèle additif avant de pouvoir à nouveau le rejeter.

Bibliographie

- "*Agrandissement de puzzle*" in "Aides pédagogiques pour le CM", publication APMEP - p. 80

- "Des problèmes pour apprendre en CM2 et 6ème" R. Charnay, IREM Lyon, p. 26

Titre : Etude du format papier A4

Auteurs : Marie-Lise PELTIER et Catherine HOUDEMENT (Prof. IUFM Rouen)

Type : Activités en formation initiale ou continue

Résumé : L'étude des relations liant les dimensions des différents formats de papier classique permet de définir et travailler la notion de proportionnalité dans divers cadres, numérique, géométrique et graphique.

Origine : *Faire des Mathématiques*, A.Deledicq, C.Lassave, Editions Cedic Nathan 1977

Durée prévue : deux séances de trois heures

ÉTUDE DU FORMAT A4

OBJECTIFS

Objectifs mathématiques

- La proportionnalité
- Une approche de $\sqrt{2}$ par les aires
- Le coefficient de forme d'un rectangle
- La similitude
- Eventuellement la notion de suite géométrique et de limite de suite

Objectifs didactiques

- Notion de cadres et de changement de cadres
- Notion de preuve
- Différentes phases d'une situation d'apprentissage

ACTIVITÉ

Matériel

Par personne : trois feuilles de format A4, calculatrices, règles, compas

Organisation

Travail par groupes de quatre

Consigne 1

*"Vous disposez d'une feuille, un rectangle F_0. La consigne **C** de découpage est la suivante : vous pliez le rectangle, dans sa plus grande dimension, en deux parties superposables, vous découpez et vous gardez un rectangle. Ainsi, à partir de F_0 vous obtenez F_1.*

*Par un procédé récursif, à partir de F_1 avec la consigne **C**, vous obtenez F_2, puis de proche en proche F_3, F_4, F_5.*

*Vous obtenez donc une famille de rectangles **F** : F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5."*

Consigne 2

"Trouvez un empilement régulier, que vous pouvez décrire, de ces six rectangles."

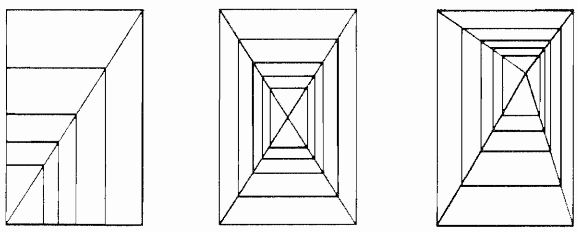
Synthèse

- Description de ces empilements.

Dans la suite, la réflexion s'appuie sur les empilements qui gardent parallèles les côtés des différents rectangles.

- Constat de diverses propriétés, notamment de l'alignement des sommets homologues, de l'existence d'un point particulier lié à la famille et à la disposition, de l'équivalence de ces différentes dispositions.

L'existence de ces dispositions particulières sera notée sous le nom propriété **P**.



Consigne 3

*"Vous laissez cette famille **F** de côté et vous prenez une nouvelle feuille. Construisez un rectangle R_0 de dimensions (x_0, y_0), qui ne fait pas partie de la famille **F** et tel que :*

$$y_0 > x_0 > \frac{y_0}{2}.$$

*Construisez la famille **(R, C)** obtenue à partir de R_0 et de la consigne **C**.*

Question : *peut-on empiler les rectangles **R** pour obtenir la propriété **P**?"*

Synthèse

Pour une famille **R** quelconque :
- $(R_0, R_2, R_4,...)$ a la propriété **P**,
- $(R_1, R_3, R_5,...)$ a la propriété **P**, à condition d'avoir pris $y_0 > x_0 > \frac{y_0}{2}$.

Consigne 4

*"Cherchez quelle est la condition à mettre sur le rectangle de départ pour que la famille entière construite à partir de ce rectangle et de la consigne **C** vérifie la propriété **P**?"*

Synthèse

On fait ensemble les premiers constats pour la famille **F** :

- Pour une certaine disposition, les **quatre sommets sont alignés** sur des droites passant par le centre des rectangles et leurs sommets.
- Les **diagonales font un angle constant** avec les côtés homologues des rectangles.
- Le **rapport longueur sur largeur est le même** pour tous les rectangles.
- Si on représente le rectangle F_i par le point F_i de coordonnées (x_i, y_i) dans un repère orthonormé, **les points F_0, F_1,..., F_6,.... sont alignés sur une droite qui passe par l'origine.**

Voici le tableau des coordonnées approchées des points F_i:

F_0	21	29,7
F_1	14,85	21
F_2	10,5	14,85
F_3	7,42	10,5
F_4	5,25	7,42
F_5	3,71	5,25
F_6	2,62	3,71

Institutionnalisation

On dit que :

- le tableau des dimensions exactes:

x_0	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
x_4	y_4
x_5	y_5
x_6	y_6

est un **tableau de proportionnalité**, de coefficient k.

- la suite des longueurs est **proportionnelle** à la suite des largeurs ;

- les rectangles ont tous **le même coefficient de forme** (raport longueur sur largeur) ;

- les rectangles sont **homothétiques** les uns des autres et le rapport d'homothétie est toujours le même ;

Pour rechercher le coefficient de proportionnalité k, plusieurs méthodes sont possibles:

- dans le cadre numérique

. calcul des rapports y/x dans les tableaux de nombres

. utilisation des aires : aire de F_0 = 2 aire de de F_1

- dans le cadre graphique

Les points de coordonnées (x_i, y_i) étant sensiblement alignés, détermination graphique sur papier millimétré de la pente de la droite.

- dans le cadre géométrique

Utilisation du théorème de Thalès (en raison de la présence de triangles homothétiques) permettant de faire le pont entre le cadre graphique et le cadre numérique.

Conclusions

Une condition nécessaire pour que **R** vérifie la propriété **P** est que **R** soit une famille de rectangles ayant tous même coefficient de forme, $\sqrt{2}$.

Cette condition est aussi suffisante après vérification.

ANALYSE DE CETTE ACTIVITÉ

Analyse mathématique

Cette situation permet d'étudier de façon particulièrement bien détaillée, les propriétés numériques, graphiques et géométriques liées aux fonctions linéaires. Il est donc possible de faire une synthèse sur les notions de **listes de nombres proportionnels**, de **fonction linéaire**, d'**homothétie**, de **figures semblables** et éventuellement sur le **théorème de Thalès**. Elle permet également d'introduire la notion de **coefficient de forme des rectangles** et de travailler sur la transformation du coefficient d'agrandissement des mesures quand on passe des longueurs aux aires. Elle permet d'approcher, dans ces prolongements, la notion de **limite d'une série géométrique**.

Analyse didactique

- La situation présente des phases d'**action**, de **formulation** d'hypothèses concernant la propriété **P**, de **validation** de ces hypothèses possible par l'étudiant lui-même.

- Elle permet de discuter du **concept de preuve** et des différents pouvoirs de conviction des arguments utilisés: par exemple, pour la recherche du coefficient de forme des rectangles **F** :
  . les conclusions s'appuyant sur le mesurage des dimensions des rectangles sont soumises aux erreurs d'approximation.
  . les conclusions s'appuyant sur le rapport des aires sont liées aux compétences des étudiants sur les racines carrées.
  . les conclusions s'appuyant sur une réalisation graphique sont soumises à la précision des tracés.

Ainsi la **pluralité des preuves** permet à chacun d'accéder à une certaine conviction et on constate que les preuves les plus rigoureuses ne sont pas nécessairement **les plus convaincantes**.

- La situation permet de définir **la notion de cadres** et celle de **changement de cadres**. En effet le problème est posé dans un cadre géométrique, *construire des rectangles et observer des propriétés d'alignement*. La disposition des rectangles avec un sommet commun et des côtés alignés amène à utiliser une représentation graphique (**passage au cadre graphique**), qui peut induire une étude numérique des listes de dimensions (**passage au cadre numérique**).

Ce thème de travail, outre ses objectifs mathématiques et didactiques, permet d'**enrichir la culture technique** de l'étudiant et d'amorcer un intérêt sur les mathématiques dans d'autres domaines (technologie, arts plastiques, arts graphiques), notammment par ses prolongements.

PROLONGEMENTS

Il est utile d'envisager, avec les étudiants, un **point culturel** sur les familles de rectangles semblables:

- les **formats A3 et A4** : la feuille de départ, A_0, a une aire de 1 m^2; le coefficient de forme est $\sqrt{2}$ (pour faciliter la coupe en deux et les réductions en photocopie). On peut donc calculer les dimensions des feuilles A_0 à A_7.

- les **formats papier B_0 à B_6**, de coefficient de forme $\sqrt{2}$, donc rectangles aussi semblables à leur moitié, avec B_0 d'aire 1,5 m^2.

- les **formats photos**, rectangles de coefficient de forme 1,5 , semblables entre eux, mais non semblables à leur moitié :
13 x 19,5 ; 18 x 27 ; 24 x 30 ; 30 x 45 ; 50 x 75

- les **rectangles d'or,** de coefficient de forme $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (le nombre d'or), semblables entre eux, mais non semblables à leur moitié.

- les **billets de banque français**, qui sembleraient avoir aussi un coefficient de forme constant (environ 1,89 ; à vérifier...).

Cette activité peut donner lieu à **d'autres exercices mathématiques:**

1 - Tracer une **représentation graphique** sur papier millimétré des points F_0, F_1 jusqu'à F_n à la règle et au compas ou construire, à la règle et au compas, une famille de rectangles type **R**.

2 - Etudier la **notion de suite géométrique** avec

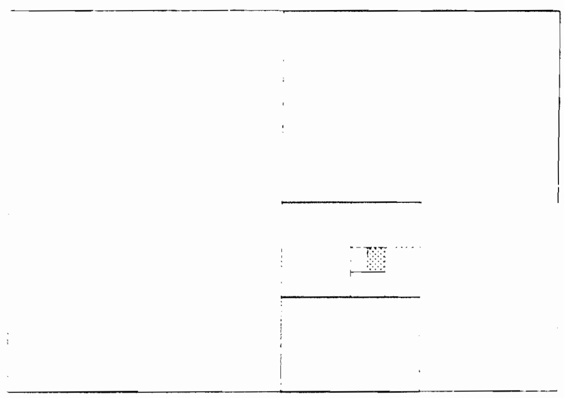
(x_n) suite géometrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(y_n) suite géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$

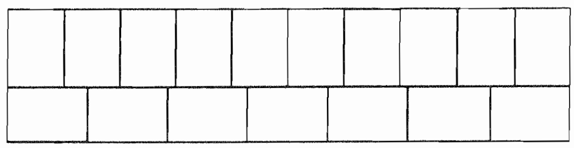
(S_n) suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ si $S_n = x_n.y_n$

En effet on peut approcher la notion de **limite de la série géométrique** (S_n) en juxtaposant habilement les différents rectangles et en étudiant leurs aires :

L'aire du grand cadre rectangle est 2 et la différence $2 - (1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1^n}{2})$ vaut $\frac{1^n}{2}$, qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.



3 - **Approcher $\sqrt{2}$ par des fractions** par la méthode du point de rencontre : si **L** et **l** sont respectivement les longueur et largeur d'un rectangle de coefficient de forme **k**, on cherche, à l'aide d'une disposition particulière de rectangles de dimensions **L** et **l** (comme ci-dessous), deux entiers **p** et **q** tels que **qL = pl** : on obtient ainsi des approximations rationnelles de **k** (par exemple ici, $\frac{10}{7}$ pour $\sqrt{2}$).



Mesure

Titre : Aire de surfaces planes

Auteurs : Marie-Lise PELTIER et Catherine HOUDEMENT (P.IUFM Rouen)

Type : Activités en formation initiale ou continue

Résumé : un exemple de progression de la construction du concept de grandeur à la notion de mesure : les aires.

Origine : idée de Cécile Véron, professeur de mathématiques à l'Ecole Normale de Rouen jusqu'en 1986.

Durée prévue : deux séances de trois heures.

AIRE DE SURFACES PLANES.

(Ce chapitre est un complément à la partie "Aire de figures planes" des actes de Cahors.)

OBJECTIFS

Objectifs mathématiques

- Indépendamment, dans un premier temps, du dénombrement sur quadrillage, du calcul numérique et de l'utilisation de formules :
  - construire le concept d'aire,
  - construire la notion de mesure,
  - faire fonctionner l'additivité des mesures d'aires.

- Distinguer aire, périmètre et forme d'une surface.

- Utiliser la symétrie centrale comme outil de résolution de problème et en déduire quelques propriétés.

- Introduire les fractions, produire des égalités entre fractions, les comparer, les ranger.

Objectifs didactiques

La situation présentée illustre les notions d'outil et d'objet puisqu'elle permet de mettre en jeu deux concepts mathématiques : l'aire en tant qu'objet, la symétrie centrale en tant qu'outil implicite de résolution du problème posé. Cette situation permet en outre d'introduire les fractions comme des codages nécessités par l'insuffisance des entiers pour des classes de surfaces de même aire.

ACTIVITÉ

Phase 1

Objectif

Construire des surfaces de même aire, mais de formes différentes et définir la notion d'aire (hors contexte numérique).

Matériel

- Feuilles d'annuaires téléphoniques (format A4) en grand nombre
- Ciseaux, instruments usuels de géométrie.

Organisation

travail individuel.

Consigne 1

"Vous devez partager chaque feuille en deux parties exactement superposables sans perte et sans recollage (c'est-à-dire qu'avec les deux parties il sera possible de reconstituer la feuille initiale) : vous devez chercher un maximum de partages différents répondant à cette consigne de partage que nous désignerons par (P)".

Procédures observées

- Les étudiants commencent par plier en deux suivant les médianes, puis les diagonales du rectangle. En général à ce moment, certains pensent qu'ils ont trouvé tous les partages possibles, il est alors nécessaire de redonner la consigne en précisant qu'ils doivent essayer d'en trouver d'autres.

- La procédure suivante consiste à plier la feuille de telle sorte que deux sommets diamétralement opposés se superposent. Ce partage permet généralement à l'idée qu'il existe un nombre infini de solutions de se répandre.

Les autres procédures que l'on rencontre sont les suivantes :

- des pliages en 8 ou 16, suivis de dépliages et découpages en suivant certaines lignes de pliage plus ou moins bien choisies (d'où des réussites ou des échecs!) ;
- des recherches en construisant des segments de même longueur en partant de deux sommets diamétralement opposés ;
- des procédures consistant à construire une ligne de partage symétrique par rapport à une médiane, puis, en raison de l'échec, évolution de cette procédure vers la construction d'une ligne de partage symétrique par rapport au centre de la feuille.

Remarque

On peut constater de très nombreux essais qui n'aboutissent pas ; mais ces essais permettent à leur auteurs de faire de nouvelles hypothèses sur les propriétés de la ligne de partage. De nombreux étudiants trouvent assez vite comment construire une ligne de partage polygonale qui permet de résoudre le problème, et en faisant des tracés symétriques de part et d'autre du centre de la feuille ; puis certains cherchent des lignes de partage curvilignes à main levée ou en traçant des arcs de cercles.

Synthèse

Les étudiants viennent afficher un certains nombre de partages réalisés. Ils vérifient à chaque fois la superposition exacte des deux parties et la reconstitution possible de la feuille initiale avec les deux parties, ils expliquent à leurs camarades le procédé utilisé pour obtenir la ligne de partage.

Apport du professeur et première institutionnalisation

1 - Sur l'aire.

- Les deux parties issues d'un partage (P) sont superposables, elles ont donc même forme et même périmètre.

- Deux parties issues de deux partages (P) différents ne sont pas directement superposables, pourtant elles vérifient toutes les deux la propriété : *"avec deux parties analogues à chacune d'elles, on peut reconstituer la feuille entière"* ; elles sont donc aussi "étendues" l'une que l'autre, elles contiennent la même quantité de papier, elles correspondent toujours à "une demi feuille", on dit qu'elles ont **même aire**.

Constats.

- Deux surfaces de **même aire** n'ont pas nécessairement la **même forme**.
- Deux surfaces de **même aire** n'ont pas nécessairement le **même périmètre**.
- Deux surfaces **superposables** ont **même aire**, **même forme**, même périmètre.
- A partir d'une partie quelconque issue d'un partage (P), on peut, par **découpage** et **recollement**, sans chevauchement et sans perte de papier, construire n'importe quelle autre partie issue d'un autre partage (P).

On conviendra d'appeler momentanément famille G, la famille des parties obtenues.

2 - Sur la symétrie.

La propriété vérifiée par la ligne de partage pour répondre à la consigne est la suivante : cette ligne est **symétrique par rapport au centre du rectangle**.

Phase 2

Objectifs mathématiques

- Réinvestir la notion d'aire et celle de symétrie centrale.
- Constituer un stock de formes d'aires différentes, mais facilement comparables.
- Introduire un codage fractionnaire et le faire fonctionner.

Enjeu

Permettre à tous de créer des surfaces de formes originales et "tarabiscotées".

Organisation

Travail individuel ou par groupe de deux.

Matériel

Le même que précédemment.

Consigne 2

"Vous devez recommencer l'activité de la consigne précédente, mais avec des rectangles ayant même aire que les formes précédentes, c'est-à-dire avec des demi-feuilles rectangulaires".

Remarques

Les étudiants peuvent ainsi réinvestir ce qu'ils ont fait, ou ce qu'ils ont vu faire par d'autres, lors de la phase 1. On note, à ce stade, qu'ils prennent plaisir à laisser libre cours à leur imagination et qu'ils prennent conscience que l'**on peut augmenter à loisir le périmètre de la surface sans en modifier l'aire**.

On constitue ainsi une seconde classe de surfaces de même aire que l'on désigne par H.

On matérialise les deux classes déjà obtenues par des grandes feuilles de papier (type *paper board*) sur lesquelles on colle plusieurs surfaces de la classe.

Lorsqu'il s'agit d'introduire un codage des classes ainsi construites, rendant compte des surfaces qu'elles contiennent, l'ensemble du groupe s'accorde généralement pour désigner **la classe G par** $\frac{1}{2}$, car elle contient des demi-feuilles, et **la classe H par** $\frac{1}{4}$, car elle contient des quarts de feuilles.

Ce codage est retenu et noté sur les grandes feuilles qui matérialisent les classes.

Consigne 3

"Vous allez construire, par groupe de 2 (ou de 4), des surfaces ayant même aire que la feuille d'annuaire, mais de formes différentes".

Procédures observées.

Les étudiants placent côte à côte de diverses façons :

- deux surfaces de la famille $\frac{1}{2}$, issues d'un partage (P), c'est-à-dire exactement superposables,

- ou deux surfaces de la famille $\frac{1}{2}$, issues de deux partages (P) différents, donc de même aire, mais de formes différentes,

- ou une surface de la famille $\frac{1}{2}$ et deux surfaces de la famille $\frac{1}{4}$,

- ou quatre surfaces de la famille $\frac{1}{4}$.

Synthèse

Les différentes propositions sont présentées et discutées. En cas de désaccord, on reconstitue par découpage et recollement la feuille d'annuaire à partir de la feuille proposée.

Les surfaces retenues constituent une nouvelle classe de surfaces de même aire que l'on décide de coder par 1 puisqu'il s'agit de surfaces ayant même aire qu'une feuille d'annuaire.

La description des différentes procédures donne lieu à leur traduction en terme de codage fractionnaire :

- les deux premières procédures citées se traduisent par
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ou par $2 \times \frac{1}{2} = 1$. (lu comme "*deux fois un demi*")

- la troisième par
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ ou par $\frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$.

- la dernière par
$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ ou par $4 \times \frac{1}{4} = 1$.

Consigne 4

"Vous allez, par groupes de quatre, construire de nouvelles classes de surfaces de même aire".

Procédures observées

- Partage en deux parties superposables de rectangles correspondant au quart de la feuille d'annuaire.
- Assemblage de surfaces de différentes classes déjà obtenues.

Mise en commun.

Les différentes classes proposées sont comparées, des surfaces de chaque classe sont collées sur de grandes feuilles, chaque classe est codée en fonction des surfaces qu'elle contient et l'on donne des écritures variées rendant compte des différentes prodédures utilisées pour construire les surfaces de la classe.

Lors de cette mise en commun, on obtient généralement de très nombreuses classes et donc de très nombreuses écritures, par exemple :

$$\frac{1}{8}\,;\ \frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\,;\ 1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}\,;\ 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=\frac{6}{4}\,;$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4} \qquad \text{etc....}$$

Consigne 5

"Vous allez mettre en ordre les différentes classes obtenues : pour cela, vous pouvez construire, pour chaque classe, un rectangle de la famille dont une dimension est fixée, par exemple, la largeur de la feuille d'annuaire".

Mise en commun.

Le rangement des classes en fonction de la relation "...est moins étendue que..." est matérialisé par la mise en ordre des grandes feuilles représentant les classes, elle est justifiée par la superposition des rectangles des différentes classes qui ont une dimension commune, elle donne lieu à une série d'écritures du type :

$$\frac{1}{8}<\frac{1}{4}<\frac{3}{8}<\frac{1}{2}<\frac{3}{4}<1<\frac{3}{2}<\frac{7}{4}<2$$

Un réinvestissement individuel de ces différentes phases peut être proposé à partir de surfaces planes distribuées (cf. annexe). Lors de la mise en commun de ce travail individuel, on constate qu'il est possible de choisir n'importe quelle classe comme classe unité et que les codages qui s'en déduisent sont proportionnels aux codages de départ.

ANALYSE DE L'ACTIVITÉ

Analyse mathématique

Cette série d'activités est un exemple d'une progression sur une grandeur et la mesure liée à cette grandeur.

Le professeur reprend avec les étudiants l'explicitation du rôle des différentes étapes :

1. pour définir la grandeur aire :
- définition d'une relation d'équivalence sur un ensemble de surfaces, ici la relation "avoir même aire" ;
- construction de l'ensemble quotient, ici les classes des surfaces ayant même aire ;
- caractérisation des classes, ici par le codage fractionnaire et le choix d'un représentant "rectangle" de chaque classe ;
- construction d'une relation d'ordre sur l'ensemble quotient.

2. pour construire un codage numérique qui est une mesure : construction d'une application de l'ensemble quotient dans l'ensemble des nombres réels
- positive,
- additive,
- monotone,
- parfaitement déterminée par le choix d'une unité, ici la classe de la feuille A4,
- vérifiant les propriétés suivantes : l'inégalité triangulaire, les surfaces vides ont une aire nulle, il existe des surfaces non vides d'aire nulle.

Remarque

Cette situation permet de distinguer naturellement objet mathématique, grandeur mesurable, mesure.

D'autre part, elle apparaît comme une introduction pertinente de la nécessité des nombres non entiers, et plus précisément des fractions.

En effet elle permet de donner du sens à des écritures fractionnaires :

- définition de $\frac{1}{n}$ par $\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+....+\frac{1}{n}=1$ et par $n\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\times n=1$;
- production d'égalités variées sur ces nombres ;
- comparaison et rangement de fractions et d'écritures fractionnaires.

Enfin elle permet de faire des rappels sur la symétrie centrale qui est apparue conmme un outil de résolution du problème de partage.

Analyse didactique

Cette situation permet de pointer :

- l'aspect auto-validant de la première consigne de la première phase : c'est l'étudiant lui-même, sans intervention de quiconque qui décide si le partage qu'il vient de réaliser convient ou est à rejeter ;

- le rôle de l'hypothèse erronée dans cette phase : en effet, c'est très souvent à partir d'une ligne de partage qui ne convient pas que l'étudiant réussit à trouver les propriétés que doit vérifier cette ligne pour répondre à la consigne ;

- l'aspect outil de la notion de symétrie centrale, qui est utilisée par tous les étudiants après un certain temps de recherche, bien qu'elle n'ait pas fait l'objet d'un apprentissage antérieur ; la notion de symétrie centrale n'est donc pas abordée par sa définition, elle est perçue par son aspect fonctionnel ; il est possible ici de faire le choix d'institutionnaliser (ou non) cette notion pour dégager son aspect objet de savoir et d'étudier les propriétés utilisées pour construire la ligne de partage ;

- l'aspect objet du concept d'aire, qui est ici mis en évidence non pas par une définition, mais par une relation d'équivalence ;

- l'aspect outil de la notion de fraction, qui apparaît ici comme un codage rendant compte de manipulations finalisées avant de devenir objet de savoir institutionnalisé et d'être réinvesti dans d'autres contextes.

PROLONGEMENTS

1 - Sur l'aire

Au niveau mathématique

Transfert des notions étudiées sur d'autres matériaux.

Activités de réinvestissement.

Au niveau didactique

Etude de manuels à partir d'un questionnement du type

-- Comment est introduite dans les manuels scolaires la notion d'aire ?

- Aspect dénombrement.
- Aspect encadrement.
- Rôle des quadrillages.
- Introduction de l'unité.
- Formules.

-- Quelle est la part et le type de manipulation proposée aux élèves ?

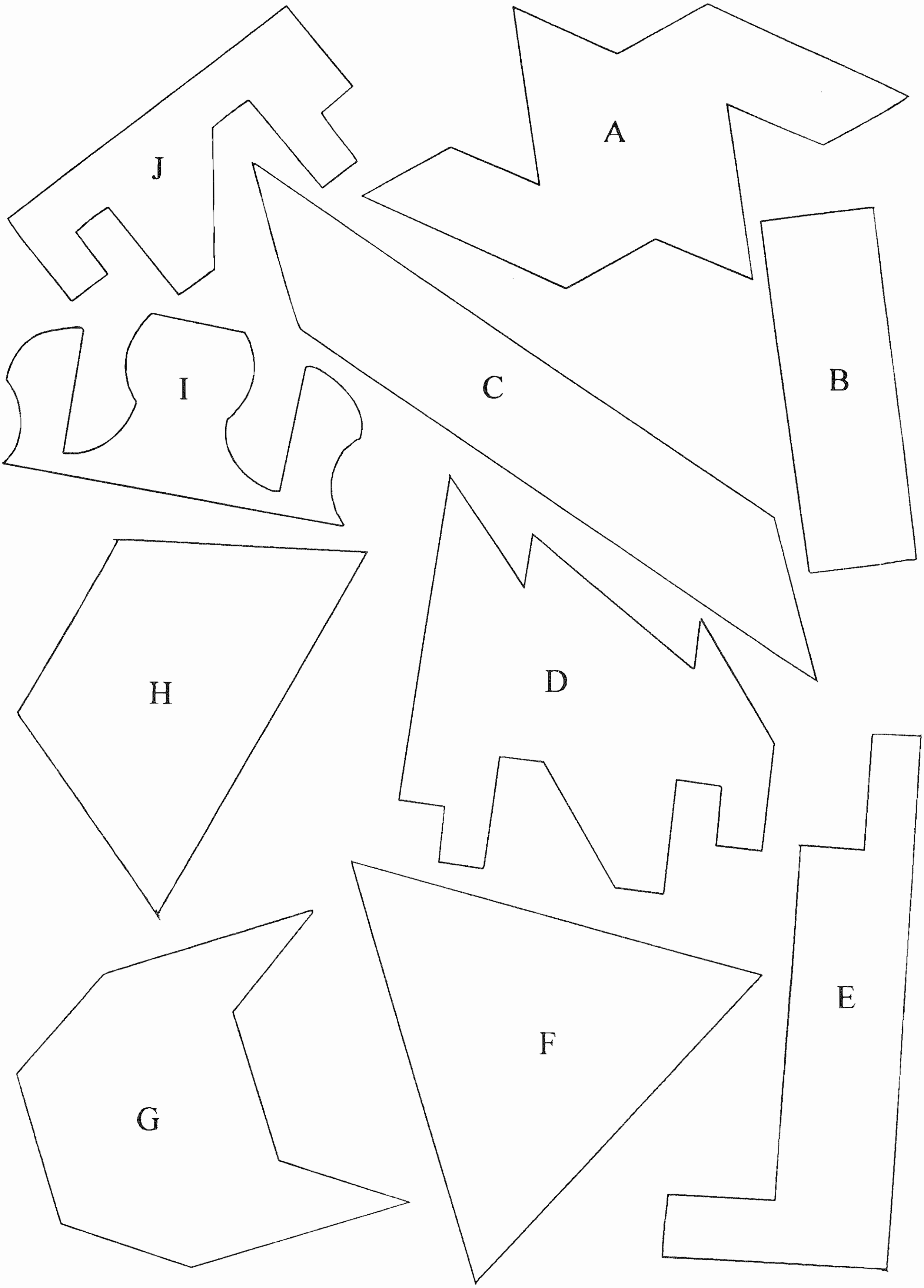
-- Comment le manuel prend-il en compte les distinctions :

- aire / dénombrement,
- aire / nombre,
- aire / surface,
- aire / périmètre ?

2 - Sur les rationnels

Cette situation est une des situations-phares pour travailler l'extension de la notion de nombre entier. Elle fait partie à ce titre de la progression sur l'introduction des rationnels.

ANNEXE



Énumération, comptage et dénombrement

PRÉSENTATION DU THÈME "DÉNOMBREMENT"

Afin de mieux situer le problème, nous nous sommes posé, par écrit et individuellement, la question : "que signifie dénombrer ?"

La diversité des réponses apportées méritait une petite analyse en nous incitant à chercher une cohérence dans nos productions.

Si certains d'entre nous se réfèrent plus volontiers à des définitions proches du langage mathématique, d'autres,au contraire, cherchent davantage à mettre l'accent sur l'aspect "procédural" en examinant par exemple les techniques de dénombrement.

J. Briand met en évidence les problèmes d'énumération qui se posent dans les activités de dénombrement de collections.

"La Marionnette", de G. Le Poche, montre comment une "situation de communication" établie entre un élève et une marionnette manipulée par le maître peut permettre à l'enfant de passer de la perception d'une collection unité par unité à une perception par groupements.

C'est donc également une situation favorisant l'introduction des écritures additives.

G. Lipp, avec sa "chasse aux canards", reprend en formation initiale et continuée une situation de "recherche combinatoire" qu'il a souvent expérimentée dans des classes de Cours Moyen.

Le problème s'avère plus complexe que prévu à analyser et demande un réel effort de classification tout en permettant une diversité des stratégies de résolution.

Reprenant un problème des 9 points évoqué dans la brochure APM "le triangle à l'école élémentaire", C. Hervieu nous présente un problème de dénombrement dans un contexte plus géométrique.

La recherche en groupes qu'elle nous propose, permet une intéressante confrontation ou comparaison de procédures de résolution tout en préparant un autre travail sur les isométries du plan.

S. Petit, avec les promenades qu'il nous invite à faire sur quadrillages, reprend sous un autre éclairage une partie des travaux qu'André Myx a publiés en 1978 à l'IREM de Lyon sous le titre "Projet Unité 1".

Titre : Réflexions sur l'énumération.

Date : Mars 1992.

Auteur : J. BRIAND, I.U.F.M. de Bordeaux

RÉFLEXIONS SUR L'ÉNUMÉRATION

ÉNUMÉRATION D'ENSEMBLES

L'énumération est une activité fréquente dont la facilité apparente masque la difficulté réelle lorsqu'il s'agit de l'effectuer. La conception de l'énumération est très vite mise en place et la réalisation effective de cette conception présente des difficultés insoupçonnées pour celui qui l'exécute.

La manifestation la plus familière de l'énumération, à l'école élémentaire est le comptage. C'est au cours de celui-ci que les difficultés de l'énumération se manifestent le plus fréquemment. Aussi est-elle souvent confondue avec lui.

Mais l'énumération n'est pas le comptage. Elle existe dans de nombreuses activités n'étant pas du comptage.

Par exemple, faire des achats en suivant une liste et s'assurer que rien n'a été oublié est une activité d'énumération. La recherche du nombre d'articles achetés ne fait pas partie de cette activité.

Les enfants de 5-6 ans, qui comptent des objets, passent en revue tous les éléments de la collection sans en oublier un au passage. Cette opération est une énumération. Elle présente des difficultés spécifiques et l'observation d'enfants dans cette situation permet d'identifier les difficultés qu'elle provoque.

Les enseignants attribuent les erreurs des élèves à des difficultés de comptage ou à des difficultés personnelles (repérage spatial).

L'énumération se manifeste aussi lorsque des enfants de cours élémentaire comptent les objets d'un tableau, et prennent la décision de remplacer l'énumération effective (qui associerait le comptage un à un au passage en revue de chacun des éléments) par une énumération intermédiaire : par exemple, prendre en compte une ligne, une colonne, leur nombre d'éléments et effectuer le produit.

On voit alors que les stratégies d'énumération sont la base de stratégies de comptage. C'est au niveau de l'énumération que la plupart des opérations fondamentales sont définies.

Ainsi, le contrôle des situations additives, multiplicatives, et l'apprentissage du sens des opérations dépendraient d'une appropriation de l'énumération.

En collège, la construction des termes d'un produit de polynômes, le dénombrement des parties d'un ensemble font, de la même façon, appel à des techniques d'énumération.

En terminale, le chapitre intitulé "Combinatoire : probabilité"[1], apporte des formules à partir desquelles les élèves doivent dénombrer des ensembles de cas. Bien que la description de la situation soit souvent simple, les élèves commettent des erreurs. Celles-ci ne sont perçues qu'à travers le comptage final. Le choix de telle formule plutôt que d'une autre reste problématique. En dehors des exercices d'application immédiate des formules, la combinatoire est sans arrêt livrée à des inventions de stratégies pour compter des collections. [2]

Par ailleurs, en analyse combinatoire notamment, le professeur a parfois bien du mal à faire comprendre pourquoi deux approches

[1]Classe de terminale C et E B.O. N°31 11 septembre 1986 p.2345

[2] Les manuels scolaires ainsi que des mathématiciens donnent des conseils, proposent des astuces, reconnaissent qu'il n'y a pas de méthode générale :

Un manuel de terminale C : (Bordas collection Fractale T A-B), donne des "fiches méthode" (cette fiche est décrite dans la chapitre "analyse des ouvrages de mathématiques") permettant de "détecter" le type de dénombrement à effectuer selon les mots figurant dans le texte de l'énoncé.

différentes donnent le même résultat, et pourquoi telle ou telle approche, qui donne un résultat différent de celui attendu, est erronée.

Il n'existe pas de théorie générale dans le savoir savant pour construire ces correspondances. Toutefois, il y existe de nombreux travaux, de nombreuses pratiques. Il y a donc bien un corps de connaissances, mais qui ne sont pas rassemblées de manière convenable pour servir de base à l'enseignement, parce qu'elles ne figurent pas dans le savoir savant ou bien parce qu'elles y figurent de manière éclatée[3]. La conséquence est qu'il ne semble pas y avoir eu de transposition didactique.

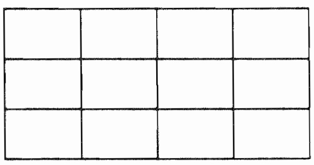
DE L'ÉNUMÉRATION AU DÉNOMBREMENT

Selon le type d'énumération choisi, le dénombrement va être facile ou non. En effet, certaines énumérations ne permettent que difficilement le dénombrement. D'autres énumérations préparent un dénombrement aisé.

Nous définissons "énumérations dénombrantes" comme des énumérations qui, dans la classe de problèmes où elles sont utilisées, permettent le dénombrement de la collection.

Pour illustrer ce propos, je prendrai l'exercice suivant :

Soit un rectangle sur un quadrillage (voir figure) :



Question : combien y-a-t-il de rectangles sur cette figure ?

[3]Dans L'ENCYCLOPEDIA UNIVERSALIS ed. 1968 (Article Combinatoire Vol 4 P. 471 D.FOATA professeur à la faculté des sciences de Strasbourg) : l'auteur écrit : "**...Le plus souvent, on est conduit à chercher une correspondance bi-univoque entre ces structures et les ensembles finis... Jusqu'ici, il n'existe pas de théorie pour construire ces correspondances. Tout est question d'ingéniosité et de patience.**"...

Prenons deux exemples de stratégies développées :

1- Première stratégie :

L'enfant (Classe de 6°) considère tous les rectangles ayant un carreau, puis tous les rectangles ayant deux carreaux , etc...

A ce stade, l'enfant est passé d'une étude de l'ensemble amorphe à la constitution d'une partition elle-même rangée totalement.

Pour les "à un carreau" :

La réponse 12 n'est qu'un dénombrement d'une collection visible. Enumération spatiale de type un (nous la nommons ES1)

Pour les "à deux carreaux" :

L'enfant considère les "verticaux" et les "horizontaux". Dans chacune des sous-classes, il devra effectuer un dénombrement d'une collection non visible directement. (Les rectangles se chevauchent). Il s'agit d'une énumération spatiale de type deux (nous la nommons ES2).

Pour les "à trois carreaux" :

La stratégie est un hybride des deux premiers cas. L'enfant considère les "verticaux" et les "horizontaux". Les verticaux sont visibles.(ES1) les "horizontaux" se chevauchent.(ES2)

Pour les "à quatre carreaux" :

Deux sous-classes sont obtenues à partir des rectangles en ligne (4 carrés côte à côte) et des rectangles carrés (formés de 4 carrées élémentaires).

Pour chacune de ces deux classes, ont retrouve alors ES1 et ES2.

Les rectangles à 5, 7, 10, 11 carreaux n'existent pas. Ceci permet d'éliminer les classes vides. Cette découverte se fonde sur une utilisation, dans l'action, de théorèmes d'arithmétique : 5.7.11 ne peuvent être de type axb, ou bien (10) le couple ne convient pas dans le contexte (5x2).

Pour les " 6 carreaux" :

Trois sous classes lui sont nécessaires :
Ceux d'en haut (2 rectangles). ES1
Ceux d'en bas (2 rectangles). ES1
Ceux qui sont debout. (3 rectangles). ES2

Restent les rectangles à 8.9.12 dont le dénombrement utilise des stratégies d'énumérations déjà décrites ci-dessus.

Nous voyons donc que pour ordonner totalement l'ensemble, l'enfant a dû :

- Construire une partition, construire un ordre total sur cette partition;
- Dans chaque classe, construire des partitions (2 ou 3 sous classes), établir un ordre total à partir d'un constat d'apparence spatiale, puis énumérer en utilisant deux types d'énumérations élémentaires ES1 et ES2.

Résultat trouvé 60.

2- Deuxième stratégie :

L'élève (terminale C) considère l'ensemble des rectangles comme ensemble produit de l'ensemble des côtés (horizontaux et verticaux).

Pour les côtés horizontaux :

4 possibilités pour un côté de un.
3 possibilités pour un côté de deux.
2 possibilités pour un côté de trois.
1 possibilité pour un côté de quatre.

$4+3+2+1= 10$

idem pour les côtés verticaux :

$3+2+1 = 6$

donc 60 possibles.

Dans cette stratégie, l'énumération est le produit de deux énumérations, c'est à dire : deux ensembles, un ordre total sur chacun de ces sous-ensembles, un ordre produit sur l'ensemble produit.

La première stratégie n'est pas utilisée par les seuls enfants de 6°. Dans une même classe d'âge, ces deux stratégies peuvent apparaître.

Si alors, le même problème est posé en faisant varier le nombre de carreaux, la première stratégie devra être adaptée de façon très contextuelle, la seconde préparera plus aisément à la généralisation suivante.

3- Si l'on pose alors le problème plus général :

Combien de rectangles lorsqu'il y a n carreaux en longueur et p carreaux en largeur ?

Il est clair que l'énumération de la deuxième stratégie permet rapidement une énumération générale dans cette classe de problèmes. Elle est dénombrante pour cette classe de problèmes.

la somme des n premiers naturels est $\frac{n(n+1)}{2}$.

Le résultat est : $\frac{n(n+1)p(p+1)}{4}$

CONCLUSION

L'énumération d'ensembles intervient dans toute la scolarité que ce soit lors de la construction du nombre, de l'utilisation des opérations, de toute l'analyse combinatoire.

Pour acquérir des connaissances scolaires à l'école, au collège ou au lycée, l'élève va devoir effectuer des énumérations. Dans l'état actuel des programmes, cette activité est laissée à la responsabilité de l'élève à l'intérieur d'une autre activité reconnue. L'élève devra "être astucieux", "voir le truc".

L'énumération à l'école ne repose sur aucun texte culturel suffisamment accessible et donc reste transparente pour les professeurs.

Les raisons pour lesquelles cette connaissance figure de manière diffuse doivent être recherchées dans la façon dont la construction du savoir par la communauté (philogénèse) s'est faite.

Or la construction des savoirs d'un individu (ontogénèse) n'a pas de raisons de copier exactement la philogénèse.

Ce décalage entre la philogénèse et l'ontogénèse doit donc produire des effets dans l'enseignement.

Il nous appartient d'en conduire l'étude.

Titre : Où sont tous les triangles ?

Date : mars 1992

Auteur : C. HERVIEU

Origine : Problème évoqué dans le fascicule de l'APMEP : Le triangle à l'école élémentaire

Type : Problème de dénombrement dans un contexte géométrique

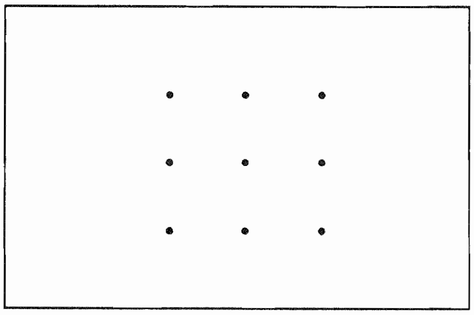
Résumé : A partir de la résolution d'un problème, les participants, répartis en groupes de 4 ou 5 personnes, sont d'abord amenés à proposer une ou plusieurs stratégies de résolution. Ensuite, le problème peut être réanalysé avec des critères de classement en vue de faire un dénombrement.
Ce travail a permis de faire une évaluation diagnostique sur des notions de géométrie et de préparer un travail plus approfondi sur les isométries du plan.

Mots-clés : résolution de problèmes - dénombrement - énumération - isométries

OÙ SONT TOUS LES TRIANGLES ?

I - Le problème de départ

On part d'une configuration de 9 points :
(extraite d'un réseau de points à mailles carrées)



Il s'agit de dénombrer tous les triangles dont les trois sommets sont toujours choisis parmi les 9 points.

II - Déroulement et Relance

1 Déroulement

- ***Phase 1***

Définition de la tâche et recherche de stratégies

Consigne
dans chaque groupe
Elaborer des stratégies pour dénombrer tous les triangles.
(durée : 10 à 15 minutes)

- ***Phase 2***

Confrontation des propositions de stratégies et décisions pour la résolution

Elle permet aux groupes en difficulté d'avoir une méthode de recherche. Quant aux autres groupes, elle leur permet de choisir la démarche qu'ils jugent la plus adaptée.

Remarque
si certains groupes pensent avoir résolu le problème grâce à des connaissances sur la combinatoire (nombre de combinaisons de 3 points choisis parmi 9 points), on peut alors leur demander d'identifier différentes sortes (ou différents types) de triangles, de les dénombrer dans chaque type et ainsi de vérifier la concordance avec leur premier résultat.

- ***Phase 3***

Résolution

Chaque groupe essaie de mener à son terme la recherche exhaustive des triangles. Il paraît indispensable de prévoir, pour cette phase, une durée suffisante (au moins 30 minutes pour certains groupes).

Remarque
Des feuilles (format A3) de réseaux de points à mailles carrées sont mises à la disposition des participants, tant pour la recherche que pour la communication.

- ***Phase 4***

Compte-rendu

- Communication de la démarche et des résultats des travaux de groupes.
- Comparaison des méthodes et des résultats.
- Demande d'argumentation ou de justification.
- Analyse des difficultés.

2 Relance du problème

- ***Elle se situe essentiellement au niveau de l'argumentation***

- d'une part sur le nombre de types de triangles
- d'autre part sur le nombre de triangles de chaque type.

- ***Deux hypothèses de travail retenues :***

- recherche exhaustive
a) des longueurs des segments pouvant être dessinés sur la figure.
b) des combinaisons de 3 segments ayant des longueurs choisies parmi les valeurs trouvées précédemment.

- faire jouer un rôle privilégié au point central de la configuration des 9 points.

En effet, en prenant un triangle de chaque type, l'utilisation de rotations d'un quart de tour, autour du point cental, doit permettre d'aboutir à une justification complète et simple du dénombrement des triangles de chaque type, à condition de déterminer le nombre de cas à étudier.

III - Analyse des procédures et réponses

1 Analyse concernant certaines phases du déroulement d'une classe de 5 groupes.

- ***Phase 1***

Recherche de stratégies

- groupes 1 2 3 4
Les participants sont tous convaincus qu'il y a peu de triangles, pas plus de 30, mais que, pour autant, la recherche n'est pas facile.

- groupe 5
En revanche, les participants sont convaincus que la recherche est très facile. Ils pensent trouver très vite le résultat puisqu'ils ont l'intention de faire des arbres avec des codages des 9 points (énumération des triangles). Ils pensent aussi que le nombre de triangles doit être très élevé.

En moins de 10 minutes, ils proposent une réponse, ce qui n'était pas du tout le but de la phase 1 et affirment successivement à l'enseignant que le nombre de triangles est :

a) 504 (soit le résultat de 9*8*7 qui découle des arbres faits avec les codes des 9 points)
b) 168 (soit le quotient de 9*8*7 par 3)
c) 84 (soit le quotient de 9*8*7 par 6, c'est-à-dire 3!)
d) 76 (soit la différence entre le nombre précédent et le nombre 8 qui est le nombre de cas où les 3 points choisis sont alignés).

Le dénombrement est donc trouvé pour ce groupe 5. Mais la suite leur réservera des surprises car les arbres faits initialement ne donnent pas une énumération des triangles.

- ***Phase 2***

Confrontation des propositions de stratégies et décisions

- groupes 1 et 2
Pas de démarche.
Conviction que le problème est trop difficile pour eux.

Intention de faire des tracés de triangles, sans apparition de méthode, sinon les dessiner sur une seule figure et crainte d'en oublier.

- groupe 3

Les participants envisagent

a) d'identifier "toutes les sortes" de triangles pouvant être obtenus

b) de faire un dénombrement pour chaque type de triangle, ce qui permettra une répartition des tâches des participants du groupe d'après les types identifiés.

- groupe 4

intention

a) de nommer les 9 points

b) d'énumérer les triangles qui seront tracés.

- groupe 5

Ce groupe, qui a déjà dénombré tous les triangles, communique sa méthode de calcul (utilisation d'une formule de combinatoire) et donne le résultat 76 (le détail est indiqué dans la partie III- phase 1).

Le résultat, exact, surprend tous les autres participants (tant de triangles !). Ceux-ci rejettent totalement la proposition du groupe 5.

- Décisions

a) groupes 1 2 3 4

Les participants envisagent d'appliquer la méthode proposée par le groupe 3 bien que certains ne voient pas comment se répartir les tâches, au sein d'un groupe.

b) groupe 5

Ils décident de chercher une méthode différente qui leur permettra de dénombrer les triangles de chaque type.

- ***Phase 3 Première partie***

Enumération des triangles ou des types de triangles selon les groupes

Le classement des procédures peut se faire d'abord suivant l'existence (ou non) de dessins de triangles

- Dessins (groupes 1 2 3 4)

a) dessin d'un seul exemplaire de chaque type

× si tous les types sont représentés sur une seule configuration de 9 points, alors il y a très rapidement abandon à cause d'une lisibilité difficile

× choix de dessiner seulement un exemplaire d'un seul type sur une configuration donnée de 9 points et de reproduire cette configuration à chaque fois qu'un nouveau type apparaît

b) Classement des représentants des types d'après les dessins

× sans ajouter d'étiquettes

× en ajoutant les étiquettes

- triangles rectangles (qui sont isocèles ou non)

- triangles non rectangles (qui sont isocèles ou non)

c) réussite de l'énumération des 8 types

- Pas de dessins (groupe 5)

a) codage des 9 points

× pour certains avec les lettres A B C D E F G H I

× pour d'autres avec les nombres de 1 2 3 4 5 6 7 8 9

b) arbres avec les codages

× parfois échec dans l'énumération des triangles

× conditions de la réussite : prendre conscience que plusieurs codes peuvent désigner un seul triangle (exemple : les codes ABD ADB BAD ...), mais aussi que certains codes de 3 lettres ou 3 nombres ne codent pas de triangle.

c) finalement réussite dans l'énumération de tous les triangles, ce qui permet de vérifier la concordance avec le résultat numérique (76) établi dès le début de la séance, sans pour autant connaître

- le nombre de types
- ce qui caractérise un type

- ***Phase 3 Deuxième partie***

Dénombrement des triangles de chaque type

- Les 2 premiers critères de classement sont l'existence (ou non) de répartition des tâches au sein des groupes et l'existence (ou non) de démarche apparemment stable. - Le troisième critère est l'utilisation seulement (ou non seulement) de dessins

a) seulement dessin

b) dessin puis découpage d'un représentant d'un type, changement de position de ce représentant mobile et dessins des différentes positions obtenues

× soit en retournant le représentant mobile

× soit sans le retourner, mais en le translatant ou en le tournant.

- Le quatrième critère est l'utilisation apparente (ou non) des isométries au niveau manipulatoire - Le cinquième critère est l'utilisation (ou non) du langage oral associé aux isométries

a) si pas de langage oral, "langage gestuel"

b) si langage oral associé aux isométries, deux cas

× utilisation des étiquettes comme translation, rotation, symétrie axiale

× pas d'utilisation des étiquettes précédentes, avec deux cas

- formulation des propriétés des isométries en jeu

- pas de formulation des propriétés des isométries en jeu sinon des expressions comme "on fait comme ça"

<u>- remarque</u>

échec du groupe 5 pour le dénombrement des triangles de chaque type alors qu'ils connaissent le nombre total de triangles grâce à leurs connaissances des formules de combinatoire et qu'ils ont énuméré tous les triangles

2 Eléments de réponses concernant la Relance

En prenant, pour unité de longueur, la longueur du plus petit segment qui peut être tracé, on obtient les longueurs suivantes :

L1 : 1
L2 : $\sqrt{2}$
L3 : 2
L4 : $\sqrt{5}$
L5 : $2\sqrt{2}$

- ***premier tableau***

Il donne les combinaisons possibles de 2 longueurs (O signifie oui, N signifie non)

	L1	L2	L3	L4	L5
L1	O	O	O	O	O
L2	.	O	O	O	N
L3	.	.	O	O	O
L4	.	.	.	O	O
L5	.	.	.	.	N

- ***deuxième tableau (ci-dessous)***

Chaque ligne donne le résultat pour un type

× combinaisons possibles de 3 longueurs

× nombre de cas à envisager

× nombre total de triangles

Types de triangles	longueurs des côtés	nombre de cas	nombre de triangles
(1)	L1 L1 L2	4	16
(2)	L1 L2 L4	4	16
(3)	L1 L3 L4	4	16
(4)	L1 L4 L5	2	8
(5)	L2 L2 L3	2	8
(6)	L2 L4 L4	1	4
(7)	L3 L3 L5	1	4
(8)	L2 L4 L4	1	4

Analyse des difficultés

- ***au niveau de la méthode de départ***

exemple (groupe 5) : non investissement dans le cadre géométrique

- ***au niveau de la répartition des tâches***

exemple (groupe 2) : cause principale de son échec

- ***au niveau du dénombrement correspondant aux 2 types de triangles qui ne sont ni rectangles ni isocèles***

- ***au niveau du choix des isométries***

- ***au niveau de l'argumentation complète même si le dénombrement est réussi***

Titre : "À la chasse aux canards"
Auteur : Gérard LIPP (IUFM. d'Alsace. antenne de GUEBWILLER)
Date : Mars 1992
Type : C.R. d'activités en formation initiale et continuée des instituteurs, à partir d'expériences dans des C.M.
Résumé : En formation des maîtres montrer que : "Émettre des conjectures et les valider, c'est aussi des mathématiques."
Mots-clés : Probabilités, moyenne, prévision, statistiques, équiprobabilité.

À LA CHASSE AUX CANARDS

Le premier problème

Six excellents chasseurs (de vrais Nemrod) vont à la chasse aux canards sauvages. Arrivent six canards. Sans se consulter, ils visent, tirent et tuent chacun le canard visé.

Question : Combien y a-t-il de canards tués ?
ou : Y a-t-il des survivants ?

Matériel :
Six silhouettes de canards, numérotés de 1 à 6.

Structure pédagogique :
Consignes : Chacun vise un canard, sans consulter ses voisins. Au signal, chacun note le N° du canard visé. On fait le compte des "canards tués" et on note le nombre de survivants.

1) Je demande aux formés de se mettre en équipes de 6.

2) Je leur propose de mettre par écrit leur hypothèse.

3) On fait une centaine d' "expériences".

Je leur annonce que je mets par écrit "mon hypothèse" derrière le tableau (ou mieux dans une enveloppe collée et scellée à savoir :

"Il y a, en moyenne, toujours au moins ***deux*** *survivants".*

4) A la fin, on calcule le nombre "moyen" de survivants de l'ensemble des "expériences" de toutes les équipes.

(Ex : Environ 80 expériences faites par 3 équipes nous donne environ 240 expériences réalisées en tout)

Une fois le résultat calculé, on ouvre l'enveloppe.

La question qui fuse : "Comment avez-vous pu prévoir ?"

Réflexions didactiques sur ce problème

Je propose aux enseignants de **mathématiser ce travail** :

1) Ils doivent chercher, dans un premier temps, tous les "cas de figures de tir" possibles.

A titre d'exemple, nous découvrons ensemble que **4** chasseurs peuvent viser un même canard, les 2 autres visant, soit chacun le sien, d'où trois survivants, soit les deux un même "autre" canard d'où quatre survivants : nous représentons ces cas de figures par les écritures suivantes : (4-1-1) et (4-2).

- Les formés devront chercher les autres cas de figures possibles et trouveront ainsi :

Résultats :

a) Les cas de figures possibles :

a (6)
b (5-1)
c (4-2) **d** (4-1-1)
e (3-3) **f** (3-2-1) **g** (3-1-1-1)
h (2-2-2) **i** (2-2-1-1) **j** (2-1-1-1-1)
k (1-1-1-1-1-1)

Soit onze cas différents, dont le tableau (page suivante) donne un exemple particulier pour chaque cas.

b) Ce travail met par ailleurs en évidence l'utilité d'une **<u>méthode</u> de travail.**

2) Je leur propose maintenant de former 9 groupes de 2 ou 3 personnes.

Les 9 groupes se répartissant les 9 cas de figures (b à j) trouvés plus haut. Je mets à part le premier et le dernier cas que nous étudions ensemble, à titre d'exemples.

Ils chercheront pour chaque cas le nombre de survivants et toutes les possibilités différentes possibles.

<u>Ex :</u>

- cas b) Les 5 chasseurs qui visent le même canard, peuvent viser n'importe lequel des "6" canards: d'où **six** possibilités. Lorsque les 5 chasseurs visent "leur" canard, le sixième chasseur a le choix entre les cinq canards restant, d'où **cinq** cas <u>pour chaque possibilité des cinq premiers chasseurs</u> , soit **en tout** <u>6 x 5 possibilités différentes</u>.

- cas k) Chaque chasseur vise un canard, d'où **une seule** situation possible.

Cela nous donne le tableau ci-dessous :

cas	N° des canards et ex. de cas possibles 1	2	3	4	5	6	Nombre de survivants (s)	Nbre possib. pour chaque cas (p)	Produit s x p
a	6						5	6	30
b	5	1					4	30	120
c	4	2					4	30	120
d	4	1	1				3	60	180
e	3	3					4	15	60
f	3	2	1				3	120	360
g	3	1	1	1			2	60	120
h	2	2	2				3	20	60
i	2	2	1	1			2	90	180
j	2	1	1	1	1		1	30	30
k	1	1	1	1	1	1	0	1	0
							TOTAUX	462	1260

<u>Résultats</u> :

Après discussion, les participants se mettent d'accord, qu'il n'y a aucune raison que l'une ou l'autre "situation" soit privilégiée, et donc que chacune des situations est **"équiprobable"**, on fera donc la "moyenne" comme on fait la moyenne des notes d'une classe, d'où, par un calcul, en moyenne, 2,72 survivants.

<u>N.B.</u> : Un spécialiste en "calculs des probabilités" ferait certainement un calcul différent et plus précis !

Le deuxième problème

Pour réinvestir ces découvertes, je leur propose un deuxième problème qui surprend encore plus d'un :

On a six dés non pipés. Chaque participant lancera les six dés à tour de rôle. Chacun notera soigneusement les numéros sortis et en déduira combien de numéros ne sont pas sortis. On fera une centaine de "lancés".

Questions :

1) (avant de jouer) En moyenne, combien de numéros ne sortiront pas ?

2) Calculez, après expérience, combien de numéros ne sont pas sortis, en moyenne !

1) Premières réflexions des enseignants sur ce problème

Plusieurs s'interrogent, et se demandent si vraiment on trouvera encore un nombre aux environs de 2, d'autres pensent carrément que cela n'est pas possible puisque c'est un problème "tout-à-fait" différent. Certains parmi ces derniers penchent pour le nombre 3, (la moitié : 1 sur 2 !?).

Après expérience et découverte du résultat similaire, beaucoup prennent conscience que les mathématiques c'est peut-être plus important qu'ils ne croyaient ! Certains se laisseront tenter, pour faire des mathématiques "autrement", et exploiteront la "soif de calculer" qui est latente chez les enfants.

2) Contexte et conclusion :

Ces problèmes, utilisés plusieurs fois dans des CM1 et des CM2, ainsi qu'en formation initiale et continuée des maîtres de l'Elémentaire, me paraissent intéressants à plus d'un titre :

- Ils permettent de mettre en évidence, aux yeux des maîtres, l'opportunité des mathématiques pour prévoir certains "phénomènes", à leurs yeux imprévisibles.

- Il permet aussi de leur faire comprendre le pourquoi d'un résultat, sans qu'ils possèdent forcément les "connaissances mathématiques" habituellement indispensables.

Titre : La marionnette (Une introduction des écritures additives).

Date : Mars 1992.

Auteur : Gabriel LE POCHE, I.U.F.M Rennes.

Type : Activité en formation initiale.

Résumé : Exemple d'activité en formation initiale intégrant une fiche didactique : il s'agit, pour les élèves maîtres, de la mettre en oeuvre, dans une classe, en apportant les modifications jugées utiles.

Mots-clés : situation a-didactique, analyse a priori, variable didactique, écriture additive.

LA MARIONNETTE

Contexte

Cette activité de formation initiale des instituteurs a été réalisée dans le cadre d'un module de formation au cours duquel les élèves maîtres préparent, réalisent, puis analysent plusieurs séquences scolaires consécutives dans des classes d'application (de 3 à 6 séquences, une séquence par semaine). Le projet doit s'intégrer dans la progression du maître.

L'organisation générale est la suivante : 9 heures par semaine réparties en 3 heures de préparation le mardi matin, 3 heures dans les classes le jeudi matin, 3 heures pour l'analyse le vendredi matin.

I - L'ACTIVITÉ

1) Structure pédagogique du temps de préparation et de bilan pour une classe de normaliens.

Les élèves sont répartis par groupes de trois ou quatre, chaque groupe est associé à une classe d'application. Ils bénéficient de la présence de l' Instituteur Maître Formateur. Les professeurs d'école normale s'attachent chaque semaine à un groupe différent : pour un groupe, ils animent la préparation et le bilan de la séquence qu'ils ont suivie. Ils assistent à la réalisation de la séquence.

2) Déroulement

Préparation

Je suis formateur privilégié pour un groupe de quatre normaliens attaché à un C.P (l'Instituteur Maître Formateur, titulaire de la classe, m'avait informé au cours d'une réunion préalable que les écritures additives n'avaient pas été introduites).

Je distribue aux normaliens et à l'Instituteur Maître Formateur la fiche intitulée fiche didactique 1 (une introduction des écritures additives). C'est l'occasion d'aborder ou de concrétiser différentes notions didactiques.

Le travail des normaliens consistera à approfondir la situation (voir troisième partie : institutionnalisation) , puis à prévoir, avec l'aide de l'Instituteur Maître Formateur, la première séquence sur ce sujet. (voir le document exemple de réalisation de cette séquence d'apprentissage première séquence).

Un prestataire se porte volontaire pour animer cette séquence, préparée collectivement en 1 heure 30 environ. Le dispositif d'observation est rapidement mis en place, le rôle de chaque adulte y est précisé (je prends en charge l'observation du prestataire, les élèves maîtres observant chacun huit élèves au travail); les élèves maîtres ont l'habitude : ils ont suivi un module de formation méthodologique transdisciplinaire de 70 heures.

Réalisation

Elle est suivie d'un cours **bilan "à chaud"** au cours duquel on recueille simplement les premières impressions de la prestataire (durée: **15 minutes** environ).

Analyse

L'analyse a posteriori de la première séquence est conduite à partir des différents matériaux recueillis au cours de l'observation, sans oublier la mise en œuvre pédagogique.

Malgré l'imperfection de la séquence, les normaliens considèrent qu'ils pourront la reproduire dans leur propre classe, à condition de ne prendre en charge qu'un petit groupe d'enfants (une dizaine au maximum), ce qui suppose que le reste de la classe puisse avoir un travail autonome. C'est possible ...

C'est également l'occasion de jeter les bases de la seconde séquence étant donné que je dois quitter le groupe. L'ensemble (analyse et préparation de la deuxième séquence) dure **1 h 30**.

Le prestataire doit prendre en charge **le compte-rendu** où figurera la fiche de préparation qu'il a réalisée, les travaux des élèves - ici les messages produits - ainsi que l'analyse de la séquence.

J'ai participé de très loin à la préparation de la troisième séquence (prise en charge d'autres groupes différents), seuls quelques conseils ont pu être fournis à la demande, étant donné ma présence dans la même salle et c'est uniquement après avoir formulé quelques remarques que les trois comptes rendus seront fournis à l'ensemble de la promotion pour constituer un dossier qu'ils pourront exploiter.

Remarque : la troisième séquence est donc entièrement issue d'un travail de quatre élèves et d'un Instituteur Maître Formateur. Vous pouvez donc l'analyser à votre tour, mais il vous manquera certainement quelques éléments d'observation ....

Un sujet à exploiter ?

3) Bilan

C'est un dispositif de formation que j'estime très intéressant car il me permet d'avoir pendant un temps non négligeable un travail plus approfondi avec quatre normaliens et de "passer" très modestement quelques éléments de didactique en les explicitant davantage. Cet espace de formation dilatée complète fort bien les autres activités de formation car nous sommes ici très concrets. Il est toujours fortement apprécié par les normaliens.

Il est cependant très coûteux en moyens humains car pour six séquences, le formateur ne peut animer que 12 groupes différents de 4 étudiants, ce qui suppose deux formateurs pour qu'un groupe de 24 étudiants bénéficie deux fois de notre présence. Il ne faut pas intervenir pour la première fois en troisième semaine, sic...

Pour conclure

A l'IUFM de Bretagne, en 91-92, nous avons eu la chance de pouvoir conserver ce dispositif dans le cadre d'un approfondissement de 200 heures qui est proposé aux étudiants professeurs des écoles en première année. Le module s'intitule MATHEMATIQUES DANS LES CLASSES. 40 heures, six séquences, faites vos comptes.

II - FICHE DIDACTIQUE 1

(distribuée aux élèves instituteurs)

Une introduction des écritures additives

1) OBJECTIF OBSTACLE :

Passer d'une perception unité par unité d'une collection à une perception par groupements.

OBJECTIF DE L'ACTIVITE:

Conduire les élèves à produire une écriture additive pour nommer le nombre d'éléments d'une collection importante.

2) PRÉSENTATION DE LA SITUATION

C'est une situation de communication entre un élève et une marionnette manipulée par le maître. Le maître peut gérer en même temps un groupe de huit élèves environ.

3) TÂCHE ÉLÈVE

Exemple : mettre le couvert: une assiette, un verre.

Face à une pile de n assiettes, il s'agit pour l'élève de passer, à une marionnette, une commande écrite du nombre de verres voulus en n'utilisant que les nombres de 1 à 9 (nombres à un chiffre)

4) CONTRAINTE DE LA SITUATION

La commande écrite est destinée à une marionnette qui ne parle pas et qui ne sait qu'interpréter les nombres de 1 à 9. Son niveau de connaissances l'amène à utiliser systématiquement la bande numérique 1 2 3 4 5 6 7 8 9 pour honorer la commande de l'élève.

Remarque : cela suppose que cet instrument de comptage soit en usage dans la classe.

5) VALIDATION DE L'ACTIVITÉ

La tâche de l'élève est autovalidante: il constate facilement son échec provisoire si, ayant ramené son lot de verres au cours d'un unique voyage, il s'aperçoit, en disposant verre et assiette comme lors d'une mise de couverts, qu'il a des verres en trop ou qu'il lui en manque.

L'enfant doit être convaincu que la marionnette ne fait pas d'erreur : c'est pour cela qu'elle travaille à un niveau de compétences inférieur au sien (bande numérique)

Remarque : en cas d'échec, l'enfant doit alors rapporter tous ses verres à la marionnette.

6) ANALYSE DE LA TÂCHE DE L'ÉLÈVE

Pour une collection de 24 assiettes

L'émetteur produit parfois l'écriture canonique 24, mais cela conduit à un échec puisque la marionnette interprète cette écriture en analysant chacun des deux chiffres séparément et fournit alors 2 + 4 verres.

D'autres élèves ne connaissent pas assez loin la comptine numérique, ou échouent à l'activité de comptage, d'autres encore sont bien incapables de passer de la numération orale à la numération écrite car ils ne disposent que d'une bande numérique identique à celle de la marionnette (de 1 à 9).

Les seuls messages opérationnels ne peuvent donc qu'être que de type forme additive comme 6 9 4 5 ou 9, 9, 5, 1 ou 8 et 8 et 8 ou 7 + 7 + 7 + 3 etc....

III - INSTITUTIONNALISATION RÉALISÉE AVEC LES NORMALIENS

1) VARIABLES DIDACTIQUES

- Variable numérique

Le choix du nombre d'assiettes se fait en fonction du champ numérique maîtrisé par l'élève, un nombre supérieur ou égal à dix oblige l'enfant à fractionner sa collection.

- Le type d'objet que l'enfant doit dénombrer et la disposition spatiale initiale.

La contrainte d'appariement doit être immédiatement lisible lorsque l'élève reçoit les objets fournis par la marionnette (verre-assiette, bougie-bougeoir, chapeau-tête etc...).

Il peut avoir, ou non, la possibilité de déplacer les objets de la collection initiale.

Remarque : la prédisposition spatiale de cette collection peut favoriser une perception par groupements ... mais, quelles en sont les conséquences?

- La structure pédagogique

Le maître a la possibilité de faire travailler les enfants émetteurs individuellement ou sous la forme d'un petit groupe homogène ou hétérogène de 2 ou 3 personnes.

- La contrainte forte

introduite par la marionnette qui ne connait que les nombres de 1 à 9.

- Remarques

Si le rôle de la marionnette était tenu par un élève ne maîtrisant que les nombres à un chiffre, la situation serait alors beaucoup moins fiable. Comment l'émetteur peut-il être persuadé que l'enfant récepteur décode correctement le message en fonction de son niveau de compétences et, qu'en cas d'échec, il doit donc changer de stratégie ? L'émetteur peut rester très longtemps convaincu que le récepteur doit décoder correctement les nombres à deux chiffres, qui peuvent être pour lui très familiers (cf : le calendrier).

Qu'en serait-il si ce rôle était tenu directement par l'instituteur ? Il fournirait alors 6 objets pour le message 24, lui qui sait pourtant interpréter, d'habitude, correctement vingt quatre ?

Là encore, la marionnette s'avère indispensable pour que l'enfant émetteur puisse accepter plus facilement que l'écriture canonique ne permet pas de résoudre la situation.

2) DÉROULEMENT PRÉVU POUR L'ACTIVITÉ

Phase d'appropriation de la tâche

Le choix d'un petit nombre d'assiettes (3 ou 4) permet à l'enfant de comprendre la tâche demandée et à l'instituteur de vérifier que ses consignes ont bien été intégrées.

La situation problème

Le choix du nombre d'objets (nombre supérieur à dix) oblige l'enfant à changer de stratégie et à franchir l'obstacle (perception par groupements de la collection)

Remarque : cet obstacle n'est pas automatiquement franchi en une seule séquence scolaire.

Phase d'institutionnalisation

La connaissance institutionnalisée est la suivante : pour dénombrer une collection, il n'est pas nécessaire de compter un à un tous les éléments de la collection, on peut aussi dénombrer séparément autant de petits paquets que l'on veut.

Le signe + est alors introduit comme connecteur de nombres, l'on précise qu'il est utilisé par les adultes, et qu'il leur évite ainsi de confondre le 13 (treize) avec 1 et 3 (noté 1+3).

IV - UN EXEMPLE DE RÉALISATION DE CETTE SÉANCE D'APPRENTISSAGE

(C'est le document écrit remis par les normaliens prestataires)
(Novembre 91, dans un C.P. de 24 élèves)

1) Première séquence

(normalien x)
(remarque : ma présence à la préparation, réalisation et bilan influence le compte-rendu)

Structure pédagogique

Travail individuel des émetteurs. Trois adultes manipulent chacun une marionnette et reçoivent huit enfants.

Matériel

association bougeoir-bougie. Les bougeoirs en pâte à modeler sont amovibles et disposés sur un disque de carton simulant un gâteau d'anniversaire. Les bougies sont réelles.

Variable numérique

après la phase d'appropriation réalisée avec 5 bougeoirs, les nombres retenus sont différents (de 12 à 24). Ils sont choisis en fonction de la connaissance supposée maîtrisée de la comptine numérique.

Bilan : trois groupes
7 élèves franchissent très facilement l'obstacle, 12 après plus de deux essais, 5 échouent.

2) Deuxième séquence

(normalien y)
(remarque : quelques conseils du formateur lors de la préparation de la séquence)

Structure pédagogique

groupes différenciés en fonction du vécu de la séance précédente.

- premier groupe : 7 élèves, trois activités.

a) travail individuel sur l'association bougeoir-bougie, n=24.

b) travail individuel sur polycopié : des têtes sont dessinées, il s'agit de commander des cubes représentant des chapeaux, n=28. Mise en commun des différentes écritures produites. Institutionnalisation.

c) par groupes de deux, productions d'écritures additives : bons de commande pour différents groupes d'objets dessinés (20 bonbons, 19 colis, 25 paires de lunettes).

- deuxième groupe : 12 élèves, deux activités

a) bougeoir-bougie, n=24.

b) polycopié tête-chapeau, n=25 puis polycopie verre-paille, n=21 (paille simulée par une allumette)

c) institutionnalisation locale.

Remarque : pour les deux premiers groupes les activités a, et b, utilisent la marionnette.

- troisième groupe : 5 élèves, une activité.

association bougeoir-bougie, n=14. L'aide consiste en la verbalisation, par l'enfant, de la stratégie de décodage de la marionnette et en une incitation éventuelle au déplacement des bougeoirs.

Bilan

Difficulté de gestion des trois groupes, d'où une incertitude de conclusion pour les cinq enfants plus faibles qui n'ont pas bénéficié d'une aide suffisante de la maîtresse (verbalisation).

Tous les autres réussissent les tâches demandées.

Pour eux, l'institutionnalisation (la maîtresse met en évidence ce que les enfants ont découvert) aura été la suivante:

> *"au début, quand vous avez écrit 12 pour douze bougeoirs la marionnette lisait 1 2 et vous donnait 3 bougies, puis vous avez trouvé que l'on pouvait compter des paquets et écrire 5, 3, 4 : vous sépariez les chiffres avec . ou , ou maintenant je vais vous dire comment font les grands: ils écrivent 5+4+3"*

la maîtresse fera écrire sur un petit carnet
"au lieu de 12 on peut aussi écrire 5+4+3".

Elle demande aux enfants de s'en souvenir pour toujours.

3) Troisième séquence

(normalien z)
(remarque : plus aucune influence du formateur)

Structure pédagogique

activités différenciées : d'une part, pour le petit groupe des cinq élèves et d'autre part, pour le reste de la classe séparé en 5 groupes de 3 et un groupe de 4.

Activités

<u>pour les 19 élèves :</u>

Objectifs
réinvestir l'écriture additive dans la recherche de plusieurs écritures pour une même quantité. Recherche systématique de toutes les écritures additives à deux termes de 12.

Tâche
traduire par des écritures de nombres la répartition de plusieurs colis dans des camions de livraisons qui partent en même temps.

Appropriation
par une mise en scène de la situation avec des jouets - 12 colis (des cubes), 2 camions en plastique, un enfant (le responsable) qui écrit une répartition possible (le message), deux autres enfants (les livreurs) qui décodent le message et chargent les colis.

Matériel
par groupe : une feuille avec des camions dessinés et plusieurs emplacements pour les messages.
un gros feutre et une grande feuille de brouillon
possibilité de faire appel à des cubes

Variable numérique
suivant les groupes 2, 3 ou 4 camions dessinés.

Consigne
"vous cherchez plusieurs solutions pour charger les 12 colis dans vos camions, vous écrivez une solution par emplacement"

Déroulement
appropriation, recherche par groupes, synthèse collective: exposition des messages, retour à la manipulation en cas de problème, inventaire de toutes les sommes à 2 termes.

<u>pour les cinq élèves :</u>

Objectif
faire apparaître l'écriture additive.

Matériel
pour chaque enfant un nombre différent de cubes (de 11 à 17)

Consignes
- "écris combien tu as de cubes, la marionnette doit pouvoir te comprendre (elle sait compter jusqu'à 9). Pour t'aider, tu peux faire des paquets avec tes cubes."

Echange de son message avec un voisin.
- "trouve combien ton voisin a de cubes? pour t'aider tu peux faire un dessin."

Puis les enfants de ce groupe participent à l'activité "camions" du reste de la classe. (remarque : l'appropriation de cette nouvelle tâche a été commune à tous les élèves de la classe)

Bilan

Un enfant du petit groupe éprouve encore des difficultés, les autres ont très vite rejoint le reste de la classe.

De nombreux messages ont été obtenus, les procédures ont été variées -comptage sur les doigts, dessin des 12 colis puis partition, utilisation des constellations, essais-ajustements

exemple : trois groupements dessinés avec un nombre quelconque de colis puis ajustement avec le quatrième, etc... mais aucun groupe n'a eu recours aux cubes.

Titre : Parcours sur un quadrillage

Auteur : Serge PETIT, IUFM d'Alsace, Centre de Colmar

Date : mars 1992

Type : activité proposée en formation continue et en formation initiale d'instituteurs et de professeurs de lycées et collèges.

Durée : de quatre à six heures selon les prolongements

Résumé : à partir de dénombrements de chemins les plus courts d'un point à un autre, on fait apparaître plusieurs concepts de didactique

Mots clés : situation problème, outil/objet, saut informationnel, dénombrement, combinaison, registre de représentation sémiotique, changement de registre

PARCOURS SUR UN QUADRILLAGE

NOTE DE PRÉSENTATION

Cette activité m'a été suggérée par la lecture du livre de Arthur Engel (l'enseignement des statistiques et des probalités), elle a été réalisée de nombreuses fois devant les publics mentionnés ci-dessus, produisant sensiblement les mêmes effets, elle m'avait auparavant servi en lycée pour l'introduction des combinaisons.

DESCRIPTION DE L'ACTIVITÉ

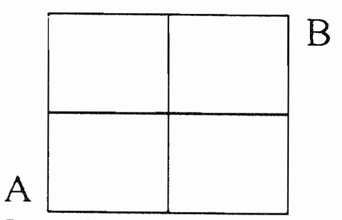
PHASE 1

Organisation du travail

travail individuel

Matériel

les étudiants disposent d'un quadrillage 2 x 2, tel que celui-ci :



Les points A et B sont marqués.

Consigne

Combien y-a-t'il de chemins **les plus courts** permettant d'aller de A à B en suivant les traits du quadrillage ?

Commentaire

À chaque fois, la consigne n'est pas immédiatement comprise.

Certains étudiants comprennent que le déplacement s'effectue à l'intérieur même des carreaux ; d'autres pensent que l'exercice n'a qu'une seule solution , le segment [AB], certains oublient qu'il s'agit des chemins les plus courts.

Résultats

- les stratégies mises en oeuvre sont essentiellement graphiques (dessins des différents chemins)
- en général tous ont le bon résultat mais sont incapables de montrer qu'il n'existe pas de chemin supplémentaire, se posent donc des problèmes de preuve.
- à ce stade, il n'y a pas de véritable énumération des chemins.

PHASE 2

Matériel

chaque étudiant dispose d'un quadrillage 4 x 4

Consigne

La même qu'en phase 1.

De plus, il est précisé que le travail se déroulera en deux parties

Première partie : travail individuel. chacun doit produire la trace écrite de ses essais. des raisons qui ont éventuellement conduit à l'abandon d'une piste de recherche et sa réponse.

Deuxième partie : travail par groupes de trois ou quatre au maximum. l'objectif est la production d'une réponse du groupe qui doit être justifiée. de la mise au clair des procédures qui ont permis de réfuter certaines conjectures

Résultats

- on observe une grande diversité de réponses
- on observe également une grande diversité de stratégies et de conjectures émises
- des débats permettent de développer des qualités d'argumentation pour établir des preuves de validité ou de non validité de conjectures
- c'est à ce stade qu'apparaît l'outil arbre de choix comme moyen de preuve. d'où un retour sur le cas 2 x 2.
- certains étudiants proposent des formules de combinatoire mais généralement mal utilisées. elles n'apparaissent pas à ce stade comme moyen de preuve
- certains encodent les chemins (les énumèrent) codages de type flèche en haut . flèche à droite...organisent ces données et parviennent au résultat. ils seront mis en échec par la phase suivante.

PHASE 3

Matériel

Chaque étudiant dispose d'un quadrillage 10 × 10, on nomme A et B deux points diagonalement opposés. la consigne est la même qu'en phase 1.

Déroulement :

en deux parties

Première partie : travail individuel

Deuxième partie : travail collectif par groupes de trois ou quatre.

Les consignes dans ces deux parties sont les mêmes que pour la phase 2.

Résultats

- les procédures précédentes n'aboutissent plus. le saut informationnel ne permet plus de dessiner chaque chemin. ni de traiter après codage l'ensemble des chemins pour les dénombrer
- les étudiants sont demandeurs d'un outil pour traiter le problème. certains évoquent des souvenirs fort imprécis de combinatoire
- le travail qui suit prend appui sur les essais des étudiants concernant notamment l'encodage et la suite à lui donner.

PHASE 4

En général. à ce stade pratiquement personne n'a obtenu le résultat. Les étudiants ont abandonné (à cause de la taille des nombres) les stratégies de représentations graphiques. les stratégies par arbre de choix. ils se sont rendus à l'idée qu'il y a "une formule" qui doit donner la solution. Ils n'ont pas toujours conscience que c'est à partir de certains de leurs codes que cette formule pourra être approchée.

Les codages des chemins (énumération de ceux-ci) sont de la forme suite de flèches vers le haut. vers la droite : suite de deux types de lettres (h. d) ... dans lesquels un signe désigne un déplacement souvent nommé "vers le haut". l'autre désignant un déplacement "vers la droite".

C'est ici qu'intervient la notion de changement de registre de représentation (Raymond Duval) : les premiers essais de tous (ou presque) les étudiants étaient le dessin des chemins. Il n'y avait pas là de changement de registre de représentation : les objets à étudier étaients représentés. comme le quadrillage dans un registre graphique figural.

Dès le premier codage. il y a un changement de registre de représentation. on passe à un code par lequel on désigne un chemin. Nous travaillons alors dans un registre symbolique. Les premiers codages sont congruents (Raymond Duval) avec la figure. certains comme le suivant 00011101000110001111 le sont moins. Mais ce dernier type de codage ne permet pas de passer immédiatement au nombre de chemins - sauf à vouloir passer pour une sorte de magicien - et de rester incompris en exhibant une belle formule.

Un travail supplémentaire s'impose, il s'agit d'introduire ou de réintroduire la notion de combinaison. D'où le travail de la phase 4 (essentiellement fait par le formateur) de changement de code suivant. Tout chemin est défini par la donnée d'un peigne de vingt cases dans lequel seule la position des 1 est significative (modulo le fait que les autres emplacements sont automatiquement remplis par des 0). Le travail d'explicitation se fait sur un quadrillage plus petit pour des raisons de commodité.

Passer de 00011101 à une combinaison.

Imaginons que le chemin soit décrit par un peigne (comme ceux des formulaires de sécurité sociale); décrire un chemin c'est, alors désigner l'emplacement des 1 dans le peigne (on construit alors un ensemble de peignes remplis en bijection avec l'ensemble des chemins cherchés).

```
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
|   |   |   |   |   |   |   |   |
  a   b   c   d   e   f   g   h
```

D'où nouveau type de codage possible (dans le cas du 4 x 4) :

Sur le peigne, toute place de 1 est désigné par une lettre prise dans l'ensemble suivant :

{a, b, c, d, e, f, g, h} ainsi, la partie {d, e, f, h} désignera (et elle seulement) le chemin précédemment désigné par 00011101. Ce codage n'est absolument plus congruent avec les représentations graphiques, il établit bien une correspondance bijective entre l'ensemble des chemins et l'ensemble des parties ayant quatre éléments prises dans un ensemble ayant huit éléments.

Les étudiants sont alors invités à déterminer le nombre de parties ayant quatre éléments que l'on peut former dans un ensemble ayant huit éléments (remarquer que cette formulation peut prêter à confusion- la réponse pourrait être deux !)

Ce travail commence généralement par un ordre inférieur, puis les étudiants aboutissent au tableau de Pascal, mis en forme par le formateur. On peut s'aider des relations apparaissant sur le quadrillage pour former ce triangle.

Le mot combinaison est ensuite défini, la formule donnant le nombre de combinaisons à p éléments dans un ensemble à n éléments est donnée ou démontrée, le plus souvent après avoir posé la même question dans un quadrillage 100 × 100 ? (ceci pour ceux qui se contentent de calculer le début du tableau pour parvenir au résultat). Le problème donné trouve sa solution.

La très grande difficulté de cet exercice provient du fait que les changements de registres de représentation et les changements de codes ne sont pas travaillés comme objets d'enseignement et sont considérés (parce que non pointés) comme allant de soi.

La notion de combinaison, la formule retrouvée dans cet exercice donné sous forme de situation problème apparaissent comme un outil répondant aux préoccupations de l'instant. Cet outil, institutionnalisé sera ultérieurement traité comme un objet en mettant en évidence de nombreuses formules de combinatoires à partir du quadrillage. Le lecteur est invité à les rechercher.

Suite du travail

L'exercice suivant est donné aux étudiants. :

"De combien de façons différentes peut-on répartir dix boules dans trois boîtes."

Posé de cette façon, l'énoncé demande à être précisé, il devient :

"De combien de façons différentes peut-on répartir dix boules identiques dans trois boîtes différentes."

Cet exercice illustre encore le fait que le changement de registre n'est absolument pas évident et doit être travaillé.

Il montre également qu'il ne suffit pas d'introduire une notion mathématique dans une situation problème pour qu'elle soit acquise.

Les étudiants viennent de vivre deux situations problèmes autour du même thème, l'une visant l'utilisation d'un premier outil (arbre de choix), l'autre celle de nombre de combinaisons; ont été pointées les notions de saut informationnel, concept en tant qu'outil, registre de représentation, changement de registre.

Un document pourra être joint décrivant plus précisément la notion de registre de représentation et de changement de registre de représentation.

Isométries

Titre : Transformations géométriques
Date : Mars 92
Type : Eléments de réflexion sur l'enseignement des transformations
Mots clés : Géométrie, transformations, isométries, invariants

TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES

Il nous semble indispensable, dans une formation initiale, de traiter plusieurs aspects des transformations planes.

1) Transformations et invariants

Il est nécessaire de situer les isométries planes par rapport à d'autres transformations ponctuelles pour poser le problème de la conservation de l'alignement, de la forme, des distances...

On pourra, par exemple, construire point par point l'image d'une figure par une conchoïde, par une inversion, par une affinité...

2) Isométries planes

Il nous paraît indispensable de savoir identifier une isométrie plane, en donner les éléments caractéristiques et de savoir construire l'image d'une figure par une telle transformation.

3) Homothéties et proportionnalité

Il nous paraît nécessaire de lier le travail géométrique sur l'homothétie au travail sur la proportionnalité.

Titre : Pavages et isométries.

Auteur : J. VINCENT, IUFM de Reims.

Origine : Activités menées avec M. Artigue et C. Rajain à l'IUFM de Reims, retravaillées au stage de Pau.

Date : 1992

Type : Présentation d'activités menées en module commun de formation PE1 / PLC1.

Résumé : Les isométries du plan, vues à travers des activités sur les pavages, constituent la première journée d'une série de trois permettant d'aborder un thème vertical : les transformations géométriques. Ce thème étant présent dans les IO du CE à l'université, il intéresse à la fois les futurs professeurs d'école, de collège et de lycée.

Mots-clés : Géométrie, isométries, transformations ponctuelles, pavages.

PAVAGES ET ISOMÉTRIES

I - Cadre général

Il s'agit d'un module commun de formation, le public est donc très hétérogène : une majorité de PLC1 ayant au minimum une licence de mathématiques et une minorité de PE non spécialistes. Le groupe est animé par Michèle Artigue qui se charge, d'une part, d'exposés sur l'histoire des mathématiques et des synthèses et, d'autre part, de la coanimation des travaux de groupes avec un collègue et moi-même.

Déroulement

Exposé 1 h15 min
Activités sur les pavages 1 h 45 min
Synthèse 1 h
Activité pédagogique 1 h 30 min
Synthèse 30 min

La description qui suit porte sur les phases d'activités de groupes et sur les synthèses de la première journée.

Objectifs

Le thème choisi permet à un public hétérogène :

- d'aborder un même problème mathématique et d'engager des connaissances et des processus de résolution.
- de développer les capacités de communication et de travail en commun entre futurs enseignants de niveaux différents.
- de faire fonctionner les transformations ponctuelles comme outil de résolution et d'en faire un objet d'étude.
- de compléter ou de réinitialiser les apprentissages sur les transformations.

II - Phase mathématique

Dispositions matérielles

Les étudiants sont répartis par groupes de 6, les PE distribués dans plusieurs groupes. Ils disposent de photocopies de 7 pavages différents par groupe et de feuilles de calque. (pavages pris dans [1] et [2])

Consignes

"Comment construire le pavage à partir d'une partie plus petite en utilisant des transformations géométriques ?"

"Quelles sont les transformations géométriques qui laissent le pavage invariant ?"

Déroulement

Pour beaucoup d'étudiants, il y a confusion entre le pavé (au sens carrelage du terme) et le motif, ce qui crée des discussions animées dans les groupes.

Les thèmes figuratifs leur semblent beaucoup plus simples. La variété de motifs permet à chacun de travailler à son niveau. Dans cette activité, les PE ne se sentent pas désarmés.

Les deux types de travaux sont affichés :

- sur les feuilles de calque, ils ont tracé le motif qui leur semble être le motif minimum
- sur le dessin lui-même, ils ont indiqué toutes les isométries trouvées en codant par

exemple **r3** une **rotation de 120°**. les **translations** par une **flèche**. etc.

La synthèse permet d'expliciter la notion de canevas de pavage, d'identifier avec les étudiants les pavages identiques et de préciser leurs dénominations. Une grille d'identification ainsi que les canevas des pavages leur sont distribués (voir en annexe).

Il ressort aussi qu'il est plus simple de découvrir le motif minimal lorsque l'on a déjà cherché le canevas. Les différentes isométries rencontrées et leurs compositions sont mises en lumière et, dans ce domaine, les PLC sont plus à l'aise. Il apparaît cependant que, pour certains, tous les résultats classiques ne soient pas totalement intégrés. Des compléments théoriques et une remise à jour plus explicite des connaissances ont suivi ce travail.

III - Phase pédagogique

Toujours par groupe, les étudiants reçoivent des descriptions de deux séquences :

- une du primaire : "Papier peint" (voir annexe 3)
- une du secondaire : "Pavage et transformations" (voir annexe 1)
- ainsi que le questionnaire suivant (réécrit lors du stage de Pau) pour les aider à analyser les deux séquences :

Questionnaire

A - Analyse des situations

1) Savoirs visés

Quelles sont les différentes connaissances que les auteurs espèrent voir fonctionner à travers cette situation ?

2) Analyse a priori

a) Quelles sont, à votre avis, les connaissances préalables nécessaires pour comprendre les problèmes posés et en engager la résolution ?

b) Repérer les différentes étapes de la situation proposée et pour chacune d'elles :

- quelle est la consigne, est-elle pertinente ?
- analyser le problème réel qu'auront les enfants à résoudre.
- essayer de prévoir quelques procédures et productions d'élèves.
- citer les difficultés susceptibles d'être rencontrées.

c) En quoi les matériels proposés influent-ils sur les procédures et les performances des élèves ?

B - Comparaison des deux situations

1) Rôle du tracé

Peut-on voir des différences d'exigence dans le tracé entre les deux situations ?

Par rapport aux savoirs visés, comparer la fonction de la phase de tracé entre les deux cas.

2) Compétences visées

Comparer les degrés de formalisation entre les deux situations.

Déroulement

Les étudiants discutent en groupe tout en répondant aux questions. Ils ont généralement du mal à travailler sur la situation de classe qui ne les concerne pas directement. Ils ont par ailleurs en commun une vision très traditionnelle de l'enseignement et considèrent que les activités proposées ne peuvent être données qu'après avoir vu toutes les connaissances mobilisées en "cours". Souvent, ils découvrent que l'on peut aborder une notion nouvelle par des problèmes.

Les réponses au questionnaire sont généralement difficiles à venir car ce sont tous des apprentis pédagogues sans expérience. Lors des journées suivantes, les activités pédagogiques ont peu à peu pris plus de corps. Elles ont permis, notamment, de faire des comparaisons plus précises entre les activités de l'école et du collège.

La synthèse permet, à travers les réponses au questionnaire et aux compléments apportés, de commencer à mettre en place des notions de didactique des mathématiques, cette première approche servant de base aux séances suivantes.

IV - Aperçu de la suite du module

Les quatre journées suivantes du module commun PE PLC se sont déroulées sur un modèle à peu près semblable à la première. Le travail sur les transformations s'est poursuivi les deux séances suivantes.

La première a été orientée vers les transformations non isométriques, de l'homothétie aux transformations complexes, chaque étudiant ayant la possibilité de choisir son niveau. La troisième séance a plus été orientée vers la pédagogie, avec ses deux aspects complémentaires : les transformations objets d'enseignement et les transformations comme outils de résolution de problèmes.

Les deux dernières journées ont porté sur la géométrie dans l'espace avec construction, description et représentation de polyèdres, puis un travail plus général sur ces solides. La dernière séance a porté sur les perspectives et autres méthodes de représentation de l'espace ainsi que sur les sections du cube.

V - Conclusion

L'activité présentée semble avoir rempli nos attentes : les PE et les PLC ont travaillé ensemble, les notions manipulées, nouvelles pour certains, oubliées pour d'autres ont été réactivées. Elle a certainement permis à beaucoup de mettre du sens derrière des notions théoriques.

Ce travail mené avec deux types de public différents nous a semblé apporter du contenu mathématique et pédagogique à tous les étudiants. La faible proportion de PE (peur des maths ?) a fait que le débat mathématique s'est parfois un peu trop élevé, mais ils se sont généralement déclarés satisfaits de ce type de travail. La collaboration PE-PLC s'est révélée la plupart du temps positive, les PLC acceptant généralement bien de jouer le rôle de tuteur, cependant quelques permutations se sont effectuées dans les groupes pour cause d'incompréhension !

Bibliographie

[1]"Mosaïques et isométries", M.P. Collonge & F. Trehard, CEDIC

[2]"Rosaces, frises et pavages", Volumes I et II, Y. Bossard, CEDIC

[3]"Aides pédagogiques pour le cours élémentaire, Elem-Math V", Publication de l'APMEP

[4]"Modèles mathématiques" H.M. Cundy & A.P. Rollet, CEDIC

ANNEXE 1 Description de l'activité "Pavage et transformations"

A partir d'une activité de la brochure "Suivi 4ème".

Première partie

a) Programme de construction du motif

"Sur une feuille de dessin de format A4
- construis un triangle ABC équilatéral de côté c (c = 6cm)
- trace un arc R de centre A et de rayon 2 3 c à l'intérieur de ABC
- construis le symétrique F ce C par rapport à (AB) : (CF) coupe l'arc R en E.
- trace l'arc BD de centre F : D est le point commun de l'arc BD et de l'arc R.
- trace le segment [AD]"

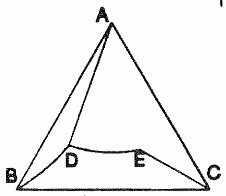


figure 1

b)Pavage

"Tu as obtenu le motif d'un "pavé" (figure 1) *qui est l'élément de base de ton pavage.*
- colorie ton motif pour en faire ressortir les différentes parties.
- reproduis le motif colorié par symétrie orthogonale en prenant comme axes de symétrie les côtés du triangle ABC
- tu obtiens de nouveaux triangles. A partir des côtés de ces triangles, tu continues par symétrie orthogonale jusqu'à ce que la feuille soit remplie."

Deuxième partie

Chaque élève reçoit une feuille représentant le pavage avec les triangles numérotés. (*figure 2*)

Le professeur donne trois numéros à chaque élève qui correspondent à trois types de transformations différents.

Consigne :
"Quelle transformation permet d'obtenir le motif n à partir du motif 0. Mettre en évidence ses éléments caractéristiques ?"

Synthèse : confrontation des différents résultats obtenus.

Troisième partie

"Où sont passées les symétries ?"

Consigne :
"Lors de la construction, combien de symétries ont permis de passer du motif 0 au motif n."

Synthèse : L'enseignant mettra en évidence les différentes solutions possibles.

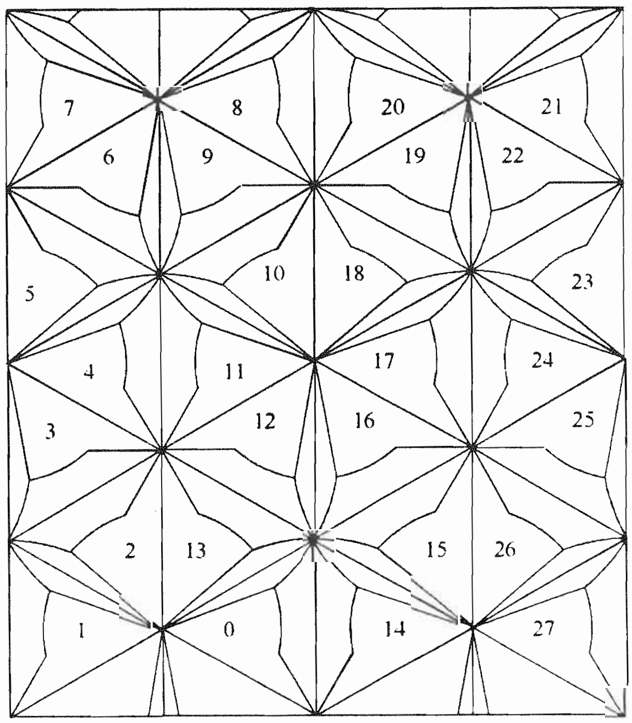


figure 2

ANNEXE 2 Groupes de Pavages (M. Artigue)

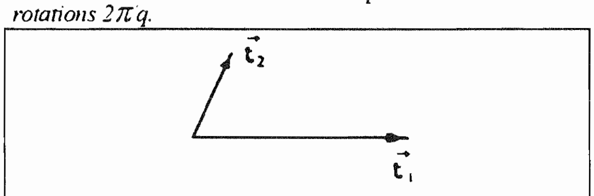
I - Grille d'Identification

	Le dessin coïncide-t-il avec son calque retourné ?																
	NON					OUI											
	Quelle rotation minimale non nulle ?					Combien de directions d'axes de symétrie ?											
	0	R2	R3	R4	R6	0		1			2			3		4	6
						R2	?	Observer les rotations entre les mailles formées par les axes de symétrie									
						non	oui	non	R2	R2	0	R2	R4	R3	non R3		
						symétrie-translation ?											
						oui	non										
type du dessin	p1	p2	p3	p4	p6	pg	pgg	cm	pm	pmg	pmm	cmm	p4g	p3m1	p31m	p4m	p6m

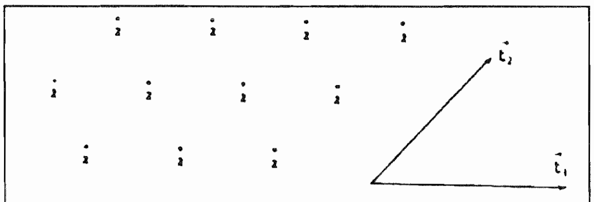
II - Canevas

(extraits de [2] , Y Bossard, Ed Cedic)

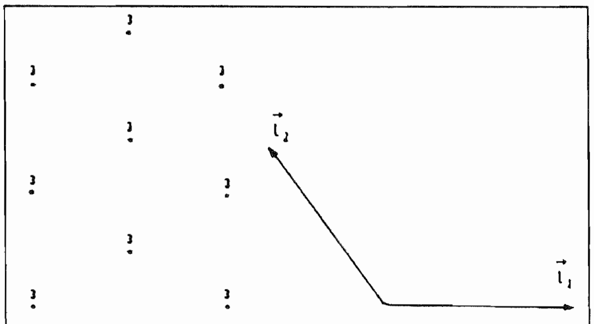
***légende** : les flèches représentent les vecteurs des translations, les droites en trait plein les axes de symétries, les droites en pointillé (et les flèches) les axes (et les vecteurs) des symétrie-translations, et les P_q sont les centres de rotations $2\pi q$.*



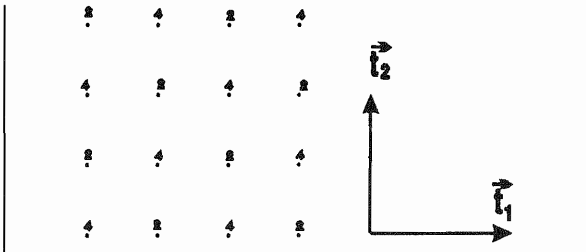
p1



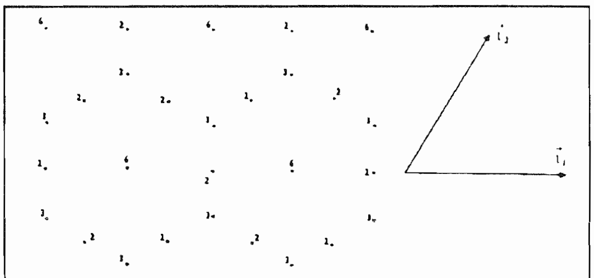
p2



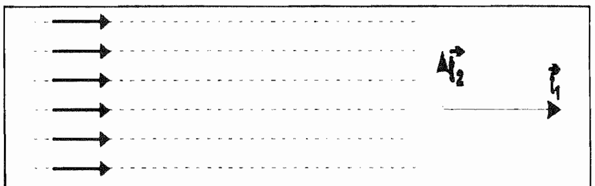
p3



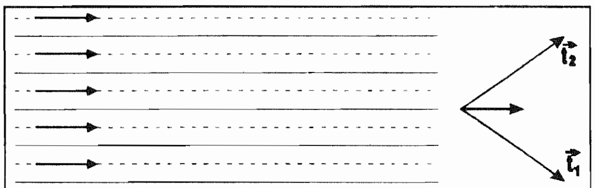
p4



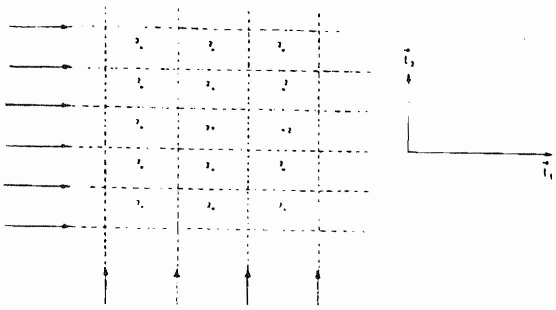
p6



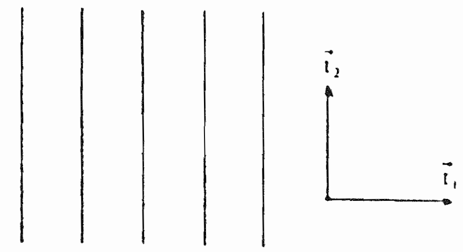
pg



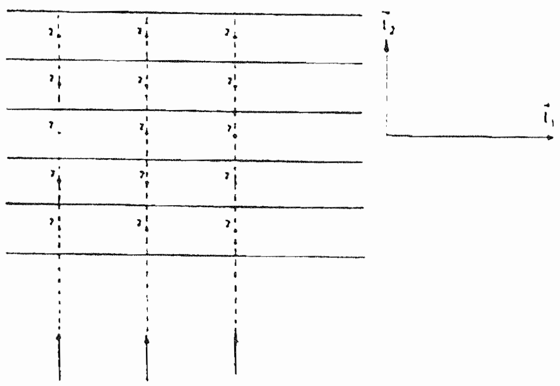
cm



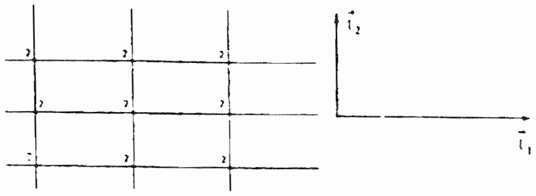
pgg



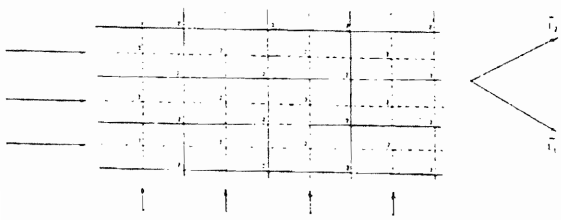
pm



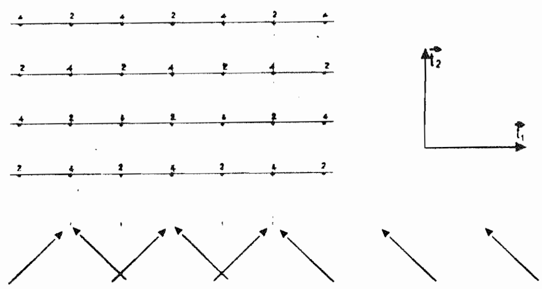
pmg



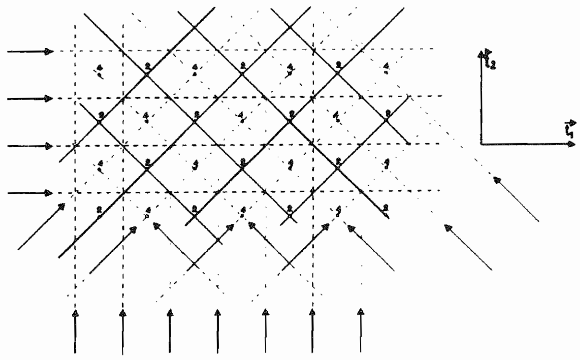
pmm



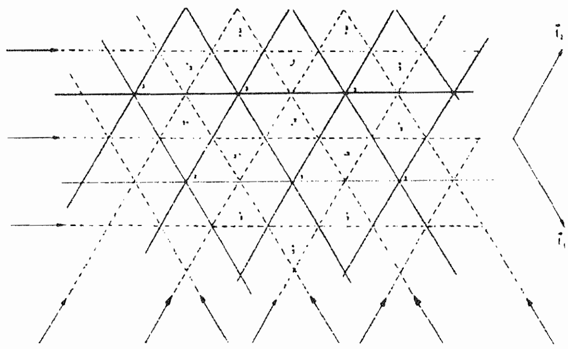
cmm



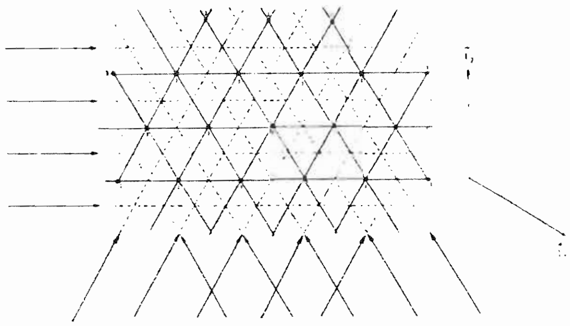
p4m



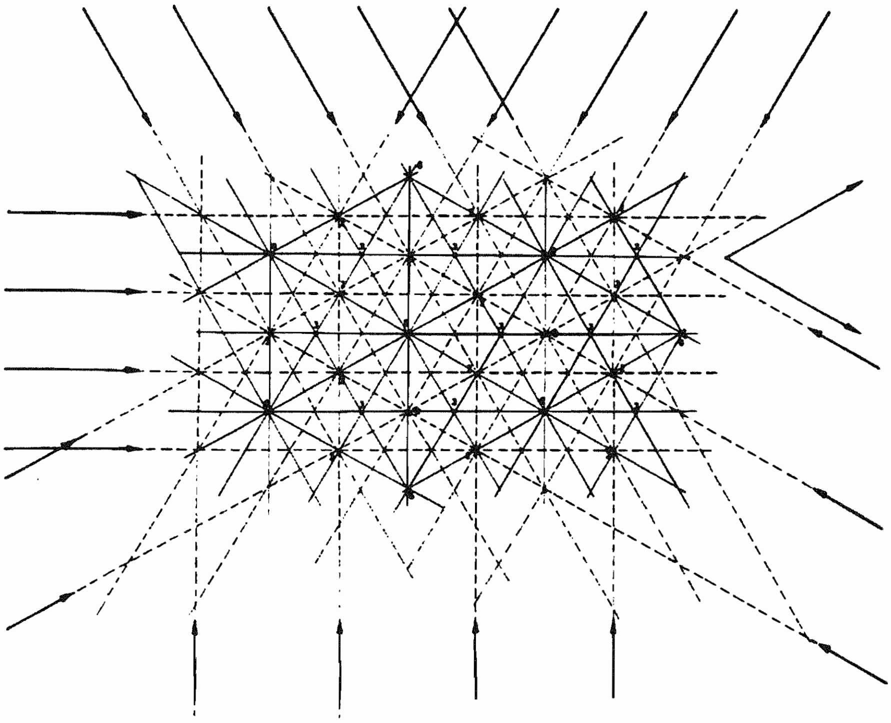
p4g



p3m1

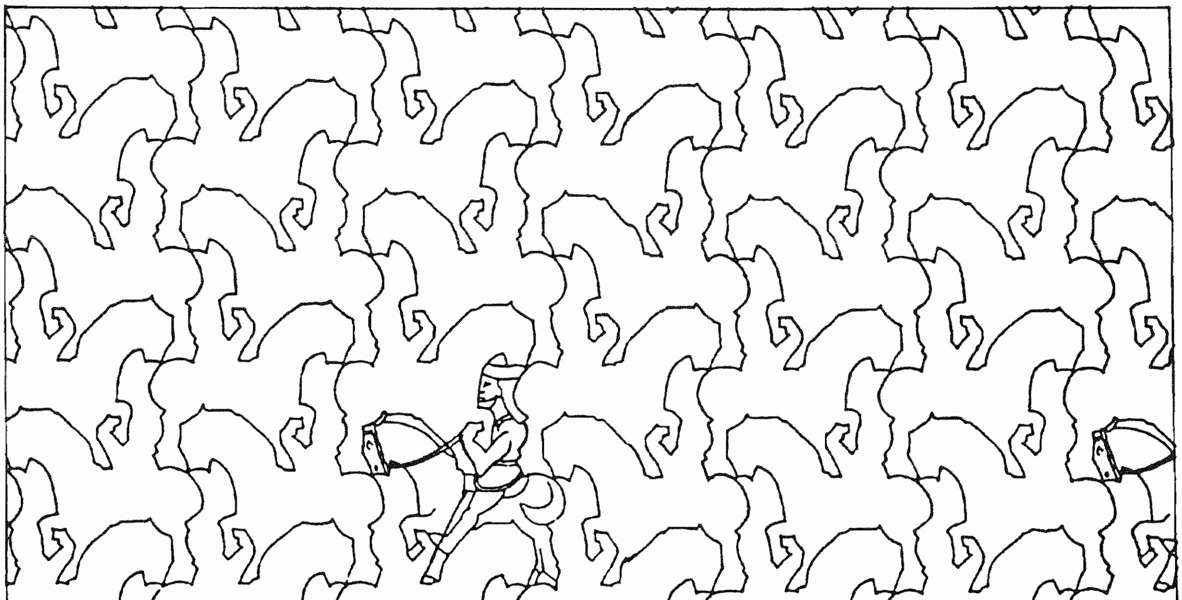


p31m



p6m

Les cavaliers d'Escher (extrait de suivi scientifique 4ème - J.P. DUPLAY)



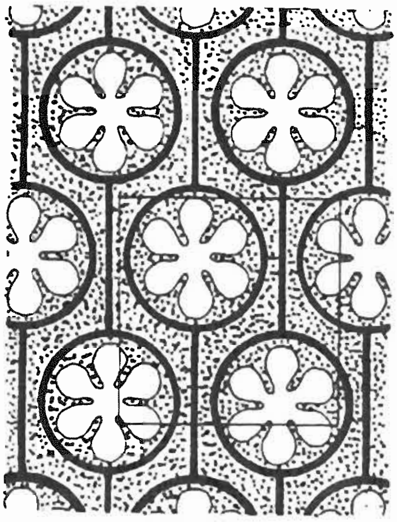
ANNEXE 3 Papier peint

(extrait de Aides pédagogiques pour le cours élémentaire - Élem-Math V - publication de l'APMEP)

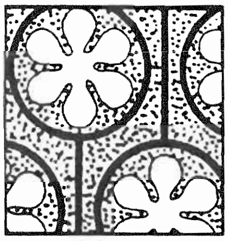
Matériel :

- Un échantillon de papier peint (voir figure) et la photocopie d'une pièce tapissée (extraits d'un catalogue de papiers peints périmé fourni par un commerçant).

- Du papier blanc et du papier quadrillé au centimètre, à la disposition des enfants.



pan de mur tapissé

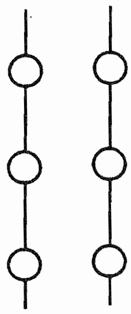


échantillon montré aux enfants (dimension : 50cm environ).

Activités (dans un CE1)

Le maître affiche l'échantillon et demande aux enfants d'imaginer comment le papier se continue tout autour de l'échantillon. Il répond aux questions des élèves sur les morceaux de ronds et de traits que l'on voit aux bords de l'échantillon.

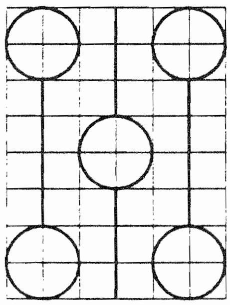
Les enfants doivent alors faire un dessin ; ils choisissent d'utiliser du papier blanc. Leurs productions, très schématiques, sont (voir figure) caractérisées par le non respect des proportions et l'absence de décalage d'une colonne à la suivante. (Seuls quelques enfants ont décalé, mais pas suffisamment).



Le maître leur montre la photo d'une pièce tapissée ; la comparaison avec leurs dessins fait apparaître les deux défauts cités.

Les élèves font alors un deuxième échantillon (toujours sur papier blanc), généralement plus conforme.

On leur demande de rechercher un modèle sur papier quadrillé qui soit facile à décrire et à reproduire.



A partir de leurs propositions un modèle collectif est construit au tableau (voir figure). Les proportions ne sont pas encore réellement respectées car les enfants ont voulu faire tenir les ronds dans les carrés du quadrillage.

Ensuite chaque élève utilise ce modèle pour décorer une feuille quadrillée. Plusieurs procédés sont essayés :

- collage de gommettes ; peu pratique car il est difficile de centrer la gommette du premier coup.
- rond tracé au compas ; peu commode car le rayon est petit (1 cm).
- utilisation d'un gabarit (pièce de monnaie) ; il est facile de bien centrer la pièce avant d'en dessiner le pourtour.

Avant de mettre en couleur, chaque enfant vérifie que son dessin peut se raccorder à celui d'un camarade.

Les dessins terminés sont affichés de manière à tapisser un pan de mur. On constate encore quelques irrégularités de disposition qui empêchent que le raccordement soit parfait.

ANNEXE 4 Pavages

(extrait de Aides pédagogiques pour le cycle moyen - Elem-Math VII - publié par l'APMEP)

Paver le plan (ou une partie du plan), l'espace (ou une partie de l'espace) c'est en faire un recouvrement, ou le remplir, à partir d'une "forme"' de base, sans trou, ni chevauchement.

1. OBJECTIFS

1.1. Etude de formes

La connaissance de ce que l'on appelle "objets géométriques" passe par un "savoir-faire" avec ces objets. Toute activité de pavage implique une analyse des formes utilisées. Dans le plan, l'enfant est conduit à comparer des longueurs, des angles. Dans l'espace, en essayant d'assembler des solides, il est amené en particulier à en étudier les faces.

Il peut essayer de paver une portion de plan à l'aide d'un triangle équilatéral, ou d'un triangle isocèle, ou d'un triangle quelconque... Ces trois types de triangles ne se comportent pas de la même façon : les pavages obtenus sont différents. Une telle activité amène l'enfant à une connaissance de ces triangles au-delà d'une simple mémorisation de termes.

1.2. Approche de certaines transformations géométriques

Pour placer une pièce, l'enfant tâtonne : il glisse la pièce, la fait tourner, la retourne. Il acquiert de ce fait une expérience riche en ce qui concerne les déplacements. Cette expérience pourra servir de base à l'étude de certaines transformations : translation, rotation, symétrie.

1.3. Préparation du travail sur la mesure des surfaces ou des volumes

Pour mesurer une surface ou un volume, on réalise un pavé, avec la forme choisie comme unité.

CHRONIQUE D'ACTIVITÉS EN CLASSE

3.1. Etude systématique des pavages réalisés avec une forme donnée en vue de dégager les transformations faisant passer le module d'une position à une autre.

Chaque enfant a un module unique, la même forme pour toute la classe, par exemple un parallélogramme (mieux vaut commencer par un parallélogramme sans angle droit et dont les côtés sont de longueurs différentes, c'est-à-dire un parallélogramme qui n'est ni un rectangle ni un losange).

Déroulement

On demande aux enfants de dessiner un pavage à partir du parallélogramme donné, d'observer les déplacements qu'ils imposent au module pour le faire passer d'une position à une autre.

Les pavages réalisés décrivent généralement les types suivants : figures 28, 29, 30 et 31. Les pavages 28 et 31 utilisent uniquement des glissements dans le plan, sans retournement : c'est toujours la même face du module qu'on voit, et les côtés du parallélogramme conservent toujours la même direction. Le premier pavage montre des bandes suivant deux directions, celles des côtés du parallélogramme. Le module engendre chaque bande en glissant suivant la direction d'un côté. Le quatrième pavage ne montre qu'une seule direction de bande.

Contrairement aux précédents, les pavages 29 et 30 utilisent des retournements (symétries par rapport à un côté) : ce n'est pas toujours la même face du module qu'on voit. Le deuxième pavage est engendré par des retournements autour du petit côté et des glissements le long de ce côté. Le troisième pavage est engendré par des retournements autour du grand côté et des glissements le long de ce côté.

Ces différents gestes sont explicités lors d'une synthèse collective.

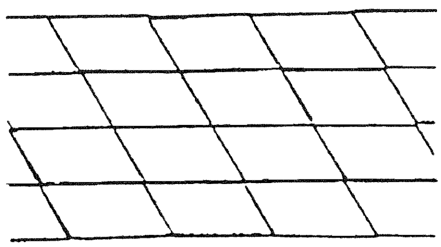


figure 28

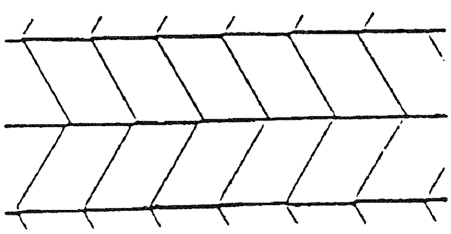


figure 29

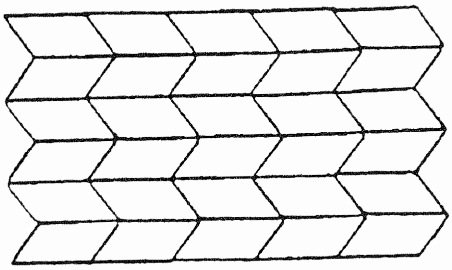


figure 30

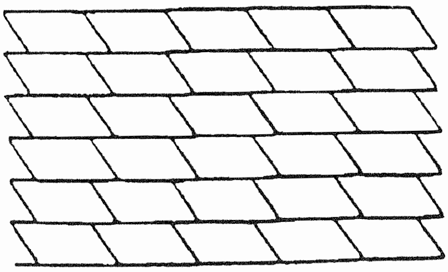


figure 31

3.2. Prolongements

Cas particuliers du parallélogramme

Une fois dégagées les règles de construction des pavages précédents, on demande aux enfants de les utiliser avec un rectangle puis avec un losange.

Ils découvrent alors que certains des pavages précédents sont confondus.

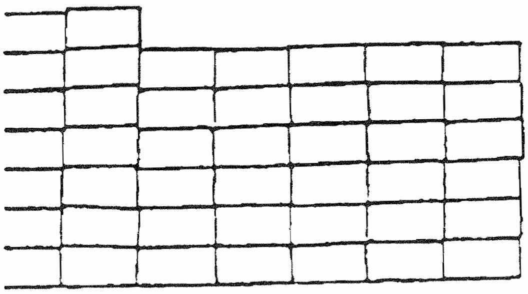


figure 32

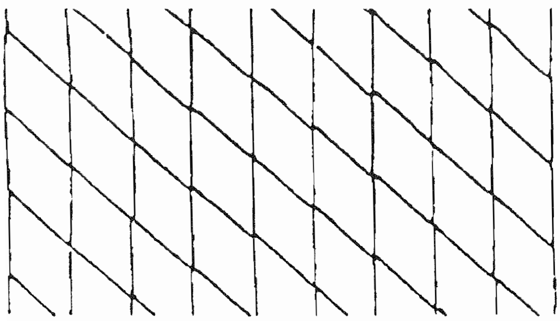


figure 33

3.3. Remarque

Un travail analogue peut être envisagé avec un triangle dont les trois côtés ont des longueurs nettement différentes.

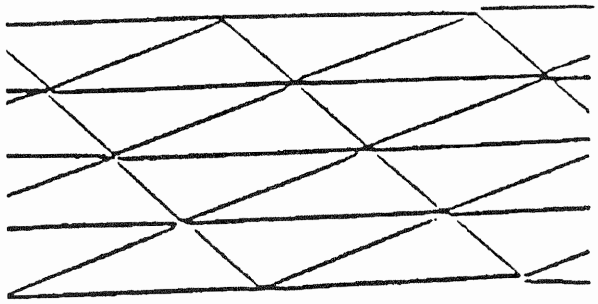


figure 34

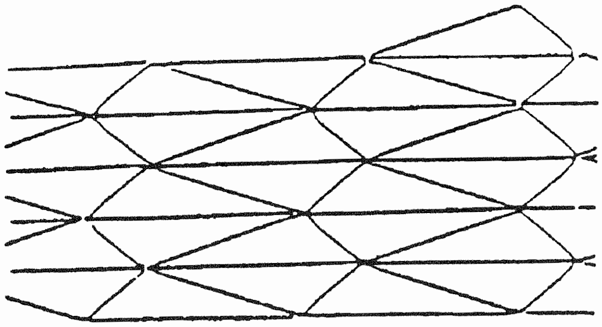


figure 35

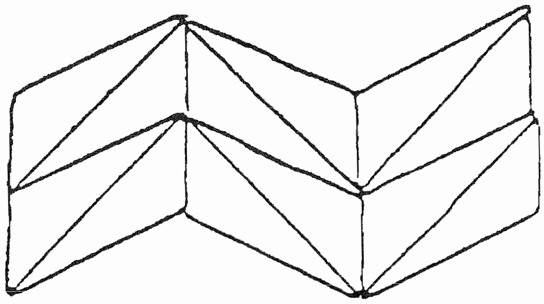


figure 36

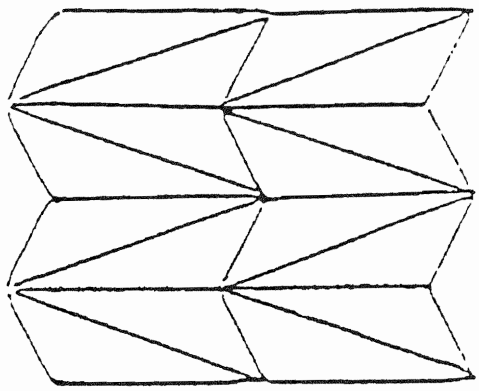


figure 37

Aux transformations rencontrées dans les pavages avec le parallélogramme s'en ajoutent d'autres. Le triangle glissant dans son plan en tournant d'un demi-tour autour du milieu d'un côté permet de former un parallélogramme. Glissant dans son plan autour d'un sommet, il engendre de belles rosaces.

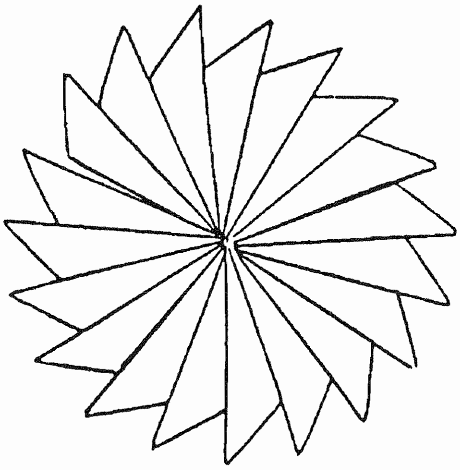


figure 38

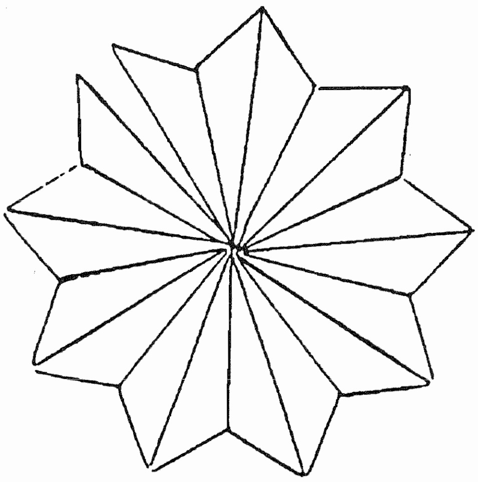


figure 39

3.4. Codage des transformations nécessaires à la construction d'un pavage

En l'absence d'un vocabulaire précis, il est difficile d'approfondir l'étude de ces transformations ; on peut donc se proposer la recherche de codes. Les activités de codage se pratiquent couramment dans les classes. On a ici une situation particulièrement favorable. Pour décrire les pavages qu'ils ont créés les enfants sont amenés à coder les transformations utilisées.

Déroulement

Afin de favoriser la communication, il est nécessaire de choisir pour le module une forme donnant naissance à de nombreux pavages différents, par exemple, un demi-triangle équilatéral.

Le maître demande à chaque enfant de dessiner un pavage, puis demande au groupe de choisir un des pavages réalisés, d'étudier, de classer les déplacements du module entre deux positions successives, et enfin d'imaginer un code permettant de transmettre par écrit la "recette" pour construire ce pavage.

Les groupes échangent leurs messages et chacun essaie de construire le pavage correspondant au message reçu ; ils y réussissent parfois, souvent ils échouent. Les discussions s'instaurent entre les groupes quant à l'intelligibilité du message : légende incomplète, code ambigu...

Au cours d'une synthèse collective, il sera intéressant de mettre en relief tous les codes valables et d'organiser des exercices de traduction de l'un à l'autre. Il serait évidemment sans intérêt d'imposer aux enfants un code.

Voici des exemples de propositions relevées dans la classe :

Les enfants ont désigné les trois côtes du triangle par trois couleurs : rouge(r), noir(n), vert(v), et ont proposé le code suivant :

r : on retourne autour du côté rouge.
n : on retourne autour du côte noir.
v : on retourne autour du côte vert.

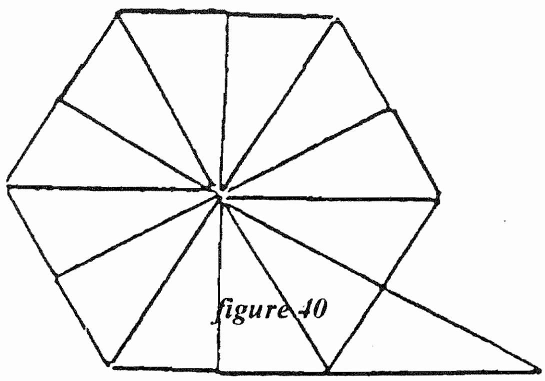


figure 40

4. UNE AUTRE TECHNIQUE : UTILISATION D'UN RÉSEAU

Si on dispose déjà d'un pavage ou d'un réseau de points comme par exemple ceux présentés ci-dessous :

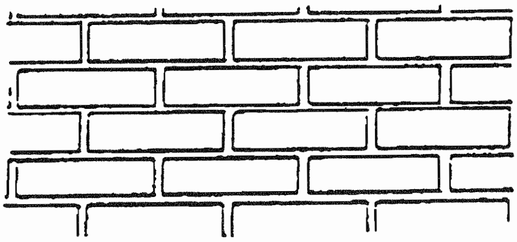


figure 41

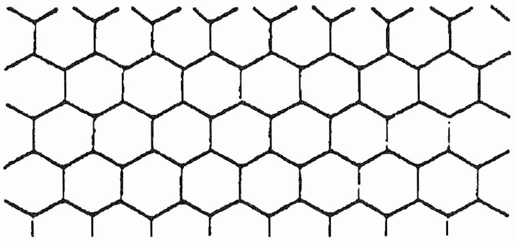


figure 42

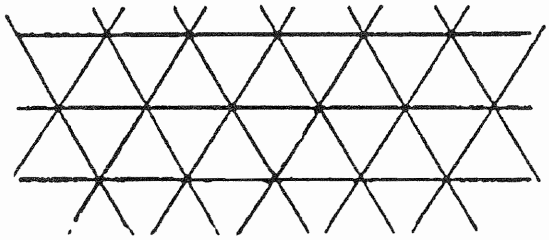


figure 43

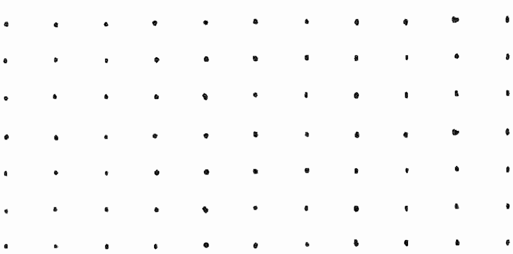


figure 44

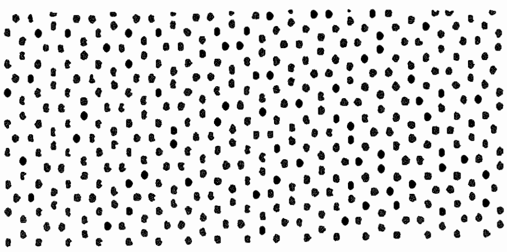


figure 45

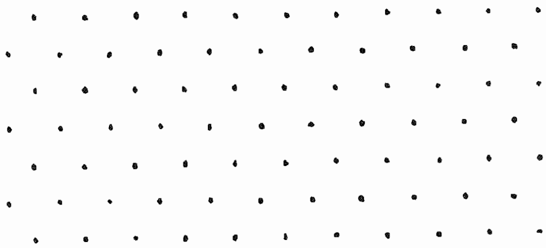


figure 46

on peut joindre certains points ou colorier pour faire apparaître différents pavages.

Ainsi, utiliser le réseau de la figure 46 pour fabriquer

- un pavage constitué d'hexagones non réguliers
- un pavage constitué d'octogones non convexes
- un pavage constitué de pentagones
- un pavage constitué de trapèzes isocèles.

5. EN VRAC, À PROPOS DE PAVAGES

- Paver avec divers types de triangles (équilatéraux, rectangles, isocèles, quelconques) : ces divers triangles ne fonctionnent pas de la même manière. Chacun va prendre sa spécificité par son propre fonctionnement, et par différences avec les autres fonctionnements.
- Dans de tels pavages seront visibles des propriétés concernant la somme des angles d'un triangle, les parallèles coupées par une sécante...
- Les pavés réguliers ne fonctionnent pas de la même manière que les autres pavés. Leur régularité prend une signification dans le pavage. Des propriétés particulières les concernant vont apparaître.
- On pourra, à l'occasion d'activités de pavage, découvrir la génération de certains ..... à partir d'autres.

Titre : PAVAGES, ISOMÉTRIES ET TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES

Auteur : Denis BUTLEN, IUFM de Créteil

Les fiches sont souvent inspirées par des activités proposées par Jeanne Bolon, Marie-Pierre Collonges, Françoise Tréhard et Rirette Guillemard

Date : mars 92

Type : présentation d'une suite d'activités réalisées dans le cadre d'une formation initiale et continue

Résumé : Exploitation de diverses activités de construction ou de communication dans le but de dégager les notions d'isométries et plus généralement de transformations géométriques.

Mots-clés : pavage, isométrie, transformation géométrique, symétrie, rotation, translation, axe et centre de symétrie, invariant d'une transformation, situation de communication, variable didactique.

PAVAGES, ISOMÉTRIES ET TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES

Objectifs mathématiques

Réactiver à partir de rédaction de message de construction, de reconnaissance ou de construction de pavages, des connaissances portant sur les isométries et sur leurs invariants.

Classer diverses transformations géométriques à partir de leurs invariants.

Revoir et approfondir certaines techniques de construction.

Approfondir certaines connaissances sur les compositions d'isométries.

Objectifs didactiques

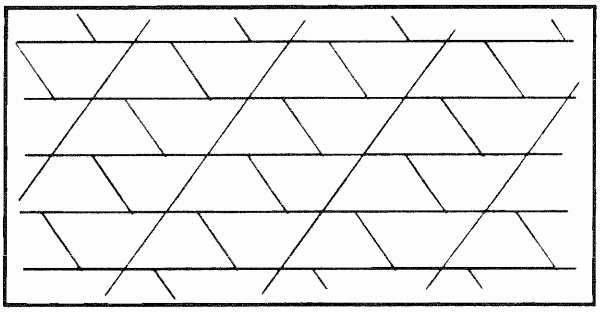
Réfléchir sur la mise en place, la gestion et les limites d'une situation de communication.

Revenir sur la notion de variables didactiques

I - Une situation de communication sur les pavages

1) Consigne et matériel

Le travail se fait par groupe, chaque groupe dispose d'un pavage (comme ci-dessous), il doit continuer ce pavage puis rédiger un message ne comportant au plus que 50 mots, sans dessin, permettant à un groupe récepteur de reproduire et retrouver le pavage correspondant dans la série proposée (voir pages suivantes). Chaque groupe joue le rôle de récepteur et d'émetteur.



2) Variables de la situation

On peut choisir des pavages présentant un motif de base figuratif (écureuil, oiseau...) ou non, dans ce dernier cas il peut représenter une figure géométrique usuelle (triangle, trapèze...) ou une forme géométrique plus complexe.

Nous avons choisi de proposer dans un premier temps des pavages utilisant des figures géométriques usuelles afin d'une part de revoir à cette occasion certaines propriétés caractéristiques de celles-ci et d'autre part d'éviter des descriptions du motif permettant une reconnaissance immédiate du pavage en question sans étude approfondie de la structure de celui-ci.

Il est nécessaire de prévoir différents types de pavages utilisant le même motif de base afin d'invalider certains termes de vocabulaire imprécis ou certaines confusions dans la définition des transformations géométriques sous-jacentes.

Le choix du support (papier blanc ici) peut s'avérer déterminant.

3) Comparaison des messages et productions

Les messages peuvent se répartir dans deux grandes catégories : ceux traduisant des actions pouvant se modéliser par des transformations géométriques et ceux décrivant la construction d'un réseau de droites, en particulier de parallèles, cette dernière construction ne faisant pas intervenir de transformations mais faisant appel à des constructions géométriques "élémentaires" (construction de perpendiculaires, de parallèles, report d'angles, de mesure de longueurs, repérages dans le plan...).

Une première analyse des messages vise à les classer en fonction de ce critère.

On constate que les messages contiennent beaucoup d'implicites (notamment à propos des termes décrivant les mesures, les directions de droites...) et qu'ils traduisent avec un vocabulaire imprécis des actions pouvant se modéliser par des transformations géométriques. Les termes employés par les étudiants sont très souvent les mêmes que ceux employés par des élèves de CM2 ; par exemple : glisser, tourner, retourner...

Les étudiants n'emploient pas ou très peu de codage (avec des lettres) pour désigner des points ou des droites mais rédigent des périphrases parfois très complexes pour décrire ces éléments.

On assiste à une confusion entre symétrie, symétrie centrale et rotation provenant souvent de l'emploi d'un vocabulaire trop imprécis lié à la description de l'action, tourner par exemple.

Quand ils décrivent une rotation, ils ne précisent que rarement le centre de celle-ci. Quand il s'agit de décrire une translation, ils ne donnent que certains éléments nécessaires pour définir le vecteur (module ou sens ou direction, rarement les trois à la fois).

L'utilisation de codages de type mathématique est très souvent très maladroite.

4) Validation des productions, institutionnalisation mathématique

La validation ou l'invalidation de certains messages sont limités par les limites de toute situation de communication : en particulier le récepteur interprète souvent "correctement" les implicites contenus dans le texte de l'émetteur et ceci dans un souci légitime d'économie. Toutefois compte tenu de ces restrictions l'échange de messages, l'explicitation de certaines incompréhensions permet une auto-validation des étudiants et un affinement des codages employés.

Dans un dernier temps une analyse collective des termes employés et des ambiguïtés détectées ou non d'ailleurs dans la phase de validation permet une institutionnalisation de certaines notions, en particulier l'énoncé de définitions portant sur les rotations, les translations, les vecteurs et les symétries orthogonales.

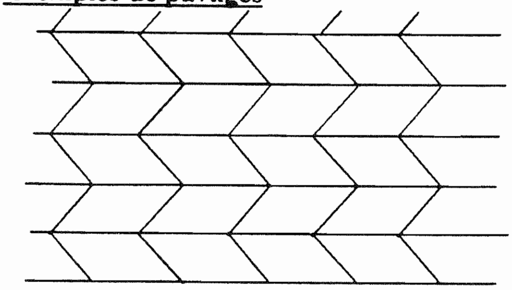
Le formateur est amené à ce stade à rappeler certaines constructions géométriques élémentaires (report d'angle, tracé d'une perpendiculaire, de parallèles, de parallélogrammes...) afin de repréciser la construction de l'image par ces transformations de figures simples.

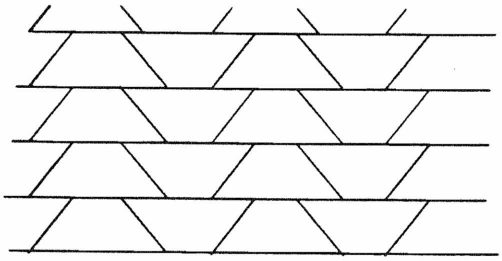
5) Analyse didactique

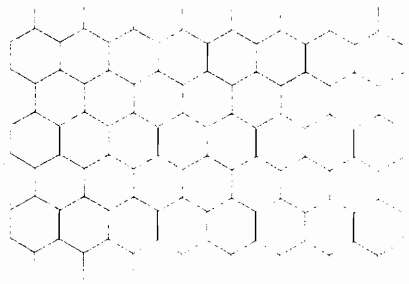
Elle porte sur l'analyse a posteriori des interventions du formateur, des écarts entre productions envisagées et produites, des cheminements suivis par les groupes. C'est une stratégie habituelle : pour amener les étudiants à réfléchir au déroulement qu'ils viennent de vivre, le formateur les amène à analyser leurs productions mais aussi sa propre action (interventions, écarts entre prévisions et productions effectives, régularités observées au cours des années...).

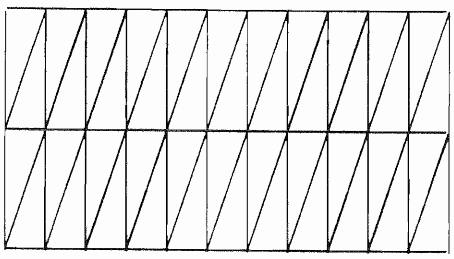
Une analyse détaillée de l'intérêt et des limites des situations de communication est ensuite faite à partir de ce vécu, les variables de la situation sont précisées.

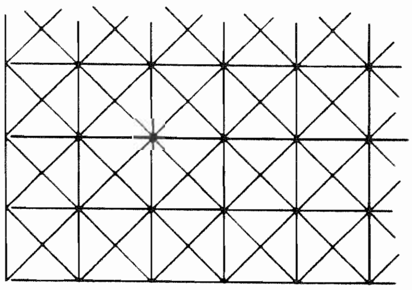
Exemples de pavages

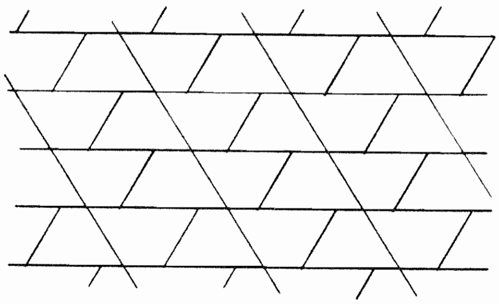


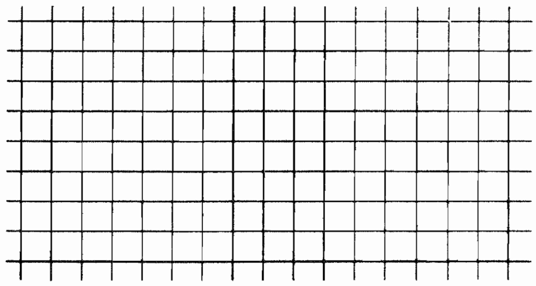


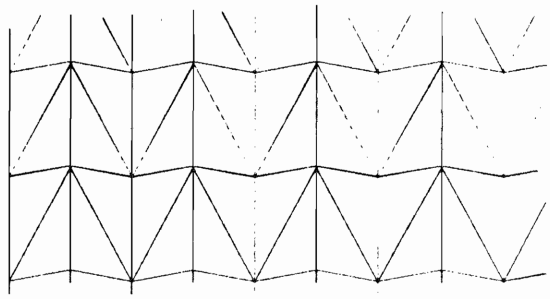


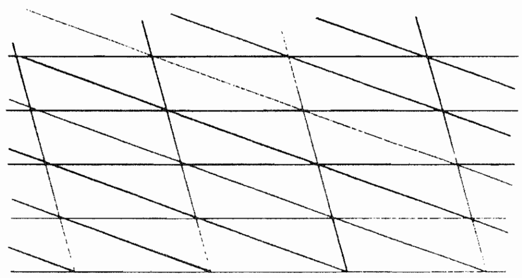


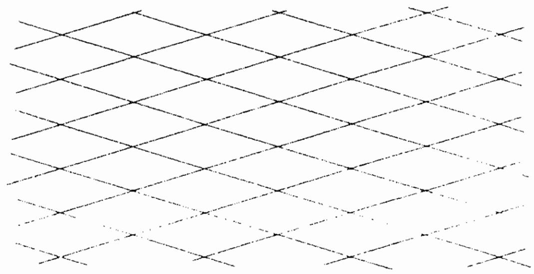


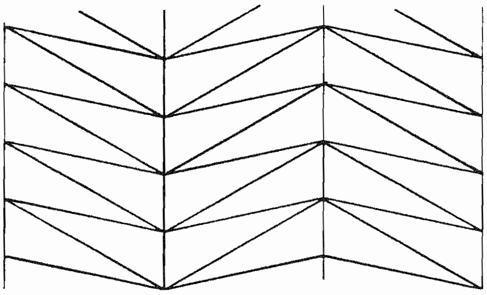


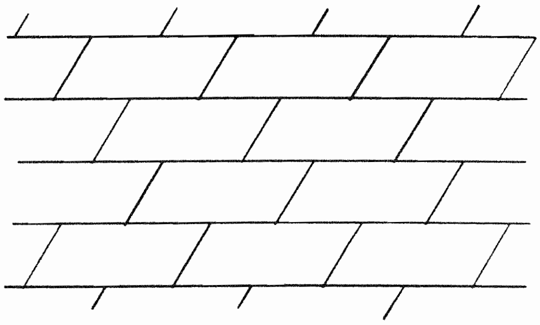


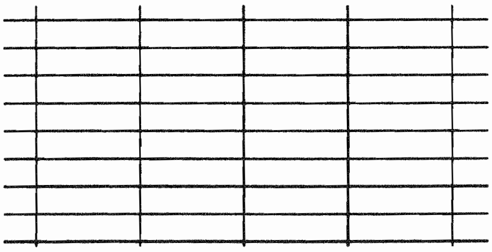


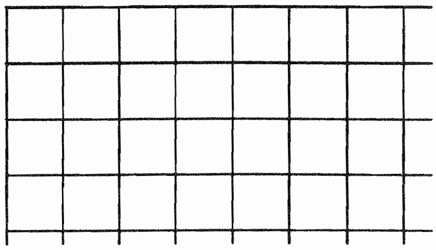


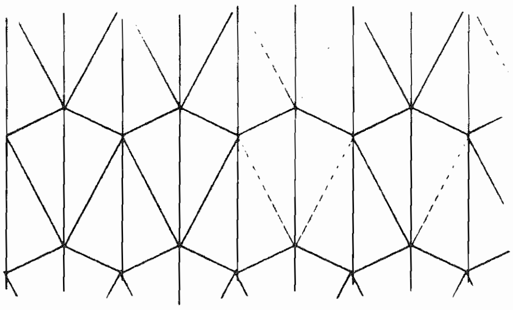


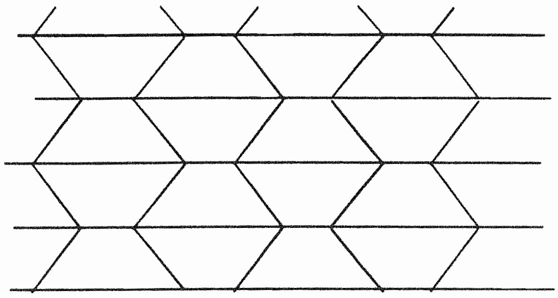


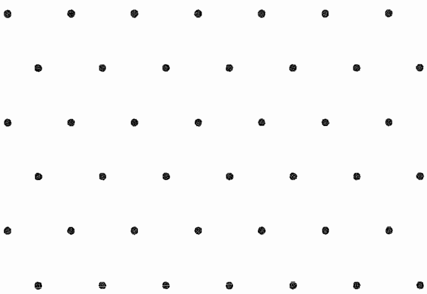


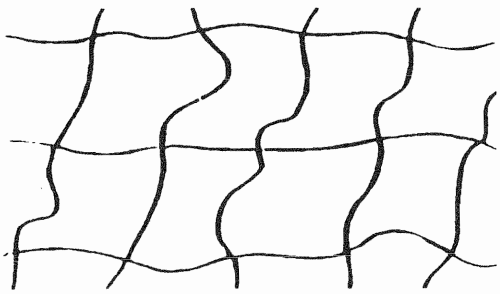


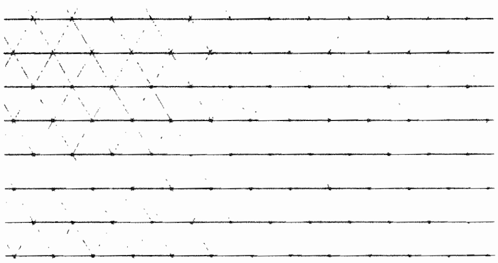


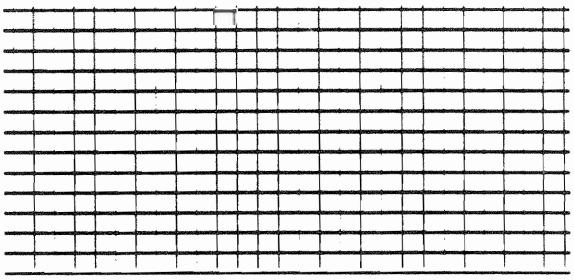


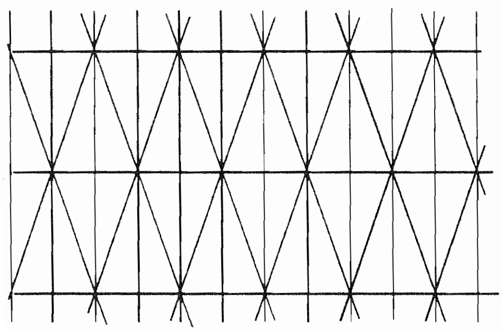


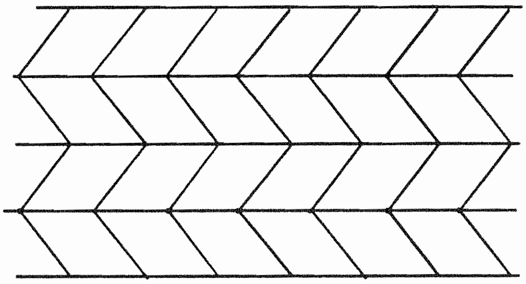












II - Classification de transformations géométriques simples

1) Objectifs

Classer certaines transformations géométriques à partir de leurs éléments invariants.

Montrer qu'il existe d'autres transformations que les symétries orthogonales.

2) Matériel et forme de travail

Par groupe de deux, les étudiants disposent de l'une des fiches ci-dessous et doivent déterminer les caractéristiques de la transformation étudiée.

Il faut prévoir les fiches suivantes :

Fiche n°1 : étude d'une conchoïde (droite et cercle)
Fiche n°2 : étude de transformations -isométries et affinités- (support quadrillé)
Fiche n°3-1 et 3-2 : similitudes et homothéties (support réseau pointé à maille carrées)
Fiche n°4 : étude d'une inversion
Fiche n°5 : étude de symétrie orthogonale (support réseau pointé à maille triangulaire, axe oblique)
Fiche n°6 : étude d'une rotation (support réseau pointé à maille triangulaire)
Fiche n°7 : étude d'une similitude (support réseau pointé à maille triangulaire)

Ces fiches ont été rédigées par Rirette Guillemard et sont extraites du numéro 50 de la revue Grand N, IREM de Grenoble.

3) Quelques remarques sur les productions des étudiants

Les fiches proposant un travail sur des réseaux à maille non carrée sont celles qui posent le plus de difficultés aux étudiants qui essaient alors de traiter l'activité comme avec un réseau à maille carrée.

Les symétries orthogonales avec axe oblique sont sources d'erreurs, erreurs provenant d'une part de l'orientation de l'axe d'autre part de la maille du réseau.

Les autres fiches sont plus facilement réussies.

Les productions des étudiants (parfois retranscrites sur des affiches murales) sont suffisamment riches pour permettre l'institutionnalisation ci-dessous.

4) Institutionnalisation

La mise en commun des observations des étudiants permet de trier certaines transformations géométriques, le tri est effectué en prenant en compte les invariants de ces transformations. Ce tri est élaboré dans une maïeutique entre les étudiants qui relatent leurs observations et le formateur qui résume, organise le débat et apporte des informations complémentaires. Ainsi :

•un premier tri est effectué en fonction de la conservation ou non de l'alignement.

Les conchoïdes et les inversions ne conservent pas l'alignement (ces dernières conservent toutefois globalement l'ensemble des droites-cercles)

•un second tri : les transformations bijectives conservant l'alignement sont les transformations affines

On élimine de ce fait les projections du plan.

Deux résultats :
- les transformations affines bijectives conservent le parallélisme
- une transformation affine est définie dès que l'on se donne trois points et leurs images.

•un troisième tri porte ensuite sur la conservation des angles (sans prendre en compte l'orientation

La prise en compte à ce stade de l'orientation amène à différencier les transformations affines "directes" (similitudes ou isométries directes par exemple) et les transformations affines indirectes. **Les affinités** ne conservent pas les angles.

•un quatrième tri porte sur la conservation des distances.

On distingue de ce fait d'une part **les similitudes, les homothéties** et d'autre part **les isométries.**

Parmi les isométries, on distingue alors les isométries directes et les isométries indirectes (retournement ou non du papier calque).

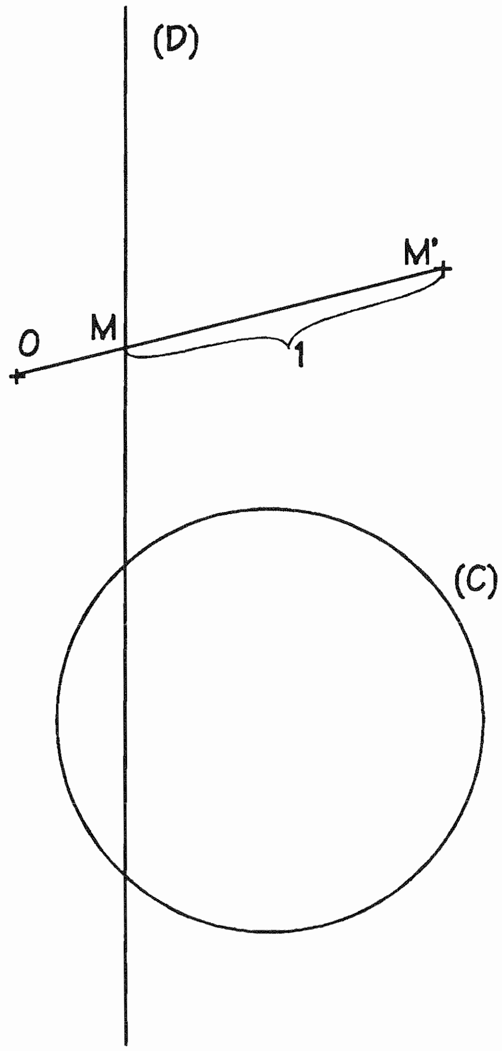
FICHE N°1

Etude d'une conchoïde

Soit O un point du plan, à tout point M on associe le point M' tel que $\overline{OM'} = \overline{OM} + 1$

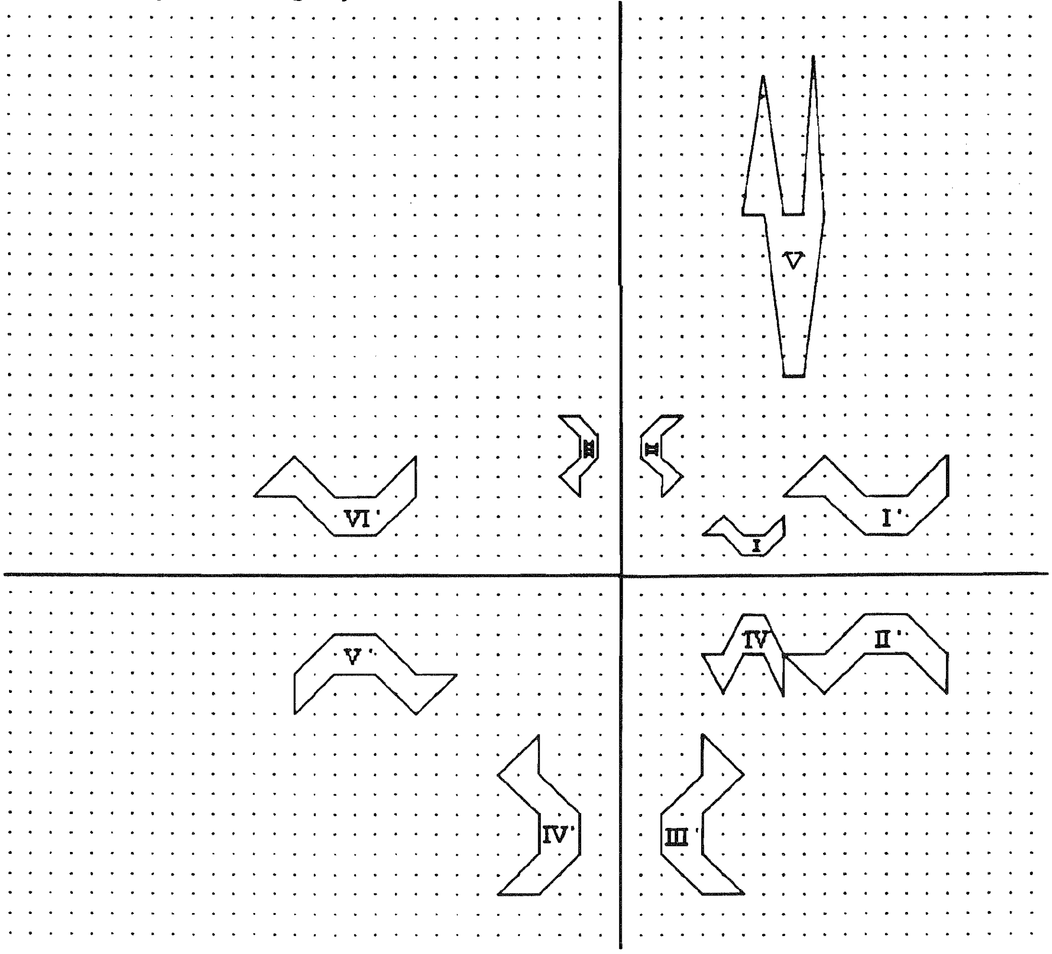
Quelle est l'image de la droite (D) par cette transformation, quelle est l'image du cercle (C) ?
Qu'observez vous (alignement, angle, parallélisme, distance...) ?

Refaire cette activité avec $\overline{OM'} = \overline{OM} - 1$

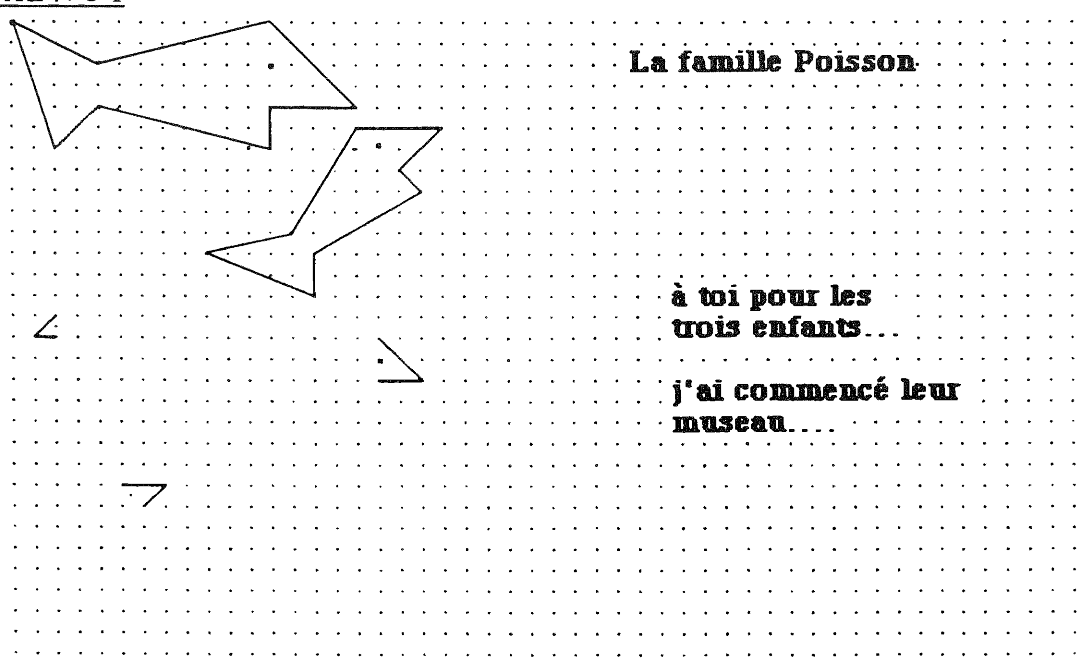


FICHE N°2

Par quelle transformation passe-t-on d'une figure à une autre ?
Qu'observez vous (alignement, angle, parallélisme, distance...) ?

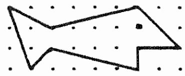


FICHE N°3-1



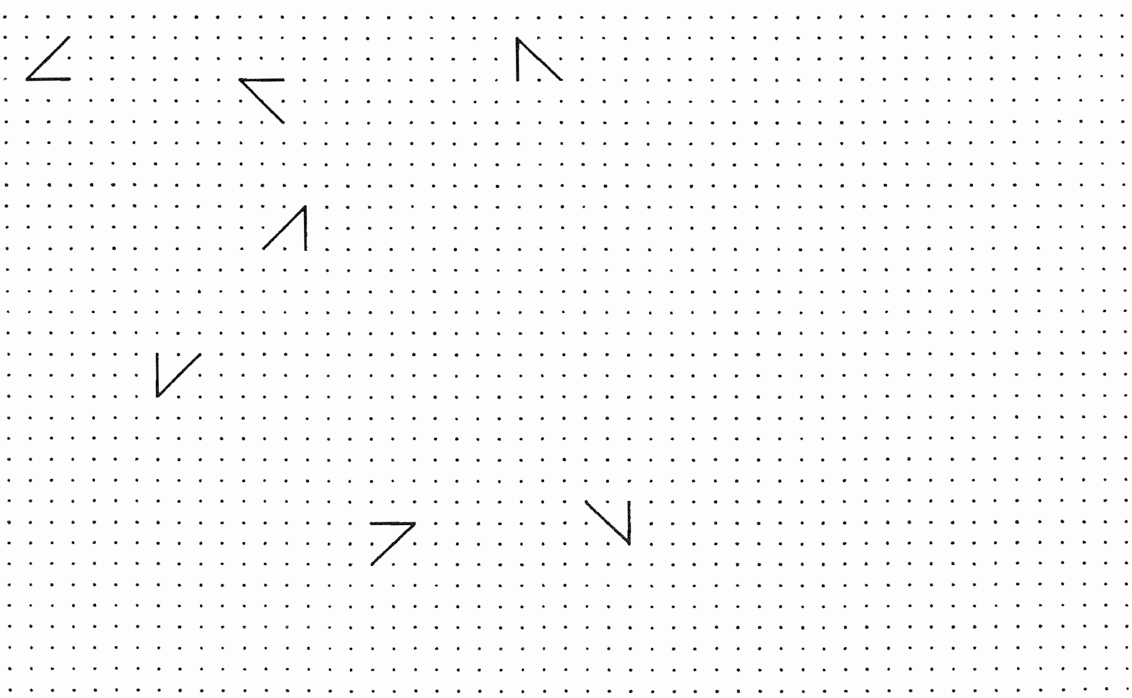
FICHE N°3-2

J'ai dessiné un poisson



Dessine le même
j'ai commencé son museau

Dessine le même ...nageant dans toutes les positions dans son bocal



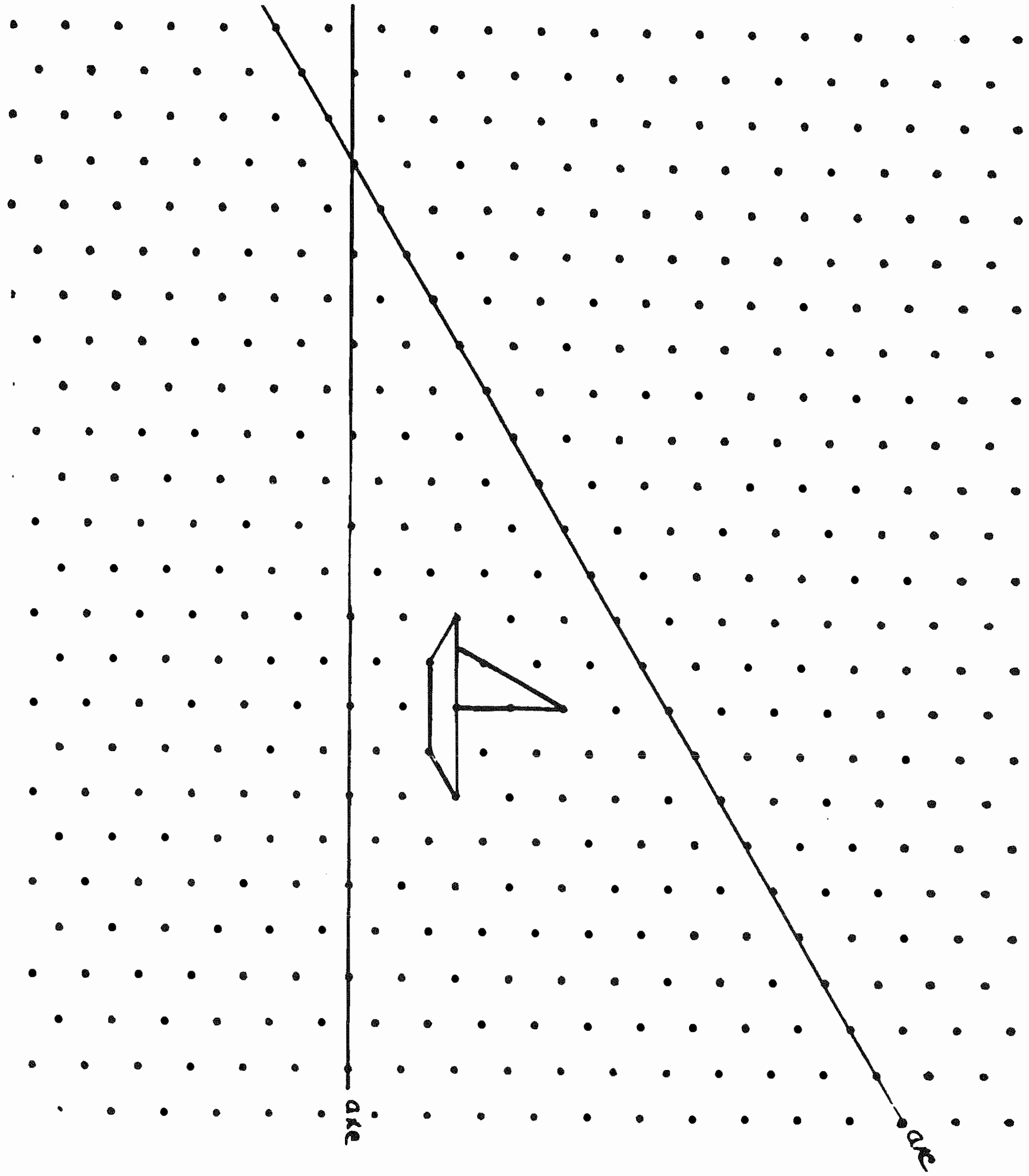
FICHE N°4

Etude d'une inversion : étant donné un nombre $k \neq 0$ et un point O du plan. On appelle inversion de centre O et de rapport k, la transformation ponctuelle qui à tout point M distinct de O, associe le point M' de la droite OM tel que $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$.

Etudiez cette transformation (image d'une droite, d'un cercle...)
Quelles constatations faites-vous ? (alignement, distance, angle, parallélisme...). Prendre par exemple k = 10.

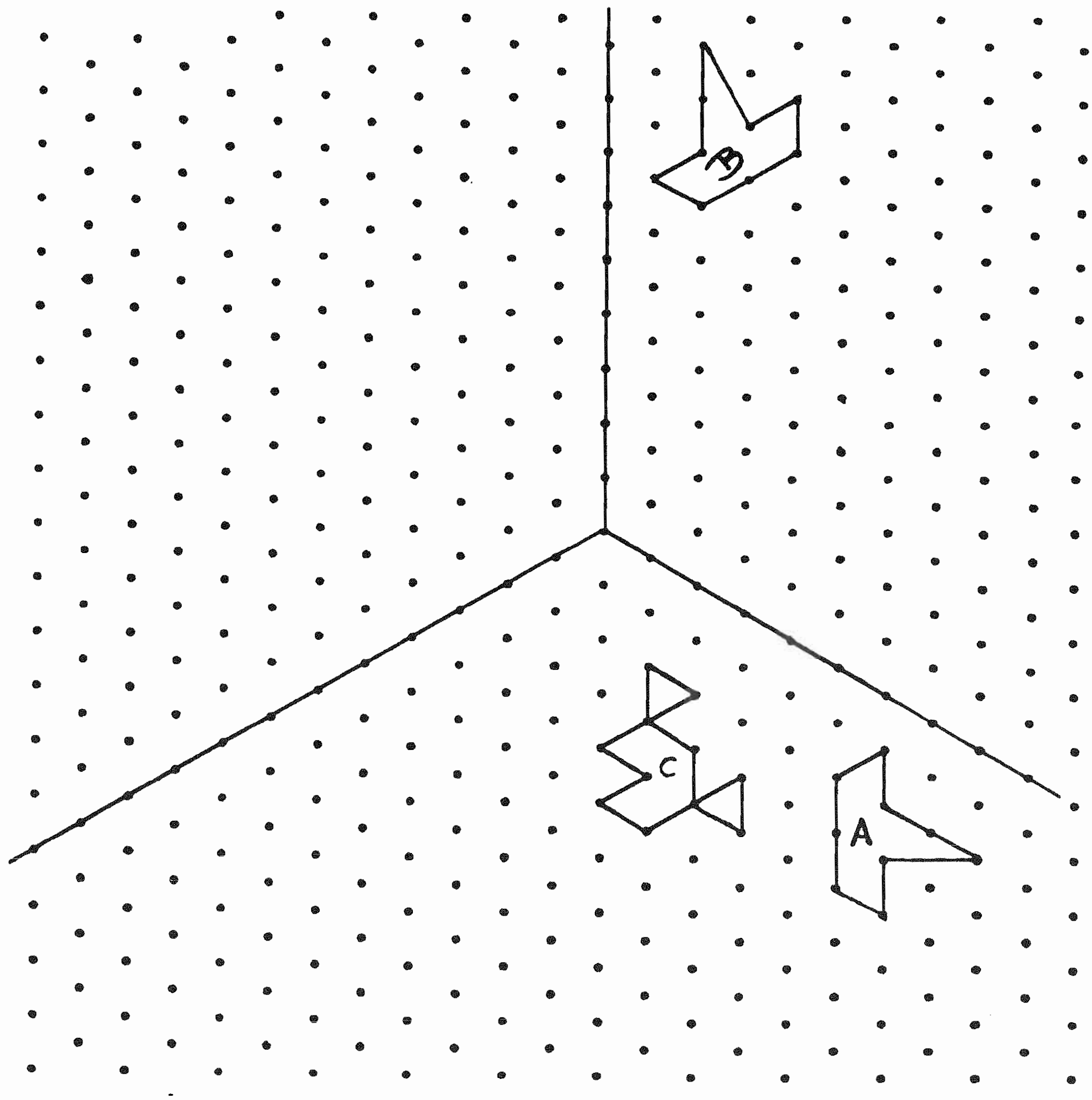
FICHE N°5

Dessinez les images de ce bateau par les symétries axiales



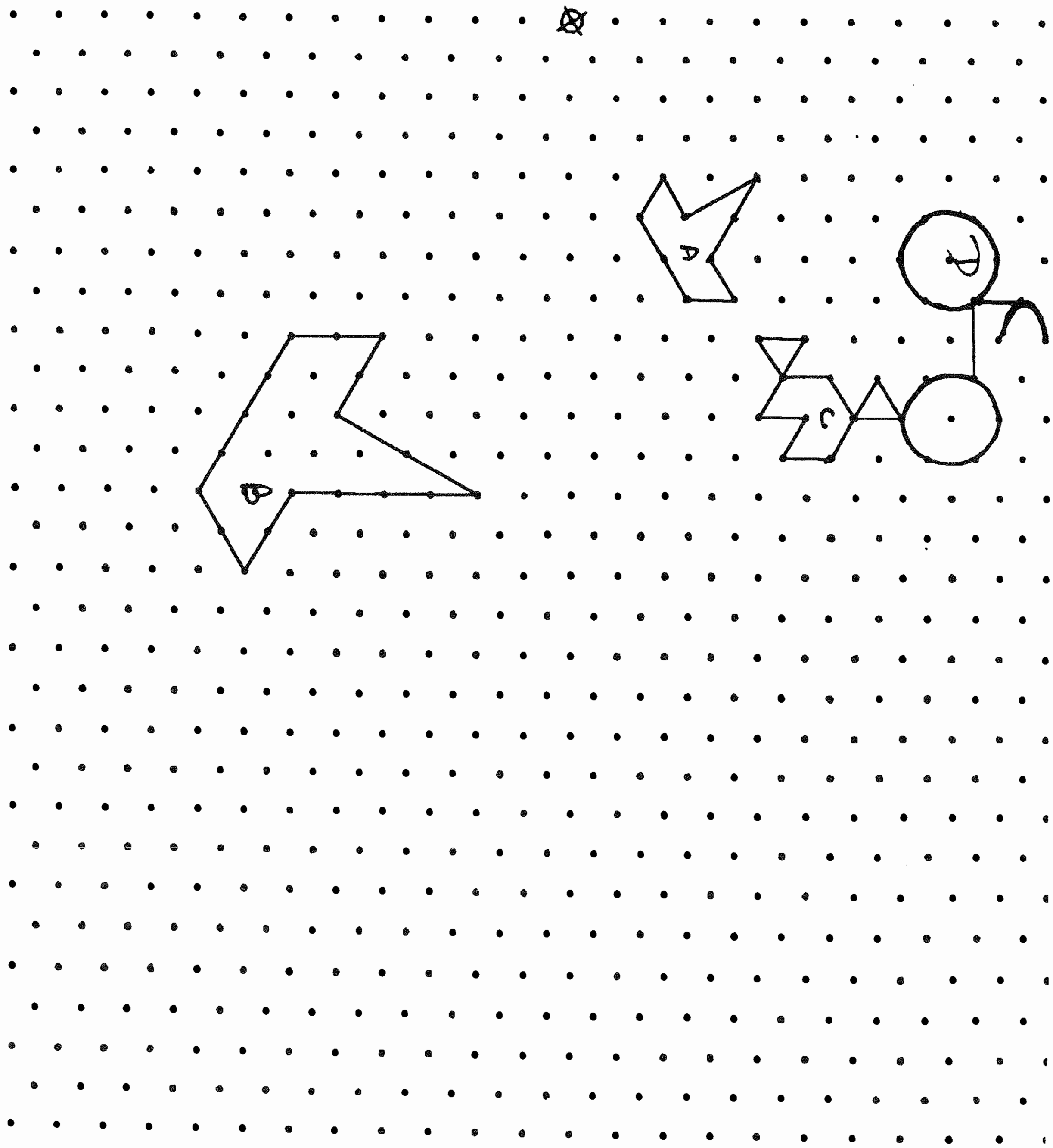
FICHE N°6

La figure A a pour image B, dessinez l'image de B et les images de C.

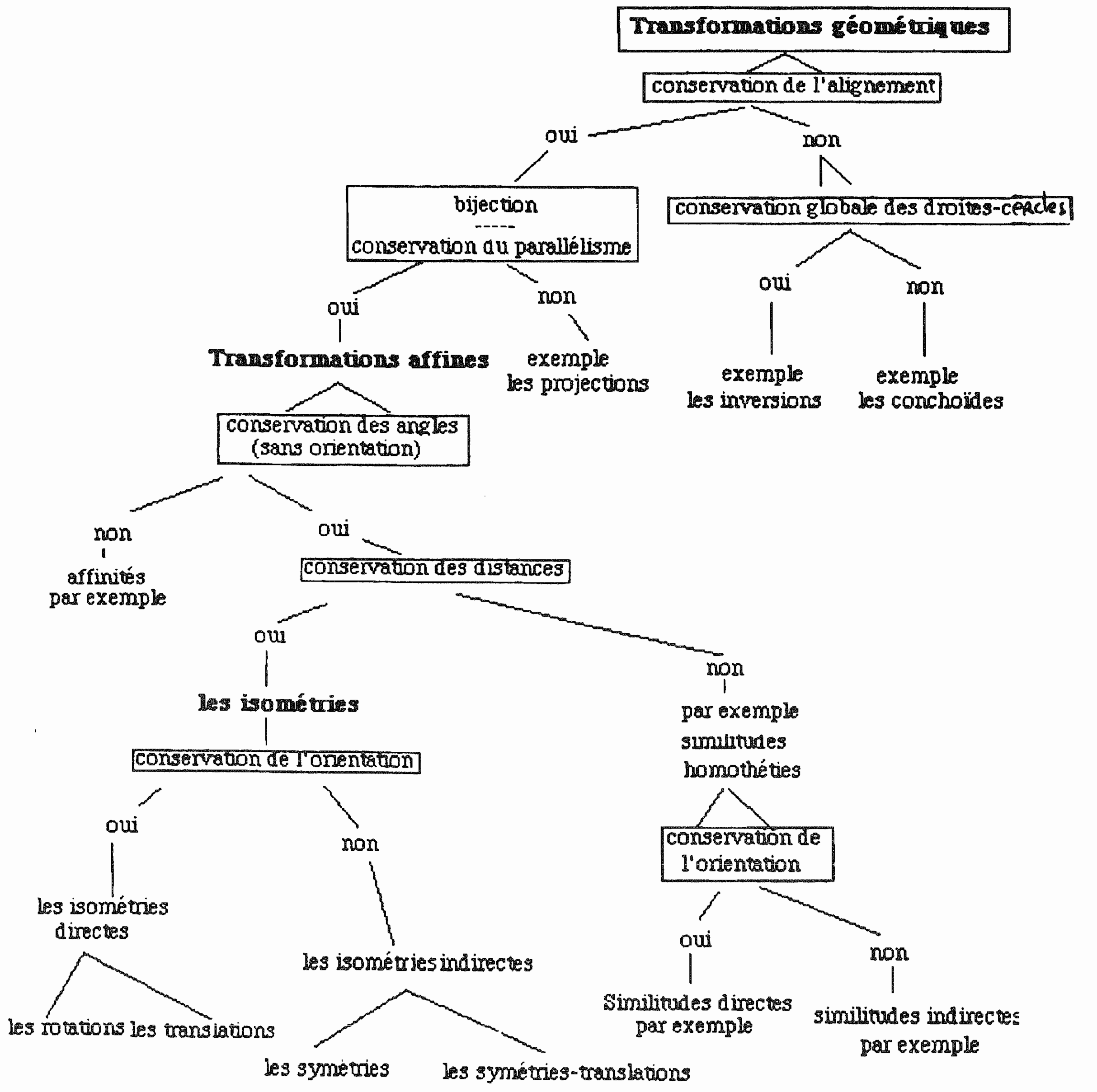


FICHE N°7

La figure A a pour image B, dessinez l'image de C et D.



FICHE N°8 (distribuée aux étudiants)



III) DÉFINITION ANALYTIQUE DES TRANSFORMATIONS AFFINES

Cette partie n'est pas toujours traitée avec tous les étudiants, elle fait souvent partie d'un ensemble d'activités s'intégrant dans une option "géométrie".

Il s'agit de redonner du sens aux définitions analytiques de certaines transformations déjà rencontrées par les étudiants dans leur scolarité.

Le formateur rappelle la définition suivante :

Une bijection du plan qui conserve l'alignement sera appelée application affine, dans un système de coordonnées du plan, elle sera définie par :

$$M(x,y) \rightarrow M'(x',y')$$

avec :

$$x' = a.x + b.y + c$$
$$y' = a'.x + b'.y + f$$

L'affinité, la symétrie centrale sont des transformations affines.

Les étudiants travaillent alors par groupe (ou individuellement) sur la fiche n° 9.

FICHE N°9

I) On peut regarder quelles sont les propriétés des transformations affines définies par leurs coordonnées dans un repère.

$$M(x,y) \rightarrow M'(x',y')$$

Voici quelques transformations :

(1)	$M \rightarrow M'$ $x \rightarrow x' = -x$ $y \rightarrow y' = -y$	(2)	$M \rightarrow M'$ $x \rightarrow x' = y$ $y \rightarrow y' = -x$
(3)	$M \rightarrow M'$ $x \rightarrow x' = 3.x$ $y \rightarrow y' = 3.y$	(4)	$M \rightarrow M'$ $x \rightarrow x' = 3.x$ $y \rightarrow y' = 4.y$
(5)	$M \rightarrow M'$ $x \rightarrow x' = x + y$ $y \rightarrow y' = x - y$	(6)	$M \rightarrow M'$ $x \rightarrow x' = x + 5$ $y \rightarrow y' = y - 7$

Dessinez une figurine dans l'un quelconque des quadrants d'un repère du plan orthonormé.
Choisissez une transformation. Etudiez si elle conserve les distances les angles, les aires.
Quelle est l'image du repère ?

Choisissez une autre transformation, même question.

II) Sur une feuille de papier blanc, dessinez un repère (pas forcément orthonormé) OAB, et un autre O'A'B'.
Trouvez, pour un dessin, les coefficients de la transformation affine qui transforme OAB en O'A'B'.

$x' = a.x + b.y + e$

$y' = a'.x + b'.y + f$

IV) APPROFONDISSEMENT DE CERTAINES CONNAISSANCES SUR LES ISOMÉTRIES

Il s'agit là encore, à partir d'activités de construction, de faire retrouver aux étudiants définitions et propriétés des isométries, puis d'établir un classement de celles-ci, enfin d'étudier la structure de l'ensemble des isométries et les symétries comme générateurs des isométries.

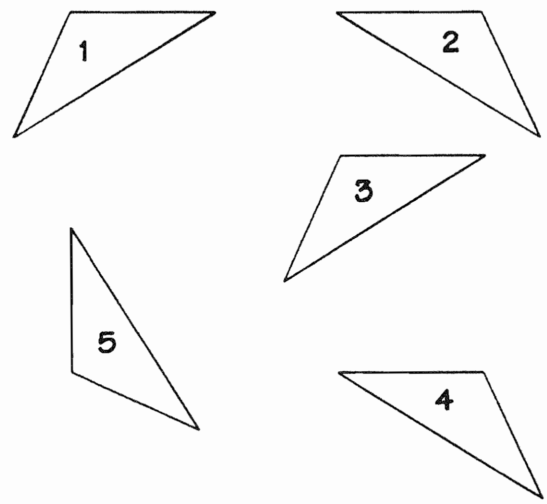
1) Détermination de toutes les isométries planes, éléments caractéristiques

Les étudiants disposent de la fiche n°10 ci-dessous, ils doivent déterminer les transformations du plan qui permettent de passer d'un triangle à un autre, de plus ils doivent en préciser les éléments caractéristiques (centre de rotation et angle, axe de symétrie, vecteur de translation...). Remarquons que l'on peut proposer une variante faisant intervenir des figures présentant un axe de symétrie (fiche n 10 bis), les techniques pour déterminer les isométries et leurs éléments caractéristiques sont alors plus diverses.

<u>Quelques remarques sur les productions des étudiants</u> : ils disposent de tous les instruments qu'ils désirent (règle, compas mais aussi papier calque...), ils arrivent assez vite à trouver approximativement les isométries et leurs éléments caractéristiques, mais l'utilisation d'un vocabulaire mathématique associé et la détermination exacte des éléments caractéristiques restent encore imprécis, en particulier la détermination exacte, à la règle et au compas, du centre d'une rotation connaissant trois points non alignés et leurs images reste difficile ; de plus la mise en évidence de la symétrie-translation est une activité nouvelle. C'est l'occasion pour le formateur de revenir sur certains termes et certaines constructions, déjà vus à l'occasion des pavages.

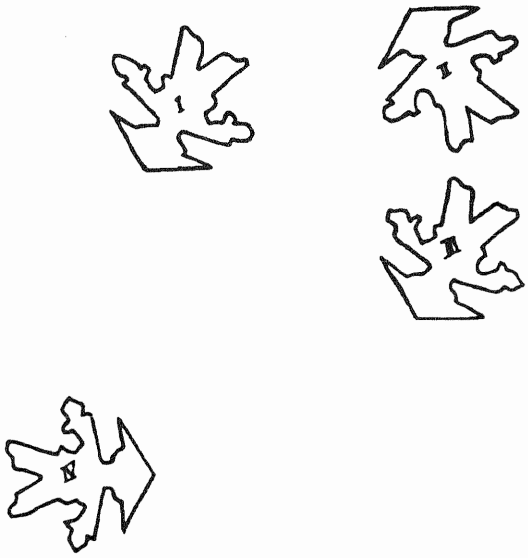
Notons que cette activité peut constituer une première présentation des isométries, on rencontre alors les mêmes difficultés de vocabulaire que celles signalées à propos de l'étude des messages décrivant les pavages.

FICHE N°10



Déterminer les transformations transformant la figure 1 respectivement en 2, 3, 4, 5.

FICHE N°10 bis

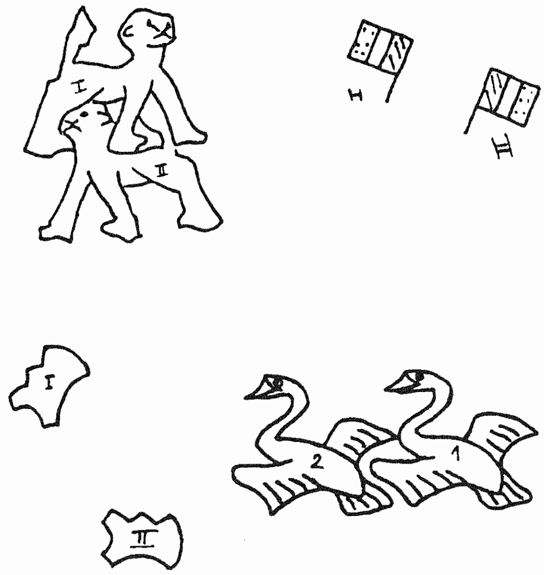


Déterminer les transformations transformant la figure 1 respectivement en 2, 3, 4. Préciser leurs éléments caractéristiques

2) Inverse d'une isométrie

La fiche n°11 permet de retrouver les applications réciproques des différentes isométries. C'est l'occasion pour le formateur de revenir sur cette notion et de préciser comment on caractérise l'inverse d'une isométrie dans chaque cas et enfin de faire remarquer que les seules isométries involutives sont les symétries.

FICHE N°11



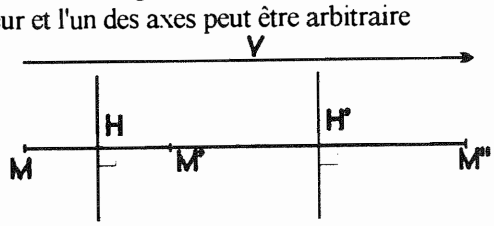
3) Axe et centre de symétrie

Une fiche n°12 comportant des logos publicitaires connus permet de travailler sur ces notions en déterminant dans un premier temps, ceux possédant un centre ou un axe de symétrie. Dans un second temps, les étudiants doivent construire des figures présentant respectivement un seul, deux, trois, quatre ou une infinité d'axes de symétrie.

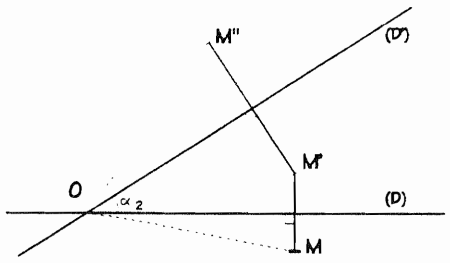
4) Composée d'isométries, générateurs du groupe des isométries

Les fiches 12, 13, 14 et 15 permettent de préciser et de trouver des résultats sur la composition des isométries, en particulier sur le groupe des déplacements du plan (isométries positives) et sur les générateurs du groupe des isométries du plan ; ainsi cette activité est l'occasion pour le formateur dans une phase d'institutionnalisation de rappeler les résultats suivants :

- une translation se décompose en le produit de deux symétries par rapport à des axes parallèles, la direction des axes est perpendiculaire à la direction du vecteur de translation, la distance séparant les deux axes est égale à la moitié du module du vecteur et l'un des axes peut être arbitraire



- une rotation se décompose en le produit de deux symétries d'axes sécants en 0, centre de la rotation et déterminant un angle de droite égal à la moitié de celui de la rotation, le premier axe étant arbitraire



- Les isométries positives (sans retournement du calque) se décomposent en un produit d'un nombre pair de symétries axiales, elles constituent un sous-groupe du groupe des isométries
- les isométries négatives (retournement du calque) correspondent à des produits d'un nombre impair de symétries axiales (1 ou 3)
- toute symétrie-translation se décompose en un produit commutatif d'une translation et d'une symétrie dont le vecteur de translation est parallèle à l'axe de symétrie.

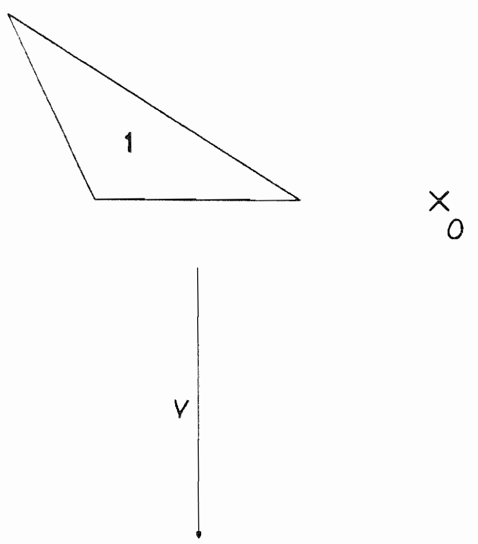
L'ensemble des isométries positives constitue un sous-groupe des isométries du plan (ce peut être l'occasion de rappeler la définition d'un groupe). Ainsi, en décomposant les rotations et les translations en produit de deux symétries, on démontre que :
- le produit de deux translations de vecteurs V et V' est une translation de vecteur V + V'
- le produit de deux rotations de même centre O et d'angles â et â' est une rotation de centre O et d'angle â + â'
- le produit de deux rotations de centres différents est soit une rotation, soit une translation
- le produit d'une rotation et d'une translation est soit une rotation, soit une translation...

FICHE N°13

Avec règle, rapporteur et compas :

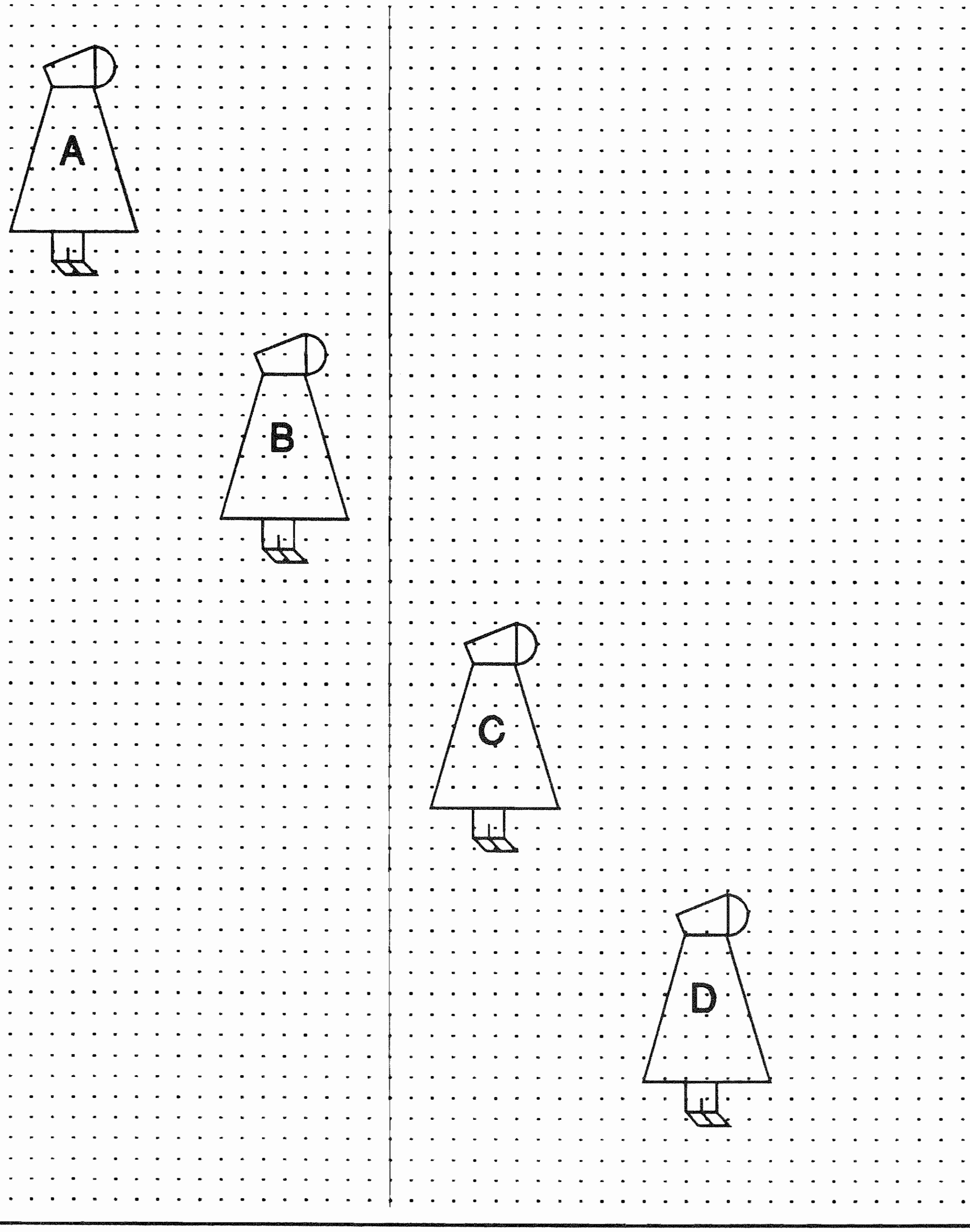
-dessinez l'image 2 de la figure 1 par la rotation R de centre O et d'angle 90°, dessinez l'image 3 de la figure 2 par la translation t de vecteur V

-déterminez les isométries qui donnent pour image de la figure 1 la figure 3.



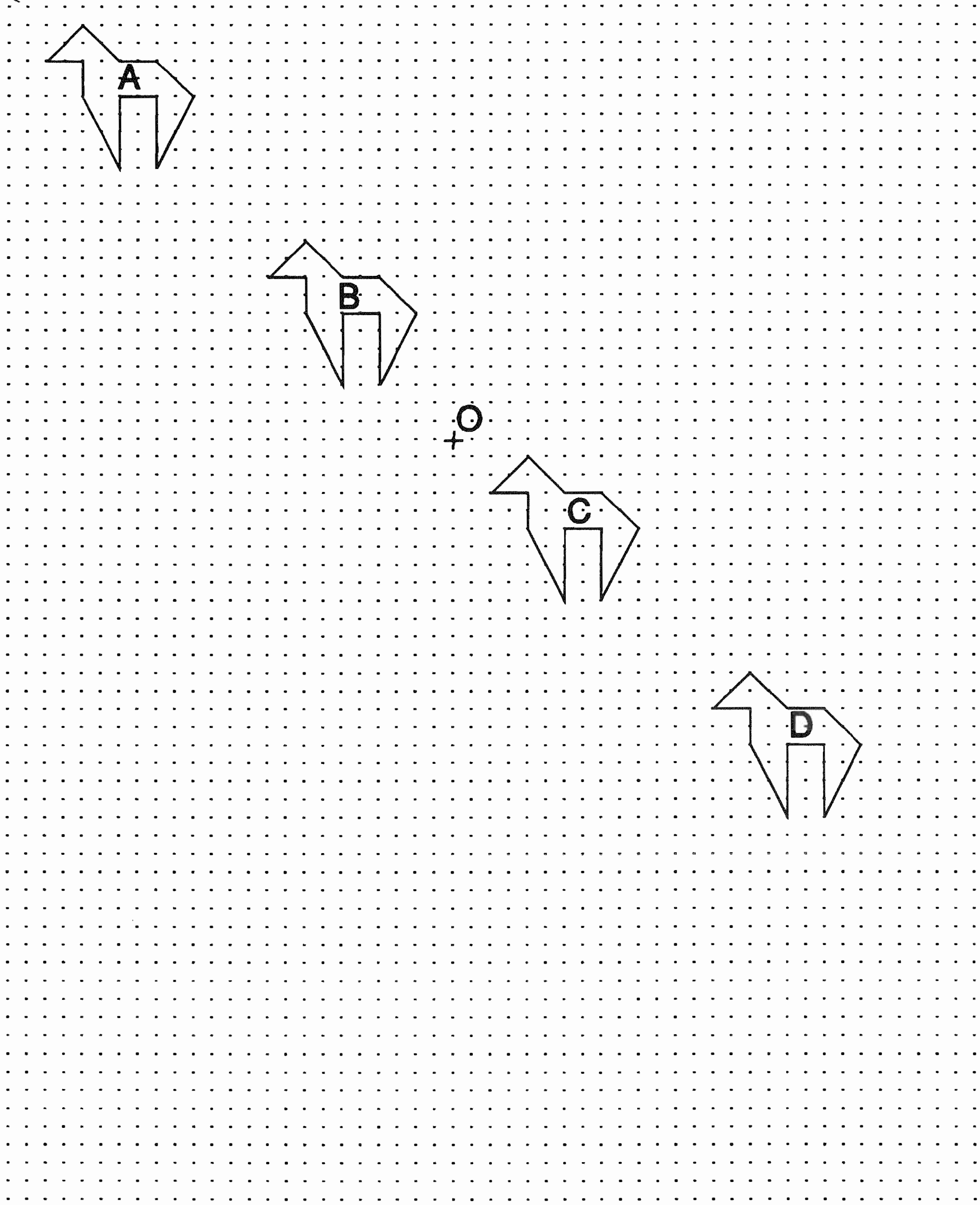
FICHE N°14

Les figures B, C, D sont obtenues par translation à partir de la figure A.
Soit T cette translation (B est l'image par T de A). Dessinez les images A', B', C' et D' des figures A, B, C, D par la symétrie axiale puis leurs images A", B", C", D" par T.
Qu'observez vous ?



FICHE N°15

Les figures B, C, D sont obtenues par translation à partir de la figure A.
Soit T cette translation (B est l'image par T de A). Dessinez les images A', B', C' et D' des figures A, B, C, D par la symétrie centrale de centre O puis les images A", B", C", D" de celles ci par T.
Qu'observez vous ?



<u>FICHE N°16</u>

Pour chacun des cas ci-dessous :

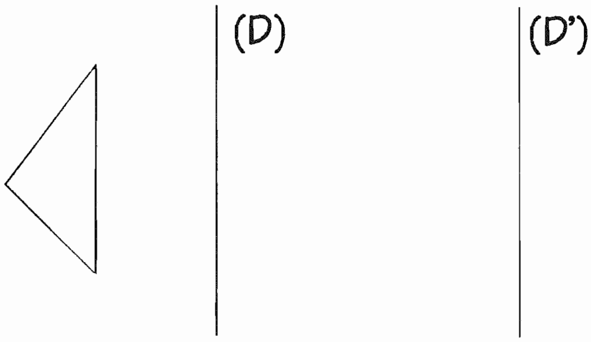
-dessinez l'image M' du motif M par la symétrie d'axe (D), puis l'image M" de M' par la symétrie d'axe (D').

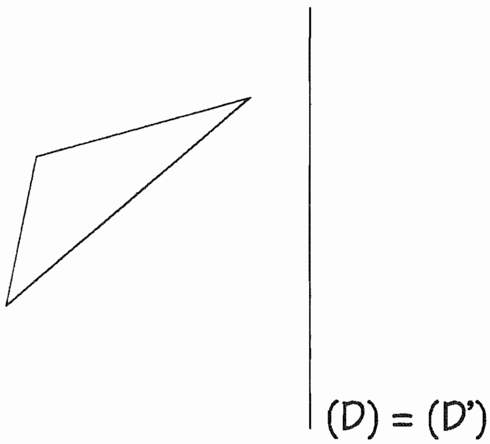
-déterminez l'isométrie K donnant "directement" M" comme image de M

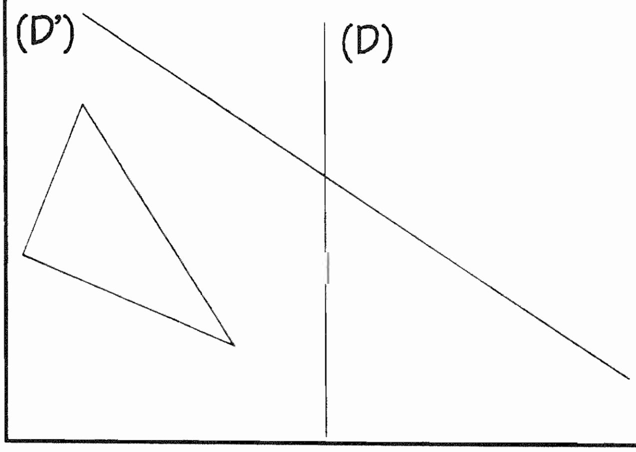
-prendre un motif (P). Procédez comme ci dessus : quelle isométrie J donne directement (P") pour image de (P) ?

-comparez J et K.

Généralisation : déterminez la composée de deux symétries orthogonales.







V) APPROFONDISSEMENT SUR LES PAVAGES

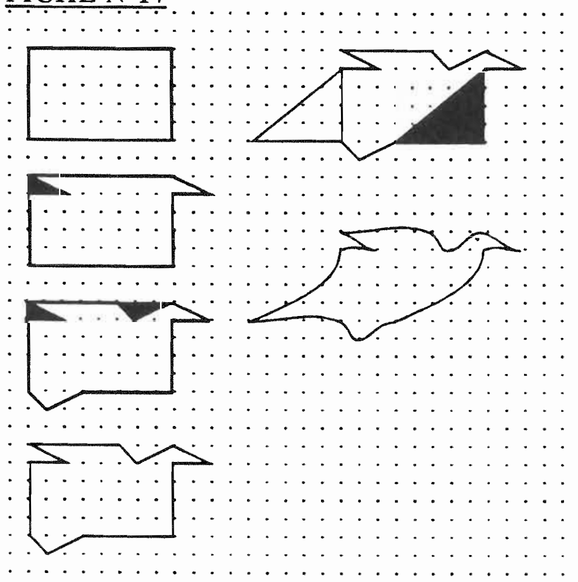
1) Réflexion à partir des dessins d'Escher

Une étude détaillée de certains dessins d'Escher amène les étudiants à prendre conscience de certaines techniques permettant d'analyser des pavages, en particulier à préciser les notions d'isométries génératrices du pavage, de type et de motif minimal d'un pavage. Nous renvoyons le lecteur sur ce point à la contribution de Jean Vincent dans cette même brochure.

2) Techniques particulières pour construire des pavages

La fiche n°17 permet de montrer comment en déformant un rectangle on peut construire un motif figuratif, ici un oiseau, pavant le plan.

FICHE N°17



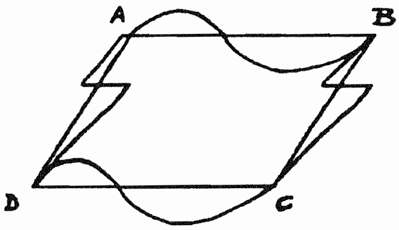
La fiche n°18 propose trois autres méthodes de construction de pavages (d'après une idée de F. Tréhard et M.P. Collonges).

Enfin les fiches n°19, 20 et 21 montrent une autre technique s'appuyant sur des enveloppes "rectangulaires" ou "triangulaires".

FICHE N°18

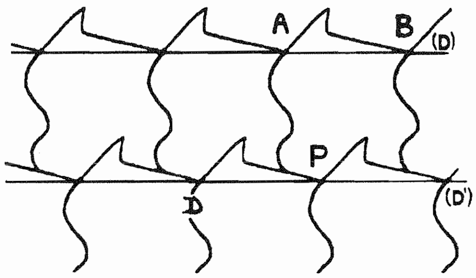
I) DEFORMER UN PARALLÉLOGRAMME

1)dessiner un parallélogramme
2)dessiner une courbe joignant A à B et son image par la translation de vecteur AD.
3)dessiner une courbe joignant A à D et son image par la translation T' de vecteur AB.
4)reproduire le motif obtenu en utilisant les translations $T^n \circ T'^m$ avec n et m dans Z.



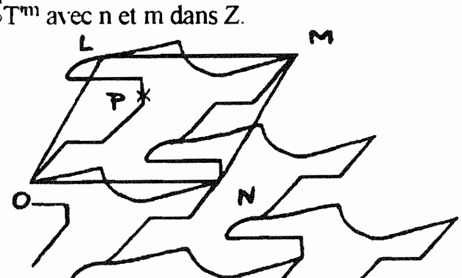
II) FAIRE DES BANDES

1)dessiner deux droites parallèles (D) et (D').
2)choisir deux points A et B sur (D) et les joindre par une courbe (C)
3)dessiner la courbe (C') obtenue en reproduisant par les translations T^n où T est la translation de vecteur AB et n dans Z.
4)choisir un point D de (D') et dessiner l'image (C") de (C') par la translation de vecteur AD.
5)choisir un point P de (C"), dessiner une courbe joignant A à P et la reproduire en utilisant les translations T^n avec n dans Z.
6)reproduire en utilisant les translations T'^n avec n dans Z.

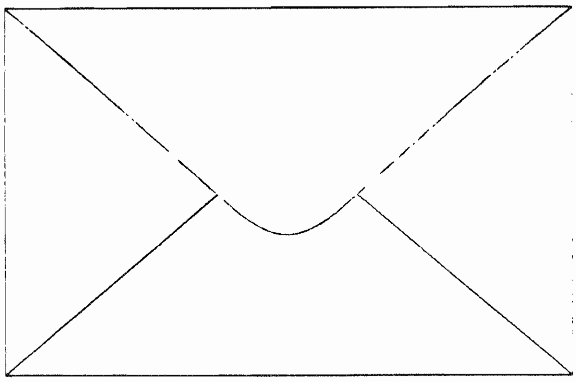


III) POINTER DANS UN PARALLÉLOGRAMME

1)dessiner un parallélogramme LMNO et choisir un point P.
2)dessiner une courbe joignant L à P et son image par la translation T de vecteur PN.
3)dessiner une courbe joignant O à P et son image par la translation T' de vecteur PM.
4)dessiner une courbe joignant L à M et son image par la translation T" de vecteur MN.
5)reproduire le motif obtenu à l'aide des translations $T''^n \circ T'^m$ avec n et m dans Z.

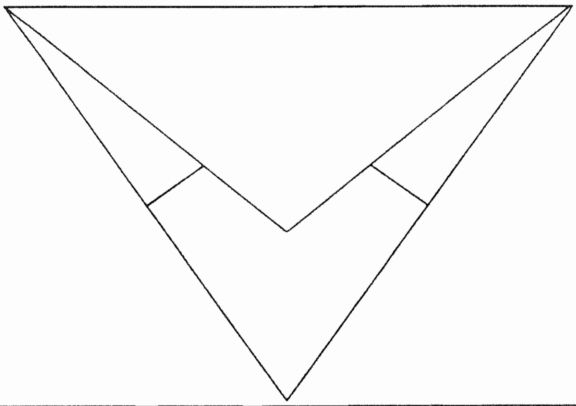


FICHE N°19



1)découper une enveloppe fermée de façon à n'obtenir qu'un seul morceau.

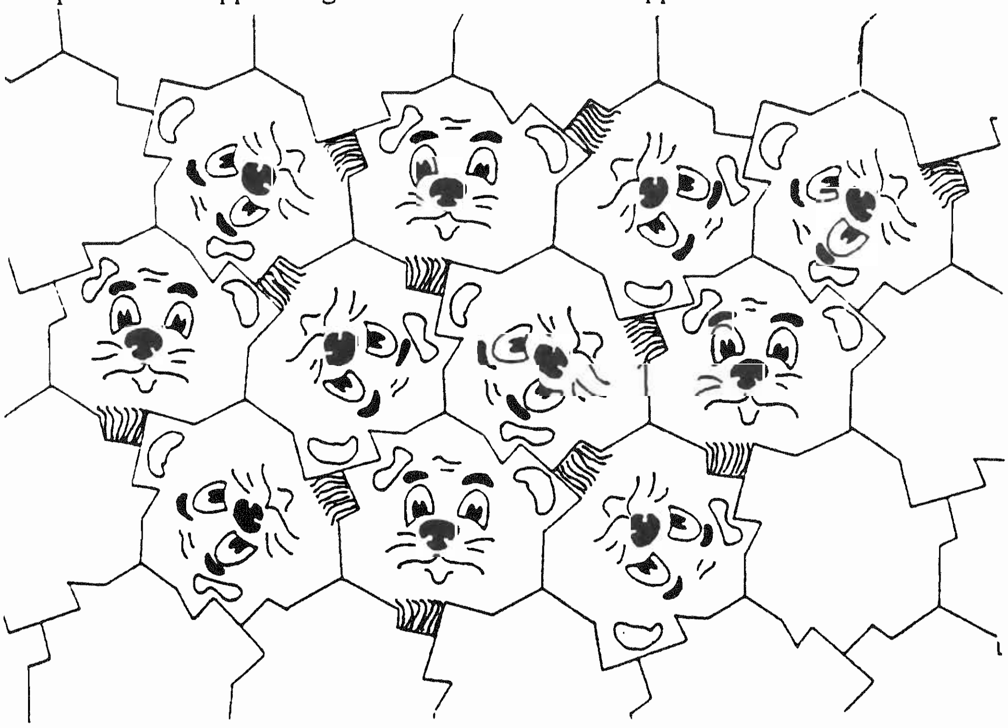
2)déplier l'enveloppe ainsi découpée, ce motif pave le plan.



3) Peut-on procéder de façon analogue avec une enveloppe "triangulaire" ?

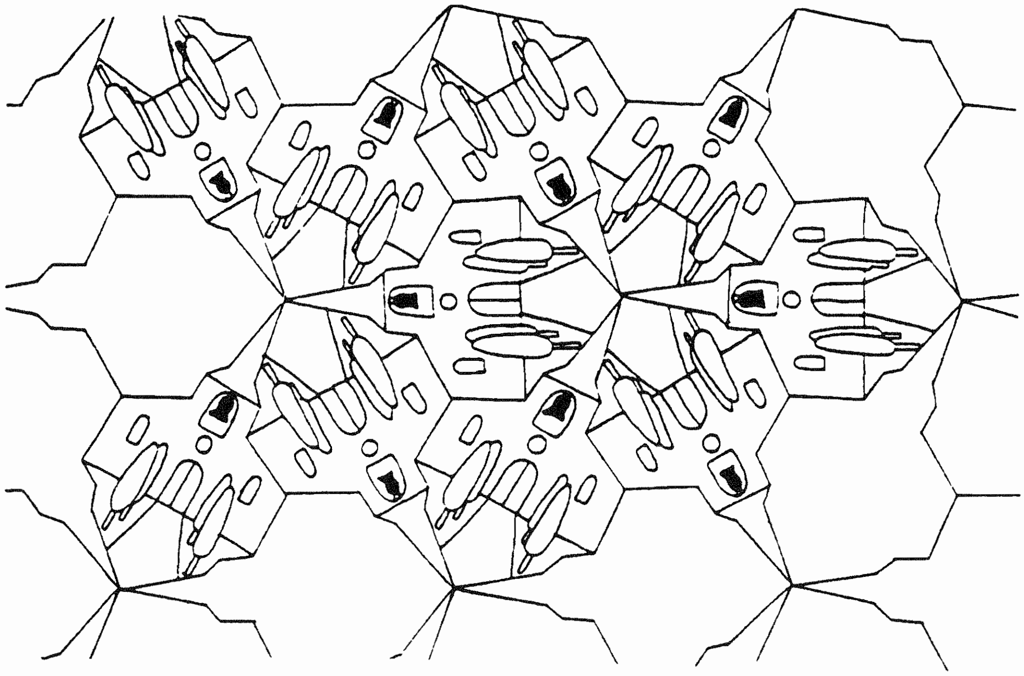
FICHE N°20

Exemple de pavage de type P3 construit par un instituteur lors d'un stage de formation continue utilisant la "technique de l'enveloppe triangulaire". Retrouvez l'enveloppe.



FICHE N°21

Pavage de type p3m1 construit par un instituteur lors d'un stage de formation continue inspiré des "chinois" d'Escher. Retrouvez l'enveloppe.



Bibliographie

Ouvrages de base

- TURNAU : de l'étude d'ornements vers l'algèbre et la géométrie. Galion. La mathématique et les applications, CEDIC
- "Rosaces, frises et pavages", Volumes I et II, Y. Bossard, CEDIC
- "Modèles mathématiques" H.M. Cundy & A.P. Rollet, CEDIC
- "Mosaïques et isométries", M.P. Collonge & F. Trehard, CEDIC

Ouvrages "pédagogiques"

- "Aides pédagogiques pour le cours élémentaire, Elem-Math V". Publication de l'APMEP
- "Aides pédagogiques pour le cours moyen". Publication de l'APMEP
- IREM de Paris Nord. "du pavage plan aux transformations géométriques planes"
- Grand N, Jacques Pinchault. "pavages au CM"

Des Sources

- ESCHER
- Le mirage magique de Escher, Bruno ERNST, Chêne
- Le monde d'Escher, Chêne
- L'oeuvre graphique d'Escher, Solin
- Kaléïdoscopes, Tarquin

- Arabic geometrical pattern and designs, Bourgoin. Ed Dover

- IREM de Paris VII, Pavages et coloriages
- IREM de Paris VII, Pavages à colorier
- IREM d'Orléans, Ornementations
- IREM d'Orléans, Réseaux à faire

Mise en situation d'adultes

Pourquoi bâtir une séance qui met en situation des adultes?

La réponse à cette question dépend tout d'abord des objectifs de formation et de la nature du savoir mis en jeu. Le formateur peut envisager une mise à jour du savoir mathématique ou bien une réflexion sur la pratique professionnelle. Mais dans les deux cas cette mise en situation pourra :

- soit remettre en cause un mode de transmission et d'appropriation des connaissances familier à l'étudiant et ainsi le déstabiliser pour provoquer sa réflexion.

- soit introduire une situation utilisée ultérieurement comme référence.

Pour beaucoup de formateurs attachés à des théories d'apprentissage de type constructiviste basées sur des situations problèmes, il s'agit aussi d'assurer une cohérence entre leur discours sur l'enseignement et leur propre pratique d'enseignant. Ainsi se bâtirait un processus de formation axé sur l'homologie (ou parallèlisme) entre la formation de l'adulte et la formation des enfants. Dans cette perspective le choix de la situation n'est pas indifférent ainsi certains formateurs préféreront proposer des situations directement utilisables dans les écoles.

A contrario on peut signaler certaines réticences énoncées contre la mise en situation de recherche d'adultes et qui sont recouvertes par les quelques formulations suivantes : le manque de temps, la gestion de la classe, la mise en échec des formés, la différence entre les enfants et les adultes impliquant un autre type d'apprentissage, le caractère infantilisant de ces mises en situation, la position dogmatique du formateur.

Titre : Polyèdres réguliers

Auteur : Marie Claude CHEVALIER. IUFM Cahors

Date : Mars 92

Type : Présentation d'activités réalisées en formation initiale ou continue

Mots clés : Polyèdre - polygone

Définition - propriété - preuve

Situation d'action, de formulation, de validation - dialectique outil/objet - contrat didactique

POLYÈDRES RÉGULIERS : COMPTE RENDU D'ACTIVITÉ

Public

L'activité est proposée en formation initiale ou continue d'instituteurs.

Thème mathématique

Le thème mathématique est "les polyèdres réguliers".

Objectifs

Le principal objectif est de faire vivre une situation aux maîtres afin de conduire avec eux une réflexion sur l'activité mathématique et de pointer quelques concepts de didactique des mathématiques.

Les connaissances en géométrie sont relativement lointaines, peu disponibles, mal formalisées... Le cadre géométrique place les enseignants dans une position comparable à celle des élèves.

I - Déroulement de l'activité

Organisation et matériel

Les maîtres sont par groupes de 4 ou 5. Chaque groupe reçoit du matériel Plot[1] (triangles équilatéraux, carrés, pentagones réguliers et hexagones réguliers).

Consigne

La consigne est donnée oralement et est écrite au tableau :

"Construire des polyèdres réguliers"

[1]Plot ~ matériel n°1 ~ APMEP ~ Orléans Tours

Première phase

Dans cette première phase, les maîtres construisent des polyèdres. Le matériel distribué plaît beaucoup. Chacun se lance dans des constructions. Dans certains groupes il y a coopération: un place les élastiques alors que l'autre tient les cartons, ou encore on voit une répartition des tâches d'assemblage.

Un oubli de la consigne est très net. Les gens sont pris par l'action.

Deuxième phase

Un point est nécessaire. Le formateur choisit deux ou trois constructions réalisées, demande l'attention de tous et pose la question:

"Avons-nous des polyèdres réguliers?"

Dans le temps qui suit, les gens semblent découvrir la consigne. Ils interrogent l'animateur, en lui faisant même des reproches:

"C'est quoi, un polyèdre régulier ?"

"Vous nous laissez faire des choses comme ça, sans nous dire ce que vous attendez !"

......

Des opinions sont émises à propos des polyèdres construits. Il y a un accord rapide sur :

"Il faut que toutes les faces soient identiques."

Le formateur se contente d'écrire cette phrase au tableau, sans prendre position. Les maîtres pensent avoir trouvé là, la définition dont ils ont besoin.

Les maîtres connaissent la définition d'un polygone régulier. Ont-ils procédé par analogie, les côtés du polygone correspondant aux faces du polyèdre ?

Obtient-on cette "définition" à partir de la représentation que chacun a d'un polyèdre régulier ?

Troisième phase

Les enseignants reprennent le travail de construction qu'ils avaient interrompu, mais en ne recherchant cette fois ci que les polyèdres réguliers. Ils démolissent les solides obtenus en assemblant des polygones de nature différente.

Certains groupes assemblent des hexagones à n'en plus finir.

Quatrième phase

Le formateur guette la fabrication du polyèdre construit avec 10 triangles équilatéraux. Lorsqu'elle se produit, il montre le solide dans chaque groupe en demandant aux gens comment ils le trouvent. Les réactions tardent plus ou moins à se produire.

Un moment collectif est alors improvisé, souvent à l'initiative d'un stagiaire. Une vive discussion s'établit :

"Toutes les faces sont égales !"
"Comment définit-on un polyèdre régulier ?"
"La définition est écrite au tableau !"

Un doute apparaît à propos de ce qui était accepté comme définition.

"Le polyèdre a un axe de symétrie !"
"Il y a une rotation !"

Les transformations, jusque là ignorées, vont servir d'argument. Le solide est bien régulier puisqu'il peut tourner sur lui-même, ou bien puisqu'il est invariant par symétrie.

"Suivant l'endroit d'où on regarde ce solide, on ne le voit pas pareil !"
"Mais les angles ne sont pas les mêmes !"

Les isoméries de l'espace apparaissent comme des connaissances peu sûres, elles sont abandonnées assez rapidement au profit de considérations sur les angles.

Le formateur fait remarquer que la notion d'angle dont on dispose est une notion de géométrie plane. Il aide à la reformulation de : *"Là, on a 5x60° alors que là on n'a que 4x60°."* en suggérant de compter le nombre de faces réunies en un sommet.

A ce moment là, il y a accord à propos de la deuxième condition qui doit être réalisée :

"Chaque sommet réalise la réunion du même nombre de faces."

Cette phrase est écrite au tableau. La question sur la nature de ce que l'on est en train d'écrire se pose :

"Ce que nous avions écrit au début, ce n'était pas la définition !"
"Sommes-nous en train de donner une définition ou encore des propriétés ?"

L'animateur est sollicité en tant que détenteur du savoir mais ne donne pas son avis.

Cinquième phase

Au fur et à mesure de leur construction, les polyèdres réguliers sont disposés sur un présentoir.

Le groupe qui assemble les hexagones commence à se désespérer. Bien que tous les membres du groupe coopèrent, certains ont envie d'abandonner.
"De toute façon, on n'aura jamais assez d'élastiques ou de cartons..."

Les autres groupes avaient cédé leurs hexagones sans se poser de question mais certains enseignants commencent à s'intéresser à ce qui se passe.

"Ce n'est pas normal qu'ils n'arrivent pas à terminer !"
"Est-ce possible de construire un polyèdre régulier avec des hexagones ?"

Lorsqu'elle est formulée, la question est reprise collectivement. On arrive alors assez vite à l'idée de pavage du plan.
"Avec les hexagones, vous ne sortez pas du plan !"
"On doit avoir 360°..."

Surgit une nouvelle question. Il faudrait connaître la mesure d'un angle de l'hexagone. Certains font appel à l'animateur, d'autres à leurs souvenirs mais devant la résistance rencontrée, un stagiaire propose de calculer
"Il suffit de trouver une méthode de calcul !"

Plusieurs stratégies pour calculer la mesure d'un angle d'un polygone régulier sont proposées par les maîtres en formation. Le polygone de n côtés est découpé en triangles :

- à partir d'un sommet : on obtient (n-2) triangles et la somme des angles est donnée par $(n-2) \times 180°$;
- à partir d'un point intérieur : on obtient n triangles et la somme des angles du polygone est $n \times 180° - 360°$.

Sixième phase

Des questions viennent tout naturellement :

"Y a-t-il un nombre fini de polyèdres réguliers ?"
"A t on construit tous les polyèdres réguliers qui existent ?"

On voit alors quelques souvenirs très confus :
"Il y a une relation entre le nombre de faces et le nombre de sommets."
....

En moment collectif, on cherche à vérifier si tous les polyèdres réguliers ont été construits.

En général, on découvre alors l'existence de l'icosaèdre, non réalisé jusque là. Des enseignants se lancent dans sa fabrication.

Septième phase

L'animateur distribue alors un polycopié reprenant les points importants[2] afin de répondre aux questions de plus en plus techniques qui se posent et de mettre fin à l'activité mathématique.

II - Exploitation de l'activité

Le formateur propose aux maîtres de réfléchir à ce qui s'est passé au cours de l'activité. Pour cela il demande à chaque groupe de mettre rapidement par écrit quelques éléments de réflexion à propos des mathématiques rencontrées au cours de la situation mais aussi à propos du vécu de chacun en tant qu'apprenant.

Dans une synthèse collective, chaque phase est analysée sur le plan mathématique et sur le plan didactique.

[2]voir annexe

Analyse de la 1° phase

Dans la première phase, les enseignants utilisent des connaissances implicites sur les polyèdres réguliers.

Ces connaissances permettent des actions, des prises de décision.

La consigne n'est pas recevable par les stagiaires qui ont besoin de prendre connaissance du matériel mis à leur disposition, de manipuler en dehors de toute attente du formateur.

Cette première phase d'action permet en fait la dévolution du problème.

Analyse de la 2° phase

Apparaît ici le problème de l'identité de l'objet mathématique "polyèdre régulier".

Les connaissances mobilisées permettent de formuler ce qui sera accepté comme une définition

Cette "définition" reprend l'aspect le plus visible de l'objet et a un caractère fonctionnel. On peut tout de suite éliminer des solides construits en mélangeant triangles et carrés par exemple.

Dans cette deuxième phase, essentiellement de formulation, les connaissances mobilisées sont explicites, elles permettent des échanges de point de vue afin d'obtenir un consensus.

Le problème est la propriété de chacun.

Analyse de la 3° phase

Les connaissances sont maintenant explicites, elles permettent des actions, des prises de décision.

On a une nouvelle phase d'action.

Analyse de la 4° phase

La définition jusque là acceptée, est mise à l'épreuve des faits.

Les connaissances mobilisées lors des échanges ont pour but soit de convaincre que le nouveau solide construit est bien un polyèdre régulier, soit au contraire de persuader qu'il n'est pas régulier.

Quel est le statut de la phrase :"Dans un polyèdre régulier, toutes les faces sont identiques" ? Une définition doit caractériser l'objet dont elle parle. Une propriété peut décrire partiellement un objet.

La définition initiale est actualisée pour rendre compte de la contingence.

Dans cette phase. les connaissances permettent des échanges d'information mais aussi des échanges de jugement.

L'appel au bon sens pour classer les solides ne suffit pas Il y a recherche d'arguments d'ordre mathématique.

Le formateur est censé détenir le savoir. On pourrait se contenter de son avis mais dans la mesure ou il refuse de prendre position la nécessité de prouver apparaît.

Analyse de la 5° phase

Lorsque le groupe qui travaille avec les hexagones commence à douter. il ne fait pas appel à des raisons mathématiques mais à des causes matérielles (nombre d'hexagones ou d'élastiques insuffisant). C'est un regard extérieur au groupe qui va permettre de replacer le problème dans son cadre.

La réponse :"on obtient un pavage du plan" parait évidente. cependant le besoin de preuve apparaît de manière très nette.

Les connaissances anciennes ne permettant pas de donner directement la mesure d'un angle d'un hexagone. Le formateur refusant à nouveau de livrer les informations. les stagiaires savent à ce moment là que ces informations sont à leur portée par le biais d'un calcul. Les mathématiques donnent un pouvoir sur les choses.

Les méthodes de calcul proposées sont pertinentes et se veulent générales. L'aspect universel des mathématiques est ici implicite.

Dans cette phase. la question d'existence de polyèdres construits à partir de polygones quelconques est posée pour la première fois. Des hypothèses sont alors formulées et validées.

Le savoir sur les polyèdres réguliers est en train de se construire.

Analyse de la 6° phase

Dans cette phase. l'objet "polyèdre régulier" est étudié. Le souci d'exhaustivité apparaît. Les connaissances mathématiques permettent d'anticiper. L'icosaèdre est découvert théoriquement avant d'être réalisé.

Les connaissances mathématiques permettent de formuler des énoncés. des théorèmes : "il existe un polyèdre régulier dont les faces sont des triangles équilatéraux et tel que chaque sommet réalise la réunion de 5 triangles."

La réalisation de l'icosaèdre valide le théorème.

Analyse de la 7° phase

Un point d'institutionnalisation est nécessaire pour répondre à une demande des maîtres en formation. Cela permet de dissiper toute ambiguïté : les connaissances établies au cours de la situation sont correctes.

Le formateur reprend ici sont rôle de garant du savoir mathématique.

Conclusion

La situation permet de parler des savoirs mathématiques. Ils apparaissent sous forme de connaissances implicites ou explicites dans la résolution de problèmes. On les rencontre à travers des définitions. des propriétés.

Ces savoirs sont tantôt objets d'étude. tantôt outils de résolution de problèmes.

A travers la situation. on voit un concept évoluer. s'affiner. prendre place à côté d'autres concepts. On peut parler de construction. de structuration. de réorganisation de connaissances...

La situation permet de pointer quelques caractères des mathématiques. Les connaissances donnent du pouvoir sur les objets. elles permettent des anticipations. Les énoncés mathématiques ont très souvent un caractère universel ou bien répondent à des problèmes d'existence. Enfin la nécessité de preuve. de démonstration fait partie de l'activité mathématique.

La théorie des situations de G Brousseau. donne un cadre de référence pour pointer :

- les moments où les connaissances permettent des actions ou des décisions.
- les moments où elles permettent des échanges d'informations codées dans un langage.
- les moments où elles permettent des échanges de jugement.

On a donc là une illustration des différentes fonctions des connaissances mathématiques dans les situations a-didactiques.

On voit très nettement quand le problème du formateur devient le problème des maîtres en formation. On a un exemple de situation où la consigne seule ne permet pas la dévolution de la situation a-didactique.

Les relations qui s'instaurent entre le formateur et les maîtres en formation à propos du savoir en jeu sont intéressantes à regarder à travers la notion de contrat didactique. Le fait que le formateur, qui détient le savoir, refuse de communiquer ce savoir, est perçu comme une rupture de contrat. La dernière phase rétablit le contrat enseignant-enseigné dans sa forme classique.

Annexe

Polyèdres réguliers

1- Polyèdres réguliers

A partir du matériel Plot: triangles équilatéraux, carrés, pentagones et hexagones réguliers, on construit des polyèdres réguliers.

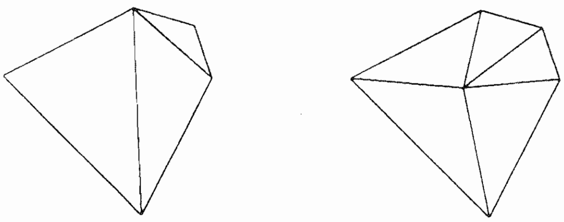
Dans un polyèdre convexe régulier :

- toutes les faces sont superposables.
- chaque sommet réalise la réunion du même nombre de faces.

2- Mesure des angles d'un polygone régulier

La somme des angles internes d'un polygone (n côtés) est égale à :

$$(n - 2) \times 180° = n \times 180° - 360°$$



figures 1 et 2

La mesure d'un angle d'un polygone régulier de n côtés est : $(n - 2) \times 180° / n$

Dans un pentagone régulier, un angle mesure : $(5 - 2) \times 180° / 5 = 108°$

Dans un hexagone régulier, un angle mesure : $(6-2) \times 180° / 6 = 120°$

3- Construction des polyèdres convexes réguliers

Polyèdres dont les faces sont des triangles équilatéraux

En réunissant 3 triangles autour d'un sommet ($3 \times 60° = 180°$), on obtient le tétraèdre (4 faces)

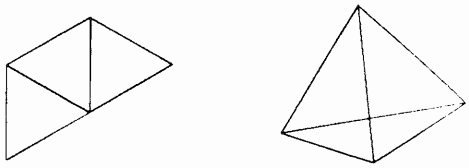


figure 3

En réunissant 4 triangles autour d'un sommet ($4 \times 60° = 240°$), on obtient l'octaèdre (8 faces).

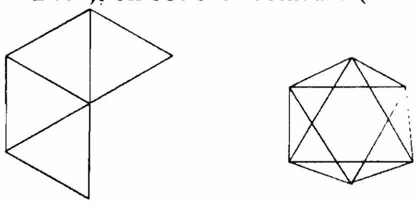


figure 4

En réunissant 5 triangles autour d'un sommet ($5 \times 60° = 300°$), on obtient l'icosaèdre (20 faces).

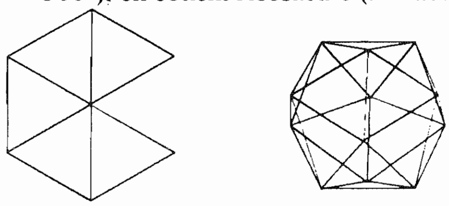


figure 5

Avec 6 triangles équilatéraux, on obtient le début d'un pavage du plan ($6 \times 60° = 360°$).

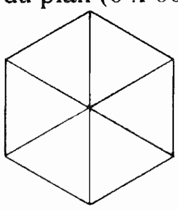


figure 6

Polyèdres dont les faces sont des carrés

En réunissant 3 carrés autour d'un sommet ($3 \times 90° = 270°$), on obtient le cube (6 faces).

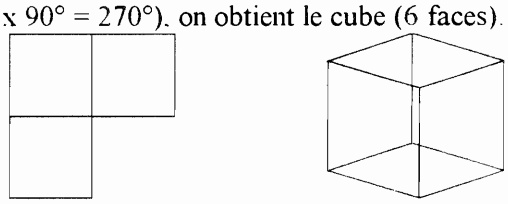


figure 7

Avec 4 carrés, on obtient le début d'un pavage du plan.

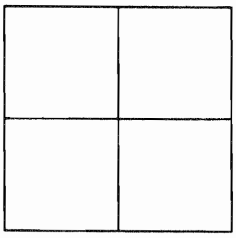


figure 8

Polyèdres dont les faces sont des pentagones réguliers

En réunissant 3 pentagones réguliers autour d'un sommet (3 x 105° = 315°), on obtient le dodécaèdre (12 faces).

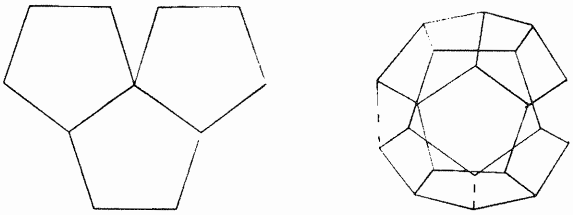


figure 9

4 x 105° > 360°

Avec les hexagones réguliers

Avec 3 hexagones réguliers, on obtient le début d'un pavage du plan.

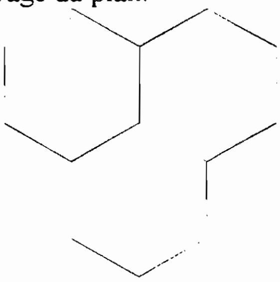


figure 10

Les polyèdres convexes réguliers ainsi construits sont les 5 solides de Platon

4- Des questions

Existe-t-il une relation liant le nombre de faces, le nombre d'arêtes et le nombre de sommets dans un polyèdre régulier ?

En prenant comme sommets les centres des faces d'un polyèdre régulier construit-on un nouveau polyèdre régulier ?

Titre: Le conflit socio-cognitif en formation des maîtres

Date: février 1992

Auteur : Alain Kuzniak

Résumé: Compte-rendu critique de la mise en oeuvre du conflit socio-cognitif en formation des maîtres.

LE CONFLIT SOCIO-COGNITIF EN FORMATION DES MAÎTRES

Introduction

Cet article tente d'amorcer une réflexion sur la possibilité d'utiliser le conflit socio-cognitif dans la formation des maîtres en mathématiques. L'introduction de cette notion a été faite avec deux objectifs partiellement contradictoires:

1) Présenter aux étudiants (en l'occurrence des normaliens de deuxième année) cette forme particulière de gestion de groupe et d'apport de connaissances qu'est le conflit socio-cognitif. Dans cette optique la mise en situation suivie d'une analyse réflexive semble une façon naturelle de sensibiliser les formés à la notion enseignée.

2) Etudier du point de vue du formateur la pertinence de séances d'apprentissage des mathématiques pour des adultes basées sur le conflit socio-cognitif.

Présentation de l'activité

Le conflit socio-cognitif n'est pas en tant que tel un mode de transmission des connaissances, mais diverses études, notamment celle de Perret-Clermont[3], semblent avoir montré l'efficacité des apprentissages liés à la confrontation d'idées contradictoires sur un même phénomène. Le conflit va naître de la rencontre d'un modèle intériorisé par le sujet avec un modèle différent proposé par autrui. L'étude précitée indique que cette confrontation favorise l'évolution du modèle le plus rudimentaire sans faire régresser le plus évolué. Maryla Zaleska[4] développe la complexité de la question en plaçant sa réflexion dans le cadre des phénomènes d'influence dans un groupe et elle étudie notamment le rôle des différents *leaderships*. Ainsi elle indique que la décision prise par un groupe, même sur des problèmes uniquement cognitifs, dépend souvent de facteurs autres que la simple preuve rationnelle. Par exemple le statut des intervenants, leur assurance ainsi que le temps de prise de parole sont des éléments déterminants.

En formation des maîtres, une façon de faire prendre conscience de la nature et de l'importance du conflit socio-cognitif consistera pour le formateur à bâtir une séance basée sur ce type de confrontation.

L'idée pédagogique est donc la suivante:

1) Créer un conflit socio-cognitif avec les étudiants.

2) Expliciter l'objectif de la séance et faire prendre conscience du conflit.

3) Réfléchir ensuite à une application éventuelle dans les classes élémentaires.

Ce canevas indique bien la place de cette activité dans les stratégies homologues.

Avant de mettre en place la séance, il faut réfléchir à deux questions importantes pour la mise en oeuvre : sur quelle notion faire porter le conflit, et comment organiser la séance?

1) Le savoir qui va servir de prétexte au conflit

- Il n'est pas évident de trouver en mathématiques des situations propres à créer un conflit socio-cognitif entre étudiants. Les exemples que l'on rencontre fréquemment dans la littérature pédagogique sont issus de la biologie ou de la physique qui favorisent les représentations

[3] Perret-Clermont: La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale. Lang, 1979.

[4] Introduction à la psychologie sociale. Larousse, 1972, tome 2, pages 80 et sq.

erronées, comme on le sait bien depuis Bachelard[5]. De plus, certains points semblent faire obstacle à la naissance d'un conflit enrichissant:

- l'expérience que l'on peut avoir d'un concept est très dépendante de l'enseignement reçu et rares sont les conceptualisations spontanées. Le conflit restera donc très localisé à l'intérieur d'un même cadre de réflexion.
- les discussions possibles risquent d'être limitées faute d'une modélisation suffisante ou peuvent être rapidement tranchées par un expert qui sera ici le membre du groupe qui aura dominé la notion.
- enfin reste latente la crainte chez le formateur que tous les formés aient le même avis, éventuellement faux, sur le problème posé. Ce qui supprime de fait toute idée de conflit et abrège brutalement la séance.

Ces différents points et surtout le dernier m'ont conduit à choisir comme source du conflit un problème qui avait déjà montré son efficacité.

Il s'agit de l'exercice classique suivant :

Un maquignon achète un cheval 6000F, il le revend 7000F. Un peu plus tard il rachète ce cheval 8000F et le revend 9000F. Combien a-t-il gagné?

Maryla Zaleska attribue ce problème arithmétique d'apparence fort simple à deux chercheurs américains Maier et Solem[6]. L'intérêt de ce problème est de susciter des réponses très variées, très fréquemment fausses, et ceci de façon indépendante de l'auditoire.

2) L'organisation de la séance.

M. Zaleska a proposé cet énoncé à deux auditoires très différents: d'une part des étudiants en sciences humaines et d'autre part des élèves d'écoles professionnelles possesseurs uniquement du certificat d'études. Pour évaluer l'efficacité de la discussion entre individus, elle suit un protocole expérimental classique en psycho-sociologie. Les élèves résolvent d'abord individuellement le problème par écrit. Elle forme ensuite des petits groupes de trois ou quatre personnes n'ayant pas fourni la même réponse. Ces groupes sont isolés et observés par la chercheuse. A la fin de la discussion, limitée à quinze minutes, le groupe doit fournir une réponse commune.

Dans son étude, à la fin de la phase individuelle, 27 % des élèves des écoles professionnelles et 34 % des étudiants ont fourni la bonne réponse. La différence est donc peu importante. Par contre, la suite des résultats diffère radicalement : le travail de groupe augmente le nombre d'erreurs chez les élèves d'écoles professionnelles, alors que chez les étudiants, le taux de réponses correctes croît significativement. Cette remarque conduit ensuite la chercheuse à affiner l'observation des groupes en discussion et à remarquer que c'est l'assurance et la longueur de l'argumentation des individus qui entraînent l'adhésion du groupe. Ainsi l'assurance verbale semble décisive même dans un problème parfaitement vérifiable de type déductif.

Cette expérience laisse perplexe sur la nature exacte du conflit socio-cognitif et notamment sur le rôle du savoir dans ce type de situations de groupe. Il est donc important de conduire une séance sur ce thème pour juger de l'intérêt de ce phénomène dans une perspective de formation.

J'ai donc effectué un cours sur ce thème en suivant une organisation très semblable à celle proposée par M. Zaleska mais insérée dans une séance de classe et non plus dans un protocole expérimental. Ce qui oblige notamment à déterminer les groupes assez rapidement.

3) Déroulement de la séance

1) Je distribue une feuille à chaque étudiant avec l'énoncé suivi de cette question : que peut-on dire des affaires du maquignon? Il faut choisir parmi les cinq propositions de réponse suivantes :

il a perdu 1000 F
il est quitte
il a gagné 1000F
il a gagné 2000F
il a gagné 3000 F

Ces propositions sont choisies parmi les réponses fournies en général à ce problème, excepté la première qui vise simplement à déterminer le rôle éventuel d'affirmations données a priori par le professeur.

2) Après avoir ramassé les feuilles, je répartis les étudiants par groupes réunissant des options différentes. En fait, je me laisse le temps de regarder les feuilles et de procéder à cette répartition pendant que les étudiants travaillent sur une deuxième feuille à trois exercices que je présenterai plus loin. Après une quinzaine de mi-

[5]Bachelard: La formation de l'esprit scientifique, Vrin, 1969.

[6]The contribution of a discussion leader to the quality of group thinking: the effective use of minority opinion in Hum. Relation, 1952.5.277-288

nutes, les groupes présentent leur solution à l'ensemble de la classe.

J'ai réalisé, sous cette forme, la même séance avec deux classes de normaliens de deuxième année. Tout d'abord, il faut remarquer le nombre important d'erreurs. A la suite de la phase de conflit, huit groupes sur onze ont fourni la bonne réponse. Deux groupes (dans la même classe) ont proposé 1000F. Enfin un groupe de la deuxième classe a penché pour 2000F, mais ne voyait pas pourquoi 1000F était faux.

L'argument très fort mais hélas faux des tenants de 1000F a été présenté sous forme d'un schéma représentant de façon erronée la composition des diverses transformations:

	+1000	***-1000***	***+1000***
6000 F	***7000 F***	***8000 F***	***9000F***

Ce mode de résolution respecte la forme usuelle de présentation de la composée d'applications. Cette solution acquiert ainsi un fort degré de plausibilité auprès des étudiants.

L'argument en faveur de la proposition 2000F qui a emporté l'adhésion du plus grand nombre d'étudiants a pris la forme d'un bilan financier:

	Dépenses	Recettes
	6000 F	7000F
	8000 F	9000F
Total	14000 F	16000F

d'où le bénéfice de 2000F

Cet argument convainc tous les étudiants que 2000 F est une bonne solution. Cependant il n'élimine pas la première solution et certains défenseurs de la proposition 1000F de gain ont été amenés à poser l'existence, qu'ils jugeaient eux-mêmes absurde, de deux solutions. Il est donc très difficile d'exclure cette réponse fausse confortée, comme je l'ai signalé, par la représentation institutionnelle sous forme d'opérateurs[7].

Deux tentatives d'explicitation peuvent être essayées :

1) On peut leur faire rapprocher ce problème et le suivant qui ne pose aucune difficulté :

Un maquignon achète un cheval blanc 6000F et le revend 7000F. Puis il achète un cheval noir 8000F et le revend 9000F. Quel est son gain ?

[7]Pour d'autres types de réponses voir H. Péault: La vache et le paysan in Brochure Copirelem, Cahors, 1991, 101-103

C'est la voie indiquée par J.F. Richard[8] qui cite le problème du maquignon comme un exemple de difficulté liée à la formulation. En fait, cette remarque n'explique pas l'erreur commise car d'une certaine façon toute formulation renvoie à une représentation et le problème consiste plutôt à comprendre pourquoi celle-ci plutôt qu'une autre.

2) Dans cette optique, une deuxième voie consiste à observer l'importance du cadre temporel dans cet énoncé. En effet l'action se déroule sur un temps relativement long et les étudiants en difficulté semblent avoir du mal à procéder à une décontextualisation temporelle. En suivant la chronologie, on peut remarquer qu'au moment du deuxième achat le maquignon a effectivement dépensé beaucoup d'argent pour ce cheval, qu'il est en attente de gain mais que pour le moment il est débiteur. On peut alors aider les étudiants en leur demandant d'évaluer ce débit, ils trouvent alors facilement 7000F. A partir de là, ils en déduisent le bénéfice final de 2000F. Dans les deux classes, cet argument seul paraît avoir été efficace auprès des derniers étudiants sceptiques.

Cependant, il faut remarquer que lors de ces deux explicitations, nous sortons du conflit socio-cognitif entre pairs pour retomber dans la situation classique d'un conflit de savoir entre l'étudiant et le professeur. La phase précédente n'aura de fait servi qu'à expliciter les difficultés rencontrées par certains étudiants.

Comme je l'ai indiqué plus haut, j'avais posé également avec la même présentation trois petits problèmes. Le temps donné aux étudiants pour effectuer leur recherche me permettait de procéder à l'observation des réponses au problème du maquignon et à la programmation des différents groupes de discussion. Ces exercices étaient bâtis à partir d'erreurs fréquentes des enfants ce qui pouvait laisser présager un certain nombre de désaccords au niveau des adultes.

1) Ces nombres sont-ils des nombres décimaux?

0,5	oui	non	?
2	oui	non	?
$\frac{3}{2}$	oui	non	?
3,14	oui	non	?
$\sqrt{2}$	oui	non	?
$\frac{1}{3}$	oui	non	?

[8]Psychologie française, Nov. 1984, page 229.

2) Quel classement dans l'ordre croissant de ces nombres vous semble correct?

1) 4	4,05	4,6	4,35	4,402
2) 4	4,6	4,05	4,35	4,402
3) 4	4,05	4,35	4,402	4,6

3) On double tous les côtés d'un triangle, son aire est-elle alors multipliée par:

2 3 4

On double le rayon d'un cercle, l'aire du disque est-elle alors multipliée par:

2 3 4

Je n'ai pas utilisé les deux premiers exercices pour mettre en place un conflit. En effet pour le premier, il s'agit simplement de connaître la définition d'une notion. L'activité aura permis aux étudiants de constater la grande variété de leurs avis sur le sujet. Ceci les a ensuite fortement motivés pour écouter, mais pas nécessairement pour retenir, la bonne définition.

Quant au deuxième exercice, il a été parfaitement résolu (et c'est heureux!) par tous les normaliens.

Le troisième exercice a présenté beaucoup plus d'intérêt, d'abord à cause des résultats obtenus, et ensuite grâce aux débats auxquels il a donné lieu.

4) Autres exemples de mise en conflit

De nombreuses occasions de faire fonctionner le conflit apparaissent à l'occasion de petits problèmes portant sur des notions mal connues des étudiants, je cite simplement deux exemples que j'ai eu l'occasion d'utiliser avec la même organisation que précédemment.

1) Une jeune mère de famille nombreuse, cadre dans une entreprise de confiserie, bénéficie de 30 % de réduction sur ses trajets en train. Elle a payé 150 F un aller-retour Evreux-Paris. Elle cherche le prix d'un billet à tarif entier, ceci afin d'obtenir un remboursement plus important de la part de son employeur. Pouvez-vous l'aider ?

Dans les propositions de solution figure la solution, erronée mais très fréquente, obtenue en ajoutant 30% de 150 F à 150F.

2) On suppose qu'une ficelle entoure la terre le long de l'équateur. On allonge cette ficelle de 10 mètres et on la tend au dessus de la terre de façon à la garder circulaire. A quelle hauteur (environ) faut-il la soulever ? [1,6mm 1,6cm 1,6dm 1,6m]

Cet exercice basé sur la contradiction entre l'intuition et la réalité démontrée mathématiquement m'a semblé plus proche du gadget pédagogique faisant plaisir au professeur que d'un réel apport de connaissances sur le sujet. Cette affirmation vaut à mon avis pour de nombreux paradoxes où le conflit cognitif n'existe pas vraiment parmi les stagiaires. Cette critique peut être formulée à l'activité *La chèvre et la voiture* sans négliger pour autant son aspect ludique et théâtral.

Conclusion

Nous avons signalé les nombreux problèmes que pose la notion de conflit socio-cognitif pour l'émergence d'un savoir mathématique.

La plupart du temps le conflit entre pairs n'apporte que quelques éléments de la solution. La discussion reste située au sein du même cadre de modélisation mathématique qui se révèle parfois insuffisant et ce blocage entraîne parfois une résolution du conflit plus sociale que cognitive.

Ce phénomène éclaire le rôle fondamental du maître, expert et non simple animateur, dont la tâche consistera à dénouer cognitivement le conflit.

On pourra préciser aux étudiants que la résolution de certains problèmes n'est pas d'ordre démocratique (on ne vote pas pour choisir le résultat) ou d'ordre autocratique (loi du plus fort) mais réfère à une logique de la preuve de type démonstratif.

En ce sens le conflit pratiqué dans un groupe peut servir de mise au point sur la pratique mathématique et sur la problématique de la preuve en ce domaine.

Enfin la mise en conflit d'adultes sur des problèmes mathématiques permet une prise de conscience des différences de raisonnement entre individus, elle augmente la motivation et assure une bonne dévolution du problème si l'on évite comme je l'ai indiqué précédemment les problèmes pièges.

Titre : Pyramides bizarres

Auteur: Marianne Frémin (IUFM de Versailles. centre Antony Val de Bièvre)

Date: Mars 1992

Type: Compte-rendu d'activité en formation initiale ou continue

Résumé: Construction de pyramides asymétriques à base carrée.

Mots-clés:

PYRAMIDES BIZARRES

I. INTRODUCTION

A. Contexte :

En formation initiale ou continue. dans le cadre d'un enseignement de géométrie. séance de trois heures dont un peu plus de deux sont consacrées à la construction et son analyse au niveau des adultes. et le reste à l'élaboration et l'analyse d'une situation analogue pour des enfants.

B. Intention:

1. Faire

une construction en volume présentant des difficultés inédites et consistantes pour les adultes.

2. Analyser

la situation. le rôle moteur des essais ratés... puis réinvestir en

3. Comment faire faire

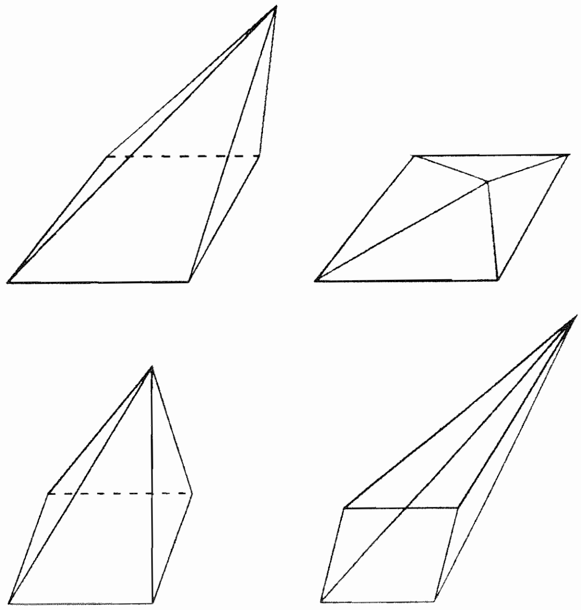
une construction analogue à des enfants

II. LES PYRAMIDES BIZARRES

A. Mise en place

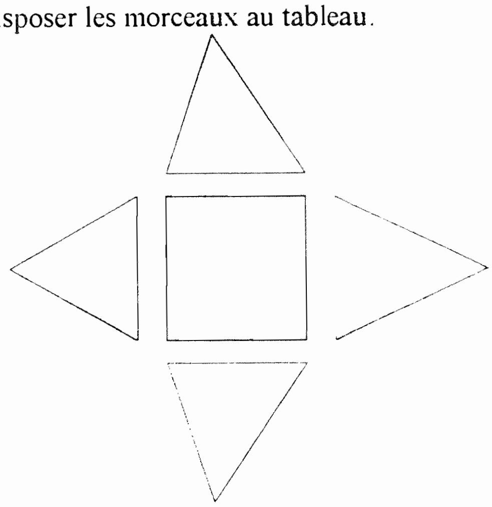
1. Consigne:

construire une pyramide. pas une belle régulière comme celle du Louvre. une vilaine comme ça (en montrer) :

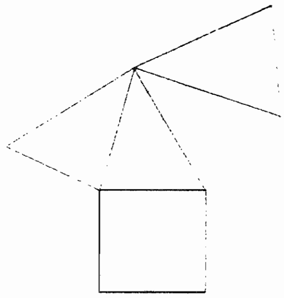


Après une petite pause. en dépecer une ou deux: elles ont une base carrée et quatre faces triangulaires.

disposer les morceaux au tableau.



NB je fais attention à disposer les morceaux ainsi. pour induire un patron formé de quatre triangles bordant un carré. et éviter de me retrouver avec plusieurs personnes essayant ce genre de patron : (suite à un apprentissage récent au cours de technologie. Ce patron rend l'étude difficile)



2. Matériel animateur

Trois ou quatre pyramides à base carrée "bien asymétriques", c'est-à-dire dont le sommet ne soit visiblement pas à l'aplomb du centre ou des axes de symétrie du carré, en carton fort, à faces indépendantes scotchées (pour être démontables).

3. Matériel stagiaire

Matériel classique de géométrie (règle, équerre, compas,...), carton uni, scotch, ciseaux. Du bristol quadrillé peut faciliter la tâche à certains moments.

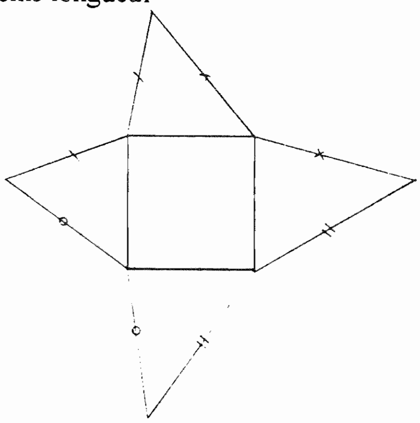
4. Précisions

Les stagiaires comprennent qu'il faut faire un patron. Il vaut mieux ne pas prévoir de languettes et coller bord à bord (les languettes perturbent l'analyse).

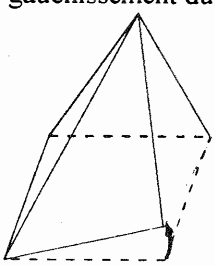
B. Premiers essais.

1. Analyse technique

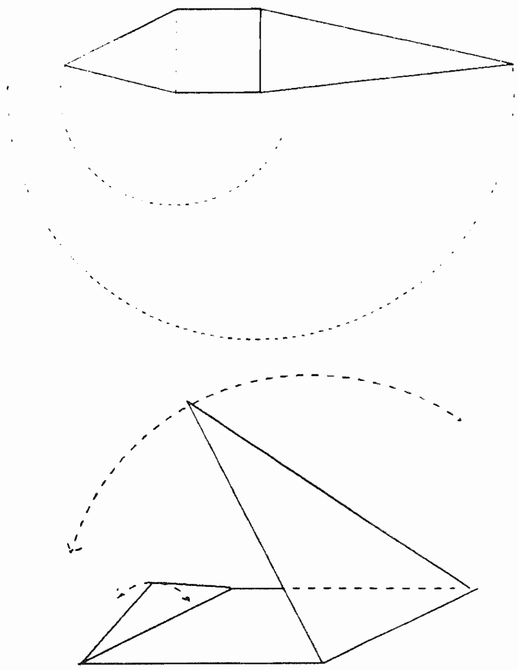
a) Contrainte sur les longueurs des arêtes: deux arêtes amenées à se coller ensemble doivent avoir même longueur



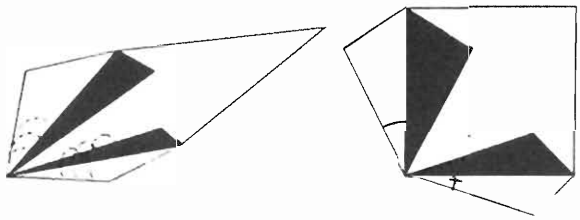
b) Risque de "gauchissement du carré"



c) Inégalités triangulaires sur les longueurs



d) Inégalités triangulaires sur les angles



2. Comportements

Les stagiaires se lancent rapidement.

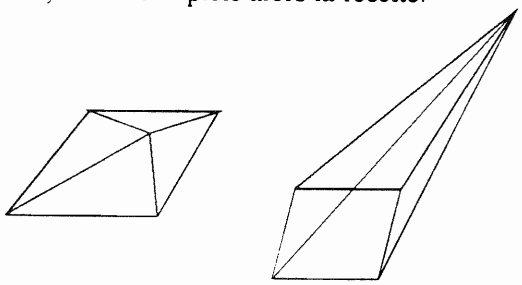
Les difficultés (a) et (b) apparaissent systématiquement à chaque essai, sont incontournables, et donc à traiter en priorité.

Les essais qui ne respectent pas les contraintes de longueur (a) vont pudiquement à la poubelle. Ces essais ratés permettent de réaliser où est la difficulté et de la surmonter aux essais suivants. Beaucoup de stagiaires n'ont pas besoin d'un essai raté pour penser à respecter les contraintes de longueur.

Le problème du "gauchissement" apparaît, mais n'est pas formulé (les pyramides ratées vont à la poubelle, sans que les suivantes soient meilleures).

Les difficultés (c) et (d) apparaissent sporadiquement, lorsqu'on cherche à faire une pyramide très longue et excentrée (inégalités triangulaires sur les longueurs) ou au contraire très plate (inégalités triangulaires sur les angles), et qu'on n'a pas de chance. Quand une pyramide est ainsi ratée, il se peut que la suivante soit réussie sans que la raison de l'échec ou de la réussite soit élucidée.

C'est pourquoi je travaille d'abord sur (a) et (b), en laissant de côté les manifestations éventuelles de (c) et (d), puis quand l'élaboration de la "recette de pyramide" est bien engagée, je provoque l'apparition de (c) et (d) en proposant des pyramides longues et excentrées ou très plates, et l'on complète alors la recette.



C. Les réalisations:

1. Trop régulières

Coins de cube

Symétrie par rapport à un plan médian (deux triangles isocèles se font face)

Elles sont produites par des stagiaires éludant ainsi le problème de gauchissement.

- demander une autre pyramide plus bizarre.

2. Légèrement gauche

La bascule peut passer sur le compte de l'imprécision des tracés et découpages.

- demander une autre pyramide plus soignée, ou différente.

3. Pyramide "à bascule"

- demander une autre pyramide stable.

4. Pyramide correcte

C'est rare.

- demander une autre pyramide très différente (plus pointue, ou plus plate, ou plus excentrée).

Dans le cas très improbable d'une personne ayant percé le secret des pyramides à base carrée, on peut lui proposer, pour patienter, de faire des pyramides à base quadrilatère quelconque, ou pentagonale...

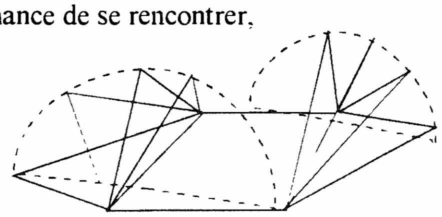
D. Première mise en commun

1. Le gauchissement

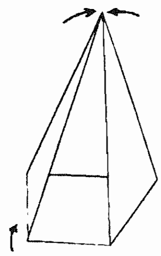
est la difficulté essentielle, bien perçue, mais pas analysée. Questions: "comment éviter de faire gauche ?", "pourquoi ça gauchit ?"

Pour y répondre, on peut dépecer une pyramide "bien ratée", puis deux types de "monstration" sont possibles:

- faire tourner autour des côtés du carré les deux triangles, dont les pointes n'ont aucune chance de se rencontrer,



- tordre ostensiblement le carré pour que les sommets des triangles se rencontrent.



2. Les autres difficultés

n'apparaissent pas (ou rarement): quand un stagiaire a butté sur (a), il a honte et ne s'en vante pas (inutile d'insister, on la retrouvera dans la recette), et (c) et (d) sont trop aléatoires pour être perçues.

E. Retour aux constructions

On demande à chaque stagiaire de construire une pyramide "encore plus irrégulière". C'est une phase où le formateur agit localement pour aider à formuler, pour proposer une construction très différente...

F. "Recette de pyramide"

Pendant la phase de construction, le formateur propose localement, quand la réussite s'installe, de rédiger une "recette de pyramide", sur papier affiche pour exploitation collective.

On remarque que la réponse au problème "comment ne pas faire gauche ?" est naturellement "faire attention de mettre les sommets en face"

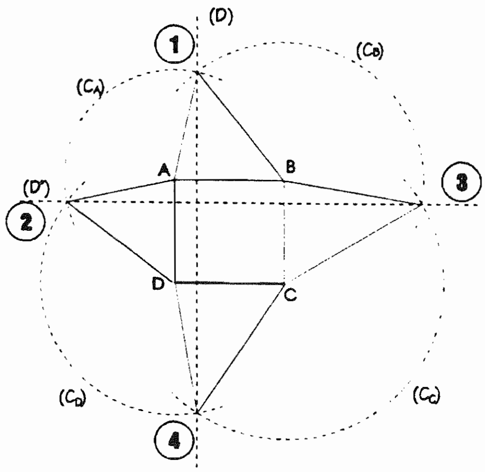
G. Mise en commun

On exprime les dernières difficultés de construction.

On examine et compare les recettes (ce qui contribue à aider les stagiaires qui n'auraient pas réussi à construire)

Voici trois "bonnes recettes" susceptibles d'être obtenues:

1. recette 1



Choisir ① (2 degrés de liberté)

Choisir ② sur (C_A) (1 degré de liberté)

Construire ③ intersection de (C_B) et (D') (0 degré de liberté)

Construire ④ intersection de (C_D) et (D) (0 degré de liberté)

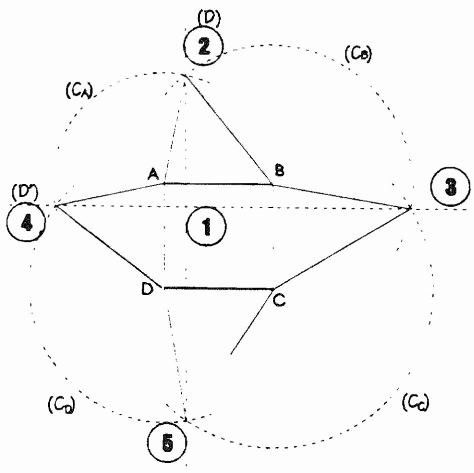
NB la dernière égalité de longueurs est automatiquement vérifiée : ④ se trouve sur (C_C)

2. recette 2 (même figure que ci dessus)

- Choisir ① (2 degrés de liberté)
- Choisir ② sur (C_A) (1 degré de liberté)
- Construire ③ intersection de (C_B) et (D') (0 degré de liberté)
- Construire ④ intersection de (C_D) et (C_C) (0 degré de liberté)

NB le dernier face à face de sommets est automatiquement vérifié : ④ se trouve sur (D)

3. recette 3



- Choisir ① "aplomb du sommet" (2 degrés de liberté)
- Choisir ② sur (D) (1 degré de liberté)
- Construire ③ intersection de (D') et (C_B) (0 degré de liberté)
- Construire ④ intersection de (D') et (C_A) (0 degré de liberté)
- Construire ⑤ intersection de (C_D) et (D) (0 degré de liberté)

NB la dernière égalité de longueurs est automatiquement vérifiée : ⑤ se trouve sur (C_C)

4. degrés de liberté

Dans chaque construction, on a trois degrés de liberté. Déterminer une pyramide, c'est choisir un sommet quelque part au dessus du carré: trois degrés de liberté aussi.

5. du matériel utile pour montrer (sinon démontrer)

Carrés et triangles rigides pivotant autour des côtés.
Carré et ficelles fixées aux sommets.

III. TÉTRAÈDRES BIZARRES

L'activité "pyramide bizarre", qui paraissait a priori difficile aux stagiaires, est finalement réussie, et ils sont fiers et étonnés de cette réussite.

On peut leur demander de construire une activité analogue pour une classe de CM, ce qui de plus les oblige à dégager les caractéristiques intéressantes de la situation.

A. La situation

Faire construire des "tétraèdres bizarres" à des élèves de CM

B. Caractéristiques communes avec "pyramides"

Situation de construction
Situation auto validante
Rôle moteur des essais ratés

C. Différences

Le problème du "gauchissement" ne se pose pas (ouf!)

Ce soulagement rend les instituteurs confiants dans les possibilités de réussite des enfants.

Titre: Les carrés de Mac-Mahon.

Date : octobre 91

Auteur :G. Marchal (I.U.F.M. de Lorraine)

Origine : Aide pédagogique pour le C.P. - fascicule A.P.M.E.P.

Type : problème de recherche dans un domaine géométrique ne demandant aucune connaissance particulière.

Résumé : à partir d'une situation simple, réfléchir sur les modalités de recherche utilisées. les comparer, les réinvestir éventuellement à d'autres situations.

Mots-clés : Résolution de problèmes. Géométrie. Dénombrements.

LES CARRÉS DE MAC-MAHON

Situation :

On considère des carrés de même taille dont on a tracé les deux diagonales : il s'agit de colorier les quatre triangles de ces carrés en utilisant trois couleurs.

I. Contexte.

Les carrés de Mac-Mahon existent dans le matériel "Pavages et Mosaïques" de Nathan. Il est intéressant de découvrir les règles qui ont permises l'élaboration de ce matériel.

Le problème consiste à trouver tous les carrés possibles sans répétition.

Il est possible de comparer les méthodes utilisées avec deux autres situations :

- les triangles colorés
- les carrés bicolores.

Il s'agit de mettre des adultes en situation de recherche sur un problème de géométrie où vont intervenir :

- une recherche empirique et un pronostic sur le nombre de carrés de Mac-Mahon ;
- un certain nombre de démarches ;
- les rotations d'une figure simple (pour identifier différentes représentations du même carré) et les symétries (source d'omission de certaines figures)

II. Déroulement.

Objet : Recherche de carrés de Mac-Mahon et recherche de carrés colorés

Les modalités peuvent changer en fonction des groupes :

les deux situations étant voisines, il est possible, par groupes :

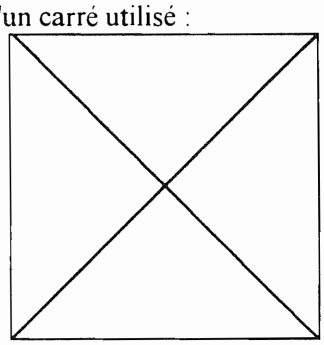
- de proposer simultanément les deux situations ,
- de proposer soit l'une, soit l'autre,
- de proposer l'une puis l'autre :

1°) Présentation des carrés de Mac-Mahon :

On se propose de faire réaliser une collection de carrés colorés de la manière suivante :

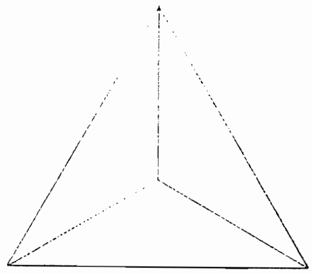
- chaque carré est partagé en quatre triangles par ses diagonales,
- chaque triangle est coloré d'une seule couleur.
- on dispose de trois couleurs.

Dessin d'un carré utilisé :



2°) Présentation des triangles colorés :

Analogue à la situation précédente mais on utilise cette fois quatre couleurs et le triangle équilatéral est partagé en trois parties isométriques comme l'indique le dessin ci - dessous:



III. Analyse de l'activité.

Différentes démarches apparaissent :

- organisation en arbre,
- combinatoire,
- représentation voisine de matrices,
- tableaux

La méthode qui se révèle dominante (ou peut-être celle que le formateur privilégie) consiste à déterminer le nombre de couleurs utilisées puis la répartition de ces couleurs.

On obtient 24 carrés de Mac-Mahon.

On obtient 24 triangles colorés.

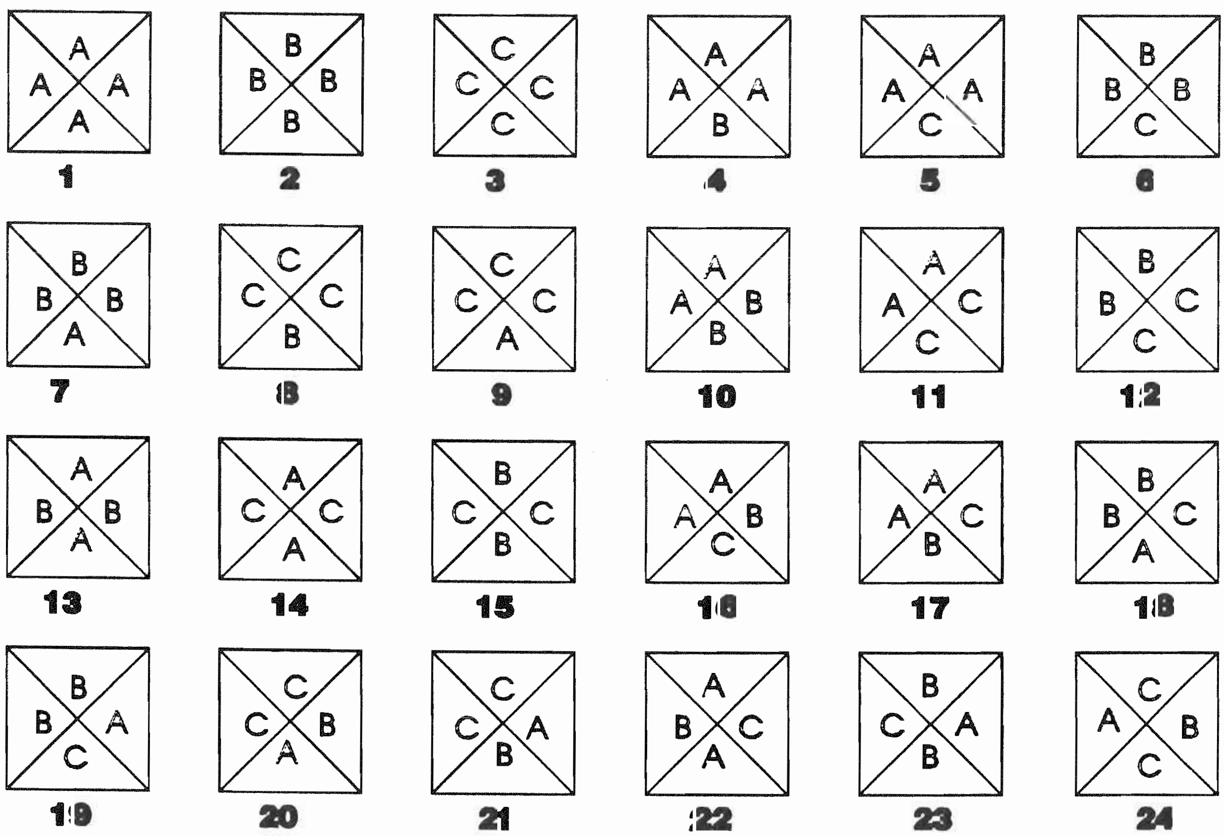
Prolongements :

- Présentation du matériel "Pavages et Mosaïques" et analyse des activités proposées.
- activités susceptibles d'être conduites à l'école élémentaire et à l'école maternelle.

Bibliographie:

- Apprentissages numériques ERMEL cycle des apprentissages fondamentaux
- Les carrés colorés (revue N)
Auteur : R. Neyret
- La mathématique au C.P.
Auteur : André MYX.

Les carrés de MAC-MAHON.



Titre : PARTAGE

Auteur : Gérard DERAMECOURT, Antenne I.U.F.M de Périgueux

Date : mars 1992

Origine : Revue de mathématiques

Type : Compte-rendu d'activités en formation initiale et continue.

Résumé : A partir de la résolution d'un problème, les participants sont invités à se convaincre mutuellement de la justesse de leur solution. L'activité et les débats permettent d'aborder les thèmes de résolution de problèmes, de démonstration, de conflit cognitif, de représentation.

Mots-clés : Résolution de problèmes, démonstration, conflit cognitif, représentation.

PARTAGE

Exercice

Trois amis Titus, Caïus, Séné se rencontrent pour un repas. Pour ce repas, Titus et Caïus apportent respectivement 4 et 3 plats. Séné qui n'a apporté aucun plat, veut les dédommager, il donne 4 deniers à Titus et 3 deniers à Caïus.

Titus et Caïus reconnaissent que les plats sont de valeur équivalente, mais Titus prétend que les 7 deniers n'ont pas été attribués équitablement.

Selon vous, la somme attribuée à Titus est-elle trop élevée ? Pas assez élevée ? Equitable ?

Quelques exemples de solutions apparues:

a - Il est assez fréquent que quelqu'un avance : "Il faudrait connaître le prix d'un plat !"

Certains répondent en formulant : ils formulent par exemple l'hypothèse (qui n'est pas sans contestation) :

1 repas	→	7 deniers
3 repas	→	21 deniers
1 plat	→	3 deniers

Là-dessus, apparaît la recherche de ce que chacun a mangé : 7/3 de plats, d'où ce que Titus et Caïus ont "remis" respectivement à Séné : 4 - 7/3 = 5/3 et 3 - 7/3 = 2/3, d'où le prix que chacun peut réclamer.

b - La recherche porte sur ce que Titus et Caïus "remettent" à Séné (ex à la calculette) :

7 plats partagés en 3, chacun mange 2,33, puis
4 - 2,33 = 1,67
3 - 2,33 = 0,67

Il faudra partager les 7 deniers proportionnellement à 1,67 et 0,67, d'où:

2,34	7
1,67	5 en arrondissant
0,67	2 "

c - Plus rare, à l'aide de représentations (ou découpage) :

Les plats de Titus et ce qu'il a mangé (T) :

$\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}$ $\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}$ $\boxed{T}\boxed{S}\boxed{S}$ $\boxed{S}\boxed{S}\boxed{S}$

S correspond à ce qu'a mangé Séné

Les plats de Caïus et ce qu'il a mangé (C) :

$\boxed{C}\boxed{C}\boxed{C}$ $\boxed{C}\boxed{C}\boxed{C}$ $\boxed{C}\boxed{S}\boxed{S}$

On partage chaque plat en trois, d'où 21 parts. Chacun reçoit 7 parts. Séné a mangé 5 parts données part Titus, et 2 données par Caïus.

Les variables didactiques

a - Le nombre de personnes intervenant :

a1 - Le nombre de personnes qui apportent des plats.

a2 - Le nombre de personnes qui donnent de l'argent.

a3 - Le nombre de personnes qui apportent des plats et qui donnent de l'argent.

Exemple : Trois personnes C_1, C_2, C_3 apportent respectivement 4, 5, 6 plats. Deux invités donnent chacun 60 F. La répartition 32, 40, 48 est-elle équitable ?

b - La somme des plats, divisible ou non, par le nombre de convives :

Si la somme est divisible par le nombre de convives, le calcul s'en trouve simplifié, exemple ci-dessus.

c - La somme à partager est divisible ou non par la somme des plats :

c1 - La somme à partager est divisible par la somme des plats. Dans ce cas les deux solutions (celle fausse, induite par les nombres de l'énoncé, et celle correcte) sont relativement "immédiates" (cf exemples traités).

De façon réduite comme dans le cas de l'énoncé initial : trois convives, dont deux, C_1 et C_2 apportent respectivement x_1 et x_2 plats.

C1 donne $x_1 - \frac{x_1 + x_2}{3} = \frac{2x_1 - x_2}{3}$

C2 donne $x_2 - \frac{x_1 + x_2}{3} = \frac{2x_2 - x_1}{3}$

Si la somme S à partager est $x_1 + x_2$, on a alors le partage immédiat en $(2x_1 - x_2)$ et $(2x_2 - x_1)$.

Trois cas essentiels apparaissent alors selon les signes des 2 valeurs précédentes :

1) $2x_2 > x_1 > \frac{x_2}{2}$; cas de l'énoncé initial.

2) $2x_1 = x_2$ (ou $2x_2 = x_1$) :
ex : $x_1 = 4$; $x_2 = 8$; $S = 12$.
C_1 qui apporte x_1, ne reçoit rien.

3) $2x_1 < x_2$ (ou $2x_2 < x_1$) ; ex : $x_1 = 2$; $x_2 = 7$

C_1 qui apporte x_1 plats, doit un plat à C_2, l'invité lui en doit 3.

De façon plus générale, si :

- $x_1, x_2, \ldots, x_N$ sont les nombres de plats apportés respectivement par N convives C_1, C_2, ..., C_N, et si
- s est la somme donnée par chacun des i invités,

en appelant t le nombre total de convives ($t = N + i$), nous aurons pour ce que chacun des N convives donne respectivement (avec l'hypothèse que chacune de valeurs x_1, x_2 ... est supérieure à une part) :

$$x_1 - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{t} = \frac{(t-1)x_1 - (x_2 + x_3 + \ldots + x_N)}{t} = d_1$$

$$x_2 - \frac{x_1 + x_3 + \ldots + x_N}{t} = \frac{(t-1)x_2 - (x_1 + x_3 + \ldots + x_N)}{t} = d_2$$

......

$$x_N - \frac{x + x_2 + \ldots + x_{N-1}}{t} = \frac{(t-1)x_N - (x_2 + x_3 + \ldots + x_{N-1})}{t} = d_N$$

Le tableau de proportionnalité suivant :

$\frac{x_1 + x_3 + \ldots + x_N}{t}$	$i \times s$
d_1	
d_2	
...	

conduit à des résultats exprimés avec des valeurs entières.

c2 - La somme à partager n'est pas divisible par la somme des plats :

Exemple : $x_1 = 4$; $x_2 = 6$; $s = 12$ donné par un invité.

C_1 donne $4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}$

C_2 donne $6 - \frac{10}{3} = \frac{8}{3}$

d'où le partage

10	12
2	2,4
8	9,6

Si $x_1 + x_2$ divise 100 s avec s en F, la réponse s'exprime en centimes sans arrondi.

d - La nature des éléments à partager :

Plats, pains, bananes, ...

La nature des éléments à partager peut conduire à rejeter la solution s'appuyant sur la recherche initiale de la valeur de l'élément.

Exemple : Dans l'énoncé initial, donner 3 deniers pour valeur d'un plat peut être rejeté, les 7 deniers remis pour dédommager sont peut être bien en dessous de la valeur effective, ou bien au dessus. Vouloir alors résoudre le problème avec une valeur de plat exige d'utiliser une valeur fictive, éventuellement désignée par une lettre.

e - Le nombre d'éléments à partager :

Des nombres relativement grands pour les nombres de plats (supérieurs à 10 par exemple) découragent la représentation, dans ce cas le partage en trois (par exemple) d'un élément ne prendra pas facilement de sens, il faudra $x_1 + x_2$ divisible par 3.

Exemple : Il s'agit d'huitres, $x_1 = 20$; $x_2 = 25$.

Application à l'école primaire

Il est possible de présenter un partage proportionnel, mais dans ce cas, en principe, n'apparaît pas de conflit analogue à celui du problème initial.

Exemple : Deux amis Bertrand et Denis veulent acheter chez un marchand de cycles, chacun un vélo d'occasion, Bertrand hésite devant un vélo à 450 F et Denis devant un vélo à 750. Le marchand les voyant ensemble, leur propose les deux vélos pour 1050 F. Bertrand paie cette somme, les deux amis prennent les vélos. Combien Denis doit-il à Bertrand ?

Titre : LA VOITURE ET LES CHÈVRES
Auteur : François Huguet (P.E.N. Quimper)
Date : Février 1992
Origine : Problème rapporté par Jean Marc Patin via Hervé Péault (P.E.N Angers).
La revue "Courrier International" du 5 Septembre 91.
"Pour la science" N°167 Septembre 1991, des articles de revues américaines et allemandes.
Type : Compte-rendu de débats autour d'une situation-problème.
Résumé : A partir de la résolution d'un problème, les participants sont invités à argumenter pour se convaincre mutuellement de la justesse de leurs solutions.
Si le débat est escamoté ou s'il y a accord unanime sur une solution, l'animateur est amené à présenter toute une gamme d'arguments déstabilisants afin d'ébranler certaines convictions, aborder la notion de preuve et faire émerger certaines représentations.
Ce type d'activité permet d'analyser les différentes manières propres à chacun d'aborder la résolution d'un problème et aussi de voir l'influence de la position hiérarchique de celui qui détient le savoir.
Mots-clés : Résolution de problème - démonstration - preuve - erreurs - conflit cognitif - probabilités.

LA VOITURE ET LES CHÈVRES

Contexte

J'ai utilisé cette situation plus de 10 fois dans des contextes très variés : en formation initiale avec les PE, les FP1, les FP2, en formation continue, lors de réunions de spécialistes du département "Math" (Professeurs de Fac, IPR, IDEN, PEN ...), avec les collègues de la Régionale de l'APMEP, et avec ceux d'un Groupe "Recherche - Action".

Cette opération "boule de neige" m'a permis d'avoir les échos des réactions provoquées par ce même problème posé par des normaliens, des amis professeurs d'EPS ou même docker à un public supposé hiérarchiquement supérieur sur le plan scientifique et donc supposé aussi supérieur en capacité de raisonnement.

Particularité

Le problème a ceci de particulier qu'il paraît très simple mais qu'il est fréquent d'avoir un consensus d'une très grande partie de l'auditoire autour d'une solution erronée.

Le problème

On peut présenter ce petit problème comme un fait d'actualité.

"Nous assistons à un jeu télévisé américain (un de ces jeux réputés pour leur finesse !).

Il y a deux acteurs : un animateur célèbre et un brillant candidat.

Il y a trois portes derrière lesquelles sont placées au hasard une voiture et deux chèvres.

Le candidat, après moult épreuves, parvient au moment crucial de l'émission. Il doit essayer de désigner la porte derrière laquelle se cache l'automobile. S'il préfère gagner une chèvre, cela relève d'un cas pathologique grave et les producteurs déclinent toute responsabilité.

Il choisit donc une porte mais ne l'ouvre pas.

Afin de ménager le suspense, l'animateur, qui sait bien sûr où se trouve la voiture, va ouvrir une autre porte derrière laquelle se trouve une chèvre.

Il propose ensuite au candidat de maintenir son premier choix ou de changer de porte."

Question : "Le candidat a-t-il intérêt à maintenir son premier choix ou à changer de porte ? Ou bien est-ce que cela n'a aucune importance ?"

Déroulement

1) Après l'exposé du problème et la vérification de la bonne compréhension de l'énoncé en simulant l'action si nécessaire on peut laisser à chacun un libre temps de recherche.

2) On peut ensuite provoquer un débat très libre en laissant s'exprimer seulement ceux qui le désirent.

Si l'on craint les phénomènes d'influence, on peut au contraire faire un tour de table pour que tout le monde s'exprime ou bien recueillir en aparté l'opinion de chacun.

3) Si les opinions divergent le débat s'instaure naturellement. Le meneur de jeu peut alors recenser la nature des arguments développés et observer lesquels font basculer certaines convictions.

Il peut aussi centrer son observation sur les phénomènes sociologiques et psychologiques (luttes d'influence, point de vue minoritaire, besoin de se singulariser ou au contraire de rejoindre l'opinion majoritaire ...).

Si au contraire un consensus s'établit autour de la solution "Qu'il change ou qu'il reste devant la même porte cela n'a aucune importance", le meneur de jeu peut alors proposer quelques arguments déstabilisants.

Remarque : Au cours de mes expérimentations variées j'en ai élaboré quelques-uns que j'exposerai brièvement plus loin.

4) On peut bien sûr laisser mûrir la situation et remettre à plus tard la suite des débats.

Mais il est possible aussi de lancer un nouveau débat sur la notion de preuve.

"Nous sommes dans un domaine très particulier, celui des phénomènes aléatoires et des probabilités. Pensez-vous que des résultats statistiques puissent constituer une preuve ?

Dans l'affirmative, à partir de quelle taille de l'échantillon c'est-à-dire quel nombre d'expériences ?"

Ce genre de débat débouche souvent, et surtout avec des "non spécialistes", sur l'idée de tenter une expérience statistique en simulant la situation. Il reste néanmoins à décider du nombre de fois qu'il serait nécessaire de la répéter pour que cela constitue une preuve convaincante !

A titre d'exemple, je l'ai simulée 20 fois avec des étudiants et certains de mes élèves ont poursuivi ensuite plus de soixante fois chez eux afin de conforter ou remettre en cause leurs convictions.

Les "scientifiques" pensent plutôt à faire varier les paramètres de la situation.

Par exemple "Que se passerait-il s'il y avait 10 portes, 1 voiture et 9 chèvres ?"

5) Avec ceux qui acceptent de jouer le jeu et de prendre connaissance de quelques arguments déstabilisants, il semble intéressant alors d'analyser avec eux le type d'argument qui a ébranlé le plus leurs intimes convictions.

6) Les échanges peuvent continuer jusqu'à ce que tous s'estiment convaincus de la justesse de l'une des solutions.

7) Un débat didactique sur l'activité elle-même peut permettre d'aborder des thèmes variés comme le rôle des erreurs, la notion de preuve, le rôle des représentations et des simulations, la démonstration, le conflit cognitif, les conditions nécessaires pour qu'un débat puisse s'établir dans un groupe ...

Analyse de quelques types de comportements

1) Attitudes de fuite.

Mutisme complet puis réflexion du type "Il faudrait mettre des questions plus sérieuses à l'ordre du jour. J'avais d'autres réunions prévues à cette même heure !"

"J'écoute derrière les portes pour savoir où sont les chèvres !"

Il est vrai que pour qu'il y ait débat il est nécessaire qu'il y ait aussi volonté commune des participants de chercher à résoudre le problème.

2) Attitudes méfiantes

"Je ne peux pas travailler comme cela, pose moi clairement ton problème par écrit !"

Refus de prendre position ou même de s'exprimer avant qu'une grande majorité du groupe ne se soit prononcée.

"Tu nous mènes en bateau. Ce n'est pas possible l'histoire que tu nous racontes, même aux Etats Unis !

"Le journal allemand que tu nous montres est écrit en français. C'est un canular monté de toute pièce !"

3) Attitudes rétablissant l'égalité dans la hiérarchie des savoirs

"Connais-tu cet autre problème ...?"

J'ai récolté ainsi le problème du monsieur qui va rendre visite à un ami père de 2 enfants. Une fille lui ouvre la porte, quelle est la probabilité pour que l'autre enfant soit un garçon ?

Autre problème proposé dont j'ai plus de mal à voir le rapport avec mon problème. "Quel est le nombre des surjections d'un ensemble de n + 1 éléments sur un ensemble de n éléments !"

4) Attitudes coopératives établissant un rapport ludique

"Je parie sur les chances 1/2 - 1/2, mais je sais que je peux me tromper car dans le domaine des probabilités il existe des vacheries !"

"Et toi, quand on t'a posé le problème, qu'as-tu répondu ?"

5) Attitudes portées sur les aspects psychologiques du problème

"Si j'étais le candidat au jeu, j'observerais l'animateur. Si celui-ci hésite avant d'ouvrir la porte de la chèvre cela signifie qu'il peut faire un choix. Je suis donc dans ce cas devant la porte derrière laquelle se trouve la voiture !"

6) Attitudes du "bon physicien"

"Je fais des petits dessins pour mieux comprendre la situation"

"J'ai envie de faire des expériences !"

A noter qu'aucun de mes amis matheux n'a eu cette idée !

7) Attitudes du "bon mathématicien"

"Soit l'espace probabilisable ... "

"Au lieu de raisonner en regardant le candidat, je vais essayer de m'intéresser aux probabilités concernant l'animateur !"

"Supposons qu'il existe 10 portes, 1 voiture et 9 chèvres et que l'on ouvre 8 portes !"

8) Attitudes du "mauvais mathématicien" condescendant

"C'est simple, il s'agit d'un problème de probabilités conditionnelles. Veux-tu que je t'explique ?"

Un ami Professeur d'EPS a eu droit comme cela à un cours gratuit sur ces probabilités mystérieuses !

9) Attitudes agressives ou de dépit

"Tu es fier de ton coup !"

"Tu veux nous faire croire que l'on est tous des c...!"

10) Attitudes critiques ou avec soupçons de machiavélisme

"Je m'en veux de m'être fait avoir !"

"Que c'est difficile de changer d'opinion !"

"Je pense que la prochaine fois tu viendras nous convaincre que c'est l'autre solution qui est la bonne !"

Proposition de quelques arguments déstabilisants

- soit pour inviter l'auditoire à approfondir le problème
- soit pour faire naître un doute à propos de l'opinion majoritaire.
- soit pour contre-argumenter et amorcer un débat sur la notion de preuve.

1) Argument contre les attitudes de fuite.

* Affirmer : "Ce n'est pas un problème trivial !"

"D'ailleurs aux U.S.A. ce problème a réellement été vécu lors d'une émission télévisée et il a donné lieu à une polémique !"

* Préciser que ce problème a mis en émoi beaucoup de téléspectateurs et la communauté scientifique aux U.S.A. après l'affirmation de la rédactrice du magazine américain "Parade" Mme Marilyn Vos Savant qui s'est prononcée pour la reconsidération du 1er choix : "Le fait de changer de porte améliore les chances du candidat".

* Montrer, même de loin, un extrait paru le 5-9-91 de la revue "Courrier International" qui a traduit en français un énorme article sur 4 colonnes de la célèbre revue allemande "Der Spiegel" titrant "Le problème des trois portes ou le jeu qui rend chèvre".

2) Argument d'autorité basé sur une idée de supériorité intellectuelle.

"Il faut croire ceux qui sont plus intelligents que nous !"

* Préciser que Mme Marilyn Vos Savant n'a rien de la spécialiste du potin mondain : "Avec un quotient intellectuel de 228 points, elle est considérée comme l'exemple du super-cerveau. C'est aussi l'épouse de Robert Jarvik, l'inventeur du coeur artificiel !"

3) Argument du sens commun

* Informer du fait que la prise de position de Marilyn lui a valu environ 10000 lettres de lecteurs. Une écrasante majorité d'entre eux ont écrit pour exprimer leur désaccord. Les critiques les plus violentes émanaient de mathématiciens et de scientifiques dont certains affirment que c'est Marilyn Vos Savant "qui tient le rôle de la chèvre", ou qu'elle a "déclenché l'hilarité générale dans la communauté des mathématiciens". D'autres, plus sobrement, la traitent de "pauvre idiote" et l'accusent d'avoir encore aggravé, avec sa réponse, "la crise que traverse l'enseignement des mathématiques".

4) Arguments basés sur l'expérience et les résultats statistiques.

* Indiquer que le vétéran des shows télévisés, Mr Monty Hall a organisé une expérience simulée qui a été télévisée pour vérifier pratiquement la thèse de Marilyn.

Parmi les candidats, on comptait John Tierney, journaliste au New Yorks Times !

Au cours d'un premier tour de 10 essais Mr Tierney n'a pas modifié son choix. Il a gagné 4 fois le gros lot et 6 fois un lot de consolation.

Au cours d'un deuxième tour de 10 essais dans lequel il a modifié son choix à chaque fois après que Mr Monty Hall ait ouvert une des portes, il a eu plus de chance en tombant 8 fois sur le gros lot ! "Une certaine logique commence à se dessiner" a-t-il dit !

* Proposer de faire la même expérience un plus grand nombre de fois si nécessaire.

* Indiquer que l'expérience faite en présence de normaliens a donné la même tendance sur 20 essais (6 - 14). Certains ont poursuivi l'expérience chez eux avec pour résultat (20 - 40) sur 60 essais !

* Citer la revue "Pour la science" qui traite le même problème sous le titre "Persée, Piegase et Andromède" et signale une simulation par ordinateur sur 100 000 épreuves avec pour résultats : "La stratégie de Persée (maintenir son 1er choix) fut gagnante 33 498 fois et donc perdante 66 502 fois" !

* Faire remarquer qu'un ami, Docteur en Médecine, affirme que "cette taille de l'échantillon est largement suffisante pour dire que la différence des résultats est significative du moins si l'on se réfère à des résultats comparables concernant l'étude de l'efficacité de certains médicaments".

5) Arguments basés sur une analyse de type "mathématique"

* Supposons que le candidat soit "sourd et aveugle" ! Pourquoi s'il décide de rester devant la même porte ses chances de gagner passeraient-elles de 1/3 à 1/2 ?

Remarque : Ce type d'argument m'est venu à l'esprit parce que cette évolution de la probabilité m'avait semblé contradictoire lorsque l'on m'a posé le problème des 3 portes.

* Supposons que l'on effectue le 2ème choix à "Pile ou Face" !

* Essayons de généraliser le problème !

Que se passerait-il s'il y avait n portes, 1 voiture et n - 1 chèvres ?

Par exemple supposons qu'il existe 100 000 portes et que le candidat joue de très nombreuses fois de suite en choisissant toujours la porte N°1. L'animateur ouvrirait alors 99 998 portes derrière lesquelles il y a des chèvres en évitant soigneusement la porte N° 77 777 !

Que jugez-vous plus vraisemblable : "La voiture se trouve derrière la porte N°1 ou bien derrière la porte N°77 777" ?

6) Arguments basés sur la simulation et la représentation.

* Réaliser un tableau du type :

			Stratégies	
Porte 1	Porte 2	Porte 3	"Je Reste"	"Je change"
Voiture	Chèvre	Chèvre		
Chèvre	Voiture	Chèvre		
Chèvre	Chèvre	Voiture		

On peut ainsi estimer avoir fait l'inventaire des cas possibles et décider d'appeler Porte 1 la porte choisie lors du 1er choix du candidat.

Il suffit maintenant d'explorer les 3 cas et de demander à l'auditoire de déterminer pour chaque stratégie adoptée le nombre de fois où le candidat gagne une voiture !

Remarque 1 : Ce dernier type d'argument est généralement décisif.

Cependant certains "matheux" contestent parfois la simplicité de cette approche proposant par exemple de décomposer le 1er cas (1ère ligne du tableau) en deux cas distincts suivant que l'animateur ouvre la porte 2 ou la porte 3.

Certains ressentent la nécessité de recommencer le même raisonnement 3 fois en considérant que le candidat peut choisir la porte 1, la porte 2 ou la porte 3.

Remarque 2 : Si vous n'êtes convaincu ni par ces types de démonstrations, ni par les expériences, ni par les contre-exemples, ni par les analogies, que pouvons-nous encore faire ?

La difficulté vient sans doute de ce que nous traitons des probabilités conditionnelles ! (Probabilité qu'un événement se produise sachant qu'un autre événement s'est déjà produit)

En effet l'intuition est parfois mauvaise conseillère.

Le point important est que le choix d'une porte par l'animateur dépend du choix du candidat.

Si le candidat est devant la "bonne porte" alors l'animateur peut choisir entre les deux autres portes, mais si le candidat est devant "une mauvaise porte" alors l'animateur n'a qu'un seul cas possible.

L'argument, selon lequel avec les deux portes restantes la voiture a autant de chances d'être derrière l'une que derrière l'autre, serait correct si l'animateur choisissait en premier. Il est faux si son choix dépend de celui du candidat !

L'ordre des choix a une grande importance concernant les probabilités conditionnelles.

Exploitation possible sur le plan didactique

Ce type d'activité permet d'analyser les différentes manières propres à chacun d'aborder la résolution d'un problème et aussi de voir l'influence de la position hiérarchique de celui qui détient le savoir.

A ce propos j'ai pu remarquer surtout chez les "matheux" la tendance à vouloir se référer à des connaissances qu'ils croyaient bien maîtriser avec parfois même le réflexe d'écrire : "Soit l'espace probabilisable..." ou bien de dire : "Ce sont des probabilités conditionnelles..."

Bien sûr, le débat peut déboucher sur la notion et le statut de la preuve. La question est d'autant plus épineuse que l'on touche ici au domaine un peu flou des probabilités.

A travers cette expérience enfin j'ai pu mesurer la difficulté que nous avons tous à accepter de changer d'opinion.

Chez mes collègues et amis, certains ont très mal vécu le fait de s'être fourvoyés.

Ils ont remis en cause leurs capacités de raisonnement et s'en sont voulu de ne pas avoir découvert la solution d'un problème "si simple".

Les personnes de culture à dominante scientifique ont en général rejeté d'emblée les arguments "d'autorité" ou du "sens commun".

Les "matheux" ont contesté les arguments basés sur les statistiques et les expériences.

Certains ont même refusé que je tente l'expérience devant eux en utilisant trois tasses et un sucre.

D'autres au contraire, ont été fortement ébranlés par le constat des résultats obtenus en réalisant devant eux ces expériences simulées.

Cela ne me semble pas un hasard si aucun des "matheux" n'a essayé de représenter la situation en esquissant par exemple un tableau du type exposé plus haut, alors qu'une amie physicienne a au contraire eu aussitôt le réflexe inverse.

En conclusion, je pense que ce type d'activité peut dépasser largement le cadre d'une situation de formation d'adultes en mathématiques.

J'ai essayé de m'intéresser à certains aspects liés aux comportements. Il me semble indéniable que ceux-ci sont largement conditionnés par le vécu et la formation scientifique des participants.

Les présupposés sur une certaine hiérarchie des savoirs liée en particulier aux diplômes me semblent pour le moins inquiétants.

On pourrait s'intéresser aux difficultés que nous avons à nous approprier une situation-problème et aussi à bien accepter les arguments d'un autre ou un autre mode de pensée.

Enfin ce type de situation me semble assez révélateur des possibilités de collaboration et de travail ensemble d'un groupe d'individus.

Devoirs de didactique

Titre : "Les devoirs de didactique en vue de la préparation au concours des professeurs d'école.".

Date : Janvier 1992.

Auteurs : J. BRIAND, D. BUTLEN.

Type : Synthèse.

Destinataires : Formateurs de P.E.

LES DEVOIRS DE DIDACTIQUE EN VUE DE LA PREPARATION AU CONCOURS DES PROFESSEURS D'ECOLE

I - L'ÉPREUVE DE DIDACTIQUE COMME MOYEN D'EXPLICITER UN PLAN DE FORMATION

L'épreuve de mathématiques du concours d'entrée à l'IUFM. pour les professeurs d'école révèle l'état de l'enseignement de la didactique des mathématiques. Les anciens concours d'entrée à l'école normale ne pouvaient pas. en effet. exiger des compétences en didactique des mathématiques. Aussi. les épreuves conciliaient-elles mathématiques et pédagogie par le choix d'épreuves dont le sujet pouvait prendre sa source dans des activités de l'école élémentaire. Il y avait un consensus facile à obtenir chez les formateurs-rédacteurs de sujets. Que. dans les écoles normales. les approches en didactique soient variées. ne constitue un secret pour personne.

Le plan actuel des IUFM qui situe le concours à une sorte de mi-parcours de formation. repose. sans le vouloir sans doute. la problématique de l'enseignement de la didactique des mathématiques. En effet. l'épreuve du concours. pour le moment construite régionalement. impose déjà un consensus sur des exigences à l'issue d'un début de formation.

Sur quelles bases peut et doit s'établir ce consensus ?

I-1 Le texte officiel concernant l'épreuve de mathématiques au concours.

Le texte est suffisamment flou pour permettre des interprétations diverses. voire contradictoires.

L'épreuve de recrutement de fin de première année est constituée de deux parties :

- une partie spécifiquement mathématique (notée sur 12 points)
- une partie professionnelle visant à tester certaines aptitudes du candidat à analyser des documents pédagogiques (productions d'élèves, propositions d'activités...)

I-2 Le programme annoncé de chaque IUFM.

Dans chaque IUFM. un plan de préparation au concours a été construit.

Il est clair que pour les étudiants en première année. tout est assujetti au contenu des épreuves du concours. Si l'ensemble des connaissances à acquérir dans le champ de la didactique des mathématiques n'est pas clairement pointé dès le début de l'année. cela veut dire que les formateurs se contentent de soutien en mathématiques ou d'analyses générales de documents pédagogiques.

I-3 Place de la didactique des mathématiques :

L'enseignement type mise à niveau mathématique traditionnelle ne doit pas constituer la tâche des formateurs. Par contre. le contrôle du niveau en mathématiques fait partie de sa tâche. Des heures de soutien. en marge des heures de préparation au concours peuvent être proposées mais il importe qu'elles diffèrent statutairement.

Il est crucial de profiter de ces changements structurels de la formation pour expliciter ce que doit être un cours de mathématiques pour un futur enseignant en mathématiques. Même s'il s'agit de faire des cours sur tel ou tel sujet mathématiques, ce cours est construit dans une optique d'enseignement. Si l'on se réfère à d'autres secteurs d'activité professionnelle qui ont besoin de mathématiques (économie, médecine, etc...), on pourra réfléchir au parallèle à faire : la formation en mathématiques du futur enseignant est associée à sa future profession. Une mathématique pour les futurs enseignants en mathématiques (c'est la didactique des mathématiques) s'impose donc de fait.

I-4 Les difficultés :

Toutefois, plusieurs écueils apparaissent :

Comment pointer clairement ce nouveau champs de connaissances ?

Comment faire la différence entre une analyse didactique en mathématique et un discours de pédagogie générale ?

Comment ne pas tomber dans un enseignement dogmatique de la didactique ?

Et, bien sûr comment évaluer ?

UN MOYEN POUR PRÉCISER LES OBJECTIFS :

Pour fixer les objectifs de préparation, on peut présenter, dès le début de l'année, une épreuve de concours, afin de faire prendre conscience de la spécificité de la préparation.

DOCUMENTS :

Les ouvrages généraux de didactique ne font pas légions.

La plupart constituent un travail de compilation qui est utile mais qui ne développe pas l'aspect situationniste, c'est-à-dire : voici une situation (a-didactique) :

- Permet-elle l'émergence d'un concept ?
- Dans quelles conditions ?
- Est-elle adaptable en milieu scolaire ?
- Quelles hypothèses puis-je faire sur les comportements attendus ? Etc...

On mesure donc la difficulté qu'il y a à faire vivre un enseignement de la didactique sans proposer un important travail d'analyse de séquences, séquences réalisées avec les étudiants, séquences filmées, séquences effectivement réalisées en classe.

II - LES DEVOIRS : CONSTATS

II-1 Les devoirs de didactiques examinés

(sur cette seule année)

Ils nous montrent que l'ajustement à une formation en didactique des mathématiques reste à poursuivre. Certaines questions posées relèvent trop du bon sens, du discours général...

La partie professionnelle du devoir ne peut pas se limiter à la mise en oeuvre d'un certain bon sens, "pas même professionnel".

Il convient d'éviter les questions trop vagues ou trop ambiguës du genre :

Que pensez-vous de cette préparation ?
La leçon est-elle difficile ?
Les enfants peuvent-ils le faire ?
Quels sont les objectifs de cette activité ?

Les réponses se réduisent le plus souvent à un bavardage incontrôlable, interdisent la validation d'une réflexion sur des problèmes spécifiques liés aux apprentissages en mathématiques.

Quels sont les objectifs de cette activité ? est une question qu'il est bien sûr légitime de se poser, mais qui occasionne trop fréquemment chez des débutants des réponses trop longues, trop diluées où le discours trop généraliste et conventionnel domine. Il convient donc de prendre des précautions en posant cette question.

II-2 Une autre tendance

Elle consiste à suggérer des notions de didactique là où elles ne sont peut-être pas en jeu, avec le (grand) risque de les détourner de leur signification première. (Par exemple réduire la notion de dévolution d'une situation à la recherche de stimulants permettant d'intéresser l'élève au problème posé, ou bien à cataloguer de situation d'action toute situation où les enfants manipulent..., sans parler du découpage arbitraire en quatre phases rituelles). (VOIR EXTRAIT 1)

III-LES DEVOIRS : PRINCIPES GENERAUX

Dans un devoir de didactique, on cherche à évaluer si l'étudiant sait caractériser une activité mathématique et reconnaître les moyens qui permettent ou non, dans un champ de connaissances données, de mettre en place cette activité.

En tout état de cause, tout doit être argumenté.

Puisque cette activité s'adresse en général à des groupes d'enfants, l'étudiant doit être en mesure de faire des hypothèses sur ce qui va influencer le déroulement de la séquence, d'analyser les productions d'enfants et en particulier de faire des hypothèses sur des types d'erreurs.

Une entrée possible et souhaitable dans un devoir de didactique serait de fournir des typologies recensées d'erreurs et de procédures (issus de travaux en didactique), pour analyser des travaux d'enfants. Cette typologie peut avoir été vue en cours ou bien être un document joint au devoir. (Voir EXTRAIT 2).

Nous nous sommes accordés sur les points suivants :

Nous cherchons à évaluer prioritairement si un étudiant :

- est capable de dégager une classification de procédures d'élèves.
- est capable de dégager une classification et une hiérarchie d'erreurs d'élèves, en y intégrant la notion d'obstacle.
- est capable de dégager les principales variables d'une situation et parmi celles-ci les variables didactiques.
- peut amorcer une analyse a priori.
- peut identifier des cadres.

On peut se poser la question de l'utilité de l'institutionnalisation de notions de didactique dès lors qu'elles n'ont pas été ressenties d'une façon ou d'une autre comme outil d'analyse.

IV- EXTRAITS DE DEVOIRS :

Voici les deux extraits dont il est parlé ci-dessus.

EXTRAIT 1 :

Analyse d'une situation d'apprentissage

Documents fournis en annexe :

Doc 1 : "Les triangles colorés" extraits de apprentissages numériques et résolution de problèmes" ERMEL, ed. Hatier Pages 88 et 93 à 97.

Doc 2 : extraits de programmes officiels dans les "cycles à l'école primaire, Hachette Ecoles 1991 , Pages 52 et 104 à 106.

Question 1 (1 point)
Comparez les objectifs de la séquence et le programme officiel de la classe.

Question 2 (1 points) :
Comment le maître peut-il s'y prendre pour intéresser les élèves au problème posé (dévolution du problème) ?

Question 3 (4 points) :
Analyser les différentes phases de cette situation en précisant pour chacune d'elles :

- quelle est la tâche essentielle du maître dans chaque phase ?
- quelle est la tâche essentielle des élèves à chaque phase (action/formulation/validation) ?

Question 4 (2 points) :
Inventez un jeu numérique au niveau cours préparatoire où les enfants auraient à rechercher divers possibles.
Trouvez toutes les solutions possibles de votre jeu.

EXTRAIT 2

(en italiques, figure un exemple de réponse).

I - D'après un travail de l'IREM de Grenoble, les élèves de Quatrième rangent les nombres décimaux selon quatre règles principales erronées.

Voici les règles :

R0 : On ne tient pas compte de la virgule, les nombres décimaux sont considérés comme des entiers sur lesquels est plaquée la virgule.

R1 : La règle de comparaison des entiers est appliquée aux parties décimales considérées seules.

R2 : A partie entière égale, le plus grand est celui qui a le plus de chiffres après la virgule.

R3 : A partie entière égale, le plus petit des deux nombres est celui qui a le plus de chiffres après la virgule.

Donnez, pour chacune de ces 4 règles, une liste de 3 nombres décimaux tels que l'application de la règle réalise un rangement exact, un rangement faux.

exemples:

R0 :	*2,15 4,01 6,12*	***non R0***	*21,5 4,01 1,612*
R1 :	*3,15 4,21 5,22*	***non R1***	*4,15 3,21 2,22*
R2 :	*3,14 3,141 3,1415*	***non R2***	*3,14 3,104 3,1145*
R3 :	*3,014 3,14 3,4*	***non R3***	*4,321 4,32 4,3*

II - Le processus qui consiste à appliquer ses connaissances antérieures dans tout nouveau domaine constitue parfois des obstacles. L'enfant utilise ce que l'on appellera un "**théorème en acte**".

Exemple : dans N - {0,1} : quel que soit x et y, ($x.y > x$) et ($x.y > y$) est un théorème vrai.

II-1 Ce théorème appliqué dans D reste-t-il vrai ?

Il existe 0.2 et 0,3 tels que (0.2x0.3) < 0.2 et (0,2x0,3)<0,3 donc le théorème est faux dans D.

II-2 Parmi les erreurs suivantes, quelle(s) est (sont) celle(s) que l'on peut attribuer à l'application de ce théorème?

(1) 0,8+0,3=0,11
(2) 12,4x0,4=49,6
(3) 0x9,1=9,1

- *Pour (1) on peut raisonnablement faire l'hypothèse que l'enfant considère le décimal comme un couple d'entiers naturels et qu'il additionne donc séparément les deux parties :* $(a,b)+(a',b')=(a+a',b+b')$

- *Pour (2), l'enfant effectue le produit des deux nombres en tant qu'entiers puis place la virgule en se donnant comme règle d'avoir un résultat plus grand.*

- *Pour (3), l'élément neutre de l'addition est considéré comme neutre dans la multiplication.*

II-3 : Un enfant écrit:

$$\begin{array}{r} 11{,}4 \\ \times \quad 5{,}3 \\ \hline 604{,}2 \end{array}$$

Quelle théorème en acte probable vient d'être utilisé?

$a\ 10^n \times b\ 10^n = axb\ 10^n$ ce qui est bien sûr faux.

II-4 : Un enfant place sur la droite numérique croissante 0,2 à gauche de 0,20. Quelle analyse faites-vous?

L'enfant considère donc que 2 < 20 implique 0.2 < 0.20
(voir la règle R2 ci-dessus).

NB : L'IREM de BORDEAUX publie les annales de l'épreuve de mathématiques du concours de recrutement des professeurs d'école.

Analyses de documents à la disposition des maîtres

Titre : Un manuel de CE1 présente la multiplication

Date : 1992

Auteur : Jacqueline EURIAT et Claude RIMBAULT

Type : Analyse de documents à la disposition des maîtres

Résumé : A partir d'un questionnement à propos de deux pages d'un manuel introductives à la multiplication, sensibiliser les maîtres aux problèmes posés par l'introduction à cette opération.

Mots-clés : Multiplication, manuel, transposition didactique.

UN MANUEL DE CE1 PRÉSENTE LA MULTIPLICATION

Le support joint reproduit les pages 52 et 53 du manuel "MATHS CE1 Livre outil" de B. Semenadisse, M. Loumardin, M. Bilheran, A. Charles édité par MAGNARD Ecoles (1990). Cet ouvrage comporte 141 pages et les auteurs proposent une progression en cinq périodes. Ces pages 52 et 53 sont situées en fin de période 2 (Période 2 : de la Toussaint à Noël).

Il s'agit par une série de questions de sensibiliser les maîtres aux problèmes posés par l'introduction de la multiplication. On suppose aussi que cette séquence de formation professionnelle est la première relative à la multiplication.

Le 1) du questionnaire (connaissances scientifiques) peut être traité à part. S'il l'est préalablement, on pourra mesurer son impact sur les réponses à la suite du questionnement.

I - MISE EN OEUVRE

1 - Distribution du support et du questionnaire.

2 - Réponse aux questions par groupe de 3 ou 4 (une réponse unique par groupe pour provoquer déjà un débat interne).

3 - Collecte des réponses et communication (photocopies) de l'ensemble des réponses à l'ensemble des groupes.

4 - Dépouillement en grand groupe : débat général avec mises au point et apports si nécessaire.

5 - Construction par chaque groupe d'une séquence introductive à la multiplication au CE1. Ce travail peut être le support d'une évaluation *(?)* et le point de départ d'une réflexion sur la série des séquences à proposer pour la suite de l'étude.

II - QUESTIONNAIRE

1 - état des lieux de vos connaissances scientifiques sur la multiplication

P_1 : "On a acheté pour la classe 25 livres. Chaque livre coûte 32 F. Combien a-t-on payé ?"

P_2 : "Julie veut habiller sa poupée. Elle a le choix entre 5 corsages et 4 jupes. De combien de façons différentes peut-elle habiller sa poupée ?" (1)

Vous pouvez utiliser ces deux problèmes pour illustrer vos réponses aux questions suivantes :

- Connaissez-vous le mot "multiplicande" ?
- Connaissez-vous le mot "multiplicateur" ?
- Qu'appelez-vous "produit de deux nombres" ?
- Qu'appelez-vous "multiplication" ?
- Dans le problème P_1, la résolution conduit-elle à écrire 32 x 25 ou 25 x 32 ? Et dans le problème P_2 : 4 x 5 ou 5 x 4 ?
- Ecrivez en toutes lettres la lecture que vous faites de 32 x 25.
- 32 x 25 est-il un nombre ?

(1) Ces deux problèmes ont été choisis car ils ne sont pas du même type que ceux cités dans les activités préparatoires du manuel.

2 - état des lieux de vos connaissances pédagogiques sur la multiplication.

- Les deux pages jointes sont extraites d'un manuel. A quelle classe ce manuel est-il destiné ?
- Précisez, si vous pouvez la citer, la période de l'année où ces pages seront utilisées.
- A votre avis, y a-t-il des connaissances exigibles des enfants avant d'aborder cette fiche ? Si oui, lesquelles ?

3 - L'examen de la fiche

(cette fiche est la première du manuel relative à la multiplication).

Le titre ("addition et multiplication : produit de deux nombres")
- Quels sont, pour les enfants, les mots nouveaux du titre ?
- Avez-vous des commentaires à faire sur l'articulation des mots et la ponctuation de ce titre ?
- Quelle importance accordez-vous au titre ?

"Activités préparatoires" (sic)
- A quoi préparent ces "activités préparatoires" ?
- Sont-ce des situations-problèmes ?
- Les deux activités sont de même nature. Alors, quel est l'intérêt de la présentation de deux activités de même nature ?
- On obtient dans la première activité :

"Addition : 4 + 4 = 8" et "Multiplication : 4 x 2 = 8".

Quel lien entre ces deux opérations l'enfant peut-il percevoir ?
- Dans la deuxième activité voyez-vous une autre façon d'écrire et de calculer le nombre de verres ?
- Avez-vous des remarques à faire sur la taille des nombres proposés ?

"Exercices" (resic)
- Justifiez le mot "exercices".
- Les exercices 1 et 2 sont-ils des exercices d'application ?
- Si vous avez remarqué une faute de frappe, rectifiez-la.
- L'exercice 3 est-il encore un exercice d'application ? Son objectif est-il de même nature que celle des objectifs des exercices 1 et 2 ?
- Dans l'exercice 3, la réponse (3 x 2) = 6 à la question (3 x ...) = ... est-elle acceptable ?
- En quoi les activités préparatoires permettent-elles de résoudre l'exercice 4 ?
- Accepteriez-vous 4 x 7 7 + 7 + 7 + 7 28 ?
- Que pensez-vous de la consigne de l'exercice 4 : "en suivant l'exemple, complète le tableau" ?
- Pour répondre à l'exercice 5, quelles procédures l'enfant peut-il utiliser ?

"Problèmes" (resic)
- Justifiez le mot "problèmes".
- Donnez plusieurs "organisations" de la collection de points du problème 2.

Votre regard sur cette fiche

(titre, contenu, cohérence des exercices, articulation de la séquence,...., dévolution,..., "part" du maître, "part" de l'élève,... etc...)

III - ANNEXE

Des pistes pour le point 4. de la mise en oeuvre (débat) :
- addition et/ou multiplication ?
- la multiplication : une opération à part entière ?
- multiplication et produit.
- situations-problèmes.
- autres situations introductives à la multiplication.
- taille des nombres mis en jeu.
- rôle de chacun des deux termes d'un produit ? (lien avec la commutativité).
- lignes et colonnes.
- opportunité de la recherche de l'écriture canonique du nombre exprimé par un produit.
- rôle et place des exercices, des problèmes,...
- quelle véritable activité pour l'élève ?

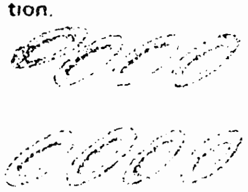
Extrait de "Livre Outil CE1" p52-53

Activités préparatoires

1 Indique le nombre d'assiettes contenues sur ces étagères.

a) En effectuant une addition.

b) En effectuant une multiplication.



1re rangée . 4 assiettes

2e rangée . 4 assiettes

Addition . . + ...

- Nombre d'assiettes dans une rangée . . .
- Nombre de rangées . . . . . .

Le nombre total d'assiettes peut s'écrire sous la forme d'un produit :

Nombre d'assiettes dans une rangée × Nombre de rangées

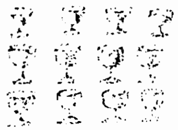
(. × .) . . .

Multiplication : . . × . . .

2 Indique le nombre total de verres de cette collection.

a) En effectuant une addition.

b) En effectuant une multiplication.



. . verres

. . verres

. . verres

Nombre de verres dans chaque rangée × Nombre de rangées

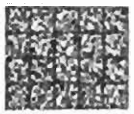
(. . × . .) . . .

a) . + . . + . . = . .

b) . . × . . = . .

Exercices

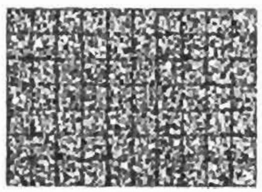
1 Complète pour indiquer le nombre de carreaux.



5 + 5 + 5 + 5 = . .

(5 × .) = . .

2 Même exercice



10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = . . .

(10 × .) = . .

3 Complète.

3 + 3 + 3 + 3 + 3 = . . .

(3 × . . .) = . . .

7 + 7 + 7 + 7 = . . .

(7 × . . .) = . . .

4 + 4 + 4 + 4 + 4 = . . .

(4 × . . .) = . . .

12 + 12 + 12 = . . .

(12 × . . .) = . . .

4 En suivant l'exemple, complète le tableau.

6 × 3	6 + 6 + 6	18
8 × 4		
15 × 2		
4 × 7		
9 × 5		

5 Complète à l'aide du signe >, < ou =.

3 + 3 . . . 3 × 3

5 + 5 + 5 . . . 5 × 3

7 × 5 . . . 7 × 6

Calcul mental

8 + …

8 + 2

10 + 5 = 15

(passage par 10)

Effectue

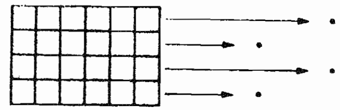
6 + 9	5 + 8
7 + 5	7 + 9
9 + 4	8 + 6

Problèmes

1 Indique le nombre de cubes de couleur.

a) En effectuant une addition.

b) En effectuant une multiplication.



a) Addition

b) Multiplication

2 Dessine, en l'organisant, la collection de points qui correspond au calcul suivant :

$9 \times 3 = 27$

Titre: Introduction des décimaux dans les manuels

Auteurs:Jeanne BOLON (PIUFM) Marianne FRÉMIN (PIUFM) Nicole LABRUNIE (IMF)

Date: 1992

Type: questionnaire pour l'utilisation des manuels

Résumé: questionnaire pour aider à comprendre les choix des auteurs de manuel dans l'introduction des décimaux. Analyse de quatre manuels couramment utilisés dans les classes.

INTRODUCTION DES DECIMAUX DANS LES MANUELS

Plan

I- * Objectifs à atteindre dans les différentes présentations des décimaux
*** Questionnaire proposé pour une analyse des manuels**

II- Présentation des décimaux

1)"Objectif-Calcul" CM1
Y Clavier J Bia C Maréchal Hatier 1987

2)
* "Math et Calcul au CM1"
R Eiller S Ravenel R Ravenel Hachette 1987
* "Calcul et géométrie" CM1
Collection Chapuis Nathan 1989
* "Livre-outil" CM1
B Semenadisse A Charles M Bihéran M Loumardin Magnard 1990

1 - Les objectifs

a) Objectifs à atteindre dans les différentes présentations des nombres décimaux* (APM)

Publié dans "Aides pédagogiques pour le Cycle Moyen" 2. Nombres décimaux Elem-math VIII p 57 (Publication de l'APMEP).

OBJECTIFS CONCEPTUELS

- se rendre compte de l'insuffisance des entiers naturels pour résoudre certains problèmes.
- créer de nouveaux nombres pour résoudre des problèmes qui n'avaient pas de solution dans les entiers.
- prolonger aux nouveaux nombres l'ordre qu'on avait sur les entiers
- concevoir qu'entre deux nouveaux nombres, on peut toujours en intercaler un autre.
- prolonger aux nouveaux nombres l'addition, la soustraction, la multiplication, la division.
- utiliser les nouveaux nombres dans les situations d'approximations. Par exemple trouver des solutions approchées à des problèmes se traduisant par des équations du type :

  $a.x = b$ avec a et b entiers
  $x.x = c$ avec c entier ou
  $x.y = c$ avec c entier.

OBJECTIFS DE COMMUNICATION ET SAVOIR-FAIRE

- créer des codages pour transmettre des informations.
- élaborer un (ou plusieurs) système cohérents de codage (fractions, décimaux).
- faire le lien entre les codages créés et les nouveaux nombres
- passer d'une écriture à une autre pour les nouveaux nombres.
- élaborer un algorithme de comparaison pour les décimaux.
- mettre en place une technique opératoire pour les décimaux.
- utiliser les nouveaux nombres dans les situations différentes de celles qui ont permis leur approche, en particulier celles que l'on rencontre dans la vie courante.

b) Analyse de manuels proposée par Jeanne Bolon en formation d'instituteurs

- Quelles connaissances sont supposées acquises pour démarrer l'activité proposée ?
- Y a-t-il introduction artificielle ou plausible? Quelle règle est mise en évidence? Quel problème est à résoudre ?
- Ce qui est obtenu est-il relié aux connaissances antérieures ?
- Quels instruments de contrôle sont proposés ?
- Quelle place est faite à la calculatrice ?
- Quelle place est faite aux nombres tabous: ceux qui ont des zéros intercalaires ou ceux qui sont plus petits que 1 ou encore ceux dont la partie décimale commence par plusieurs zéros ?
- Comment les différences entre entiers et décimaux sont-elles abordées ?
- Quelle liaison est faite avec la division des entiers? et les fractions usuelles ?

2 - Les manuels

1) "Objectif Calcul"

Seul manuel à ne pas introduire les décimaux par le biais des fractions. Ils sont présentés comme "des nouveaux nombres qui se situent dans les intervalles entre deux entiers consécutifs". L'ensemble des décimaux "apparaît comme une extension de l'ensemble des entiers". Ils peuvent être placés sur la droite numérique et être rangés. Les règles pour les écrire sont "un prolongement de celles des entiers naturels".

Après une leçon qui les présente en tant que tels, trois sont consacrées aux dixièmes avec une étude très approfondie de leur fonctionnement puis est étudié dans la leçon suivante leur utilisation dans la pratique: "ils servent à exprimer des mesures et en particulier celles de longueur en cm et mm". Enfin sont étudiés les centièmes et les millièmes et autres... en montrant qu'ils "permettent d'approcher d'aussi près que l'on veut, en ajoutant des décimales, un nombre inconnu" c'est-à-dire que l'on approche ici la notion de l'infini dans la partie décimale d'un nombre à virgule

Suivent 6 leçons: ordre dans D, addition et soustraction, différentes écritures, multiplication par un entier, utilisation dans les mesures et les problèmes.

2) Les fractions dans les trois autres manuels

Pour eux, l'approche se fait par deux ou trois leçons consacrées aux fractions introduites:

**** "Math et Calcul"***

par la mesure partage utilisant le pliage de bandes, puis repérage par intercalation en plaçant des fractions usuelles sur une ligne graduée de 0 à 1 pour aboutir à l'utilisation du papier millimétré sur lequel sont codées et situées des fractions décimales (dixièmes, centièmes, millièmes).

**** "Calcul et géométrie"***

par l'évaluation d'une longueur avec une unité non standard et le partage d'un segment.

**** "Livre-outil"***

par le partage d'objets "réels" : tablettes de chocolat, tartes, segments

3) Les nombres décimaux:

Un nombre plus ou moins grand de leçons leur est consacré avec parfois mais assez rarement accompagnement d'exercices de calcul mental.

**** "Math et Calcul":***

2 leçons principales: on arrive très vite aux dixièmes, centièmes, millièmes,l'ensemble étant traité en une seule leçon, la deuxième abordant déjà leur comparaison et les trois dernières portant sur les opérations:l'addition, la soustraction et la multiplication par un entier.

**** "Calcul et géométrie"***

9 leçons leur sont consacrées: une pour les dixièmes, une pour les centièmes , une pour les millièmes puis les nombres décimaux.

Dans la quatrième ils sont définis comme quotient d'une division par dix et cent: division "sans reste" puisqu'après les entiers il est possible de continuer en transformant le rest, les unités sont transformées en dixièmes, les dixièmes en centièmes .....

Puis suivent: comparaison des nombres décimaux, opérations (+ - x par un nombre entier), la dernière leçon étant consacrée à des problèmes pris dans la vie courante

**** "Livre-outil"***

une seule leçon dans laquelle tout est "découvert", les 5 suivantes traitant de la comparaison, des opérations (+ - x par un nombre entier et la dernière consacrée aux "mesures et nombres décimaux" avec conversions et problèmes de vie courante.

ANNEXE Résumé du contenu des manuels

Objectif calcul CM1
Y Clavier J Bia C Maréchal

Nombres décimaux (13 leçons)

1 - De nouveaux nombres

• Problème proposé : recherche des largeurs d'un rectangle à aire constante.

proposition de codage L = 18:4 (désignation d'un nombre)

Place de ces "modules-nombres" avec support géométrique

utilisation papier millimétré

Prolongement des entiers :
encadrement ...< L < ...

• Renforcement que l'idée que ces nouveaux nombres sont une extension des nombres entiers

Ordre sur la droite numérique

2 à 4 : Les dixièmes (3 leçons)

• Introduction directe de l'écriture décimale comme synonyme des écritures précédentes (15 : 10 = 1.5) en fixant une dimension égale à dix.

La calculette justifie cette nouvelle écriture.

•Ecriture de nouveaux nombres. les placer sur la droite numérique. écart entre deux nombres qui se suivent et algorithmes

•Dernier exercice : "découper des bandes de longueurs données et les classer de la plus courte à la plus longue puis ranger de la même façon les nombres qui les expriment".

• Introduction des opérateurs x10 et /10

• Décomposition canonique avec apparition de l'écriture (8x0.1) (5x 1/10)

• Tableau de numération

-"10 dixièmes c'est une unité"

- Placer des points sur des droites numériques d'échelles différentes

• Opérateurs /10

• Nommer des points sur une droite numérique

• Compter de 0.3 en 0.3

• Relier des points

5 - Nombres décimaux et mesures de longueur

Conversions de cm en mm et vice-versa

6 - Les centièmes

Opérateur : /100

• Résultats à compléter à l'aide de la calculatrice

• Visualisation avec une loupe du dixième partagé en 10 parties

• Placer les nombres obtenus sur la droite numérique

• Tableau de numération

• Ecriture en chiffres et en lettres

• Suppression des zéros inutiles

7 - les millièmes et les autres

• Trouver des points dont le produit des coordonnées est égal à 42 (graphique sur papier millimétré).

parmi eux y a-t-il un point dont les coordonnées sont égales (recherche par approche de la racine carrée avec la calculatrice)

• valeurs approchées

• encadrement

• Pour trouver des résultats de plus en plus précis. on peut utiliser des nombres décimaux avec plusieurs chiffres après la virgule

Visualisation avec une loupe du centième partagé en 10 parties. chaque partie représentant un millième

• tableau de numération

• 6.371 se dit virgule trois cent soixante et onze millièmes ou six unités. trois dixièmes. sept centièmes. un millième

Math et Calcul CM1

R Eiller S et R Ravenel

Fractions (2 leçons)

1 - Pliage de bandes en 2, 3 ou 4 parties

Utilisation des mots : demi, tiers, quart

- codage des plis, écritures fractionnaires
- Report de ces écritures sur la droite numérique entre 0 et 1
- Egalité de fractions
- Sur papier millimétré, introduction des fractions décimales
- Fractions plus grandes que l'unité
- Ecriture littérale, écriture chiffrée
- Egalité de fractions
- Changement de support : le disque

2 - Additions et soustractions de fractions de même dénominateur

- Ecriture d'une fraction sous forme de parties entières et fractionnaires
- Recherche des parties entières
- Petit problème utilisant les opérations étudiées.

Nombres décimaux (5 leçons)

1 - Partie entière de nombres exprimés en dixièmes, centièmes et millièmes.

- Décomposition canonique
- Tableau de numération (nombres entiers et à virgule)
- Interprétation de "nombres concrets" : francs, mètre et kilogramme sous forme de fractions décimales
- écriture décimale, écriture fractionnaire
- zéros superflus ou non
- Problème thème : écriture des nombres décimaux

Calcul mental : /10 100 1000

2 - Comparaison de décimaux en les situant sur une droite graduée

Les trois leçons suivantes portent sur les opérations sur les décimaux

(+ - x par un entier)

Calcul et Géométrie CM1
Collection Chapuis

Fractions (3 leçons)

1 - Première présentation
Par les mesures :
Evaluation d'une longueur avec une unité non standard. Encadrement avec les demis et les quarts
- Vocabulaire : numérateur, dénominateur, fraction, tiers, quart.

2 - La machine à partager
- Utilisation du guide-âne
- Codage de points sur la droite numérique : 2/6 = 3/9
- Utilisation du guide-âne pour partager en 12, 6, 4, 3
écritures équivalentes
- Travail sur la droite numérique
Ecrire des entiers en fractions et reconnaître des fractions représentant des entiers

3 - Les fractions : comparaison
Rangement de fractions en ordre croissant et décroissant.

Nombres décimaux (9 leçons)

1 - Les dixièmes : fractions particulières
- avec le guide-âne, partage d'un segment en 10 parties
- codage des points : écriture à virgule et fraction décimale
- Repérage le chiffre des dixièmes dans un nombre
- Codage de points sur une droite graduée
- Utilisation de la relation : "... précède d'un dixième..."

2 - les centièmes - Partages
- Partage avec le guide-âne millimétré "nouveaux nombres" entre 0,4 et 0,5
- Matérialisation de tous les centièmes et visualisation sur une droite graduée de 0 à 1
- codage de quelques points
écriture à virgule, écriture fractionnaire, repérage du chiffre des centièmes
- Utilisation de la relation : "précède d'un centième ..."

3 - les millièmes, des partages sans fin
agrandissement et partage en dix d'un centième
- codage et décodage de points
- tableau de numération
- Exercices analogues à ceux concernant les dixièmes et les centièmes

4 - Les nombres décimaux et la division, une division sans reste
- Division par dix et cent :
ex : 263:10 263:100 film de la technique dans les deux cas.
- introduction des opérateurs /10 /100 sur des tableaux de nombres
- petits problèmes réinvestissement de la division par 10 et par 100

Math CM1 Livre Outil

B Semenadisse A Charles M Biheran M Loumardin

Fractions (3 leçons)

1 - Fraction d'une tablette de chocolat, de tartes et de segments

- Introduction du vocabulaire : numérateur et dénominateur
- Colorier des fractions d'aires
- Comparaison de fractions par rapport à l'unité
- Classement de fractions de même dénominateur

2 - Les fractions décimales

- Evaluer la fraction d'un trajet de 10 km en dixièmes, centièmes, millièmes
- Code couleur : dixièmes en bleu, centièmes en rouge, millièmes en vert
- Travail sur deux échelles différentes

Graduer un segment en dixièmes

- Ordonner des fractions en dixièmes et centièmes
- Coder des points

3 - Les fractions : addition, soustraction, décomposition

Nombres décimaux (6 leçons)

1 - Tableau de numération pour écrire les nombres à virgule

- code couleur
- les nombres sont écrits sous différentes formes

17 213/1000

= 17000/1000 + 200/1000 + 10/1000 + 3/1000

= 17 + 2/10 + 1/100 + 3/1000

= 1 dizaine 7 unités + 2 dixièmes + 1 centième + 3 millièmes

- suppression des zéros inutiles

2 - comparaison de nombres décimaux

- comparaison de prix et de longueurs

Calcul mental : Compter de dixièmes en dixièmes, de centièmes en centièmes

Titre : Multiplication des nombres décimaux

Date : mars 1992

Auteurs : Alain Descaves, Marie-Lise Peltier, Hervé Péault

Type : Proposition de questionnaire pouvant servir de support à une séquence de formation ; analyse de manuels sur le thème de la multiplication des nombres décimaux.

Origine : Questionnaire élaboré lors du stage de Pau

MULTIPLICATION DES NOMBRES DÉCIMAUX

Nous avons cherché à construire un questionnaire permettant de travailler en formation à partir de comparaison de manuels sur le thème de la multiplication des décimaux.

Nous avons choisi 6 manuels et retenu deux extraits pour chacun d'eux dans les livres de l'élève (correspondant aux activités dites "recherche" ou "activité préparatoire" ou "découverte"...) :

- la première page du livre de CM1 présentant la multiplication d'un décimal par un naturel. (Cette présentation est en général reprise dans le manuel de CM2 avant d'aborder le produit de deux décimaux)
- la première page du livre de CM2 présentant la multiplication de deux nombres décimaux.

Les manuels qui nous ont servi de référence sont les suivants (mais on peut aussi en choisir d'autres ou n'en prendre qu'une partie) :

1) Manuels de CM1 : Multiplication d'un entier par un décimal

- "*Mathématiques*" (Bordas, collection Thévenet, 1986) p. 136
- "*Math et Calcul*" (Hachette, 1987), p. 176
- "*Math. Livre Outil*" (Magnard, 1990) p. 164
- "*Calcul et géométrie*" (Nathan, collection Chapuis 1989) p. 154-155
- "*Objectif calcul*" (Hatier, 1987) p. 180
- "*Vivre les mathématiques*" (A. Colin, 1990) p. 131

2) Manuels de CM2 : Multiplication de deux nombres décimaux

- "*Mathématiques*" (Bordas, collection Thévenet, 1986) p. 63
- "*Math et Calcul*" (Hachette, 1988) p. 142
- "*Math. Livre Outil*" (Magnard, 1988) p. 58
- "*Calcul et géométrie*" (Nathan, 1989) p. 90
- "*Objectif calcul*" (Hatier, 1988) p. 28
- "*Vivre les mathématiques*" (A. Colin, 1991) p. 59-60

La procédure de travail que nous avons envisagée est la suivante :

- distribution par petits groupes d'une copie de chacune des pages concernées, étude à partir du questionnaire,
- puis mise en commun.

Préalablement, il serait opportun, pour chaque manuel, d'étudier le mode d'introduction des nombres décimaux (cf. chapitre précédent : "étude de l'introduction des décimaux dans les manuels").

Multiplication d'un décimal par un entier. Étude des manuels de CM1

1) Tâche

- Le manuel est-il conçu pour que l'élève lise et prenne acte de ce qui lui est indiqué, ou pour qu'il réalise lui-même une certaine tâche ?

- Dans ce dernier cas, quelle est la nature de cette tâche :

- tâche guidée de bout en bout ?
- problème posé sans méthode préalablement donnée ? Dans ce cas, quel est le problème ? Est-il défini de façon claire ?
- quelles réponses ou quelles procédures sont attendues ?

2) Aides et aide-mémoire

- Quelles sont les aides prévues dans le manuel ? Quel est leur lien avec la situation proposée ?
- Analyser en particulier l'aide proposée dans "Math, Livre Outil"
- Qu'est-ce qui est institutionnalisé ? sous quelle forme ?
- Qu'est-ce qu'on veut que les enfants aient retenu et acquis comme savoirs et savoir-faire ? Quelle adéquation y a-t-il avec la situation proposée ?

3) Le sens

Le produit d'un décimal par un entier peut prendre du sens à partir de plusieurs types de situations. Les conceptions sous-jacentes peuvent être diverses :

- Mesure-produit (extension aux décimaux de la signification d'un produit désignant le nombre de cases d'un quadrillage)
- Addition réitérée de nombres décimaux
- Retour aux entiers par changement d'unité
- Composition de fonctions numériques (par exemple, "multiplier par 5,3" correspond à "multiplier par 53" puis "diviser par 10")
- Interprétation de résultats donnés par une calculatrice
- Représentation d'un algorithme (calculer sans tenir compte de la virgule, placer la virgule selon une règle donnée).

Pour chaque extrait, sur quelle(s) conception(s) s'appuie-t-on ?

Multiplication de deux décimaux. Étude des manuels de CM2

Pour chaque extrait, étudier le passage de la multiplication d'un décimal par un entier à la multiplication de deux décimaux.

- Les conceptions sous-jacentes aux situations d'introduction de la multiplication d'un entier par un décimal citées précédemment peuvent-elles s'étendre au cas du produit de deux décimaux ?

- Ce passage est-il
  . montré ?
  . construit ?
  . justifié ?
  . non traité ?

- Quelques questions sur divers extraits :

. "*Thévenet*" : trouver l'erreur... Quel est l'objectif poursuivi ?

. "*Math et calcul*" : Quelles remarques vous inspire la question relative à la disposition des calculs ? Plus généralement, y a-t-il des différences sur le choix d'une présentation des calculs dans les différents extraits ?

. "*Livre Outil*" : Analyser encore l'aide apportée...

. "*Objectif calcul*" : Quels moyens l'enfant a-t-il pour accomplir la tâche proposée ?

. "*Vivre les mathématiques*" : A quel moment est-il question de la multiplication de deux décimaux ? Quels moyens l'élève a-t-il alors pour répondre ?

- Quelle(s) proposition(s) feriez-vous pour introduire le produit de deux nombres décimaux ? Sur quelle(s) conception(s) vous appuieriez-vous ?

"MATHÉMATIQUES CM1" THÉVENET p136

Le produit d'un nombre décimal par un nombre entier

Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier

Barnabé a acheté 4 bouteilles de jus de raisin à 6,85 F pièce.
Calculons le montant de la dépense.

La dépense, calculée en francs, est égale à la somme :

$$6{,}85 + 6{,}85 + 6{,}85 + 6{,}85 = 27{,}40$$

On peut écrire : $6{,}85 \times 4 = 27{,}40$
ou $4 \times 6{,}85 = 27{,}40$

Technique opératoire :

dépense calculée en ...... dépense calculée en ......

$$\begin{array}{rr} & 685 \\ \times & 4 \\ \hline & 2740 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 6{,}85 \\ \times & 4 \\ \hline & 27{,}40 \end{array}$$

Pour calculer le produit d'un nombre décimal par un nombre entier :

- **on effectue les calculs sans tenir compte de la virgule ;**
- **au résultat on place la virgule en laissant autant de chiffres à droite qu'il y a de chiffres après la virgule dans le nombre décimal.**

Multiplication d'un nombre décimal par 10, 100, 1 000...

Calculons les produits :

$3{,}25 \times 10$ — $45{,}23 \times 100$ — $2{,}13 \times 1\,000$

$$\begin{array}{rr} & 3{,}25 \\ \times & 10 \\ \hline & 32{,}50 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 45{,}23 \\ \times & 100 \\ \hline & 4523{,}00 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 2{,}13 \\ \times & 1000 \\ \hline & 2130{,}00 \end{array}$$

$3{,}25 \times 10 = 32{,}5$ — $45{,}23 \times 100 = 4\,523$ — $2{,}13 \times 1\,000 = 2\,130$

Le produit d'un nombre décimal par 10, 100, 1000 s'obtient en déplaçant la virgule dans ce nombre, de un, deux ou trois rangs vers la droite.

"MATH et CALCUL CM1" EILLER p 176

38 Multiplication d'un nombre décimal par un nombre naturel

RECHERCHE

1 Voici deux tickets de caisse :

A
565
565
565
1695

B
5.65
5.65
5.65
16.95

a/ Écris le produit que la marchande aurait pu faire à la place de l'addition du ticket **A**.

- Calcule ce produit à l'aide de ta calculatrice.

b/ Fais le même travail pour le ticket **B**.

- Que constates-tu ?

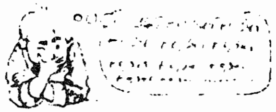
2 ***Quelques cas particuliers***

a/ Additionne dix fois le nombre 2.34. Calcule ensuite le produit 2.34 × 10 en utilisant ta calculatrice.

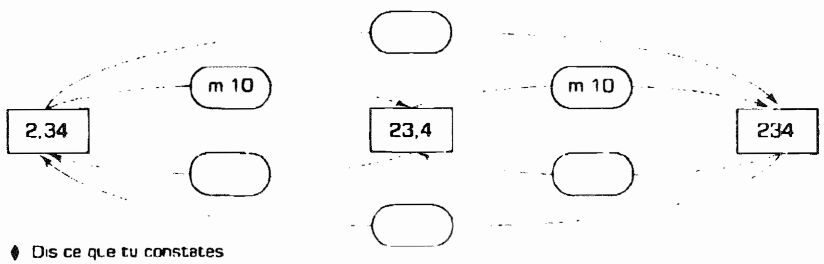
- Que constates-tu ?

Tu sais maintenant multiplier un nombre décimal par 10.
Indique comment tu calcules le produit 0.345 × 100.
Même question pour le produit 5.368 × 1 000.

Justifie ta réponse dans chaque cas.



b/ Recopie et complète le schéma ci-dessous.

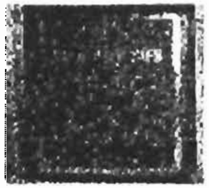


- Dis ce que tu constates.

Activités préparatoires

[1] Voici des albums photo : ils sont vendus par lot de quatre.

Calcule le prix d'un lot d'albums photo.



48,55 F
l'album

POUR T'AIDER

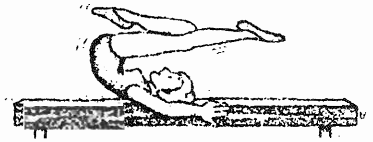
$$\begin{array}{r} 48,55 \\ \times \quad 4 \\ \hline \end{array}$$

• Effectue la multiplication sans t'occuper de la virgule.

• Place une virgule au résultat de façon qu'il y ait autant de chiffres décimaux qu'au multiplicande.

[2]

• À combien reviendra une poutre de chêne de 6,2 mètres de longueur ?



POUTRES CHÊNE

• Poutre chêne (poinçon non traité)
le mètre linéaire 42 F

POUR T'AIDER

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times \ 6,2 \\ \hline \end{array}$$

• Effectue la multiplication sans t'occuper de la virgule.

• Place une virgule au résultat de façon qu'il y ait autant de chiffres décimaux qu'au multiplicateur.

[3] Un crayon feutre est vendu 2,85 francs.

• **Quel est le prix de 10 crayons feutre ? de 100 crayons feutre ?**

POUR T'AIDER

• Effectue les multiplications sur ta calculatrice.

• Que remarques tu ?

Exercices

[1] **Sans poser d'opération, effectue :**

2,45 × 10 =	0,3 × 10 =
2,306 × 100 =	13,6 × 100 =
0,002 × 100 =	1,005 × 1 000 =
4,25 × 1 000	9,9 × 1 000 =

[2] **Pose et effectue :**

2,48 × 4 =	268 × 5,6 =
405,5 × 22 =	67 × 2,58 =
43,6 × 26 =	783 × 0,98 =
314 × 3,5 =	27 × 4,46 =

Problèmes

[1] Un timbre poste coûte 2,30 francs.

Quel est le prix d'un carnet de 10 timbres ? d'un carnet de 20 timbres ? (Donne les réponses sans poser d'opération.)

[2] Dans une scierie, on empile 35 planches de 2,7 centimètres d'épaisseur.

Calcule la hauteur du tas en centimètres, puis exprime le résultat en mètres.

[3] Pour s'entraîner, un skieur de fond effectue, chaque jour, 10 tours d'un circuit de 2,250 kilomètres.

Quelle distance aura-t-il parcourue au bout de 10 jours d'entraînement ? (Effectue les calculs de deux manières différentes.)

[4]

Pour l'achat de ce bracelet gourmette, le bijoutier offre deux possibilités de paiement :

• un paiement comptant de 4 425 francs,

• ou un paiement en 6 mensualités de 775,25 francs.

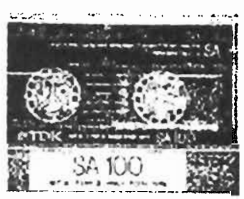
À partir de ces données, invente un énoncé de problème puis donnes-en la solution.

[5] Mon porte monnaie contient : 1 billet de 50 francs, 3 pièces de 10 francs, 1 pièce de 5 francs, 2 pièces de 1 franc et 3 pièces de 0,50 franc.

• **Quelles solutions ai-je pour payer 3 cahiers valant 13,50 francs l'un ?**

• **Si j'utilise seulement le billet de 50 francs, combien me rendra-t-on ?**

Mémento



CASSETTES AUDIO
à l'unité : 11,75 F
Vendues par lot de 5
ou par lot de 10

Calcule le prix d'un lot de 5 cassettes-audio, puis le prix d'un lot de 10.

• **Prix d'un lot de 5**

$$\begin{array}{r} 11,75 \\ \times \quad\ \ 5 \\ \hline 58,75 \end{array}$$

Pour multiplier un nombre entier par un nombre décimal :

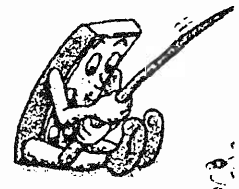
• **On effectue la multiplication sans s'occuper de la virgule.**

• **On place la virgule au résultat de façon qu'il y ait autant de chiffres décimaux qu'au multiplicande (ou multiplicateur).**

• **On supprime les zéros inutiles.**

• **Prix d'un lot de 10**

La calculatrice indique :
11,75 × 10 = 117,5



Pour multiplier un nombre décimal par 10, 100, 1 000, on déplace la virgule de **1, 2 ou 3 rangs vers la droite.**

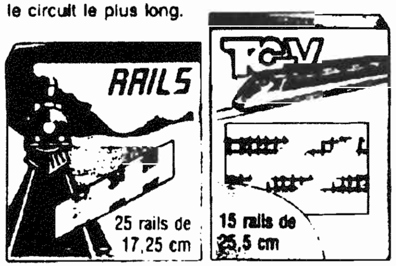
Calcul mental

Effectue :
• 1,75 × 10 ; 26,22 × 10 ; 0,7 × 10.
• 9,333 × 100 ; 11,25 × 100 ; 1,2 × 100.
• 0,12512 × 1 000 ; 3,14 × 1 000.

MULTIPLICATION D'UN DÉCIMAL PAR UN ENTIER

Circuit de train électrique

Pierre hésite entre ces deux boîtes pour monter le circuit le plus long.



Pour calculer la longueur possible de chaque circuit, Pierre doit effectuer des multiplications.

$\boxed{25{,}5 \times 15}$

Pierre transforme 25,5 de façon à supprimer la virgule.

Opération en unités		Opération en dixièmes
25,5 × 15	→ (× 10) →	255 × 15
		1275
		255
382,5	← (: 10) ←	3825

$\boxed{17{,}25 \times 25}$

Opération en unités		Opération en centièmes
17,25 × 25	→ (× 100) →	1725 × 25
		8625
		3450
431,25	← (: 100) ←	43125

Le circuit le plus long est obtenu avec les rails de la deuxième boîte.

A toi de calculer

2,75 × 13	→ ( ) →	275 × 13
•••		•••
•••		•••
••••	← ( ) ←	••••
27,5 × 13	→ ( ) →	••• × 13
•••		•••
•••		•••
••••	← ( ) ←	••••
0,275 × 13		
••••		
••••		
•••••		

Compare les résultats obtenus.
Que remarques-tu ?

Pour calculer le produit d'un nombre décimal et d'un nombre entier :

— on effectue les calculs comme pour une multiplication de nombres entiers,

— on place la virgule au résultat en comptant le nombre de chiffres après la virgule du nombre décimal.

$\boxed{5{,}17 \times 13}$

5,17 × 13	→ (× 100) →	517 × 13
		1551
		517
67,21	← (: 100) ←	6721

TRAVAUX ET EXERCICES

★

1 Indique les résultats de chaque multiplication sans poser les opérations.

2,7 × 10	4,3 × 10
2,59 × 10	5,45 × 10
0,28 × 10	3,4 × 10
7,28 × 100	49,7 × 100
125,6 × 100	3,56 × 100
0,42 × 100	243,7 × 100

2 Complète.

42,5 × … = 425	7,5 × … = 750
21,3 × … = 2 130	2,43 × … = 243
0,94 × … = 9,4	9,4 × … = 940

3 Pose et effectue.

27,7 × 13	0,19 × 6
9,67 × 33	7,43 × 25
2,345 × 7	47,6 × 204
213 × 2,5	437 × 2,08
743 × 7,9	64 × 8,3
125 × 31,5	821 × 20,4

★★

4 Effectue ces multiplications sans les poser.

43 × 0,3	438 × 0,5
20 × 0,4	74 × 0,2
204 × 0,4	40 × 0,6
27 × 0,02	247 × 0,02
700 × 0,04	76 × 0,04
925 × 0,05	50 × 0,07

5 Reproduis et complète ce tableau.

×	243	150	900	72	40	8
3						
0,3						
0,03						
0,003						

★★★

6 Effectue ces multiplications. Attention, certains zéros sont inutiles !

1,35 × 270	7,80 × 150
450 × 1,20	2,72 × 250
3,70 × 207	800 × 6,30

7 Utilise la première multiplication pour compléter les égalités.

$\boxed{78 \times 13 = 1\,014}$	$\boxed{27 \times 31 = 837}$
7,8 × 13 = …	27 × 3,1 = …
78 × 1,3 = …	2,7 × 31 = …
78 × 0,13 = …	0,27 × 31 = …

8 Une institutrice achète pour sa classe des écheveaux de fil à broder.

Un écheveau coûte 10,80 F.

Voici l'assortiment de couleurs qu'elle choisit :

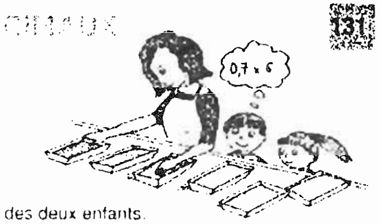
15 écheveaux bleus	12 écheveaux jaunes
8 écheveaux verts	10 écheveaux rouges.

Quelle sera sa dépense totale ?

"VIVRE LES MATHÉMATIQUES CM1" p131

MULTIPLICATION DES DÉCIMAUX 131

1 La maman de Sophie et de Julien prépare de la glace qu'elle met dans des récipients de 0.7 l
Elle remplit 6 récipients.
Quelle quantité de glace a-t-elle préparée ?



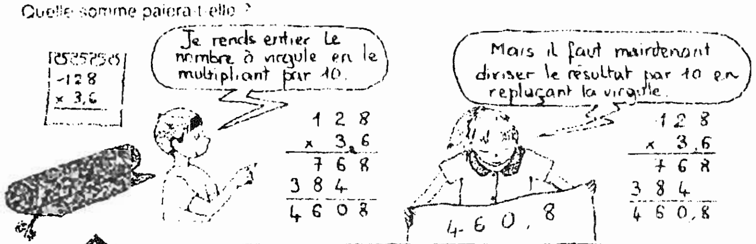
Compare les calculs des deux enfants.

$0,7\ell = \frac{7}{10}$ de ℓ $\frac{7}{10}+\frac{7}{10}+\frac{7}{10}+\frac{7}{10}+\frac{7}{10}+\frac{7}{10} = \frac{42}{10} = 4,2$ $0,7 \times 6 = 4,2$ $4,2\,\ell$ Sophie	$0,7\,\ell = 7\,d\ell$ $7\,d\ell + 7\,d\ell + 7\,d\ell + 7\,d\ell + 7\,d\ell + 7\,d\ell = 42\,d\ell$ $42\,d\ell = 4,2\,\ell$ $0,7 \times 6 = 4,2$ Julien

2

7×2.5 $(7 \times 2) + (7 \times 0.5)$ $14 + 3.5$ $7 \times 2,5 = 17.5$	6×4.32 $(6x4) + (6x0.3) + (6x0.02)$ $24 + 1.8 + 0.12$ $6 \times 4,32 = 25.92$	Calcule de la même manière: 0.6 x 8 — 6 x 2.4 9 x 3.2 — 12 x 0.4 5 x 2,74 — 8 x 2.35

3 Madame Leblanc achète 3.60 m de tissu à 128 F le mètre
Quelle somme paiera-t-elle ?



$$\begin{array}{r} 128 \\ \times\ 3,6 \\ \hline 768 \\ 384\ \ \\ \hline 4608 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 128 \\ \times\ 3,6 \\ \hline 768 \\ 384\ \ \\ \hline 460,8 \end{array}$$

Pour mutiplier un nombre entier par un nombre décimal,
on effectue la multiplication sans tenir compte de la virgule.
On multiplie ainsi le nombre décimal par 10, 100 ou 1 000 ...
Puis on place la virgule au résultat en divisant par 10, 100 ou 1 000 ...

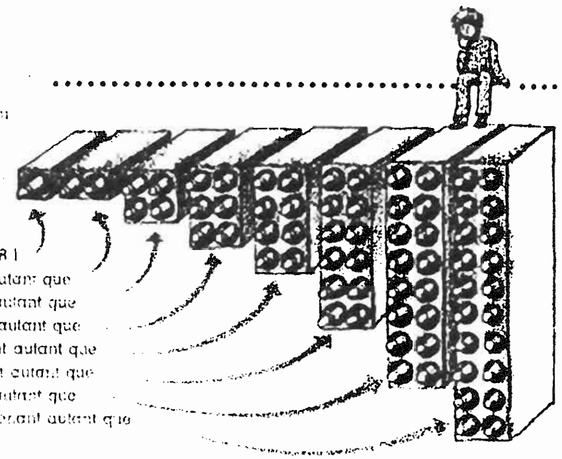
4 Effectue les mutiplications:

475	679	3 759	6 789	3 574	1 789
x 3.7	x 2.8	x 2.35	x 4.08	x 0.08	x 8.74

"OBJECTIF CALCUL CM1" p180

62 NOMBRES DÉCIMAUX : multiplication par un entier

La multiplication d'un décimal par un entier n'est l'addition de n fois ce décimal. La technique opératoire est une extension de la technique de multiplication de 2 entiers.



Le champagne est vendu dans des bouteilles de différentes capacités qui portent de bien curieux noms.
Ainsi il y a :

la *bouteille* contenant 0,8 l
le *magnum* contenant autant que
le *jéroboam* contenant autant que
le *réhoboam* contenant autant que
le *mathusalem* contenant autant que
le *salmanazar* contenant autant que
le *balthazar* contenant autant que
le *nabuchodonosor* contenant autant que

Au cours d'un repas, il faut environ 20 cl de champagne par personne.
Existe-t-il une bouteille assez grande pour 100 personnes ?

1. $0,8 \times 6 =$ 0.8 + 0.8 + 0.8 + 0.8 + 0.8 + 0.8

$\frac{8}{10} + \frac{8}{10} + \frac{8}{10} + \frac{8}{10} + \frac{8}{10} + \frac{8}{10}$

$0,8 \times 6 = \frac{8}{10} \times 6 = 0.8 + 0.8 + 0.8 + 0.8 + 0.8 + 0.8 = \frac{8}{10}+\frac{8}{10}+\frac{8}{10}+\frac{8}{10}+\frac{8}{10}+\frac{8}{10} = \frac{48}{10} = 4.8$

2. Pour multiplier un nombre entier par un nombre décimal, tu effectues d abord la multiplication comme si les deux nombres étaient entiers, puis tu places la virgule.

En supprimant la virgule de 2,4 tu multiplies par 10.

$$\begin{array}{r} 2,4 \\ \times\ 18 \\ \hline 43,2 \end{array} \xrightarrow{m\,10} \begin{array}{r} 24 \\ \times\ 18 \\ \hline 192 \\ 240 \\ \hline 432 \end{array} \xrightarrow{d\,10} 43,2$$

Il faut donc diviser par 10 le produit de 18 par 24.

"MATHÉMATIQUES CM2" THÉVENET p 63

La multiplication des nombres décimaux

Produit de deux nombres décimaux

Soit à calculer le produit 4,12 × 2,6.
Effectuons d'abord le produit 412 × 26

```
    4 1 2   < m 100     4, 1 2
 ×    2 6   < m 100   × 2, 6
 ---------            --------
  2 4 7 2              2 4 7 2
  8 2 4                8 2 4
 ---------            --------
 1 0 7 1 2  < m 100   1 0, 7 1 2
```

> Pour calculer le produit de deux nombres décimaux :
>
> on effectue l'opération sans tenir compte des virgules,
> on place la virgule au résultat.
>
> Dans le produit, le nombre de chiffres après la virgule s'obtient en additionnant le nombre de chiffres après la virgule de chacun des deux nombres.
>
> Ex. : 6,24 a deux chiffres après la virgule,
> 3,1 a un chiffre après la virgule,
> 6,24 × 3,1 = 19,344 a trois chiffres après la virgule.

Valeur approchée du produit de deux nombres décimaux

Pour vérifier l'exactitude d'un calcul,
il peut être intéressant de calculer une valeur approchée du résultat.

Exemple : une valeur approchée de 12,24 × 9,85 est 12 × 10, car
12 est un nombre voisin de 12,24 et
10 est un nombre voisin de 9,85.

Pour avoir un ordre de grandeur du résultat, on choisit le plus souvent des nombres dont le produit est facile à calculer mentalement,

Exemple : 97,85 × 18,95 est de l'ordre de grandeur de 100 × 19.

MATH et CALCUL CM2" EILLER p 142

23 Multiplication des nombres décimaux

DÉCOUVERTE

1 a/ Le maître demande à Dominique d'effectuer le calcul :

6.45 × 2,3

sur une calculatrice. Celle-ci affiche le résultat ci-contre.

Il demande ensuite à Dominique de calculer : 645 × 23 Dominique trouve : 14 835

♦ Vérifie son calcul.

Le maître fait le schéma suivant au tableau :

$$\begin{array}{ccccc} 6.45 & \times & 2,3 & = & 14,835 \\ \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\ (m\ 100) & & (m\ 10) & & (d\ 1\ 000) \\ \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\ 645 & \times & 23 & & 14\ 835 \end{array}$$

Ce schéma te permet-il de comprendre le résultat affiché par la calculatrice ?

♦ Explique.

b/ Observe la disposition utilisée et explique les calculs.

```
   6.45
 × 2,3
 ------
  1 935
 12 90
 ------
 14,835
```

2 *Valeurs approchées d'un produit*

a/ On te donne le produit : 4,99 × 6,95

♦ Trouve :
- le nombre naturel le plus proche de 4 99 ;
- le nombre naturel le plus proche de 6,95.

♦ Utilise ces deux nombres naturels pour trouver une valeur approchée du produit donné.

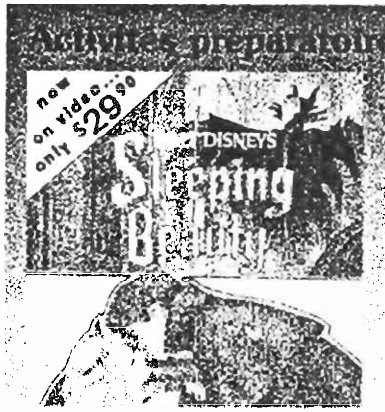
♦ Indique s'il s'agit d'une valeur approchée *par défaut* ou *par excès*.

b/ Même travail pour le produit : 29,98 × 20,12

"LIVRE OUTIL CM2" p 58-59

MULTIPLICATION DES NOMBRES

Activités préparatoires



POUR T'AIDER

a) en francs : 5,70 × 29,90
b) en centimes : 570 × 29,90 ...
• Effectue la multiplication b)
• Transforme le résultat en francs.
• Reporte ce résultat dans la multiplication a)

Quel est le prix de 26,5 l d'essence à 4,98 F le litre ?

Exercices

Avant d'effectuer les multiplications, calcule l'ordre de grandeur du résultat.
Ex : 29,72 × 8,1
Ordre de grandeur : 30 × 8 = 240

4,1 × 3,9 ... 2,48 × 61,9
2,63 × 69,8 ... 1,97 × 15,45
99,8 × 5,37 ... 345,12 × 5,273

La virgule a été effacée dans certains nombres. **Replace-la correctement.**

175,5 × 2,5 = 43875
10,7 × 0,7 = 1374
527,8 × 3,52 = 1857856
846 × 0,54 = 45684
4,578 × 8,6 = 393708
0,15 × 0,93 = 1185
13,15 × 252 = 23 ...
0,75 × 32 = 2400

Pose et effectue, puis vérifie avec la calculatrice.

35,7 × 13,7 ... 9,107 × 8,9
73,85 × 32,4 ... 746,3 × 4,783
94,56 × 1,25 ... 55,24 × 2,276
156,2 × 5,25 ... 3,232 × 0,815

Observe :

35,5 × 0,75 = 71,625
71,625 < 95,5

Quand le multiplicateur est inférieur à 1, le produit est inférieur au multiplicande.
En t'aidant de cette observation, écris les produits dans le tableau puis effectue-les pour vérifier.

	Produits supérieurs à 18,7	Produits inférieurs à 18,7
18,7 × 2,31		
18,7 × 3,2		
18,7 × 0,27		
18,7 × 0,9		

Complète le tableau.

×	635,2	48,9	3,45	76,23	0,8
0,1					
0,2					
0,01					

DÉCIMAUX

Problèmes

Un marchand de vin a vendu 25 tonnelets de vin de 2,5 l l'un à raison de 6,80 F le litre.
Calcule le montant de la vente.

Maman va chez le marchand de légumes, elle achète 1,2 kg d'abricots à 9,50 F le kg, 2,5 kg de courgettes à 4,90 F le kg et 0,7 kg de pêches à 13,50 F le kg.
Elle paye avec un billet de 50 F.
Que peux-tu chercher ?

Le restaurant scolaire sert des bûches de Noël aux 50 enfants qui prennent leur repas à l'école. Pour les confectionner, il a fallu utiliser :
• 6 boîtes de purée de marron à 14,15 F la boîte
• 1,25 kg de beurre à 23,80 F le kg.
• 1,5 kg de chocolat à 39 F le kg.
• 0,9 kg de sucre à 5,70 F le kg.
Calcule la dépense totale.
Que remarques-tu dans ce problème ?

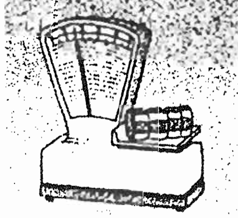
Pour son anniversaire, Nicolas a invité 8 copains. Pour le goûter, maman a acheté : 9 tartelettes à 5,50 F l'une, 9 éclairs à 6,80 F l'un, 9 paquets de bonbons à 4,50 F le paquet et 3 bouteilles de jus de fruits à 7,60 F la bouteille.
Quel est le prix de revient du goûter ?

Pendant son séjour aux USA, M. Bardot utilise sa carte de crédit pour payer les frais d'hôtel, 551,85 dollars, et la location d'une voiture, 310 dollars.

Le jour du paiement, le dollar vaut 5,79 F. La banque retire la somme en francs deux mois plus tard. Ce jour là, le cours du dollar est à 5,95 F.
Quelle économie aurait réalisée ce voyageur s'il avait payé au comptant ? (Arrondis au centime.)

M. Reffas a fait aménager son jardin. Complète la facture que lui a envoyée le paysagiste.
• 6 journées d'ouvrier à 420 F par jour ...
• Fourniture de 25 arbustes à 70,50 F pièce ...
• 15 kg de gazon à 90 F le sac de 5 kg ...
• 18,50 m de grillage à 30,50 F le mètre ...
Total

Mémento



Quel est le prix d'un morceau de viande de 1,500 kg à 76,90 F le kg ?

76,90 × 1,250 = ?

7 6, ...
× 1, ...
3 8 4 5
7 6 9 .
1 1 5, ...

Le morceau de viande coûte 115,35 F.

Étape 1 :
On supprime les zéros inutiles.

Étape 2 :
On effectue la multiplication sans s'occuper des virgules.

Étape 3 :
On sépare, à la droite du produit, autant de chiffres décimaux qu'il y en a en tout au multiplicande et au multiplicateur.

"CALCUL ET GÉOMETRIE CM2" CHAPUIS p 90

38

MULTIPLIER PAR 11

32 x 11   32 x 11 = (32 x 10) + 32 = 352

14 x 11	16 x 11	18 x 11	23 x 11	31 x 11
43 x 11	44 x 11	52 x 11	61 x 11	81 x 11

LA MULTIPLICATION : DEUX FACTEURS DÉCIMAUX

Et la virgule ?

13.4 x 0.2

Laurent sait multiplier un nombre décimal par un nombre entier

```
   13.4                   13.4
 x  0.2   --( x 10 )-->  x   2
   2.68   <--( : 10 )--   26.8
```

Le résultat est 2.68

Isabelle propose :

```
   13.4  --( x 10 )-->   134
 x  0.2  --( x 10 )--> x   2
   2.68  <--( : 100 )--  268
```

J'ai compté deux fois 1 chiffre après la virgule, je le retrouve dans le résultat : **2.68**

Attention aux zéros

Laurent a effectué ces opérations :

```
   9.75             3.06            7.400
 x 3.70           x 2.07          x 3.60
   6825             2142             444
  2925              602             222
  36.075            6.2342          26.64
```

Aide Isabelle à effectuer celles-ci.

```
   2.54             0.102            2.700
 x 2.60           x 3.06           x 1.30

   72.1                              6.02
 x 5.04                            x 1.04
```

Pour multiplier un nombre décimal par un autre nombre décimal, tu effectues l'opération sans t'occuper des virgules.

```
   26.8  --( x 10 )-->   268
 x  0.3  --( x 10 )--> x   3
   8.04  <--( : 100 )--  804
```

Ensuite, tu comptes le nombre de chiffres après les virgules.

Attention aux zéros intercalés !

Place soigneusement les chiffres dans leurs colonnes.

```
   1.02
 x 3.004
    408
  306
  3.06408
```

"OBJECTIF CALCUL CM2" p28

8 MULTIPLICATION des nombres décimaux

Voici des données en désordre. Replace-les correctement [illegible]

Tu n'as pas besoin de compter ces opérations [illegible] attention aux produits proposés et au nombre de chiffres après la virgule que doivent comporter les résultats.

```
   32     148      7,38     96      7,38     14,8     0,738    0,32
 x 5,6  x 0,28   x 2,5    x  8    x  25    x 28     x  25    x 56

   9,6    73,8     3,2      3,2
 x 80   x 0,25   x 5,6    x 56

   1,48   73,8     9,6      7,38     1,48     0,096
 x 28   x 2,5    x  8    x 250    x 280     x 800
```

```
   32      148      1,48     73,8
 x 5,6   x 0,28   x  28    x  2,5
```

aide-mémoire

Pour effectuer la multiplication

- d'un nombre entier par un nombre décimal ou
- d'un nombre décimal par un autre nombre décimal,

tu effectues d'abord l'opération comme si les deux nombres étaient entiers, puis tu places la virgule. EXEMPLES :

```
   38                       38
 x  2,6  --( m 10 )-->   x  26
                           228
                          76 .
   98,8  <--( : 10 )--     988
```

```
   14,7  --( m 10 )-->     147
 x  5,2  --( m 10 )-->   x  52
                           294
                          735 .
   76,44 <--( : 100 )--   7644
```

59 DÉCIMAUX

1

RAPPEL

1 dixième $= \frac{1}{10} = 0.1$

1 centième $= \frac{1}{100} = 0.01$

1 millième $= \frac{1}{1\,000} = 0.001$

Multiplier par $\frac{1}{10}$ ou par 0.1

c'est aussi diviser par 10

Calcul rapide

$314 \times 0.1 = 314 \times \frac{1}{10} = \frac{314}{10} = 314 : 10 = 31.4$

Sur ce modèle effectue 314 x 0.01 et 314 x 0.001

Calcule directement :

$\boxed{68 \times 0.1 = 6.8}$	0.01 x 728	14.8 x 0.1
149 x 0.1	0.01 x 9	6.4 x 0.1
0.1 x 6	4 212 x 0.001	29.5 x 0.01
2 198 x 0.01	915 x 0.001	0.01 x 6.8
787 x 0.01	2 x 0.001	4.2 x 0.001
478 x 1/10	2 910 x 1/100	3 x 1/1 000
915 x 1/100	12 x 1/1 000	

2

• La plus fréquente est l'écriture à virgule.

A $\boxed{58.369}$

• Certaines écritures présentent le nombre dans son ensemble : 58 369 millièmes.

B $\frac{58\,369}{1\,000}$ C $58\,369 \times \frac{1}{1\,000}$

D $58\,369 \times 0.001$ E $58\,369 : 1\,000$

• On peut faire ressortir, comme dans A, partie entière, partie inférieure à l'unité :

F $58 + 0.369$ G $58 + \frac{369}{1\,000}$

• On peut présenter une décomposition plus poussée : 5 dizaines, 8 unités, 3 dixièmes, 6 centièmes, 9 millièmes.

H $50 + 8 + \frac{3}{10} + \frac{6}{100} + \frac{9}{1\,000}$

I $50 + 8 + 0.3 + 0.06 + 0.009$

J $(10 \times 5) + (1 \times 8) + (0.1 \times 3) + (0.01 \times 6) + (0.001 \times 9)$

K $(10 \times 5) + (1 \times 8) + (\frac{1}{10} \times 3) + (\frac{1}{100} \times 6) + (\frac{1}{1\,000} \times 9)$

Ecris chacun des nombres sous la forme des écritures **B - C - E** du $\boxed{2}$

41.7	66.94	1.55	0.754
0.15	2.7045	0.005	3

Ecris les nombres sous la forme des écritures **I** et **J**.

72.35	11.048	705.308	900.006
0.742	25.6	1.9408	0.0781

Ecris sous la forme des écritures **H** et **K**

5.6	31.92	9.952	6.072
12.709	0.165	20.809	3.590

Ecris sous la forme de l'écriture **D** chacun des nombres

3.6	15.7	0.61	3.97	1.752	0.125
3.07	0.09	0.666	11.055	0.00154	

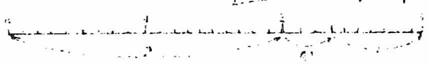
Ecris les nombres suivants sous la forme d'un nombre à virgule.

$6 + 0.3$; $6 + 0.05$; $19 + \frac{12}{100}$; $19 + \frac{4}{1\,000}$; $30 + 0.08$

$40 + 3 + 0.7 + 0.02 + 0.001$; $(100 \times 7) + (10 \times 9) + (0.1 \times 4)$

$(10 \times 6) + (1 \times 3) + (0.01 \times 5) + (0.001 \times 2)$; 72×0.01

131×0.001 ; $9 + (\frac{1}{10} \times 6) + (\frac{1}{100} \times 7)$; $1312 : 100$



$\boxed{2.3 = 2 + 0.3 \qquad 0.3 + 0.7 = 1 \qquad 2.3 + 0.7 = 3}$

4.2	5.6	7.9	9.5	0.4
1.75	6.49	8.37	2.358	9.765

60

1 Etudions le résultat du produit $a \times b = c$ selon la valeur de b. Le facteur b sera comparé à 1

a	b	c	Comparaison b et 1	Comparaison c et a
47	0,5	23,5	b < 1	c < a
68	0,91	......	......	......
125	1	......	......	......
243	2,1	......	......	......
1 000	1,054	......	......	......
6,35	1,2	......	......	......
8,71	1	......	......	......
8,71	0,7	......	......	......
15 659	0,0005	......	......	......
0,156	235	......	......	......

Que déduire du résultat de la multiplication de a par b

si $b = 1$?
si $b > 1$?
si $b < 1$?

2 Le boucher pèse un morceau de viande : 0.955 kg. Cette viande coûte 45.60 F le kg. Sans hésiter, la cliente donne un billet de 50 F. Comment peut-elle être sûre qu'elle a donné assez d'argent ?

3

Trouve plusieurs méthodes

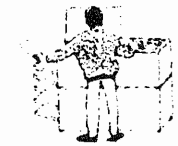
4 Une bouteille de 3/4 de litre de vin coûte 15 F.
• Quel est le prix du litre ?

1 l de vin de Bordeaux coûte 26 F.
• Quel est le prix d'une bouteille contenant 3/4 de litre ?

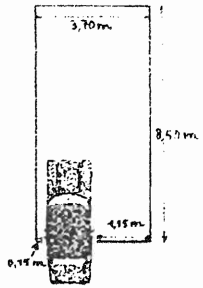
$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0.75$

5 Douze bouteilles d'eau de 1,25 l de contenance, coûtent 42 F.
• Quel est le prix d'un litre de cette eau ?
(42 F = 4 200 c)

6 Une ramette de 500 feuilles de papier à photocopier a une épaisseur de 5.4 cm, une masse de 2,18 kg et coûte 35 F.
• Calcule l'épaisseur, la masse et le prix de revient de 100 feuilles, d'une feuille.
• Donne les mêmes renseignements pour le papier qui serait utilisé par une école de 100 élèves sur une année scolaire.
Voici les données qui te seront nécessaires :
1 année scolaire = 36 semaines de 5 jours
Consommation moyenne de papier par élève : 2 feuilles par jour



7



Voici les dimensions de la voiture de Patrick :
longueur : 4 393 mm
largeur : 1 700 mm
hauteur à vide : 1 397 mm

1 - Quelle distance restera-t-il entre la voiture et chaque mur si Patrick franchit l'entrée du garage en laissant le même espace de chaque côté de la voiture ?

2 - Patrick veut acquérir une seconde voiture qui doit rentrer également dans son garage. Le modèle qui lui plaît a une longueur de 3 655 mm. Peut-il l'abriter aussi, sachant qu'il doit conserver un espace de 40 cm pour fermer la porte du garage ?

Les Conférences

Titre : Quelle didactique des mathématiques en formation des maîtres
Auteur : Denis BUTLEN, IUFM de Créteil, IREM de Paris VII
Type : conférence
Date : juin 1992
Résumé : Quelle didactique des mathématiques en formation des maîtres : quelques questions posées par des expériences d'enseignement en formation initiale et continue d'instituteurs, de professeurs de collèges et de lycées.
Mots-clés : didactique, enseignement de la didactique, institutionnalisation, formation initiale, formation continue, concours de recrutement, liaison théorie-pratique, professeur d'école, professeur de lycée et collège

QUELLE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES EN FORMATION DES MAÎTRES

Ce texte est constitué par le contenu de l'intervention effectuée devant les participants au stage et par un résumé des réponses aux questions posées à la suite de l'exposé. Le texte des questions n'est pas repris mais nous en avons gardé l'esprit.

I - Quelques questions posées par un enseignement de la didactique des mathématiques en formation des maîtres

Cet exposé a pour but de poser la question de la formation des instituteurs et d'en souligner certaines particularités. C'est un sujet difficile.

Nous sommes tous engagés en particulier depuis la création des IUFM dans la formation des maîtres et dans des débats sur cette formation.

La place que doit prendre la didactique dans la formation des maîtres en mathématiques est un sujet de débat dans ces institutions, un sujet pour le moins conflictuel. De nombreuses personnes (mathématiciens, inspecteurs, formateurs de tous horizons, personnels politiques) interviennent dans ce débat. Selon les endroits, un grand nombre d'entre eux sont farouchement opposés à un enseignement de didactique des mathématiques. Nous sommes souvent amenés à défendre à tous prix cet enseignement afin de ne pas voir annuler tous l'expérience acquise par les anciens professeurs d'école normale (PEN) dans ce domaine. Nous sommes parfois, du moins nous pouvons le ressentir comme tel, victimes d'agressions à ce sujet. Nous sommes de ce fait amenés à prendre des décisions rapides sur la formation sans avoir eu le temps de réfléchir posément, sereinement au problème.

Il est très difficile, quand on parle de la place de la didactique dans la formation de dégager l'essentiel, les questions de fond des problèmes conjoncturels. Nous sommes souvent amenés à prendre des décisions d'ordre "politique" sur la formation, ces décisions sont souvent très influencées par les conditions du moment.

Il n'est pas question ici de prendre immédiatement des décisions de fond ou bien tout simplement de décider de tel ou tel problème de formation mais de réfléchir à certains problèmes que je juge, que mes collègues ex-PEN, jugent importants et qui m'ont été posés, que j'ai rencontrés à propos de la mise en place d'un enseignement "institutionnel" de didactique à des instituteurs mais aussi à des professeurs de collèges et de lycées.

Je vais dans la suite de cet exposé soulever un certain nombre de questions à propos de l'enseignement de la didactique en formation, à appeler les collègues à la vigilance et à prendre des précautions par rapports à cet enseignement. Je tiens à souligner que ces questions se posent réellement, qu'elles ne sont pas provocatrices même si parfois je peux être amené à les poser ainsi. Je souligne tout de suite que ces questions viennent à la suite d'expériences d'enseignement de la didactique en formation, je suis partie prenante de ces expériences et je continue à penser qu'il est nécessaire de continuer dans cette voie mais je voudrais attirer votre attention sur la nécessité, aujourd'hui, de prendre du recul et d'essayer d'analyser ces premières tentatives d'introduction de didactique dans la formation des professeurs d'école et de se donner les moyens de les améliorer ; les premières expériences, nous le savons, ne sont pas toujours les meilleures.

Tout d'abord quand j'emploie le terme de didactique des mathématiques, je pense évidemment aux notions, aux théories qui sont développées dans la communauté des chercheurs qui s'organise autour de l'Ecole d'été de didactique et de la revue "Recherche en Didactique des Mathématiques". Il est clair que dans le débat actuel, ce n'est d'ailleurs pas nouveau, beaucoup de personnes mettent d'autres choses derrière ce terme. De plus la didactique n'est pas figée, les résultats des recherches sont très partiels, des théories commencent seulement à s'élaborer...

On peut regrouper les questions posées par la formation des enseignants en cinq catégories.

1) Quelle(s) formation(s) pour quel(s) enseignant(s)?

Doit-on envisager une formation unifiée des enseignants de l'enseignement obligatoire ? Quelle est la place que doit prendre dans la formation la recherche, la communication ou la sociologie... ?

Les théories didactiques peuvent-elles répondre aux questions que se posent les formés et les formateurs, peuvent-elles répondre aux questions posées par le système éducatif (élèves en difficulté par exemple) **?** Doit-on faire subir à ces questions un traitement, ou bien doit-on traiter les notions didactiques pour essayer d'y répondre ?

Que mettre en premier : le professionnel, le didactique ou bien est-ce un faux problème ?

2) Quelle place pour la didactique des mathématiques dans cette formation ?

Doit-il y avoir un enseignement spécifique ou bien la didactique des mathématiques doit-elle intervenir sous d'autres formes,

par exemple :

- comme idéologie ou bien comme référence épistémologique pour les formateurs seulement , comme outils permettant d'éclairer certains phénomènes d'enseignement et faisant l'objet de petites institutionnalisations intégrées à un discours mathématique, métamathématique ou pédagogique, sans exposé de théories ?
- comme supplément de formation pour des étudiants volontaires ou bien obligatoire mais en fin de formation, comme niveau n + 1 de formation théorique ?
- comme exemple, parmi d'autres, de réflexions théoriques sur les phénomènes d'enseignement ?

La formation à l'enseignement des mathématiques :

- **doit-elle s'inscrire totalement** dans la didactique ou doit-elle plutôt en être profondément imprégnée ?
- ou bien **celle-ci doit-elle seulement être une lecture** de cette formation parmi d'autres (comme elle est une lecture parmi d'autres des phénomènes d'enseignement) ?

3) Quelle didactique des mathématiques ?

Cet enseignement didactique, s'il existe, doit-il être le même pour tous les enseignants ?

Les notions intervenant dans cet enseignement doivent elles être présentées à tous les publics ? Quel est leur domaine de validité ? Quelles précautions d'ordre épistémologique doit-on prendre afin de ne pas diffuser un enseignement dogmatique ? Quelles formes doit revêtir leur institutionnalisation ?

Quelles formes doit prendre un enseignement de didactique des mathématiques ? Enseigne-t-on le didactique comme les mathématiques ? Quelles entrées le formateur doit-il privilégier ?

Cette présentation dépend-elle du public à qui elle s'adresse ? Doit-on opter pour :

- une présentation magistrale suivie des travaux dirigés ou pratiques ?
- une entrée par des petits travaux de recherche puis des institutionnalisations partielles ?

- des situations spécifiques d'introduction suivies d'institutionnalisations de certains concepts ?
- des informations brutes sur des recherches effectuées ou en cours ?
- des pratiques de "devoirs" de didactique ?

4) Quels buts pour la didactique des mathématiques ?

La didactique a-t-elle pour but un changement des pratiques professionnelles des enseignants ?

5) Quel est le débat ?

Ce débat autour de la place de la didactique dans la formation témoigne-t-il de la volonté de donner des réponses à des besoins réels de formation ?

Sommes-nous engagés seulement dans le règlement de problèmes conjoncturels liés à notre fonction, à notre place actuelle ou future dans une institution ou bien dans un débat qui se réduit à répondre, à éluder ou à contrer certaines réponses apportées par le système éducatif ?

Signalons tout de suite que les pistes de réponses que j'essayerai d'apporter aujourd'hui ne reposent pas sur une évaluation sérieuse des enseignements effectués ni même sur une analyse détaillée de la réalité de la formation actuelle. Elle demeure souvent, très souvent, dans le domaine des prises de position personnelles ou plus exactement d'hypothèses de travail, voire de pratiques professionnelles plus ou moins implicites. De ce fait cet exposé vise surtout à expliciter certains principes qui guident mes pratiques de formateur, mais il vise aussi à répondre à un souci de rationaliser un enseignement.

II - Quelle formation pour quels enseignants, quelle place doit occuper la didactique des mathématiques dans cette formation ?

Essayons de répondre à la première partie de la première question, à savoir :

1) La didactique peut-elle répondre aux questions que se posent les formateurs ?

L'évolution de l'enseignement en école normale peut être à ce titre révélatrice.

Il y a un peu plus d'une vingtaine d'années, disons trente ans, les professeurs d'école normale considéraient que leur rôle était essentiellement de faire faire des mathématiques à des personnes qui allaient en enseigner, et de faire le maximum pour élever leur niveau. Cet enseignement de mathématiques visait à remédier à un enseignement vécu difficilement (pour certains élèves-instituteurs) au collège ou au lycée, à assurer un minimum de connaissances leur permettant de maîtriser les notions mathématiques de l'école élémentaire. Ils s'intéressaient certes à la pratique du métier d'instituteurs, mais celle-ci était avant tout du ressort des "maîtres d'application", conseillers pédagogiques auprès desquels les normaliens devaient apprendre les techniques pédagogiques.

Malgré de nombreuses tentatives pour mieux adapter le niveau et le type de mathématiques enseignées, il a fallu modifier cette conception :

- d'une part les normaliens avaient tendance à se désintéresser d'une formation qui leur paraissait trop coupée des aspects professionnels du métier,
- d'autre part, il n'apparaissait pas de corrélations évidentes entre les connaissances mathématiques acquises et la capacité à organiser efficacement un enseignement de mathématiques dans les classes.

Les P.E.N. évoluèrent alors vers une conception plus "pédagogiste" de leur travail : tout en continuant à essayer d'élever le niveau mathématique des instituteurs, ils s'efforcèrent de mettre davantage l'accent sur le lien effectif avec le terrain. Ils essayèrent d'analyser et de comparer des situations de classe de l'école primaire, de façon à pouvoir présenter aux normaliens les meilleures réalisations en les incitant à les réutiliser, en les encourageant à l'innovation pédagogique. Pour une minorité d'entre eux, la didactique des mathématiques leur servait alors d'idéologie voire de référence épistémologique. Je vais tout de suite préciser ce que j'entends par idéologie. Ce sont de grandes idées, des principes, des éléments de théories non formalisés qui permettent à ces collègues de proposer des innovations même si leur efficacité n'est pas démontrée, de construire leur stratégie d'enseignement et de formation, de prendre des décisions locales, ponctuelles, à brûle pourpoint par exemple quand ils sont amenés à porter un jugement sur leur élèves en stage en situation.

Ce sont des axiomes pas forcément formulés explicitement ou réfléchis, par exemple :

- un premier axiome : "les mathématiques servent à résoudre des problèmes"
- deuxième axiome : "il ne faut pas reproduire l'enseignement précédent"
- troisième axiome : "on apprend à partir d'actions"
- quatrième axiome : "il faut travailler en groupe, il faut des situations de communication..."

Si vous voulez, ce fonctionnement peut se comprendre à travers l'image du "militant pédagogique".

Sans être nul, l'impact était cependant limité. Il apparaissait en effet que, plus que les "bonnes" idées qui pouvaient leur être ainsi suggérées, c'étaient les conceptions que se faisaient les normaliens des mathématiques qui conditionnaient leurs pratiques d'enseignement. Le transfert espéré ci-dessus ne se faisaient pas ou très peu.

Les P.E.N s'efforcèrent donc d'intervenir sur les conceptions des futurs enseignants. En leur proposant des situations-problèmes intéressantes, relativement proches des notions enseignées à l'école élémentaires, ils essayèrent de changer leurs rapports aux mathématiques. Cet enseignement va déboucher à la fois sur des institutionnalisations mathématiques mais aussi de type métamathématique (qu'est-ce que les mathématiques, qu'est-ce que prouver ? ...). Le transfert pour l'école restait à la charge des normaliens, mais il ne se faisait pas toujours aussi facilement.

Il y a quelques années s'est fait jour une nouvelle évolution. Des P.E.N s'aperçoivent qu'ils obtiennent ainsi des résultats satisfaisant concernant un relatif changement des conceptions sur les mathématiques, mais que celui-ci ne se traduit pas dans les pratiques. Ils prirent conscience en même temps du développement des recherches en didactique. Ils vont alors essayer d'intégrer dans leurs enseignement les résultats de ces travaux et en particulier les notions mises au point par ces travaux. Un certain nombre d'entre eux d'ailleurs vont s'engager dans des recherches de ce type.

Cette évolution est loin d'être achevee mais elle est indéniable et symptomatique des besoins ressentis par les formateurs. Elle est significative d'un effort pour théoriser la nécessaire liaison théorie / pratique et cela grâce aux apports de la didactique. C'est là une des spécificités de la professionnalisation de l'enseignement en école normale. Cette évolution est très lente, le premier document édité par la COPIRELEM spécifiquement consacré à l'enseignement de la didactique date de la fin de l'année dernière. Il n'existait auparavant que des contributions personnelles à certains actes de colloques des PEN et à ma connaissance qu'une seule thèse de didactique traitant de ce sujet, celle de Monique Pezard, cette dernière ne portant que sur l'enseignement de la proportionnalité à des élèves-instituteurs.

Il serait nécessaire, pour prouver ces affirmations, d'insérer ici une étude plus précise s'appuyant notamment sur une analyse des actes des colloques inter-IREM des PEN par exemple ou des programmes de formation des élèves-instituteurs. Cette étude est en cours, elle n'est pas encore assez engagée pour remplir cet objectif.

Ainsi la didactique ne sert plus seulement d'idéologie à ces PEN , ils ressentent la nécessité de l'enseigner. Il leur apparait nécessaire d'expliciter leurs choix, de présenter les outils qui leur permettent d'une part d'analyser certains phénomènes d'enseignement et d'autre part de déterminer les lignes directrices d'une formation qui leur paraît ainsi plus cohérente (même si ces dernières ne sont pas pour autant totalement explicitées).

Il est toutefois nécessaire d'analyser plus précisément les causes de cette évolution et notamment de répondre à la question : n'est-ce pas le résultat d'une volonté de légitimisation de ces formateurs, par ailleurs soumis à un changement de statut et aux éventuels inconvénients pouvant accompagner ce genre de bouleversement ?

J'ai dit plus haut que cette évolution me paraissait indéniable, elle n'est toutefois pas le lot, du moins dans sa dernière phase, de tous les ex-PEN. Que font les autres ?

Certains en restent au stade précédent, d'autres essaient d'intégrer leur intervention dans le cadre d'une formation diversifiée s'appuyant notamment sur l'axe de la communication : on assiste au développements périodiques d'actions du type : théâtre, micro-enseignement, études de techniques de communications...

En fait on constate, chez une grande partie d'entre nous, la recherche de moyens pour diversifier notre intervention, pour l'enrichir, pour la renouveler afin de répondre aux attentes des formés (en particulier : optimiser les rapports enseignement-apprentissage dans leur classe) et pour ceux qui se voient comme des enseignants-formateurs-militants de poser des jalons permettant une évolution des pratiques enseignantes. **De ce fait, un enseignement de la didactique n'est peut-être qu'un moyen parmi d'autres pour réaliser cette ambition.**

Nous faisons l'hypothèse qu'il répond, de manière relativement efficace, à des besoins ressentis par les formés. De toute façon il est difficile de séparer arbitrairement les besoins des formés et les réponses apportées par les formateurs, du moins peut-on essayer de mesurer l'adéquation de celles-ci avec les premiers.

Avant de rentrer dans cette problématique, essayons de répondre à une seconde question :

La formation professionnelle doit-elle être du même type pour tous les enseignants, la didactique doit-elle y tenir la même place et sous les mêmes formes ?

Pour tenter de répondre à ces questions, analysons les publics en formation actuellement et au risque de choquer certains, essayons d'en souligner les différences.

2) Quelques différences entre enseignants

a) Différences entre professeurs des écoles et professeurs de lycées

Rapport au savoir

Les futurs professeurs des écoles sont des étudiants possédant pour la plupart un rapport négatif aux mathématiques, ils se sont pratiquement tous retrouvés lors de leur scolarité dans une situation d'échec. De ce fait ils acceptent plus facilement de remettre en question leurs conceptions initiales sur l'enseignement de cette matière (qui comme chez la plupart des enseignants débutants revient souvent à reproduire l'enseignement suivi comme élève).

Pour la plupart des étudiants, la didactique est vécue, dans un premier temps, comme une remise en cause de l'enseignement "traditionnel" ; en effet elle s'appuie souvent sur des ingénieries qui d'un point de vue déontologique sont forcément construites comme apportant un "plus" ou sur des analyses mettant en lumière des phénomènes peu acceptables par les enseignants (obsolescence par exemple). De plus elle semble avoir dégagé une norme du "bon enseignement des mathématiques", à savoir un privilège donné au constructivisme.

Cette remise en cause est donc pour les futurs professeurs d'école non conflictuelle a priori.

Par contre un étudiant venant de réussir l'agrégation ne se considère pas, loin s'en faut, en échec en mathématiques : de plus l'enseignement qu'il a suivi lui ayant permis d'arriver à cette situation, il n'est pas dans des conditions très favorables pour le remettre en cause, surtout si cela constitue la seule base solide de connaissances lui permettant d'entrer dans une classe.

La didactique est plus facilement acceptée par les futurs professeurs des écoles et n'est pas forcément perçue comme un jugement de valeur.

Distance par rapport au savoir entre maître et élèves

Notre expérience professionnelle nous fait dire que la distance, en terme de savoir entre élèves et enseignant n'est pas la même pour ces deux publics. Ainsi on peut remarquer pour les nombres décimaux ou les fonctions numériques par exemple, que le maître de l'école élémentaire qui rentre sans formation, dans une classe de CM2, n'en sait pas toujours beaucoup plus sur le sujet que ses élèves. Il fait souvent les mêmes erreurs. Ce n'est évidemment pas le cas pour les professeurs de lycée.

Une réorganisation profonde, voire une réconciliation ou une remédiation, des connaissances en vue de leur enseignement est de ce fait nécessaire pour les premiers. On peut penser que seul un enrichissement de conceptions sur les mathématiques et quelques lacunes à combler sont sans doute nécessaires pour les seconds.

Ce travail en direction des professeurs d'école sera encore plus efficace s'il s'appuie sur une analyse rationnelle de l'enseignement, par exemple sur des analyses de procédures et d'erreurs se basant sur des régularités observées dans les recherches didactiques. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre consacré à la formation.

La polyvalence

Les professeurs des écoles doivent enseigner pour encore quelques années sans doute toutes les disciplines, de ce fait il leur est nécessaire d'unifier le plus possible par souci d'économie, leurs interventions ; de plus ils ressentent et expriment le besoin d'un "ciment culturel ou pédagogique ou épistémologique". Cette question a reçu, du moins dans le dernier plan de formation étiqueté école normale (Chevènement - 1985), une réponse institutionnelle presque caricaturale : un programme de 250 heures était prévu et assuré par les philosophes qui comprenait toute la philosophie, toute la psychologie, toute la sociologie ...

La didactique des mathématiques va pouvoir s'inscrire d'une façon originale dans ce cadre. En effet, si elle permet une mise à distance par rapport aux pratiques, elle souligne, de par sa nature, la nécessité d'une entrée disciplinaire et de ce fait relativise les tendances exprimées ci-dessus et les discours trop généraux éventuellement rencontrés lors de la formation sans pour autant la parcelliser davantage.

La formation en école normale, du type mise à niveau disciplinaire et pédagogie de cette discipline + formation générale en philo-psycho-pédagogie n'est pas à notre avis unifiante et n'est pas ressentie comme telle par les élèves-instituteurs, car elle ne s'appuie pas sur une épistémologie des disciplines ou sur les spécificités de leur enseignement. Elle risque vite de placer au niveau du discours généraliste ou plus exactement d'être ressentie comme tel par les formés.

Le problème reste toutefois presqu'entier car il n'existe pas actuellement de didactique générale voire de théories générales des apprentissages ; de plus aucun épistémologue interrogé à ce propos n'envisage actuellement une épistémologie unifiante des diverses disciplines pouvant cimenter une pratique enseignante polyvalente.

Nature du savoir enseigné, domaine de validité des notions didactiques.

Les notions enseignées à l'école élémentaire sont nettement moins compliquées que celles enseignées au lycée, les recherches en didactique des mathématiques sont plus développées dans l'élémentaire, de ce fait un certain nombre de notions didactiques élaborées à propos de l'enseignement élémentaire, en particulier tout ce qui correspond à la théorie des situations, risquent de ne plus être toujours valides pour l'enseignement post-obligatoire. Il en est de même d'autres notions, comme par exemple : l'analyse de la tâche ou le rôle et la place de l'action dans l'apprentissage.

De plus, le temps ne se découpe pas de la même manière à l'école élémentaire et au collège ou lycée. Ainsi est-il plus difficile de pratiquer des observations se référant à un temps limité : une heure par exemple. Cela implique que les activités de type micro-didactique (observations et analyse de séquence d'enseignement en temps réel) risquent d'être plus difficiles à mener au collège ou au lycée (il y a souvent moins d'apprentissage dans un temps court) et par là moins fertiles en résultats permettant d'introduire certaines notions de didactique des mathématiques..

Il ne suffit pas, du moins pour l'école élémentaire, d'intervenir sur les conceptions sur les mathématiques, pour intervenir sur les conceptions sur leur enseignement et même pour initialiser cette intervention.

Nous avons souvent remarqué un décalage entre ces deux choses. De plus, le problème du temps de formation intervient : si "l'initialisation mathématique" seule est faite en première année et si les stagiaires (comme c'est souvent le cas pour les anciens élèves-instituteurs) sont enfermés dans des problèmes de gestion de classe la seconde année, cet acquis peut-être complètement annulé par le poids des contraintes professionnelles immédiates et par le poids du milieu (collègues, conseillers pédagogiques...). Il faut essayer à notre avis en première année de prévenir cette difficulté.

b) différences entre formation initiale et formation continue

Il existe des différences entre formation initiale et formation continue.

Une constatation évidente : les enseignants non débutants qu'ils soient instituteurs ou professeurs de collège ou de lycée, ont justement une expérience professionnelle qui peut changer leur rapports aux mathématiques, à leur enseignement et de ce fait à la didactique.

Ainsi nous constatons souvent une attitude générale en formation continue d'enseignant (regardons par exemple ce qui peut se faire dans les IREM ou dans les MAFPEN, exception faite de l'informatique) : les formateurs ne distinguent pas (sauf exception du type préparation interne au CAPES théorique ou à l'agrégation) la partie mathématique et la partie pédagogique ou didactique dans leur enseignement. Ainsi certains rappels mathématiques sont faits, si le besoin s'en fait sentir, à propos de l'enseignement de telle ou telle notion. L'entrée est strictement pédagogique, voire didactique.

Par contre, l'idée généralement admise, du moins pour la formation initiale des professeurs de collège et lycée, est une formation en deux voire trois temps :

- première année : formation complémentaire à la licence, spécifiquement mathématique visant une réflexion mathématique sur les notions à enseigner jusqu'à la terminale C. On ne peut pas vraiment analyser la nouvelle épreuve professionnelle du CAPES comme une épreuve à entrée prioritairement professionnelle, encore moins didactique (la plupart des formateurs l'assurant ne sont d'ailleurs pas des didacticiens, certains sont même farouchement opposés).
- deuxième année : formation professionnelle très liée à une pratique professionnelle "sur le tas" ou par osmose, par compagnonnage. Dans certains cas on assiste à une initiation à la didactique, souvent sur la base du volontariat. Mais cette idée n'est pas partagée par tous les formateurs : "pour bien goûter la didactique, il faut une grande expérience professionnelle" disent certains.

Certes, l'expérience professionnelle peut favoriser une prise de conscience de certaines régularités dans l'enseignement mais elle peut aussi devenir un obstacle à toute réflexion sur l'enseignement et en particulier à un intérêt pour la didactique. Le poids du terrain, des habitudes, de l'équipe d'enseignement, le confort acquis grâce à un enseignement "sans risque", de type linéaire, constitue un obstacle de taille pour une initiation des maîtres non volontaires, surtout que cet enseignement peut s'avérer parfois d'une efficacité moyenne, conforme aux demandes institutionnelles et souvent moins coûteux qu'un enseignement basé par exemple sur le constructivisme.

Pour les instituteurs en formation continue, l'expérience professionnelle va intervenir sur l'efficacité plus ou moins grande de certaines entrées, ainsi nous constatons que les enseignants non débutants entrent plus facilement dans la didactique (formation continue ou stagiaires recrutés par "concours interne"), et cela à partir de petits travaux de recherche. Notre expérience comparée, portant sur trois ans, des différents publics montre que les exposés portant sur des articles de didactique ou des travaux d'observation semblent plus facilement acceptés (mais pas mieux "réussis") par les "concours internes" que par les élèves-instituteurs de première et deuxième années(FP1 et FP2).

La différence d'entrée entre formation initiale et formation continue ne semble pas aussi pertinente pour les P.E que pour les professeurs de lycée et collège.

3) Entrées différenciées selon le public en didactique des mathématiques

La question se pose donc de savoir s'il est nécessaire d'initialiser en formation initiale un enseignement spécifique de didactique. Nous répondons de façon différenciée à cette question selon les publics. Ainsi il semble se réaliser un certain consensus, officialisé par les programmes de formation et de concours des différents IUFM, pour initialiser dès la première année une professionnalisation de la formation et dans bien des endroits une initiation à certaines notions de didactique.

Les arguments exposés ci-dessus nous amènent à penser que cela doit se faire sur la base du volontariat pour les professeurs de lycées et de collèges et que cela doit faire obligatoirement partie de la formation professionnelle des professeurs des écoles. De même, une initiation et une information continue nous paraît indispensable pour les conseillers pédagogiques et plus généralement pour les formateurs.

De plus notre expérience de formation du type "initiation à la didactique" nous amène à différencier nos types d'intervention. Ainsi est-il préférable de pratiquer des "petits travaux de recherche" si le public est constitué de professeurs de lycées ou collèges ou d'instituteurs ayant déjà une pratique professionnelle ; par contre un enseignement de type TP, TD, cours semble plus adapté au public en formation initiale de professeurs des écoles. Nous analyserons des exemples de ce type d'enseignement dans la suite de cet exposé.

Je ne prendrais pas davantage position sur la place de la didactique dans la formation initiale des professeurs de lycée et collège, je vais me limiter ici au problème des professeurs d'école.

Il m'a paru nécessaire d'affirmer un principe préalable : on ne peut calquer et même adopter des schémas identiques de formation pour les professeurs d'école et pour les professeurs de lycée et collège. Il serait absurde d'appliquer mécaniquement un schéma de formation commun au deux ou d'appliquer à l'une des formations le schéma de l'autre.

Cela ne veut pas dire que chaque formation doit être "étanche", des modules communs disciplinaires ou inter-disciplinaires doivent être envisagés. Toutefois les différences signalées plus haut nécessitent un "traitement" spécifique de chaque public.

De plus, il parait nécessaire de réfléchir aux lignes de partage, aux frontières existant dans l'enseignement et à leur impact sur la formation des enseignants.

Doit-on penser en terme d'enseignement obligatoire (jusqu'à 16 ans, soit la seconde pour un élève de l'enseignement général) et d'enseignement post-obligatoire (le lycée). La 3ème-2nde constituant alors une zone de transition.

Ou bien doit-on penser en terme d'école élémentaire et de collège-lycée (avec une zone commune 6ème/5ème) puis d'université ?

Ce problème théorique n'est pas sans influence sur des décisions quotidiennes, ainsi les ex-PEN ont été amenés à se le poser (parfois on leur a posé) : cela a été du moins le cas pour la définition des options futures de la COPIRELEM.

III - Quelle formation initiale pour les Professeurs d'École ?

La question ne se pose donc plus de la nécessité d'intégrer un enseignement explicite de didactique , étiqueté en tant que tel dans la formation des professeurs d'école mais de déterminer quelle didactique enseigner, dans quelles proportions, sous quelles formes et dans quels buts.

Soulignons toutefois que cette position n'est pas partagée par tous les collègues intervenant dans la formation des professeurs d'école bien que les plans de formation des IUFM fassent souvent, à la didactique, une place explicite importante. Nous renvoyons l'auditoire à l'analyse de ces divers plans. Rappelons toutefois quelques arguments en faveur de cet enseignement de didactique :

- faibles connaissances en mathématiques et refus dans bien des cas d'aborder une réflexion mathématique non ancrée professionnellement
- échec relatif d'un transfert immédiat entre un changement des conceptions sur les mathématiques et un changement des conceptions sur leur enseignement
- nécessité d'unifier une formation polyvalente par un ciment plutôt d'ordre professionnel, on voit d'ailleurs mal quel autre type d'unification les formateurs pourraient proposer (morale, psychologie ?)
- nécessité de gérer un temps de formation court (120 heures maximum en moyenne en mathématiques alors qu'un professeur d'école de CM2 pourra être amené à enseigner 6 heures de mathématiques par semaine pendant au moins 20 à 30 ans)
- dispositif adapté à un public non scientifique voire présentant de sérieuses difficultés en mathématiques.

1) A quel(s) niveau(x) la didactique des mathématiques intervient-elle dans la formation ?

Les analyses précédentes nous amènent à penser que la didactique intervient dans la formation à divers niveaux.

a) Le niveau de formation générale, cohérence de la formation, lien avec la psychologie, l'épistémologie ou l'étude de phénomènes de communication liés à l'enseignement :

Si la didactique se distingue nettement de ces domaines d'étude ou de ces disciplines, elle permet de faire un lien avec une approche des contenus (mathématiques) et d'éclairer certains phénomènes observables. De plus elle relativise certains discours sur l'apprentissage en donnant une approche disciplinaire. Enfin, elle assure (pas à elle seule) une certaine rationalisation de l'enseignement et des pratiques des enseignants en mettant en lumière de régularités.

Mais c'est avant tout, une lecture limitée parmi d'autres, de certains phénomènes liés à l'enseignement : la didactique n'explique pas tout, elle n'a d'ailleurs pas cette prétention : elle permet d'éclairer certains aspects des relations didactiques, de prendre du recul par rapport à certaines pratiques, de modéliser certains aspects de la réalité. En aucun cas une formation professionnelle ne peut se limiter à cette entrée, il faut notamment prendre en compte les entrées sociologique, le point de vue de la communication...

b) Le niveau du formateur :

J'ai déjà, là encore répondu en partie à cette question lors de la présentation rapide de l'évolution de certains PEN. La didactique me sert d'idéologie explicite mais aussi de référence épistémologique ; elle permet de légitimer certaines explications, certaines propositions d'ingénierie grâce aux expériences réalisées à l'école élémentaire (à condition de préciser au public les conditions initiales de réalisation).

De plus, elle fournit des outils d'analyse, de lecture de certains faits (contrat didactique, mélange d'analyse a priori et a posteriori lors des visites par exemple, analyse d'erreurs ...). L'évolution d'un ouvrage comme le ERMEL est à ce sujet exemplaire : les volumes consacrés à la maternelle et au CP illustrent bien un emploi de certains outils de la didactique.

Enfin la théorie des situations ou la dialectique outil / objet permettent soit de proposer des ingénieries (testées en partie le plus souvent), soit de rationaliser certains comportements, soit de prévoir certains événements.

Cet enseignement ne doit toutefois pas en rester au simple niveau du diagnostic ou d'un fonctionnement implicite. Les outils utilisés par le formateur doivent être présentés explicitement aux formés afin d'en montrer l'utilisation faite et la pertinence.

c) Le niveau du formé :

Cet aspect est très lié au précédant, ainsi les éléments de didactique servent à mettre en lumière, non seulement certains comportements d'élèves, certains stades, étapes ou passages indispensables mais aussi peuvent donner les clés de la construction de certaines ingénieries en même temps que leurs limites et les conditions de reproductibilité . Cela peut éviter la remarque classique : "comment penser tout seul à cela, comment l'inventer ?", notons que l'invention d'ingénieries originales ne peut être un objectif de formation d'enseignants.

De plus cela peut permettre sinon d'annuler, du moins de prévoir et d'expliciter certaines erreurs classiques d'enseignants débutants. Ainsi la connaissance de la notion de contrat didactique peut permettre de relativiser certaines expériences malheureuses de "prise en main d'une classe" lors du stage en responsabilité notamment.

A ce sujet, il est notable, malheureusement, que certains aspects de la vie scolaire ne soient pas étudiés suffisamment par la didactique, c'est le cas de la gestion du temps scolaire en général, de la gestion des zones frontières entre disciplines ou de certains aspects de gestion de classe trop souvent laissés aux bons soins de la communication voire de la psychanalyse comme les phénomènes de chahut par exemple. Un bon nombre de problèmes rencontrés par les étudiants sur ce dernier point, en stage en responsabilité pourraient être évités par une analyse a priori, une analyse de la tâche de l'élève, une analyse a priori des décisions éventuelles à prendre ou du moins une analyse a posteriori de celles-ci, ou encore une réflexion d'ordre théorique sur le recueil d'informations permettant de prendre des décisions adaptées. Surtout que cette capacité à prendre la décision judicieuse pouvant éviter un dérapage vers le "chahut" est souvent considérée par les stagiaires comme relevant de la seule intuition ou du bon sens professionnel ou encore de l'expérience professionnelle, elle n'est jamais considérée comme le résultat d'une analyse ou d'une pratique (cumulée) d'analyses a priori et a posteriori.

d) les régularités dans la formation ou la part de l'enseignement, un a priori, une justification, un outil et un but :

Comme dans tout enseignement, on peut mettre en évidence dans la formation des maîtres des régularités. Cette mise en lumière de phénomènes reproductibles, rationalisables me semble être un des apports les plus important de la didactique à la formation des maîtres en mathématiques. Il ne se situe pas seulement au niveau des rapports élèves-enseignant-savoir (de l'école) mais aussi au niveau des rapports formateur-enseignants-contenus de formation.

Ces régularités ne se sont pas toujours caractéristiques de la partie enseignement des mathématiques, voire d'une réflexion d'ordre métamathématique mais existent aussi dans la partie didactique (didactique outil implicite ou didactique objet d'enseignement explicite) et dans la partie professionnelle. **C'est celà qui**

justifie mais surtout permet l'existence de brochures de la COPIRELEM comme celle des actes de Cahors, ou la présente, des actes de Pau.

A ce sujet, un effort nous reste encore à faire pour expliciter davantage dans ce type de production les conditions dans lesquelles l'enseignement a été fait et les conditions de son éventuelle reproductibilité.

Nous renvoyons le lecteur à l'exemple de la situation "le nombre le plus proche" de Hervé Péault (actes du colloque de Rouen). La situation est la suivante :

- chaque étudiant dispose de 10 morceaux de papiers où figurent les nombres de 0 à 9,
- Par groupe de n, ils doivent lever un seul de ces papiers, la somme des nombres ainsi levés doit être le plus proche possible d'un nombre donné par le formateur (nombre compris entre 0 et 9n),

Nous avons constaté des déroulements identiques, l'apparition de procédures semblables selon le choix du nombre de participants par groupe (nombre n), des possibilités similaires de pointer avec les étudiants différentes notions (variables didactiques, phases d'action, de formulation....)

2) Quels contenus ?

Quelle didactique des mathématiques ?

J'ai pu constater trois attitudes (décrites, ici, de façon caricaturale évidemment) concernant la didactique et sa place ou son utilisation dans la formation des maîtres.

- la didactique existe, il faut en parler en tant qu'objet car elle est un éclairage fondamental pour la formation, tout analyse d'un acte d'enseignement y fait référence ou peut y faire référence.
- la didactique fournit des outils pour éclairer certains phénomènes d'enseignement, il faut donc les présenter, on verra ensuite à quoi ils peuvent servir
- (bis) la didactique fournit des outils pour éclairer certains phénomènes d'enseignement, il faut donc les présenter quand c'est nécessaire et les traiter aussi et systématiquement comme objets d'enseignement
- la didactique existe mais relève du domaine de la recherche sur l'enseignement, de ce fait si dans une formation professionnelle on a besoin de ses outils ou de ses notions, on les utilise en les explicitant si cette explicitation apporte un plus pour le formé ou pour le formateur.

Ma pratique professionnelle me fait dire que j'utilise dans mon enseignement diverses notions, citons entre autres :

- théorie des situations en particulier typologie des situations, j'utilise plutôt les notions d'analyse de la tâche de l'élève, de la tâche du maître, plutôt que celles de situations didactiques et a-didactiques, bien que j'y fasse référence explicitement
- contrat didactique, effets et rupture de contrat
- variables didactiques et analyse a priori
- dialectique outil-objet et jeu de cadres
- dévolution / institutionnalisation...

3) Comment initialiser un enseignement de didactique, quelles entrées choisir ? Plus généralement comment enseigner la didactique ?

Il n'est pas utile de rappeler la nécessité de tenir compte de l'origine du public, nous avons déjà dit que pour des publics expérimentés de professeurs de collèges ou lycées, il semble préférable de prendre comme entrée dans la didactique des petits travaux de recherche. Cette entrée semble peut-être mieux adaptée (avec des variantes toutefois) pour des étudiants recrutés par concours interne ou des instituteurs en formation continue.

a) Où situer un enseignement de didactique dans le cadre plus général d'une formation initiale de mathématiques ?

Nous pouvons envisager différentes entrées possibles pour la didactique, chacune d'elle permet en fait, un cours spécifique de didactique ; toutefois celui-ci n'est pas toujours de même nature, en particulier l'institutionnalisation et les notions institutionnalisées ne sont pas de même type comme nous allons le voir ci-après par quelques schémas, certains sont un peu caricaturaux mais ils ont été observés dans des cours intégrant une partie étiquetée didactique avec des variantes sur la place et le rôle de celle-ci ainsi que sur les entrées possibles.

On peut donc concevoir au moins trois pôles autour desquels peuvent se regrouper des cours intégrant un moment spécifique de didactique (cette distinction quelque peu artificielle est apparue après interrogation de certains collègues) :

entrée mathématique→ professionnel → didactique

entrée professionnelle → mathématiques didactique

entrée didactique des mathématiques → mathématiques professionnel

Essayons d'expliciter ces pôles à partir de l'exemple de l'enseignement des décimaux.

Prenons le premier schéma.

Certains collègues commencent par proposer aux élèves-instituteurs un certain nombres de problèmes, de situations mathématiques qui vont leur permettre de rappeler des notions mathématiques sur les nombres et sur les décimaux en particulier, qui vont aussi permettre de réorganiser les connaissances des étudiants et d'analyser certaines conceptions erronées de ces derniers sur les nombres.

Dans un second temps, des questions à propos de l'enseignement des décimaux sont soulevées à partir d'une approche "naïve" (observations sauvages en stage, témoignages de tentatives d'enseignement de stagiaires voire même d'instituteurs chevronnés).

Enfin dans un troisième temps, le formateur essaie de faire prendre du recul par rapport à ces questions, présente des résultats de recherche en didactique (faux modèles, ingénieries...) et éventuellement développe certains éléments plus généraux de théories didactiques (par exemple dialectique outil-objet et jeu de cadres ou bien situations fondamentales...)

Ces différents temps peuvent permuter, toutefois cela peut changer la nature de certaines institutionnalisations, en particulier de type didactique. Ainsi l'entrée "professionnelle" (deuxième schéma) peut amener le formateur à montrer comment des connaissances mathématiques plus assurées peuvent éclairer certaines questions professionnelles et comment certaines études didactiques apportent, elles aussi, des éléments de réponses.

On peut aborder le sujet d'une tout autre façon. Par exemple, il peut se concevoir que l'on a développé dans un cours de didactique des notions générales sur la théories des situations et la notion d'obstacle par exemple (notions présentées à partir d'exemples) et que l'on va s'appuyer sur cette initialisation pour construire un enseignement de didactique portant sur les décimaux qui va s'intégrer dans ce cadre (troisième schéma).

Il est clair que les institutionnalisations des notions didactiques peuvent changer. Si dans le dernier schéma, elles font l'objet d'institutionnalisations fortes et de feed-back, dans les deux premiers, les mêmes notions peuvent ne faire l'objet que d'institutionnalisations locales (dans le contexte des décimaux) voire ne fonctionner que comme outils plus ou moins explicités.

De plus la didactique des mathématiques fonctionne de façon plus ou moins implicite dans le cas des deux premiers schémas pour les aspects mathématiques. Cette intervention "cachée" (outils de quelques ingénieries ou bien référence idéologique) a eu tendance au cours des années, pour moi, à devenir de plus en plus explicite.

Cette distinction entre trois pôles est caricaturale, en effet on peut osciller, hésiter ou plutôt choisir telle ou telle entrée selon la notion mathématique (enseignée à l'école primaire) visée. Il existe quand même une différence importante entre les deux premiers schémas qui visent à présenter certaines notions didactiques comme des outils pour essayer de répondre à des questions professionnelles et le dernier qui commencent par présenter les outils et ensuite qui montrent comment et où on peut les utiliser.

On peut ajouter à ces trois pôles un dernier qui consiste à choisir des entrées parallèles (selon les moments).

Précisons davantage les formes d'un enseignement de didactique.

b) Quelles formes peuvent prendre des activités spécifiques de didactique ?

On peut constater trois formes différentes dans un cours spécifique de didactique des mathématiques qui correspondent aux trois schémas ci-dessous :

cours magistral → TD, TP

"situations de didactique" → institutionnalisations locales → présentation tardive et facultative de certaines théories

petits travaux de recherche → institutionnalisations locales → présentation tardive et facultative de certaines théories

Je dois avouer, là encore, ne pas vraiment savoir quel schéma choisir et osciller souvent entre les trois. Les raisons qui expliquent mon hésitation sont les suivantes :

- **Le schéma cours-TD** : notons tout d'abord un refus personnel quasi mystique de pratiquer le schéma pourtant confortable cours-TD, au risque de calquer en cela l'apprentissage de la didactique des mathématiques sur l'apprentissage des mathématiques. Une autre raison vient du fait qu'il me semble un peu paradoxal de présenter des ingénieries basées sur la construction (par l'action) de concepts mathématiques et de pratiquer le contraire dans une grande partie de mes cours. Ce point de vue amène quelques déboires ; ainsi toutes les notions didactiques ne pouvant, loin s'en faut, être redécouvertes facilement et surtout rapidement par les étudiants, je suis souvent amené à "tricher" et à les présenter dans un discours parallèle ou bien à faire travailler les étudiants sur des questions qu'ils ne peuvent résoudre voire même aborder, ce qui peut se révéler une perte de temps.

- **"Les situations de didactique" :** ce schéma me semble correspondre le plus, d'une part à mes propres convictions, d'autre part à un apprentissage optimal de certaines notions de didactique pour la catégorie d'étudiants qui nous concernent.

Cette optique semble, ce n'est pas toujours très clair toutefois, être largement retenue par les auteurs des actes de Cahors.

Il semble que ce schéma s'appuie sur un triple souci :

- souci d'appuyer certains discours sur un action préalable, même très limitée, au risque de présenter, du moins dans un premier temps, certaines notions didactiques comme une théorisation d'un certain bon sens

- souci de dégager à partir de cette action le caractère opérationnel des outils présentés

- souci enfin de s'appuyer sur un vécu des étudiants qui devient dans un second temps objet d'étude didactique et qui peut être transposable ou favoriser une adhésion à un certain type d'enseignement des mathématiques à l'école primaire.

Je vais détailler davantage ce dernier point. On assiste souvent au schéma suivant : proposition par le formateur d'une situation en général de type mathématique qui va concerner les étudiants, analyse des comportements de ceux-ci et de la stratégie adoptée par le formateur afin de dégager certaines notions didactiques.

Il faut toutefois souligner les limites de ce type d'activités. Ainsi :

- toutes les notions là encore ne s'y prêtent pas

- est-ce un gain de temps ? Une description s'appuyant sur des exemples suivie d'une pratique de recherche ne constitue-t-elle pas un raccourci appréciable, surtout pour des adultes ?

- ne sommes-nous pas engagés dans un processus pervers de pédagogie du modèle : "regardez comme ça marche sur vous, faites pareil avec des élèves."

- **mais surtout cela correspond d'une part à une volonté de calquer l'enseignement de la didactique sur une certaine conception de l'enseignement des mathématiques et cela constitue surtout une lecture "enseignement" de la didactique des mathématiques alors que c'est essentiellement un domaine de recherche.**

- **Les petits travaux de recherche** : je tiens à souligner que cette entrée fonctionne bien pour un public possédant déjà une expérience professionnelle. Elle correspond à une lecture "recherche" plus conforme, me semble-t-il au caractère actuel de la didactique des mathématiques ; elle permet des institutionnalisations locales très souples (d'autant plus souples, en fait, qu'aucune théorie générale n'est parfois présentée !). Malheureusement elle présente des inconvénients parfois si graves que cela m'a conduit à l'abandonner pour certains publics :

- les travaux ne sont souvent pas très bons et les étudiants (élèves-instituteurs) s'en apercevant manifestent un certain désarroi

- les notions de didactique des mathématiques sont souvent présentées comme un supplément d'information, ce qui peut parfois en limiter la portée

- il faut la plupart du temps pouvoir s'appuyer sur une expérience professionnelle, malheureusement de plus en plus inexistante chez les nouveaux professeurs d'école ou au moins sur un accord explicite des étudiants (notre public est volontaire).

Cela m'amène à penser que ce type d'activités n'est pas une bonne entrée mais par contre doit faire l'objet d'un travail spécifique, par exemple en deuxième année à l'occasion de la préparation du mémoire professionnel.

J'ai cité plusieurs formes possibles pour un enseignement de didactique, pour chacune d'elles j'ai donné ma conception, mon opinion. En fait les parcours ne sont pas aussi tranchés que cela, il existe des passerelles, des allers-retours possibles voire nécessaires au bon fonctionnement de l'enseignement. Les actes de Cahors par exemple, donnent des exemples d'entrées différentes (essentiellement mathématiques ou de type "situations de didactique"). Une question n'a pas été tranchée et reste conflictuelle dans notre milieu de formateurs du premier degré, faut-il accepter la généralisation des cours magistraux, cette question a été posée dans chaque IUFM, la "résistance" a été selon les endroits plus ou moins forte, chose curieuse, à notre connaissance, à l'IUFM de Bordeaux, cette forme de travail a été entérinée. Cela nous a beaucoup questionné !

Ce n'est pas toujours possible de créer des "situations de didactique" pour chaque notion. Nous n'en avons pas trouvé pour la transposition didactique, par exemple, ou pour la notion de contrat didactique (celles qui existent sont trop partielles).

Quelles formes peuvent prendre des activités spécifiquement didactiques ? Quelles situations pour quelles notions ?

On peut noter que :

- la typologie des situations est souvent présentée à partir d'analyse d'observations, de comptes-rendus de séquences de classe mais aussi à partir de situations de didactique (voir par exemple la situation décrite par Hervé Péault dans les actes du colloque de Rouen)
- les situations didactiques et a-didactiques : idem ou à partir d'analyse a priori
- le contrat didactique fait surtout l'objet d'exposé ou de discours illustré par des morceaux d'analyse de comptes-rendus de séquences ou par des exemples
- les variables didactiques et analyse a priori se prêtent à tous les types d'entrées
- la dialectique outil-objet fait surtout l'objet d'un discours illustré d'exemples (cela provient du caractère général de cette notion) ; elle peut être aussi développée à partir d'analyse de manuels, d'analyse d'exercices (quels sont ceux où le concept fonctionne comme outil, comme objet ? Dans quel(s) cadre(s) chaque exercice se place-t-il ? Y a-t-il changement de cadres... ?)
- il en est de même pour les jeux de cadres mais on a mis au point aussi quelques "situations de didactique" par exemple : "la boite du pâtissier" (d'après une idée de Marie-Lise Peltier, situation décrite dans le document n°4 pour la formation des enseignants de l'IREM de Paris 7)
- les notions de dévolution ou d'institutionnalisation peuvent se construire à partir d'exposés et de "situations de didactique" (voir par exemple dans la brochure de Cahors la situation intitulée "la vache et le paysan" d'Hervé Péault).

4) Quel est l'impact d'un enseignement spécifique de didactique ? Quelles évaluations doit-on proposer en fin de première année de formation des professeurs d'école ? Quelles institutionnalisations ?

Il est sans doute trop tôt pour nous poser cette question ou plutôt pour pouvoir y apporter des éléments de réponse consistants. Malheureusement la mise en place des IUFM nous a conduit, pour les professeurs d'école, à prendre des décisions, à proposer non seulement des schémas d'enseignement mais aussi des textes de "devoirs de didactique" évaluant cette formation et sélectionnant les candidats au concours de fin de première année.

A ma connaissance, les expériences d'enseignement de didactique à de futurs enseignants n'ont pas fait l'objet d'évaluation. La seule évaluation que je connaisse est celle effectuée par Monique Pezard dans sa thèse de troisième cycle de didactique : elle porte sur un domaine limité, celui de l'enseignement de la proportionnalité à des élèves-instituteurs et se place dans "la foulée" de cet enseignement. A ces travaux, on peut rajouter certaines conclusions apportées par le travail de Pascale Masselot dans le cadre d'un DEA de Didactique des Mathématiques effectué cette année (ce travail est en cours).

a) Les résultats relevés par Monique Pezard (thèse de troisième cycle de didactique, juin 1985)

Citons Monique Pezard.

"L'hypothèse de départ est, malgré les restrictions suivantes :

- au moins douze ans d'enseignement traditionnel pour les normaliens (sur la proportionnalité)

- un risque d'obsolescence au niveau du contenu

- des rapports maître-élèves différents par rapport à un enseignement classique.

On peut améliorer la formation des élèves-instituteurs et obtenir un progrès qualitatif en construisant un enseignement débouchant sur une double institutionnalisation à la fois mathématique et didactique.

***Conclusions** : elles se limitent de toutes façon à un contenu particulier : la proportionnalité.*

Les progrès observés après un double enseignement mathématique et didactique.

***Du point de vue mathématique :** on observe effectivement un réel progrès dans l'organisation des connaissances et la maîtrise du contenu mathématique. Cela est vrai dans le cas de la proportionnalité simple, mais paraît plus incertain dans les cas plus complexes (double proportionnalité, proportionnalité inverse...). Dans l'ensemble, ces progrès semblent durables, quoique fragiles pour certains normaliens.*

***Du point de vue didactique :** pour répondre, on ne dispose que de projets de cours et non de suivis de séquences effectivement réalisées.*

De façon générale il est difficile de conclure à un progrès de la réflexion didactique, sauf peut-être sur deux points :

La notion étudiée l'est dans un cadre mathématique plus général (ici le cas des fonctions numériques). Cela permet d'étudier parallèlement des exemples et des contre-exemples de proportionnalité et donc de mieux caractériser celle-ci.

Il y a utilisation de plusieurs cadres, en particulier numérique et surtout graphique. Par contre, les cadres géométriques et physiques sont peu utilisés. De même, dans le cadre numérique, l'aspect isomorphisme (propriétés de la fonction linéaire sous-jacente) apparaît peu. Les progrès observés dans l'utilisation de jeux de cadres sont donc à relativiser.

Les projets de cours ont tendance à proposer un enseignement de la proportionnalité similaire à celui que les normaliens ont eux-mêmes reçu sur cette notion. Il y a une tendance très forte à la reproduction.

L'enseignement didactique proposé a sans doute été insuffisant : concernant le choix d'une situation-problème, il faudrait, par exemple, amener les normaliens à une réflexion sur :

- l'analyse a priori : structure de problème, variables didactiques, procédures de résolution possibles...

- l'analyse des tâches de l'élève...

Pour cela, il faudrait en particulier leur proposer un travail important d'analyse de séquences :

- soit des séquences réalisées avec eux (situations de communication par exemple) : en quoi sont-elles reproductibles à l'école élémentaire ?

- soit des séquences issues de documents divers ou réalisées par eux-mêmes dans des classes

En conclusion, pour obtenir des résultats plus probants (mais qui sont de toute façon difficiles à évaluer) il faudrait construire un enseignement en direction des normaliens beaucoup plus centré sur les notions didactiques en tant que telles".

Ainsi nous constatons que cette analyse débouche sur la nécessité de renforcer la part explicite d'un enseignement de didactique d'une part, d'autre part d'introduire les notions de didactique comme outils pour répondre à certaines questions professionnelles ou pour éclairer ce questionnement.

b) Quelques conclusions provisoires de Pascale Masselot (IUFM de Créteil, centre de Melun)

Ce travail se propose, entre autres choses, d'évaluer l'impact d'un enseignement spécifique de didactique (annexe 1) sur la compréhension de la notion de variables didactiques (entre autres) en direction d'élèves-instituteurs de recrutement différents (nouveaux professeurs d'école, élèves-instituteurs de première ou deuxième année-ancienne formule ou recrutement par concours interne...).

En particulier, à partir de l'analyse du compte-rendu d'une séquence de classe (annexe 2) portant sur l'introduction des écritures multiplicatives au cours élémentaire première année, elle se propose de voir si un enseignement spécifique de didactique et une "institutionnalisation forte" de cette notion se traduisent par des réponses plus précises à des questions portant sur ce sujet mais n'utilisant pas le terme spécifique de "variable didactique".

Le dépouillement n'est pas terminé mais Pascale Masselot a constaté que :

- des élèves-instituteurs n'ayant pas suivi un enseignement de didactique confondent par exemple variables de la situation et prises de décisions du maître pendant la séquence.
- des élèves-instituteurs ayant suivi un enseignement de didactique mais ne comportant pas de cours spécifique sur cette notion (celle-ci étant abordée fréquemment mais à propos de situations contextualisées) ne perçoivent que des aspects particuliers de celle-ci, en fait une variable didactique n'est le plus souvent que numérique et ne peut avoir d'influence que sur les productions des élèves, elle n'intervient jamais sur la validation de ces productions
- les résultats sont nettement plus satisfaisants dans le cas d'un enseignement spécifique et étiqueté en tant que tel mais ils restent très inégaux.

Ce résultat est quand même encourageant !

c) Le problème posé par le concours de fin de première année

L'épreuve de recrutement de fin de première année est constituée de deux parties : une partie spécifiquement mathématique (notée sur 12 points) et une partie professionnelle visant à tester certaines aptitudes du candidat à analyser des documents pédagogiques (productions d'élèves, propositions d'activités...). Le texte est suffisamment flou pour permettre des interprétations diverses, voire contradictoires.

Je tiens à préciser que cette décision d'introduire une partie professionnelle dans l'épreuve de mathématique me parait indispensable et cela pour les raisons que j'ai explicitées précédemment, notamment la nécessité d'ancrer une réorganisation des connaissances mathématiques des étudiants sur une réflexion sur l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire.

Cette seconde épreuve ne fait pas l'unanimité des personnes qui se penchent sur la formation des professeurs d'école. Certains veulent limiter la première année à un enseignement mathématique.

Il faut être vigilant sur les sujets proposés. Nous risquons de nous attirer des ennuis en tombant dans trois écueils bien distincts :

- réduire cette partie de l'épreuve à tester la capacité de l'étudiant à produire des réponses ne relevant que du bon sens "pas même professionnel"
- ou bien provoquer par des questions trop vagues ou trop ambiguës (par exemple : quels sont les objectifs de cette activité ?) des réponses se réduisant à un bavardage incontrôlable et inévaluable
- ou enfin et c'est aussi un risque non négligeable, à présenter la didactique comme un enseignement dogmatique dont l'évaluation se réduit à la reproduction de formules vides de sens ! (par exemple réduire la notion de dévolution du problème à la recherche de stimulants permettant d'intéresser l'élève au problème posé ou bien à cataloguer de situation d'action toute phase où l'élève manipule, de situation de formulation toute phase où l'élève parle, sans parler d'un découpage arbitraire en quatre phrases où la dernière serait évidemment une phase d'institutionnalisation...).

Le groupe de travail du stage national organisé à Pau cette année et portant sur la mise au point de sujets de didactique (interprétation de la seconde partie de l'épreuve de mathématique) a révélé les difficultés citées ci-dessus et a cristallisé les conceptions des différents participants sur la place de la didactique dans la formation.

Les points faisant l'unanimité des participants sont les suivants :

- dégager une classification de procédures d'élèves
- dégager une classification et une hiérarchie d'erreurs d'élèves (notion d'obstacle en particulier)
- reconnaître les variables d'une situation et parmi celles-ci les variables didactiques
- amorcer une analyse a priori
- identifier des cadres.

Les notions de situation d'action, de formulation..., de situation didactique ou a-didactique, de contrat, de dialectique outil-objet ou de jeu de cadres si elles paraissent pour certains acceptables comme notions à institutionnaliser, ne leur paraissent pas devoir faire l'objet d'une évaluation..

On peut légitimement se poser la question de l'utilité de l'institutionnalisation de notions que l'on ne demande pas de savoir restituer ou utiliser comme outils d'analyse.

Cela m'amène à traiter maintenant de l'institutionnalisation des notions didactiques.

d) Quelles institutionnalisations ?

Monique Pezard, en conclusion de sa thèse de troisième cycle sur l'enseignement de la proportionnalité à des élèves-instituteurs propose de pratiquer une double institutionnalisation : mathématique d'une part, didactique d'autre part.

En fait sa conclusion constitue un constat de la nécessité de changement. On peut relativiser son bilan (elle en donne d'ailleurs des pistes) en pensant qu'un d'un enseignement explicite de didactique, à propos de certains concepts mathématiques, est indispensable pour faire évoluer certaines conceptions mais aussi on réfléchissant sur les schémas de cours proposés et sur la place et les formes d'institutionnalisation des notions didactiques.

J'ai déjà parlé des schémas de cours, intéressons-nous maintenant à l'institutionnalisation.

On ne peut pas vraiment parler de double institutionnalisation : mathématique et didactique.

Mon opinion a légèrement évolué sur la question, ainsi au lieu de double institutionnalisation, je parle d'institutionnalisation à plusieurs niveaux : par exemple en mathématiques il est-parfois nécessaire d'institutionnaliser mais aussi de dire que l'on institutionnalise et pourquoi, en didactique il en est de même... En fait, avec les instituteurs, nous avons souvent deux types de "double institutionnalisation" : mathématique et métamathématique, didactique et "métadidactique" (si du moins un tel terme a du sens).

De plus, il faut retenir l'idée d'institutionnalisations locales, partiellement décontextualisées (au risque évident dans un premier temps du moins, de "pervertir" certaines notions) et de moments forts d'institutionnalisation. En fait, nous sommes amenés, avec les élèves-instituteurs à adopter un schéma proche de celui que l'on pourrait adopter avec des élèves en difficulté en mathématiques, à savoir des dévolutions partielles de l'institutionnalisation par l'intermédiaire d'un dispositif varié. En termes simples, il est nécessaire de prévoir un dispositif varié de "piqûres de rappels" (sérum et vaccin).

Immédiatement se pose alors la question des notions à institutionnaliser.

On ne peut traiter sur le même plan toutes les notions de didactique des mathématiques (je m'y refuse d'un point de vue éthique). De plus, il est nécessaire de préciser les domaines de validité de ces notions qui ne sont pas tous identiques. Je ne reviendrai pas sur la fragilité de certaines théories voulant s'étendre au collège, au lycée voire à l'université. En ce qui concerne, les apprentissages relevant de l'école élémentaire, il est nécessaire d'être prudent.

On ne peut pas institutionnaliser des notions qui n'ont pas fait l'objet d'un consensus de la communauté didactique, c'est le cas par exemple de la notion de situation fondamentale. Cela n'interdit pas d'en parler, voire de les utiliser de façon importante si on le juge utile mais alors, il faut préciser les limites et les conditions d'emploi de ces éléments.

IV - CONCLUSION

1) Les activités obligatoires de formation

Sans vouloir être exhaustif, signalons quelques activités spécifiques de la formation des maîtres.

Tout d'abord, il est indispensable de compléter et de réorganiser les connaissances des étudiants en vue de leur futur enseignement, notamment cela suppose une culture mathématique plus approfondie sur les thèmes actuellement enseignés au collège et au lycée : géométrie et arithmétique en particulier.

Il nous semble également nécessaire d'enrichir les conceptions des futurs maîtres sur les mathématiques comme sur leur enseignement.

En particulier, il faut les faire réfléchir sur :

- le rôle de la résolution de problèmes,
- les méthodes de résolution propres aux mathématiques.

De même il faut leur faire acquérir une culture leur permettant de prendre en compte et d'intégrer dans leur pratique professionnelle les liens existant entre les différentes disciplines enseignées.

Une formation professionnelle doit aussi comporter :

- des analyses de séquences, hors stage, s'appuyant sur une analyse a priori et prenant notamment en compte l'existence de "variables didactiques".
- des analyses d'erreurs, de productions et de procédures d'élèves.
- des analyses cliniques d'élèves résolvant un problème.
- des comparaisons de cursus d'enseignement.
- des analyses comparées de manuels, (les études d'exercices de manuels mais aussi de cours peuvent prendre en compte comme critère le fonctionnement d'un concept en tant outil ou en tant qu'objet, voir à ce sujet le cahier n°51 de didactique des mathématiques de l'IREM de Paris VII sur l'analyse de manuels).

Ces différentes études doivent pouvoir utiliser les outils mis au point par la didactique des mathématiques.

A partir d'activités décrites ci-dessus comme à partir de situations construites spécifiquement pour introduire ces outils ("situations de didactiques"), il me parait indispensable d'institutionnaliser les notions citées plus haut. Ces institutionnalisations prenant un aspect local, encore contextualisé dans un premier temps puis pouvant devenir plus riches et s'intégrer en éléments de théories dans un second temps.

Il faut toutefois préciser les limites de ces outils, leur domaine de validité et avertir les étudiants sur le fait que la didactique des mathématiques permet d'éclairer certains phénomènes d'enseignement mais qu'elle ne permet pas de répondre à toutes les questions posées par une formation professionnelle.

2) Quel bilan de formation initiale ?

Au bilan delà fait par Monique Pezard, ajoutons celui fait par Jeanne Bolon et moi-même dans le cahier n°3 de formation de l'IREM de Paris VII :

"L'effet limité de la formation initiale : *au risque de démobiliser les plus enthousiastes des participants, nous affirmons que la formation initiale n'a que des effets limités, car elle débouche sur l'exercice dans un milieu professionnel qui a ses habitudes de fonctionnement, ses traditions. Tout débutant dont l'attitude divergerait trop de celle de ses collègues se verrait immédiatement aux prises à leur hostilité. La formation initiale sera d'autant plus efficace qu'une formation continue influera la masse des enseignants.*

Pour le premier degré, la formation continue en mathématiques n'est pas très importante. La plupart des enseignants se cultivent spontanément dans leur domaine d'excellence, qui, en général, n'est pas scientifique. Les inspecteurs de l'éducation nationale sont en majorité non scientifiques et leurs conseils datent parfois. Les manuels de mathématiques assurent un taux de réussite locale convenable. La pression est beaucoup plus forte en français."

BIBLIOGRAPHIE

(1) Actes du colloque des P.E.N. (Inter-IREM) de Angers - 1987 - Contribution de S. GAIRIN-CALVO

(2) Actes du colloque des P.E.N. (Inter-IREM) de Rouen - 1988 - Contribution Hervé.PEAULT, IREM de Haute Normandie

(3) Thèse de 3ème cycle de didactique des mathématiques : une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux élèves-instituteurs - Monique PEZARD - IREM de Paris VII.

(4) Actes de la 1ère Université d'Eté des P.E.N. - Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire - Olivet - juillet 1988 - IREM de Bordeaux

(5) ERMEL CM - apprentissages mathématiques à l'école élémentaire INRP - HATIER

(6) "Calcul mental, calcul rapide" - Brochure n°78 de l'IREM de Paris VII - Denis BUTLEN- Monique PEZARD.

(7) ERMEL CE - apprentissages mathématiques à l'école élémentaire - INRP - HATIER

(8) A propos de l'enseignement de la proportionnalité - M. PEZARD - Cahier de didactique des mathématiques n°20 - IREM Paris VII.

(9) Quelques concepts, quelques généralités et quelques références - Collectif - cahier de didactique des mathématiques n°5 - IREM Paris VII.

(10) De la didactique des mathématiques à l'heure actuelle - Régine DOUADY - cahier n°6 de didactique des mathématiques.

(11) Une introduction à la didactique des mathématiques - Aline ROBERT - cahier n°50 de didactique des mathématiques.

(12) "Apprentissages mathématiques" - ERMEL/INRP - GS de maternelle.

(13)R. Douady : jeux de cadres et dialectique outil-objet - Recherche en didactique des mathématiques n° 7 - 2 - La Pensée Sauvage.

(14) Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - actes du stage national de Cahors organisé par la COPIRELEM - diffusé par l'IREM de Paris VII.

(15)Document de travail pour la formation des maîtres n°1 de l'IREM de Paris VII, "formation en didactique des mathématiques, une expérience en CPR interne", A.Robert.

(16)Document de travail pour la formation des maîtres n°3 de l'IREM de Paris VII, "Formation professionnelle initiale des enseignants du second degré en mathématiques, actes de la journée de réflexion organisée le 06/04/91 à Paris par la Commission Inter-IREM Université et l'équipe DIDIREM".

(17)Document de travail pour la formation des maîtres n°4 de l'IREM de Paris VII, "Un enseignement de didactique des mathématiques à des futurs Instituteurs-Maîtres-Formateurs", Denis BUTLEN et Monique PEZARD.

(18)Document de travail pour la formation des maîtres n°5 de l'IREM de Paris VII, "Formation à l'enseignement des mathématiques..."

(19)cahier n°51 de didactique des mathématiques de l'IREM de Paris VII, "réflexions sur l'analyse de textes d'exercices des manuels", A.Robert.

(20)Aides pédagogiques pour le CM - COPIRELEM - Géométrie - APMEP.

(21)Actes du colloque des P.E.N. (Inter-Irem) de Paris - 1990 - , IREM de Paris VII

(22)Document de travail pour la formation des maîtres n°1 de l'IREM de Paris VII, "Quelle didactique des mathématiques en formation des maîtres : quelques questions posées par des expériences d'enseignement en formation initiale et continue d'instituteurs, de professeurs de collèges et de lycées, Denis BUTLEN et Jeanne BOLON.

ANNEXE 1 : UN PLAN D'ENSEIGNEMENT DE DIDACTIQUE EN PREMIÈRE ANNÉE DE PROFESSEURS D'ÉCOLE (premier semestre)

PREMIÈRE SÉANCE : PRÉSENTATION, NUMÉRATION

1) Présentation de la formation

a. Emploi du temps, répartition des enseignants
b. Présentation du programme, des activités, des épreuves de concours
c. Demander aux étudiants de rédiger sur une demi-feuille de papier, leurs 5 premiers souhaits pour leur formation de cette année, de façon anonyme : une phrase au plus par souhait.
d. passation d'un contrat de formation
e. Négocier un "contrat de formation"
f. précautions préalables portant sur la place de la didactique des mathématiques dans une formation professionnelle.
g. bibliographie d'ordre général.

2) Numération, écriture des nombres entiers

a. Une situation-problème d'introduction : étude de numérations anciennes ou étrangères
b. Une deuxième situation-problème : réinvestissement et nouveau regard : le point de vue algorithmique.
c. Activités de rappels sur "les bases"
d. Une réflexion particulière sur la numération écrite avec des mots
e. Deux types d'entrée pour la numération : point de vue algorithmique et point de vue groupement-échange
f. Exemples de progression
g. Analyse a priori, analyse d'erreurs

LA CONSTRUCTION DU NOMBRE

1. Les hypothèses cognitivistes de la didactique des mathématiques, une précaution : éviter les "mouvements de balancier" dans l'enseignement

2. Analyse historique des programmes de l'école élémentaire et maternelle

3. Rappels mathématiques sur la notion de nombre, aspect ordinal, aspect cardinal

4. Le nombre, que sait-on de son acquisition ?

a. Le point de vue constructiviste.
b. Le point de vue innéiste, Rachel Gelman.
c. la place de l'apprentissage de la comptine dans la construction du nombre (aspect ordinal).

5. Des idées directrices pour construire une progression sur le nombre (GS/CP)

a. Explicitation de principes
b. Analyse d'un document audio-visuel "les wagons" (INRP), à partir de questions posées par le formateur.
c. Présentation par le formateur d'une progression pour la GS de maternelle (ERMEL GS)
 -i- les nombres comme mémoire de quantité
 -ii- les nombres pour comparer
 -iii- les nombres pour partager
 -iv- les nombres pour calculer
d. Présentation d'une progression pour le CP (ERMEL CP)
e. Quelques remarques sur le point de vue de l'INRP
f. Quelques devoirs de didactique sur le sujet.

STRUCTURES ADDITIVES (VERSION A)

1. bibliographie

2. Le champ conceptuel de la soustraction, tri de problèmes

a. Une première approche du champ conceptuel de la soustraction
b. Exposé sur les structures additives d'après G. Vergnaud

3. Explicitation et comparaison de diverses techniques de soustraction

4. Calcul mental et structures additives

a. Quelques exemples de calcul mental, niveau étudiants IUFM
b. Exposé structuré autour du document n°6 (extraits de la brochure n°78 de l'IREM de Paris VII, Calcul mental, calcul rapide, Denis BUTLEN et Monique PEZARD).

5. Un exemple de progression sur l'addition

a. Manipulation d'écritures additives et soustractives
b. Vers le calcul

6. Analyse d'erreurs.

7. Comparaison de manuels sur la soustraction.

8. Quelques problèmes d'arithmétique.

STRUCTURES ADDITIVES (VERSION B)

1. bibliographie

2. Une situation d'introduction : la vache et le paysan

(à traiter en 1h dans le but essentiel de poser le problème des structures additives)

3. Le champ conceptuel de la soustraction, tri de problèmes

a. Une première approche du champ conceptuel de la soustraction
b. Exposé sur les structures additives d'après G. Vergnaud

4. Exposé d'une progression sur l'addition

5. Explicitation et comparaison de diverses techniques de la soustraction

6. Calcul mental et structures additives

a. Quelques exemples de calcul mental, niveau étudiants IUFM
b. Exposé structuré autour du document n°6 (extraits de la brochure n°78 de l'IREM de Paris VII, Calcul mental, calcul rapide, Denis BUTLEN et Monique PEZARD).

7. Analyse d'erreurs

8. Comparaison de manuels sur la soustraction.

9. Quelques problèmes d'arithmétique

ANNEXE 2

Il s'agit de la séquence d'introduction des écritures multiplicatives au CE1 décrite dans les actes de Cahors, p 115 et suivantes, les questions sont un peu différentes, en voici le texte :

1. Déterminer les objectifs de la séquence.
2. Quelle(s) définition(s) de l'écriture multiplicative, l'auteur privilégie-t-il ? Pourquoi ?
3. Quels sont les éléments de la situation sur lesquels l'enseignant peut agir ? Parmi ceux-ci quels sont ceux qui peuvent changer les comportements et les performances des élèves ?
4. Commenter les différentes étapes de la séquence, pour chacune d'elles analyser le rôle du maître et les comportements des élèves.

Titre : Quelques réflexions sur l'observation en classe en formation professionnelle initiale des futurs enseignants.

Auteurs : Régine DOUADY, Aline ROBERT.

Type : Ce texte n'est pas le texte intégral de la conférence donnée à Pau par R. Douady.
Il porte sur le même sujet, et surtout relève des mêmes idées, bien qu'écrit (en collaboration avec A. Robert) à la suite d'expériences en formation d'enseignants du second degré.

Date : novembre 1992.

Résumé : réflexion sur ce que peuvent apporter à des futurs enseignants (en formation) des observations de classe, analyse des limites de l'observation simple et propositions renvoyant à des conceptions élargies de l'observation, au sein de tout processus d'analyses des activités en classe.

QUELQUES RÉFLEXIONS SUR L'OBSERVATION EN CLASSE EN FORMATION PROFESSIONNELLE INITIALE DES FUTURS ENSEIGNANTS

L'observation dans les classes est présentée actuellement comme un (bon) moyen de formation professionnelle (parmi d'autres). Ainsi par exemple, et c'est une nouveauté, une des épreuves orales du Capes externe s'appuie sur des observations en lycée et collège...

Dans ce texte, nous voulons apporter quelques réflexions sur ce moyen de former des étudiants au métier d'enseignant alors même qu'ils sont encore en formation initiale.

Nous adoptons un point de vue qui n'est évidemment pas neutre, celui de chercheurs en didactique des mathématiques, enseignant nous-mêmes les mathématiques à l'université, et engagées depuis de nombreuses années dans des actions de formation (initiales ou continuées) d'enseignants. Ce point de vue n'engage que nous, et reste en partie empirique, dans la mesure où nous n'avons pas mené de recherches précises sur ces formations, et que nous n'en avons notamment aucune évaluation autre que subjective.

Rappelons enfin, pour mieux situer cette intervention, que nous traversons une période où le recrutement des enseignants scientifiques pose problème à tous les niveaux (futurs professeurs d'école, ou futurs professeurs des lycées et collèges).

En introduction, nous indiquons un bilan de notre expérience, puis nous dégageons différents types d'observation en classe. Nous en développons ensuite la portée et les limites, par rapport à la formation. Nous concluons sur des questions ouvertes.

Introduction : un bilan de notre expérience de formateur ou "fais ce que je dis... et ce que je fais".

Nous livrons ici quelques constats que nous avons faits, suite à nos expériences de formation, ces constats restant tout à fait subjectifs, comme nous l'avons déjà dit.

Premier constat

Le schéma qui nous a semblé le plus "efficace" parmi ceux que nous avons pratiqués est le suivant :

la formation s'effectue en deux temps,

- d'abord nous faisons un enseignement de mathématiques, du niveau des étudiants, avec un enjeu réel à la clef (du type examen), donc sur un temps suffisamment long ;

- puis, dans un deuxième temps, nous assurons une formation à l'enseignement des mathématiques qui s'appuie sur ce qui précède.

Nos interventions sont complétées par celles d'enseignants en exercice (professeurs d'école par exemple s'il s'agit de la formation correspondante).

Cela sous-entend que nous avons enseigné les mathématiques d'une certaine manière, en ayant pu faire les choix qui, pour nous, conditionnent l'apprentissage que nous visons : notamment nous avons pu faire travailler les étudiants sur des activités mathématiques authentiques, nous avons mis réellement en relation ces activités et l'exposition des connaissances visées, nous avons initialisé la mise en fonctionnement explicite d'un questionnement mathématique...

Cela implique aussi que nous avons été en mesure d'expliciter ces choix, de les justifier et d'en discuter les réalisations effectives, compte tenu des contraintes conjoncturelles par exemple.

C'est à ce type de formation que s'applique le slogan que nous avons mis en titre : fais ce que je dis, et ce que je fais... Signalons pour mémoire que M. Paquay utilise la même expression, mais négativement, pour donner la même idée dans son intervention "Savoirs méthodologiques" dans le colloque de 1990 "Similitudes et différences en didactiques".

Cette formation à l'enseignement (deuxième temps) n'est pas nécessairement une formation explicite à la didactique des mathématiques, mais elle l'est au moins de manière implicite : en effet, le formateur, lui, utilise à plein, dans les deux phases de ses interventions, les outils d'analyse de l'enseignement issus de la didactique, qu'il les nomme ou qu'il se contente de les pointer dans le contexte de ce qui a été vécu pendant la première phase...

L'objectif est de transmettre aux futurs enseignants un certain nombre de points de repère,

- soit locaux, notamment sur l'analyse des exercices (et des tâches) et, plus généralement, sur les variables didactiques,
- soit plus globaux, notamment à propos de différents modes de gestion possibles de la classe pendant l'enseignement de telle ou telle notion mathématique.

Ces points de repère se retrouvent à divers moments, pour l'analyse de programmes, de manuels, de films, de séquences effectives...

Les questions de statut et de sens des différentes activités mathématiques sont ainsi abordées de multiples points de vue, et tout se passe comme si l'intérêt de la démarche et surtout son sens étaient en quelque sorte garantis par l'expérience en vraie grandeur partagée par le formateur et les étudiants pendant la première phase de la formation.

Deuxième constat

En revanche, une formation en didactique des mathématiques non préparée ne passe pas toujours bien auprès d'enseignants en première année d'exercice : ils ne sont intéressés que par ce qui répond à leurs problèmes quotidiens, urgents, et les gens du terrain, qui peuvent justement répondre à cette demande immédiate, leur semblent de bien meilleurs interlocuteurs que ces formateurs extérieurs à la profession, qui ne cherchent qu'à généraliser, voire à conceptualiser...

Tout se passe comme si c'était plus d'informations que de formations dont ils ressentaient le besoin.

En fait, la première année d'expérience professionnelle semble exclure momentanément l'intérêt pour une compréhension plus approfondie, décontextualisée, du fonctionnement de la classe, du point de vue du rapport entre ce qui est enseigné par le maître et ce qui est appris par les élèves.

Troisième constat

Les enseignants en formation continue, apprécient eux beaucoup en général les formations en didactique des mathématiques : mais par définition, ce sont des volontaires...

Ces trois constats ne sont pas contradictoires, loin de là. Ils indiquent qu'une certaine confiance, née d'une pratique commune assez longue, semble nécessaire à beaucoup d'étudiants, surtout scientifiques d'ailleurs, pour leur faire dépasser le rejet initial de toute modélisation en matière d'enseignement - le besoin d'une telle réflexion venant naturellement chez beaucoup d'enseignants après une certaine expérience professionnelle.

Cependant, le cadre actuel de la formation, notamment des professeurs des écoles, n'est pas tout à fait adapté à notre premier schéma. En particulier, des observations ont lieu très tôt dans la formation initiale, qui ne peuvent donc s'intégrer dans une réflexion organisée comme nous l'avons indiqué : qu'en penser ?

1) Différents types d'observations en classe

Observer, c'est d'abord être présent dans un lieu donné, et percevoir ce qui s'y passe avec sa vue, son ouïe, et toute sa personnalité et ses connaissances. Il y a au départ un fonctionnement empirique, fondé sur les sens.

Cependant ce ne sont pas aux mêmes observations que se livrent le chercheur en didactique, le futur enseignant, et, le cas échéant, le formateur (mais nous ne développerons pas ici ce dernier exemple).

Pour le chercheur en effet, nous pensons que, pour être optimale, l'observation doit être seconde. Elle doit être précédée par une analyse a priori des situations à observer et une détermination aussi précise que possible des variables puis des observables intéressants dans la situation étudiée. Elle doit être suivie de l'analyse des données qu'elle permet de recueillir. Donc l'observation n'est pas isolée, elle est accompagnée de toute une série d'activités avant elle et après elle. Ainsi le chercheur en classe guette-t-il des éléments de réponse aux questions qu'il s'est posé, il note les informations qu'il a prévu de recueillir. Cela demande une préparation sans laquelle il ne peut déterminer quand aller regarder et ce qu'il faut regarder. Il essaiera ensuite de confronter le plus finement possible ce qui se passe et ce qu'il avait prévu.

L'observation est un moyen d'analyser une expérience (au sens large). C'est un outil, permettant de traduire l'expérience en données accessibles aux absents. Elle contribue à l'évaluation de l'expérience, permet d'en préciser les conditions, ou d'introduire a posteriori des nuances, des rectifications...

Si l'observation "sauvage" peut être source d'inspiration pour le chercheur, ce n'est qu'un moyen parmi d'autres, qui n'a pas à être retenu comme nécessaire à la recherche : si le chercheur l'utilise, il devra retravailler les hypothèses qu'il aura pu élaborer en prévoyant d'autres observations non sauvages cette fois...

La situation est tout à fait différente pour le futur enseignant qui va dans la classe sans projet très précis, et notamment s'il s'agit d'une observation simple, sans participation ultérieure à l'enseignement. Il y a comme une mise en situation, partielle, de l'étudiant...

Celui-ci doit se familiariser avec le milieu scolaire, du point de vue du professeur ; il peut regarder les élèves, l'enseignant, mais on ne peut pas lui donner les moyens de dépasser l'impression qu'il va en retenir : ces moyens auraient demandé une préparation, un recueil de matériel...

Il va donc se laisser imbiber par l'atmosphère de la classe, se faire un certain nombre d'idées, donner du sens à certaines questions qui sont posées par les formateurs. Il peut commencer à adopter une nouvelle représentation des choses, comme enseignant et non du point de vue de l'élève. La situation est d 'ailleurs souvent vécue favorablement de ce point de vue par les étudiants.

Certes on peut penser que dans une classe, et même dans de nombreuses classes, les mêmes causes produisent les mêmes effets, au moins partiellement. C'est sans doute en partie ce qui rend intéressant les observations des futurs enseignants. Mais le débutant peut-il déterminer vraiment les causes de ce qu'il voit ? Peut-il faire la part de ce qui est à "retenir" ?

Nous pensons que bien des pièges le guettent, dans la mesure justement où il n'a pas les moyens de dépasser ce qu'il voit.

2) Limites de l'observation simple pour le futur enseignant

- Ce qu'on perçoit dépend (en partie) de ce que l'on sait et de ce que l'on est :

Ainsi, d'une certaine manière, le futur enseignant ne peut pas voir certains éléments qu'il ne connaît pas encore, auxquels il ne prête donc pas attention.

Par exemple, si l'observateur ne regarde pas les élèves mais l'enseignant, au moment où celui-ci reprend les questions des élèves, il pourra ne pas percevoir que certaines des réponses ne sont jamais reprises par le professeur.

On peut ajouter que toute observation a un écho très personnel chez tout observateur, écho partiellement conscient seulement, et on doit en prévenir les étudiants : il faut se méfier du fait que chacun reconstruit ce qu'il voit à partir de sa propre expérience, de ce qu'il connaît, et il y a là comme un filtre qui peut cacher, ou pondérer différemment selon les individus, certains phénomènes.

Mais il y a plus grave :

- Ce qu'on perçoit n'est pas toujours le plus significatif

Ce que l'on voit sans effort est nécessairement très superficiel, c'est ce qui est à la surface de la vie de la classe, ce qui dépend le plus des individus en présence (professeur et élèves), ce qui est le plus contingent, et cela ne correspond pas toujours aux causes réelles de ce qui se joue dans la classe, à l'essentiel, en ce qui concerne notamment les apprentissages.

Un enseignant peut par exemple donner à chercher souvent beaucoup d'exercices à la maison ; l'observateur pourra en déduire des choses complètement erronées, s'il ne sait pas que l'enseignant ne corrigeant jamais les dits exercices, une grande partie des élèves ne les cherche plus.

- On ne peut pas tout voir

Il y a des éléments importants, qui restent invisibles, qui échappent à l'observation directe.

Ce peut être en particulier des éléments des représentations des acteurs en présence, qui conditionnent ce qui se passe, sans être jamais exprimés directement. Cela peut induire l'attribution de phénomènes à des causes fausses, parce que ces causes précisément sont invisibles.

Par exemple des élèves ne participent pas : l'observateur va tout naturellement mettre en cause le scénario proposé par l'enseignant. Or il s'avère que ce jour là les élèves étaient sous le choc de perturbations n'ayant rien à voir avec la classe, ignorées même du professeur.

Certains élèves en revanche ont l'air très attentifs, très intéressés, ils répondent même à de petites questions à faible portée. On peut découvrir par des moyens autres que l'observation qu'en réalité ils n'écoutent rien, ayant mis sur leur visage une expression qui fait illusion, n'intervenant que dans des cas ponctuels qui n'engagent en rien leur compréhension réelle.

Ou encore un enseignant explique apparemment très bien, impressionnant les observateurs néophytes par sa clarté. Il leur échappe simplement que beaucoup d'élèves, notamment "moyens", n'apprennent pas bien en écoutant des explications. Cela peut ne jamais apparaître à l'observateur !

Dernier exemple : des réponses justes ne témoignent pas toujours d'une réelle connaissance. Elles peuvent avoir été induites par un questionnement fermé (avec une seule réponse possible). Elles peuvent être l'effet du contrat de la classe à ce moment-là...

- Limites dues au temps et à la complexité

Enfin, une observation est nécessairement limitée dans le temps. Or le temps n'est pas homogène dans une classe, certains événements sont déterminants, notamment ce qui se passe au début de l'année scolaire, et ce peut être en partie à l'insu de l'enseignant qui ne pourra renseigner valablement l'observateur. Et l'observateur n'est pas toujours présent aux moments significatifs. De plus certaines choses se jouent sur la répétition, sur le long terme, et là encore cette information ne peut être perçue directement. Comment restituer les maillons manquants ?

De manière plus générale, comment recomposer les informations de nature différente qui sont emmagasinées par l'observateur ?

Il perçoit d'une part des éléments de mathématiques, d'autres choses concernent la discipline, certaines ont l'air d'impliquer les personnes présentes. Qu'est ce qui est le plus important dans cette complexité ?

D'autre part l'observateur perçoit des éléments locaux, le résultat de décisions en partie instantanées. Comment se jouent chez l'enseignant les articulations entre local (niveau de la classe, à un moment donné) et global (organisations des activités sur l'année et préparations des leçons) ?

Entre le court terme et le long terme ?

Pour résumer tout ce qui précède, disons que c'est peut-être une certaine illusion d'une transparence qui n'existe pas entre ce qu'on voit et la réalité qui peut faire croire qu'une observation simple en classe est réellement formatrice en elle-même.

Les pratiques ne sont pas entièrement révélées par ce qu'on en voit, conditionnées comme elles le sont par les conceptions, mais les représentations ne sont pas non plus entièrement révélées par les pratiques, médiatisées comme elles le sont par les contraintes instantanées des situations et par les décisions non rationnelles qui peuvent intervenir.

Ces restrictions importantes étant faites, examinons ce qu'une telle observation peut tout de même apporter en formation initiale, quitte à prévenir les étudiants des dangers d'interprétations hâtives et quitte à modifier un peu les observations elles-mêmes...

3) Comment tirer au mieux parti des observations simples en classe ?

Reste en effet que, si on ne peut se fier à la seule observation pour comprendre tout ce qui se joue dans la classe, on peut sans doute faire profiter quand même les étudiants de leurs observations bien interprétées (cf. ci-dessus), et, comme nous allons le développer maintenant, bien préparées.

D'abord les étudiants peuvent retenir des exemples de gestion de classe sur un contenu donné : telle activité se traite bien avant tel cours, telle erreur "sort" bien avec tel exercice, tel exercice fait bien fonctionner tels outils...

La comparaison entre deux classes de même niveau scolaire peut être très intéressante sur ce point.

De plus, une observation de la chronologie de la classe peut facilement être réalisée et induire des réflexions utiles sur le temps réel : durée de telle ou telle activité, des mises en route, des changements d'activités...

Remarquons tout de suite que le bénéfice sera sans doute encore plus grand si l'étudiant peut comparer ce qu'il voit à des prévisions (les siennes, ou celles de l'enseignant), et s'il a réfléchi à l'avance à la nature des différentes activités observées. D'où cette idée de préparer l'observation, si possible même avec l'enseignant de la classe mais aussi quand c'est possible avec un formateur intervenant dans la formation.

C'est que l'interprétation du déroulement observé, et notamment des décalages temporels éventuels par rapport aux attentes, ne se laisse pas déduire de simples observations : elle nécessite de revenir à l'analyse de l'activité, des difficultés estimées et des prévisions.

Rappelons ici qu'un des problèmes importants rencontrés par l'enseignant débutant est justement l'estimation à l'avance du temps que prendront les diverses phases de l'enseignement. Ultérieurement, la préparation des séances (qui se fait chez soi) pourra donc être facilitée par une idée a priori du temps raisonnable qu'on peut accorder aux différentes phases. Ainsi, on peut penser que le fait d'avoir prêté attention à ce facteur temps lors d'observations en classe pourra faciliter ces préparations, même pour des contenus non observés.

De même l'observation des erreurs des élèves, lorsqu'elles s'expriment à l'oral, peut être une source d'informations utile pour le futur enseignant, mais d'autant mieux qu'il aura réussi à mettre en rapport ces erreurs et l'enseignement reçu : si on est au début de l'apprentissage, il peut être important de faire sortir les erreurs, si on est à la fin, les erreurs, alors résistantes, peuvent nécessiter un traitement spécial... Cette interprétation ne peut là encore se déduire d'une simple observation, et nécessite une certaine préparation, avec l'enseignant concerné.

De plus, dans tous les cas, le champ observé ne peut couvrir bien sûr tout ce que le futur enseignant aura à traiter : il s'agit donc aussi de rendre possible le transfert de ce qui a été vu dans un domaine à d'autres domaines, et ce transfert sera sans doute facilité par le fait que l'étudiant est prêt à regarder le déroulement du temps, ou à envisager les erreurs d'un certain point de vue, donc par une certaine préparation de l'observation, dégageant notamment les catégories de phénomènes à considérer...

Pour résumer, les éléments suivants relèvent sans doute de ce qui peut être atteint par une observation simple, moyennant une certaine préparation :

- familiarité avec la classe, vécue par l'étudiant côté enseignant et non côté élève
- initiation à certains questionnements systématiques (nature des activités, temps, erreurs)
- balisage théorique de l'enseignement de quelques notions (projet, déroulement effectif, comparaisons avec les prévisions).

Reste que ces explications qu'on doit donner aux étudiants pour préparer l'observation ne sont pas toujours faciles à concevoir : si on reste à un niveau très général, les étudiants auront du mal à dégager ce qui est intéressant dans une situation précise ; si on veut rentrer dans le détail, on est obligé de se livrer à des analyses a priori assez fines, longues, ennuyeuses même, et si on veut sérieusement comparer le déroulement observé et les prévisions on est obligé de relever des documents ou d'enregistrer des passages. Sinon on risque de tomber dans les pièges signalés au paragraphe précédent.

De plus, avant toute observation, les étudiants ne sont pas sensibilisés à ces problèmes et ne vont pas entendre le message, après, il sera trop tard et beaucoup d'information sera perdu...

Il y a sans doute lieu de procéder par étapes : premières observations peu préparées, bilan, prise de conscience des problèmes, préparations des nouvelles observations etc...

Conclusion

Indiquons pour conclure qu'il nous semble qu'il y a toujours entre les connaissances théoriques (qu'elles quelles soient : mathématiques, pédagogiques, didactiques...) et la pratique professionnelle un grand saut ; et que toute la question pour le formateur est de ménager des étapes pour aider le futur enseignant à le franchir le mieux possible, sachant qu'il y a une contradiction inévitable entre la situation d'apprenant et la situation d'enseignant...

L'observation en classe fait ainsi partie de "l'arsenal" du formateur, elle peut sans doute contribuer à la formation à condition d'être intégrée à un processus plus complet, d'être bien préparée, peut-être même en plusieurs temps, et à condition que les étudiants soient bien prévenus de toutes les interprétations fausses qu'ils pourraient faire s'ils ne se méfient pas.

Ceci dit, bien des questions restent ouvertes :

- Qu'est ce qui échappe toujours à l'observation ?
- Qu'est ce qu'on apprend sur la pratique en ne pratiquant pas soi-même ?
- Quels transferts peut-on faire à partir des observations des autres ?
- Et réciproquement, dépassant d'ailleurs la seule observation, quelles économies par rapport à l'apprentissage de son métier peut-on faire faire à l'étudiant grâce à la formation, y a-t-il des expériences "obligées", des détours impossibles ?

Auteur : Guy BROUSSEAU.

Type : Notes tirées par JL Ovallon de la conférence de Guy Brousseau au stage de PAU, et du document rédigé en vue d'un enseignement de statistique en première année de Professeurs d'Ecole à l'IUFM de Bordeaux pour l'année 91-92.

Date : Décembre 1992.

Résumé : Proposition de transposition didactique de connaissances statistiques, et arguments pour l'introduction d'une formation initiale en statistiques des professeurs d'école.

LES STATISTIQUES DANS LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

Introduction

La plupart des éléments qui servent aux professeurs à prendre des décisions sont d'ordre statistique. Il serait normal que l'étude des statistiques fasse partie de la formation.

Actuellement, le rapport au savoir ne permet pas aux statistiques de vivre en France (contrairement à ce qui se passe dans les pays anglo-saxons).

Cet enseignement intéresse les professeurs de mathématiques, mais pas seulement eux : le monopole qui leur est donné sabote le projet. Il faut le dépouiller d'un ensemble d'oripeaux.

Le projet : enseignement minimal d'un objet, le test du χ^2

Un professeur vient de corriger un exercice.

Les questions qui retiennent tout d'abord son attention sont les suivantes :

Questions relatives aux décisions qu'il doit prendre à propos de son enseignement :

1. Faut il reprendre l'enseignement des connaissances visées dans cet exercice ? (exemples : donner la correction, traiter les erreurs observées, donner un nouvel exercice, donner un nouvel exemple, donner un nouveau cours avec de nouvelles explications, etc...)
2. Si oui, avec tous les élèves ou seulement avec quelques uns ?
3. Faut il reprendre l'ensemble des questions ou seulement certaines ?
4. Dans un groupe de questions à reprendre, y en a-t-il qui sont plus décisives que d'autres ?
5. Les erreurs observées renvoient elles à une nouvelle étude de la connaissance visée où au traitement d'une autre question ?

Questions relatives aux décisions qu'il doit prendre à l'égard de ses élèves :

1. Faut il présenter l'exercice comme une évaluation terminale sur une connaissance ? comme une étape dans l'apprentissage ? ou comme un simple épisode ?
2. Faut-il (et est-il légitime de) et sous quelle forme, renvoyer aux élèves une évaluation de leur résultat personnel ? de la classe ? de la connaissance elle même ? ou de l'enseignement ?

Les réponses à ces questions ne sont ni simples ni générales, mais dans chaque analyse, le recours à des informations statistiques peut être précieux pour clarifier le débat. Les statistiques peuvent aider le professeur à passer de l'interprétation des réponses des élèves à la détermination de leurs connaissances, de leurs erreurs, de leurs conceptions: puis de cette étude à celle des réussites et des échecs d'une activité d'enseignement, ensuite à la comparaison avec les résultats d'une population scolaire plus vaste, de là à la construction des décisions didactiques et des messages vers les élèves. Elles permettent de comprendre comment se légitiment les savoirs sur l'enseignement et quel peut être leur apport dans les décisions didactiques.

Les problèmes suivants montrent sur des exemples la façon dont ces renseignements peuvent intervenir de manière concrète dans la conduite de la classe.

1 - Comparaison des réussites d'une classe avec la population scolaire

A un échantillon de 1650 élèves de 6ème (EVAPAM 1987) on a posé des questions comme la suivante :

"Un objet qui valait 400 F a subi une augmentation de 10%. Quel est le nouveau prix de cet objet après augmentation". (Item EXA29)

sur les sujets ci dessous :

		réussite
Item EXA29	calcul du nouveau prix après une hausse de 10%	36%
Item EXC27	calcul du nouveau prix après une baisse de 10%	37%
Item EXB19	calcul de l'augmentation de 10%	50%
	Problème:	
item APPA7	calcul du nouveau prix après une baisse de 5%	38%
item APPA8	calcul enchainé du nouveau prix après la baisse précédente suivie d'une hausse de 33%	25%
item APPA9	explication du calcul	19%

Dans ce dernier exercice, 43% des élèves calculent correctement au moins un pourcentage.

- **a)** Les nombres de réussites aux exercices EXA29 et EXB19 sont ils significativement différents? expliquez ce résultat. Même question pour les items EXA29 et EXC27.

- **b)** Même question pour les items APPA8 et APPA9

- **c)** Sur cette population quelle est en pourcentage la plus petite différence significative?

- **d)** Un enseignant a obtenu dans sa classe de 24 élèves les résultats suivants:

(pourcentages de réussite)

EXA29	EXC27	EXB19	APPA7	APPA8	APPA9
66.6%	54%	75%	50%	29.1%	16.6%

• Que doit il en penser? Les résultats de sa classe sont ils significativement meilleurs que ceux de l'échantillon sur EXB19 ? sur EXA29 ? sur APPA9 ? sur l'ensemble de l'épreuve ?

• Quelles conclusions peut il tirer à **partir de son observation de 24 élèves** sur les questions a et b ?

- **e)** Les résultats changent ils de façon significative selon que l'on propose un calcul de pourcentages dans un exercice ou dans un problème ?

- **f)** On suppose que lors de l'enchaînement de 2 calculs, les pourcentages de réussite à chacun d'eux restent les mêmes. Quel pourcentage de réussite devrait on attendre à l'item APPA 8 ? Comparez ce modèle à la contingence.

- **g)** On suppose au contraire que le pourcentage de réussite ne dépend pas du nombre n de fois (si toutefois $n<4$) où on demande de refaire la tâche. Mettre cette hypothèse à l'épreuve dans APPA8.

- **h)** Plusieurs hypothèses ont été émises à propos des explications :

• Elles sont indispensables à la réussite des exercices.

• On ne peut expliquer que ce qu'on sait faire.

• L'explication contrarie l'exécution d'une tâche.

Lesquelles de ces déclarations sont compatibles avec les résultats statistiques observés ?

Quelles observations faudrait il recueillir pour pouvoir mettre effectivement à l'épreuve ces trois déclaration ?

2 - Etude des réussites et des échecs dans une classe.

Un enseignant a proposé à ses 26 élèves les 6 questions évoquées dans l'exercice précédent. Il a obtenu les résultats suivants :

élèves	ex. 1	ex. 2	ex. 3	pb. 1q	pb. 2q	pb. 3q	Totaux
a	1	0	1	0	1	1	4
b	1	1	0	1	0	1	4
c	0	0	0	1	1	0	2
d	0	0	0	0	0	0	0
e	1	1	0	0	1	1	4
f	0	1	0	1	0	0	2
g	0	0	0	0	1	0	1
h	1	1	1	1	1	0	5
i	0	0	0	0	0	1	1
j	1	0	1	0	0	1	3
k	1	0	1	1	0	0	3
l	0	1	1	1	1	0	4
m	0	0	0	0	0	1	1
n	1	1	0	0	1	1	4
o	1	0	1	1	1	0	4
p	1	0	1	0	0	1	3
q	0	0	0	1	1	1	3
r	1	0	1	0	1	1	4
s	0	0	0	1	1	0	2
t	1	1	1	1	0	0	4
u	0	1	1	0	0	0	2
v	1	0	0	1	1	0	3
w	0	1	1	0	1	1	4
x	1	0	0	1	0	0	2
y	1	0	1	0	0	0	2
z	1	0	0	1	0	1	3
totaux effectifs	15	9	12	13	13	12	74
pourcentages							

1. Sur cet ensemble de questions, la classe est elle homogène ou y a-t-il des groupes d'élèves ayant des réussites très différentes?

2. Quelles sont les questions qui devraient être enseignées à nouveau à l'ensemble des élèves?

a) Si on accepte 80% comme réussite minimum, à ce niveau ?

b) si on accepte comme objectif la moyenne nationale donnée ci dessus:

c) si on se résigne au seuil inférieur de signification, c'est à dire à ne dépasser que 5% des classes ?

d) Si on admet que les réussites sont 10% moins nombreuses après un laps de temps de temps de 3 mois et que les réussites lors d'un questionnaire diminuent aussi de 10% par rapport aux exercices posées dans l'ambiance ordinaire de la classe, quel serait le pourcentage que devrait rechercher cet enseignant pour placer sa classe aux niveaux évoqués ci dessus et quelle décision doit il prendre dans chaque cas.

3. Est ce que les questions sont indépendantes, c'est à dire que les échecs sont répartis de façon homogène entre tous les élèves de la classe, ou bien y a-t-il un groupe d'élèves qui réussit bien toutes les questions et un groupe qui ne réussit à peu près jamais.

4. Le fait de savoir effectuer le calcul du pourcentage dans l'exercice 3 est il nécessaire pour répondre correctement à toutes les autres questions ?

5. Quelle relation existe-t-il entre expliquer un calcul et l'effectuer correctement ?

3 -Distance et représentant

Mr A. a proposé à ses élèves une question empruntée à un questionnaire d'évaluation national, 17 ont répondu correctement tandis que 12 ont donné une réponse erronée.

Dans l'ensemble des classes évaluées, cette question a obtenu 66% de succès.

Mr A se demande si les résultats de sa classe sont très éloignés de ceux de ses collègues.

Problème fréquent en statistique : il s'agit de comparer des objets

Il est fréquent que l'un des deux objets de la comparaison soit une observation, les données recueillies, la contingence, tandis que l'autre lui sert de "Modèle".

- soit le modèle sert à décrire la contingence de façon simplifiée, nous dirons alors qu'il est un **représentant**
- soit au contraire il est pour elle une valeur idéale, ou théorique dont l'observation a produit une valeur approchée, nous parlerons alors de **valeur théorique**, ou de **modèle** correspondant à une hypothèse.

Dans l'exemple, il s'agit de comparer deux classes, l'une bien réelle celle de Mr. A. l'autre est celle à laquelle il veut la comparer.

Dans les deux cas, une proximité se mesure à l'aide de distances :

Si l'une des deux valeurs, (appelons la "valeur théorique") V_t, sert de modèle à l'autre, (appelons la "valeur observée") V_o, il est possible d'utiliser des distances pondérées.

On voudrait que la distance de V_o à V_t soit d'autant plus grande que la différence entre V_o et V_t est grande mais d'autant plus petite que a est grand. On peut interpréter $d(V_o, V_t)$ comme une erreur sur V_t. L'erreur relative à V_t est $(V_o - V_t)/ V_t$.

Il existe plusieurs distances entre deux nombres, mais en pondérant celle du "carré de la différence" on obtient la "distance du χ^2" de deux nombres:

$$d(x , a) = \frac{(x-a)^2}{a}$$

que l'on écrit pour bien distinguer la valeur observée et la valeur théorique :

$$d(V_o , V_t) = \frac{(V_t - V_o)^2}{V_t}$$

La distance du χ^2 semble bien appropriée pour décrire la différence entre la classe de Mr A. et le "modèle", la classe typique de l'évaluation, car une différence de deux élèves sur un effectif de 29 élèves, est plus importante que sur un effectif de 100, et moins importante que sur un effectif de 5 élèves

La distance du χ^2 entre 17 et 19 est 4/19.

Mais cette valeur ne nous avance guère car nous n'avons pas de références ni d'habitudes qui nous disent si cette valeur est grande ou petite, acceptable ou non. Nous chercherons un moyen de remédier à cette insuffisance au chapitre suivant

Entre deux suites de nombres, la méthode se généralise. Le modèle A est lui même une suite de nombres

$A = (a_1 , a_2 , a_3 , ... a_i , ... a_n) = (a_i)_i$ variant de 1 à n.

LA DISTANCE DU χ^2 ENTRE DEUX SUITES DE NOMBRES.

Pour bien distinguer les observations et leurs modèles on écrit la formule du χ^2 sous la forme :

$$d\chi^2 (V_o , V_t) = \frac{(V_{o1} - V_{t1})^2}{V_{t1}} + \frac{(V_{o2} - V_{t2})^2}{V_{t2}} + \dots + \frac{(V_{oi} - V_{ti})^2}{V_{ti}} + \dots + \frac{(V_{on} - V_{tn})^2}{V_{tn}}$$

Chaque valeur observée V_{oi} a un "modèle" ou une valeur théorique différents : V_{ti}. Le modèle est donc (V_{ti}). i est l'indice qui permet de compter les termes de la somme.

La distance du χ^2 entre (V_{oi}) et (V_{ti}) est la somme de n termes, si la contingence contient n valeurs observées

Exemple : on peut calculer la distance du Chi carré entre le nombre de réussites de la classe de Mr. A et celui de la classe typique :

$$d(A,T) = \frac{(17 - 19)^2}{19} = \frac{4}{19} = 0,24$$

Mais on peut aussi comparer les résultats de la première: (17, 12)

avec ceux de la seconde (19, 10).

$$d(A,T) = \frac{(17-19)^2}{19} + \frac{(12-10)^2}{10} = 0,61$$

Ces deux valeurs ne nous disent toujours rien de précis mais permettront à leur tour des comparaisons.

APPLICATION : lecture des tables de répartition

Si Mr A. possédait la distribution parente de son résultat, observée sur l'ensemble des classes à 29 élèves de toute la France, il pourrait déterminer avec plus de réalisme et de précision les résultats de sa classes. Imaginons que la distribution soit la suivante, (en fait cette distribution est inventée pour les besoins du cours).

DISTRIBUTION PARENTE CONTINGENTE.

nombre de réussites par classe de 29 élèves
0.1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.**16**.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29
nombre de classes ayant ce nombre de réussites
*0.0.2.0.1.0.0.1.0.3. 7. 2. 4. 9. 8. 5.**11**.15.25.19.18.31.17.12. 9.10. 9. 2. 4 . 0*
(lecture du tableau : il y a 11 classes ayant 16 réussites)

FONCTION DE REPARTITION PARENTE CONTINGENTE

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	*0*	*0*	*2*	*2*	*3*	*3*	*3*	*4*	*4*	*7*	*14*	*16*	*20*	*29*	*37*	*42*	*53*

18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
68	93	112	130	161	178	190	199	209	218	220	224

SIMULATION

Nous pouvons simuler ce qui a produit la distribution des nombres de réussites par classe de la façon suivante : Dans une urne disposons 190 boules rouges et 100 boules blanches, ensuite nous procédons à des suites de 29 tirages avec remise. Chaque suite représente la composition d'une classe, le nombre de boules rouges représente le nombre de réussites. Il est clair qu'il peut y avoir 19 boules rouges exactement à chaque tirage.

Effectuons par exemple la simulation de mille classes. Le résultat, présenté sous forme d'une distribution ou d'une fonction de répartition comme ci dessus, est le suivant :

DISTRIBUTION ET RÉPARTITIONS THÉORIQUES

nbre réussites	10	11	12	13	14	15	16	17	18
prop de classes	0,04	0,15	0,4	1,1	2,4	4,5	7,6	11	14
prop. cumulées	0,04	0,19	0,23	1,33	3,7	8,2	15,8	26,8	40,8

19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
15,4	14,6	11,9	8,2	4,7	2,2	0,8	0,2	0,05	0
57,5	72,1	84	92,2	96,9	99,1	99,7	99,9		

(Distribution binomiale)

De cette façon, on a construit les tables donnant des valeurs "seuils" du χ^2.

En voici un petit extrait :

Fonction de répartition du CHI CARRÉ

Sous l'hypothèse nulle, proportion des $\chi_2 > \chi_{2seuil}$ (effectifs cumulés)									
0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
0.064	0.15	0,46	1,07	1.64	2.71	3.84	5.41	6,64	10.83
Valeurs des différents X^2_{seuil}									

Cette table nous apprend par exemple que 70% des χ^2 (lire 0.70) seront plus grands que 0.15, et donc que 30% sont plus petits, ou encore que 50% sont plus grands que 0.46. De même, seulement 20% des χ^2 sont plus grands que 1.64.

LE DEGRÉ DE LIBERTÉ DES DISTRIBUTIONS DU CHI CARRÉ

La distance du χ^2 permet de comparer

- une distribution observée sur n valeurs d'une variable et dont les effectifs sont ($Vo\ i$), i variant de 1 à n, (attention! la valeur observée est l'effectif de la valeur de la variable)
- avec une distribution théorique sur les mêmes n valeurs, et dont les effectifs sont ($V_t\ i$) (attention encore, la valeur théorique est l'effectif -théorique- de la même valeur de la variable).

Théorème fondamental

La distribution de la distance du χ^2 ne dépend pas des valeurs observées ni des valeurs théoriques. Elle ne dépend que d'un paramètre: LE DEGRÉ DE LIBERTÉ du modèle. C'est le nombre n de valeurs que l'on peut fixer de façon arbitraire dans le modèle théorique .

Il est donc possible de comparer des distributions à plus de deux valeurs à l'aide de la distance du χ^2 et de sa distribution.

Les fonctions de répartition des différentes distributions du χ^2 selon le degré de liberté sont données dans la table du χ^2, en fin de chapitre: une ligne par valeur du degré de liberté.

DEGRÉ DE LIBERTÉ DE DIVERS MODÈLES.

a) Les modèles que nous avions rencontrés précédemment présentaient une distribution correspondant à une partition à deux valeurs. L'effectif total étant fixé il suffisait de déterminer 1 valeur, par exemple le nombre d'échecs pour que le modèle soit déterminé. le degré de liberté est 1 (n = 1)

b) L'exemple ci dessous présente une distribution à 4 valeurs. L'effectif total de fréquentation est déterminé, il faut prendre le même dans le modèle. On peut choisir trois valeurs théoriques dans ce cas, la quatrième est déterminée. Le degré de liberté est 3.

Si la distribution présente une partition à n valeurs, le degré de liberté est n-1

c) Si la contingence se présente comme une distribution d'effectifs sur un produit de partitions, c'est à dire sous forme d'un tableau (deux variables à n et à m valeurs par exemple), le calcul du χ^2 comprend la somme des contributions de chaque case: Le degré de liberté est (n - 1)(m - 1).

exemple: Le professeur a proposé aux élèves 4 ateliers. Il observe les fréquentations suivantes :

atelier 1	atelier 2	atelier 3	atelier 4
17	10	8	21

Il se demande si ces résultats sont très éloignés d'une fréquentation égale des 4 ateliers qu'il représente par la distribution suivante :

atelier 1	atelier 2 :	atelier 3	atelier 4
14	14	14	14

Calculer la distance du χ^2 entre ces deux distributions et indiquer si elle est étonnamment grande au seuil de 5 % en se rapportant à la distribution de degré de liberté 3.

RESUMÉ DE LA STRATÉGIE

1ère Idée:
Pour savoir si deux objets, deux nombres par exemple, se ressemblent ou sont éloignés, calculer leur **distance**.

2ème Idée:
L'un des deux nombres est un **modèle** pour l'autre ou son représentant.

3ème Idée.
Pour choisir un représentant d'un ensemble, prendre parmi tous les modèles possibles celui qui est **à la distance la plus petite** de cet ensemble La distance résiduelle représentera la **qualité** du représentant.

4ème idée
Pour **apprécier la taille** d'une mesure ou d'une distance, savoir quelle est la proportion des mesures qui lui sont supérieures.

5ème Idée
placer les distances observées par rapport à une distribution (contingente)

6ème Idée:
Quand la distribution contingente d'une variable ne peut pas être connue, en construire une par **simulation** ou par le calcul, à partir d'une hypothèse choisie.

7ème Idée
Utiliser des distributions de distances qui restent valides pour des modélisations aussi variées que possible.

Problèmes de l'introduction d'une pensée statistique dans le métier de professeur

Thèse 1 : **un minimum de connaissances et de pratiques statistiques est indispensable** (mot à discuter) **aux enseignants pour leur travail** (pourcentages de réussite aux exercices, marges...). Les maîtres le font à l'école Michelet pour piloter leurs décisions didactiques, et c'est important pour le bilan, on compare les résultats de l'école avec des résultats d'évaluations diverses, on regarde élève par élève: on obtient des renseignements objectifs, et qui sont traités d'une manière un peu standard. Cela permet une objectivation des prises de décision, et des communications avec le milieu (mouvements d'élèves), et des communications avec les parents en résistant aux déclarations farfelues que l'on entend sur l'enseignement.

C'est la base de l'acquisition d'une partie intéressante des connaissances des maîtres : ça ne servirait qu'à changer l'opinion des gens par rapport aux jugements qui circulent sur l'enseignement. Tous les jugements sur l'enseignement sont extrêmes, toutes les décisions sont des équilibres. Quel genre d'indices faut-il regarder, quel genre d'indice faut-il conduire ? C'est un discours réaliste qu'il faut savoir comprendre. Discuter sur l'utilité de tourner le volant à fond à droite et à gauche sans regarder le fossé, me paraît être la règle presque obligée du discours d'amateur qu'acceptent les maîtres pour parler de leur travail sous les coups des pressions diverses.

Comme moyen de communication pour changer le rapport à la contingence pédagogique chez le professeur et favoriser le développement d'un discours plus objectif : intérêt pour la décision locale (on peut amener des différences de comportements) : ça joue vraiment sur l'ensemble des maîtres avec leur travail.

En résumé, les statistiques sont indispensables parce que tous les renseignements dont dispose le maître sont par nature statistiques, et que tous leurs problèmes sont des problèmes d'agrégation, ils doivent tirer une décision valable pour l'ensemble d'élèves tous différents. Le problème n'est pas de se faire chantre de la collectivisation ou de l'individualisation de l'enseignement, le problème est de savoir jusqu'où on peut aller dans l'individualisation, quelles sont les décisions qu'il faut prendre pour tous et comment le cas échéant faire en sorte qu'on puisse s'y plier, et qu'on puisse défendre les choix qu'on a fait.

Thèse 2 : en tant que moyen technique, il s'agit d'un élément culturel symbolique de professionnalisation, par conséquent **il faut que cette connaissance soit reconnue comme compétence du milieu et de la profession**.

Ça ne doit pas rester un savoir privé, il faut que les professeurs d'école sachent qu'ils savent : les statistiques doivent être affichées comme un savoir professionnel. Ce n'est pas seulement les professeurs qu'il faut viser, mais c'est le milieu des professeurs, c'est les rapports qu'ils ont entre eux, c'est la façon dont ils parle avec le milieu de leur travail. Pour ça, il faut bien plus que savoir les statistiques. Il faut savoir que les autres en savent aussi, et qu'on a le droit de s'en servir.

Aucun économiste ne va traiter les problèmes d'économie en faisant abstraction complète de tous ce qu'on peut savoir sur les valeurs de quelques indices, des échanges. Alors que sur l'enseignement on peut parler sans rien savoir de ces valeurs. C'est une pratique sociale à changer

Il y a là une pratique sociale à changer (pratique sociale minimale) : il ne s'agit pas de développer la culture personnelle des maîtres en statistiques. Etablir ce genre de rapport est une nécessité professionnelle, c'est vrai et en plus c'est utile.

Il ne suffit pas de former des individus, mais il faut les former chacun à accepter les exigences des autres relativement à des pratiques sociales minimales.

Je ne cherche pas à développer la culture professionnelle des maîtres, j'introduis ça comme une pratique professionnelle.

Thèse 3 : la réalisation d'un projet d'enseignement des statistiques se heurte actuellement à des obstacles culturels et didactiques (et particulièrement en France). **L'enseignement des statistiques, la diffusion des connaissances statistiques dans la société française est un vrai problème de didactique, et d'abord un problème de macro didactique**.

Les rapports au savoir des statistiques dans les départements de mathématiques sont désastreux, les rapports des profs de mathématiques aux statistiques sont désastreux: ce n'est pas avec des statistiques que l'on se fait reconnaître comme mathématicien.

La façon dont tous les professeurs vivent leurs rapports aux statistiques s'appuie sur cette caution que donnent les professeurs de mathématiques à la dépréciation des statistiques.

On pourrait comparer cet état de fait avec ce qui se passe dans la société américaine, qui en fait peut être elle un usage excessif.

Je peux donner quelques exemples.

Il y a au moins cinq niveaux de rapports aux statistiques qu'il faut examiner en même temps :

- les mathématiciens
- les profs de mathématiques
- les professeurs
- les professions (sociologues, les psychologues, ...) qui ont des rapports différents et qui sont des demandeurs
- le public

Il sont tous à prendre en compte simultanément, si on veut rendre possible des connaissances de statistiques qui ne seront pas immédiatement tournées en dérision, ou menées à l'échec.

Je donne un exemple du mécanisme de l'échec : on voulait avoir des gens des bacs F et G qui sachent quelque chose en statistique.

Il y avait donc le projet pour les bacs F et G d'enseigner des statistiques, et enseigner les statistiques était l'affaire des professeurs de mathématiques. On ne peut pas leur faire ce qu'on fait en TC ou TD :: pas de variable aléatoire, pas de probabilité conditionnelle (on ne les fait pas avec les matheux...), pas de combinatoire, donc ce qui reste, on va faire de la statistique descriptive.

Est ce que ça sert à l'examen ? Non, je le ferai à la fin du cours.

Résultat, les types connaissent les titres des chapitres qui sont dans leurs livres et rien de plus...

Je pourrais donner l'exemple scientifique du vidage : pourquoi a-t-on en France dix ans de retard sur les USA ? On a eu pourtant des chercheurs de très haut niveau : Borel et la théorie de la mesure...Le théorème de Borel en probabilité et celui de Lebesgue en analyse, c'était la même chose.

A l'université, le cours de statistique est un cours de théorie de la mesure, et rien d'autre... Pour Borel, la théorie des petits échantillons était juste un problème qu'un maître assistant pouvait donner à ses élèves.

Aux USA, il y a eu un environnement de gens qui se sont intéressés à ces instruments qu'on leur proposait et les ont fait fructifier : en économie (matrices positives...) alors que cela n'avait pas d'intérêt en mathématiques : il y a eu un formidable environnement pour utiliser les statistiques.

Les institutions et les pays font fonctionner les savoirs, donnent une écologie favorable au fonctionnement de certains savoirs, et que si on ne s'y prend pas bien, ces savoirs ne peuvent pas exister en dehors de ces circonstances.

Que faudrait-il résoudre pour introduire une formation en statistiques ?

Faire une transposition didactique pour que ce que l'on va introduire comme notions ne soit pas tourné en dérision par les mathématiciens. Si c'est tourné en dérision par la communauté qui est supposée en être le père. L'enseignement est un lieu extrêmement faible de ce point de vue là, l'enseignement ne recevra aucun appui pour faire vivre les choses dont il aura besoin. il faut obtenir de la part des matheux une espèce de consentement, de désarmement contre ces savoirs. Il faut obtenir que les professeurs de mathématiques qui sont des gens à portée des professeurs soient aussi consentants, et pour cela qu'ils soient un peu formés. Les professeurs de mathématiques jugent les instruments en fonction de ce qu'ils peuvent faire avec les élèves dans le secondaire, et c'est parce qu'on ne peut pas faire de problème de statistique raisonnable dans le secondaire que les professeurs ont une sorte de condescendance.

C'est pour ça que j'ai fait un cours de statistiques où les probabilités ne viennent qu'après et où il n'y a que des mathématiques du secondaire, ce qui est important pour faire fonctionner ces connaissances autour des statistiques, pour montrer que c'est intéressant, pour que la communauté des professeurs trouve que ce sont des connaissances honorables.

Il ne faut pas que la remathématisation nécessaire à l'apprentissage tue l'enseignement que l'on veut faire, en substituant à l'objet de l'enseignement des objets chers aux professeurs. Je suis allé faire cette petite défense auprès de nos collègues des sciences de l'éducation

Les gens des sciences de l'éducation ont une vision fausse. Les statistiques ont été introduites pour répondre à des exigences de rigueur scientifique : résultat, ils n'en sont pas propriétaires, ils n'apprennent pas les statistiques et ils font des erreurs : ils sont dans un état de dépendance par rapport aux statistiques, dramatique, qui fait qu'ils consacrent des heures à enseigner des choses à leurs étudiants qui ne leur serviront pas, qu'ils ne peuvent pas retransformer à leur convenance pour les utiliser en sociologie ou ailleurs et ils croient que ce sont de bons arguments pour ne pas les enseigner.

On devrait pouvoir travailler avec eux en formation commune. Il ne faut pas séparer en deux le corps des éducateurs : ceux qui utilisent les statistiques et les autres.

Exemple de bêtise lorsqu'on donne les instruments sans les connaissances : ne pas enseigner n'empêche pas de faire des erreurs quand même.

Avant, on passait un temps énorme à calculer quelque coefficient de corrélation à la main, et on faisait le raisonnement de tout à l'heure :si il y a indépendance entre les deux questions, et si je trouve un coefficient de corrélation qui est très rare sous cette hypothèse, je préfère rejeter l'hypothèse de l'indépendance.

Aujourd'hui, on croise 50 questions avec l'ordinateur, ce qui fait un bon millier de coefficients de corrélation qui apparaissent dans la matrice : on va prendre tous ceux qui sont grands, sur chacun on fait une petite communication, on est un trouveur de corrélation, on rejette l'hypothèse d'indépendance...

Mais avec 50 variables réellement indépendantes, il y a 5% des coefficients de corrélation qui sont significatifs par hasard ! C'est une supercherie, après coup, c'est déterminé, on change les conditions.

Titre : La formation des enseignants aux Etats Unis.

Date : 26 Mars 92

Auteur : Richard Walker, professeur à l'université de Mansfield, Pennsylvanie

Type : Conférence au stage de Pau - retranscription des notes de l'auteur.

Résumé : après avoir décrit l'organisation "moyenne" de la scolarité des élèves aux Etats Unis, l'auteur détaille les contenus de formation des professeurs de mathématiques et des instituteurs en Pennsylvanie.

LA FORMATION DES ENSEIGNANTS AUX U.S.A.

Conférence de Richard Walker, 26 Mars 1992

Bonjour. Jean Louis m'a demandé si je pourrais vous parler de la formation des enseignants aux Etats Unis. je vais essayer de le faire. Comme vous verrez, je ne suis pas fort en français, mais j'espère que vous pourrez me comprendre, et que j'ai quelque chose d'intéressant à dire.

C'est la première fois que je vais donner une conférence en français, et je me sens un peu mal à l'aise. Si vous avez des questions, n'hésitez pas à les poser. Il vaut mieux que vous les posiez tout de suite plutôt qu'à la fin de mon texte.

Aux Etats Unis, quand on donne une conférence, il est normal de commencer avec une plaisanterie.

Je n'ai pas de plaisanterie à vous raconter ! mais si vous voulez, vous pouvez rire de mon accent.

I - La structure générale de l'instruction

Avant que je puisse vous raconter quelque chose à propos de la formation des enseignants aux Etats Unis, il faut parler un peu de la structure générale de l'instruction. D'abord, il est important de se souvenir qu'aux Etats Unis, l'instruction n'est pas une responsabilité du gouvernement fédéral, c'est plutôt de la responsabilité de chaque Etat. Etant donné qu'il y a 50 états différents, ça veut dire qu'il y a 50 systèmes différents d'instruction. Il faut dire tout de suite que ces systèmes sont presque pareils. Mais il y a aussi des divergences. Ce que je vais vous décrire, c'est une structure moyenne - ou typique.

Pour certains aspects - notre système est pareil au système français. A d'autres égards, il est différent. Nous avons des écoles publiques pour les enfants de l'âge de cinq ans à l'âge de dix-sept ou dix-huit ans. Environ 90% des élèves fréquentent les écoles publiques, et 10% les école privées. Les écoles publiques sont financées par le gouvernement et sont gratuites.

- Normalement, un enfant entre à l'école publique à l'âge de cinq ans. L'instruction est obligatoire pour tous les enfants de six à seize ans. Les enfants ne vont à l'école maternelle que pendant une année. Elle s'appelle le Jardin d'Enfants, nous nous servons d'un mot allemand : Kindergarten.
- Ensuite, il y a six ans à l'école primaire, et six ans de plus à l'école secondaire. J'ai du mal à trouver des mots exacts en français. Je vais vous donner les mots que j'ai choisi en français et aussi les mots dont on se sert en anglais.

Les douze ans s'appellent :

> la première classe "FIRST GRADE" pour les enfants de six ans, la deuxième "SECOND GRADE" pour ceux de sept ans, et ainsi de suite jusqu'à la douzième "TWELFTH GRADE" pour les enfants de dix-sept ans.

On appelle les trois premières années de l'école secondaire "JUNIOR HIGH SCHOOL", et les trois dernières "SENIOR HIGH SCHOOL".

Pour faire des comparaisons avec le système français :

- en France, il y a trois ans d'école maternelle contre un aux Etats Unis
- les écoles primaires sont comparables
- la Junior High School est l'équivalent du collège, et la Senior High School est comparable au lycée.

- il n'y a pas aux USA d'examen comparable au baccalauréat, et la terminale française est peut être comme notre première année à l'université.

- Après l'école publique, il y a un système d'enseignement supérieur : nos COLLEGES et UNIVERSITIES. Aux Etats Unis, ces deux mots ont presque la même signification.

- Les études en Université, appelées "HIGHER EDUCATION" commencent par quatre ans à l'UNDERGRADUATE SCHOOL, et ensuite se poursuivent à la GRADUATE SCHOOL.

Les étudiants qui finissent leur UNDERGRADUATE reçoivent ce que nous appellerons un BACHELOR'S DEGREE. Généralement, les étudiants de l'UNDERGRADUATE SCHOOL à l'université ont entre 18 et 22 ans, mais il y a de plus en plus d'étudiants plus âgés.

Après le Bachelor's Degree, il y a la GRADUATE SCHOOL. Le premier degré au niveau de Graduate School est une maîtrise "MASTER'S DEGREE", et il faut une ou deux années pour y aboutir. A la fin de Graduate School, on obtient un doctorat.

II - L'organisation de l'enseignement supérieur

Je voudrais parler maintenant de l'organisation de l'enseignement supérieur - le HIGHER EDUCATION , COLLEGES et UNIVERSITIES, et surtout de l'organisation des quatre années de l'UNDERGRADUATE SCHOOL.

Les institutions de l'enseignement supérieur aux Etats Unis peuvent être divisées en quatre parties :

1. **COMMUNITY COLLEGES** (2 années d'études /Premier cycle Tableau A
2. **LIBERAL ARTS COLLEGES**
3. **COMPREHENSIVE UNIVERSITIES**
4. **RESEARCH UNIVERSITIES**

1) Les COMMUNITY COLLEGES offrent seulement les deux premières années de l'enseignement supérieur. On les appelle quelque fois TWO-YEAR COLLEGES (les institutions de deux années). Elles sont comparables à votre premier cycle. Presque tous les COMMUNITY COLLEGES sont des institutions publiques . Une partie des étudiants n'a besoin que de ces deux années d'enseignement. Les autres changent d'université après avoir fini leur scolarité au COMMUNITY COLLEGE.

Il y a environ 1400 COMMUNITY COLLEGES aux Etats-Unis. 40% des étudiants qui sont à l'UNDERGRADUATE SCHOOLS des Etats-Unis sont inscrits dans un COMMUNITY COLLEGE.

Comme je l'ai déjà dit, presque tous les COMMUNITY COLLEGES sont des institutions publiques. Elles reçoivent une aide financière du gouvernement. De plus, il faut que les étudiants payent une partie des frais (souvent un tiers du total des frais).

2) Les LIBERAL ARTS COLLEGES sont surtout de petites institutions qui offrent des programmes de quatre années, aboutissant au BACHELOR'S DEGREE. Il y a environ 1000 LIBERAL ARTS COLLEGES aux Etats-Unis. A peu près 10% des étudiants de niveau UNDERGRADUATE y sont inscrits, et la plupart des LIBERAL ARTS COLLEGES sont privés.

3) Les COMPREHENSIVE UNIVERSITIES (les universités polyvalentes) sont surtout des institutions publiques qui offrent des études sur tous les arts et les sciences traditionnels, ainsi que sur quelques études professionnelles. Ce sont principalement des institutions UNDERGRADUATE. Généralement, elles offrent de nombreux programmes du niveau de la maîtrise, mais aucun ou très peu du niveau du doctorat. Il y a environ 400 COMPREHENSIVE UNIVERSITIES aux Etats-Unis, et presque 25% des étudiants UNDERGRADUATE sont inscrits dans ces institutions.

L'université où je suis professeur - Mansfield University, dans l'état de Pennsylvanie- est une COMPREHENSIVE UNIVERSITY, bien qu'elle soit de taille modeste. Il n'y a que 3000 étudiants à MANSFIELD. MANSFIELD appartient à un réseau de 14 institutions dans l'état de Pennsylvanie. Il y a 100.000 étudiants au total dans ces 14 institutions.

4) Les RESEARCH UNIVERSITIES (Les universités de recherche) sont de grandes universités. Elles offrent des programmes UNDERGRADUATE, des programmes au niveau de la maîtrise, et des programmes au niveau du doctorat, dans beaucoup de disciplines.

Beaucoup de RESEARCH UNIVERSITIES sont publiques, Beaucoup d'autres sont privées. Il y a 260 RESEARCH UNIVERSITIES aux Etats-Unis, et 25% des étudiants UNDERGRADUATE sont inscrits dans ce type d'institutions.

Comme le nom l'indique, la recherche est une mission majeure de ces universités. Les noms d'universités américaines que tout le monde connaît sont, pour la plupart, des universités de recherche.

5) L'ENSEIGNEMENT UNDERGRADUATE

Chaque année est divisée en deux semestres, et chaque semestre dure 15 semaines. Pendant un semestre, un étudiant suit plusieurs cours. Un cours ordinaire correspond à trois heures par semaine en salle de classe. Quand un étudiant a terminé un cours, il reçoit trois unités de valeur (on dit THREE CREDITS). Trois heures de classe par semaine, multiplié par 15 semaines, font 45 heures de classe au total, c'est ce qui correspond aux trois credits. De même, 30 heures de classe permettent d'obtenir 2 credits, et 15 heures de classe, 1 credit.

En moyenne, un étudiant passe 16 heures par semaine dans les salles de classe. Il obtient donc 16 credits par semestre, 32 credits par an, et 128 en quatre ans. 128 credits est ce qui est nécessaire pour obtenir un BACHELOR'S DEGREE. Certains étudiants finissent ces études en 3 ans ou 3 ans et demi seulement. D'autres ont besoin de 4 ans et demi ou 5 ans.

Dans presque tous les programmes, obtenir 128 credits constitue la condition fondamentale pour décrocher un BACHELOR'S DEGREE.

6) MANSFIELD UNIVERSITY

Je vais vous parler maintenant de MANSFIELD UNIVERSITY où je suis professeur de mathématiques depuis 1970. En beaucoup de points, MANSFIELD UNIVERSITY est une institution typique de l'enseignement supérieur aux Etats-Unis.

MANSFIELD a été fondée en 1857 comme séminaire , pour la formation des pasteurs. En 1862, MANSFIELD est devenue une école normale, pour la formation des enseignants. En 1905, il y avait 400 étudiants à MANSFIELD. En 1927, MANSFIELD est devenue la première institution de l'état de Pennsylvanie à être reconnue comme un STATE TEACHER'S COLLEGE. En 1960, elle est devenue MANSFIELD STATE COLLEGE, une institution polyvalente, et a offert plusieurs programmes différents. Finalement, en 1983, elle est devenue MANSFIELD UNIVERSITY.

Cette progression, de STATE TEACHER'S COLLEGE à STATE COLLEGE, puis à STATE UNIVERSITY est typique de beaucoup d'institutions aux Etats-Unis.

Aujourd'hui, MANSFIELD UNIVERSITY offre 68 programmes au niveau de BACHELOR'S DEGREE, et 8 programmes au niveau de la maîtrise. Environ un quart de ces programmes concerne la formation des enseignants.

Souvenez-vous qu'un programme UNDERGRADUATE consiste en 128 credits. A MANSFIELD UNIVERSITY, 57 de ces 128 credits doivent être suivis en enseignement général, pour tous les programmes UNDERGRADUATE, pas seulement pour la formation des enseignants. Les cours d'enseignement général sont destinés à donner aux étudiants une variété de connaissances importante pour les gens instruits. Cela laisse 128 moins 57, donc 71 credits pour la spécialisation des étudiants.

III - Contenus de la formation des enseignants

Maintenant, enfin, je suis prêt à parler des programmes de la formation des enseignants. MANSFIELD UNIVERSITY a 17 programmes UNDERGRADUATE de formation des enseignants. Je vais en décrire deux.

1) Formation des professeurs de mathématiques

Le premier est le programme de formation des professeurs de mathématiques pour les écoles secondaires - JUNIOR HIGH SCHOOL et SENIOR HIGH SCHOOL, niveau 7 à 12. Le second sera le programme de formation des instituteurs et institutrices.

B.S.E. PROGRAM IN MATHEMATICS
<u>B</u>ACHELOR OF <u>S</u>CIENCE IN <u>E</u>DUCATION

Voir le titre page 110 du M.U. catalog.

Un étudiant qui finit ce programme obtient un BACHELOR'S DEGREE (un B.S.E.).

Pour obtenir le certificat permettant d'être recruté comme professeur de mathématiques dans une école secondaire de Pennsylvanie, l'étudiant doit également passer un examen qui s'appelle le PENNSYLVANIA TEACHER CERTIFICATION TESTING PROGRAM (voir page 16 du catalogue). Après, le diplômé peut chercher un poste dans une école secondaire de l'état.

Notre programme, à MANSFIELD, est semblable à de nombreux autres programmes de formation de professeurs de mathématiques. Plus généralement, il est typique des programmes de formation des professeurs d'autres disciplines.

Ce programme de formation des professeurs de mathématiques dans les écoles secondaires est un programme que je connais bien, parce que je donne plusieurs des cours que ces étudiants doivent suivre. j'ai été aussi le conseiller de plusieurs étudiants dans ce programme.

Les cours requis pour ce programme peuvent être divisés en trois parties :

1 GENERAL EDUCATION	57
2 MATHEMATICS	36
3 PROFESSIONAL EDUCATION (pédagogie, etc.)	32

Il y a cependant des chevauchements parmi ces catégories.

La feuille "E.R.S.. for B.S.E. MATH."(en Annexe I) montre la distribution des credits pour le programme du B.S.E. en mathématiques.

Dans la partie gauche, on trouve les cursus d'éducation générale. Comme je vous l'ai précédemment dit, il faut 57 credits - environ 20 cours- pour remplir ces conditions.

La formation en mathématiques comprend 42 credits de mathématiques (14 cours), et 8 credits de physique (2 cours). Parmi ces 50 credits, 14 sont inclus dans l'éducation générale. Vous pouvez le constater dans la colonne de gauche. Ce sont deux cours de mathématiques (des cours sur le calcul) et deux cours de physique. A droite, en haut, vous pouvez voir neuf cours de plus, et il reste trois lignes vides pour des cours facultatifs en mathématiques. Ces cours de mathématiques sont les mêmes que pour les étudiants qui se spécialisent en mathématiques et science. Ce ne sont pas des cours destinés seulement à la formation des professeurs de mathématiques.

A droite, en bas, il y a des cours d'éducation professionnelle, des cours destinés à la formation des enseignants. Il y a 18 credits -7 cours- de l'instruction à l'université, et 14 credits -3 cours- d'expérience dans le domaine de l'enseignement (FIELD EXPERIENCE).

Parlons des 10 cours de PROFESSIONAL EDUCATION. D'abord, constatez qu'il y a deux cours sur la psychologie dans la colonne de gauche -les cours d'éducation générale. Ce sont PSY 101 - GENERAL PSYCHOLOGY - un cours préliminaire sur la psychologie; et PSY 321 - ADOLESCENT PSYCHOLOGY- un cours sur la psychologie des adolescents.

Parmi les dix cours, à droite en bas, trois concernent des expériences pour les étudiants dans les écoles.

ED 101 INTRODUCTION TO EDUCATION 1 cr

Les étudiants suivent ce cours pendant leur première année à l'université. C'est un cours préliminaire en éducation qui inclut des observations dans les écoles.

ED 102 SECONDARY PRE-PROFESSIONAL EXPERIENCES 1 cr

Les étudiants suivent ce cours pendant leur deuxième année d'université.

Il est du même type que le précédent.

ED 400 STUDENT TEACHING 12 crs

C'est un stage pédagogique. Pendant sa dernière année à l'université, un étudiant qui se prépare à être professeur, fait son apprentissage dans une école secondaire, sous la direction d'un professeur qui a de l'expérience (et qui est appelé COOPERATING TEACHER). Cet étudiant, apprenti professeur, va chaque jour à l'école. Au début, il observe les classes, et il travaille avec les élèves individuellement. Ensuite, il enseigne pendant quelques heures. Si tout va bien -à la fin du stage pédagogique- le STUDENT TEACHING- cet apprenti professeur assurera tous les cours du COOPERATING TEACHER.

Les sept autres cours de l'enseignement professionnel sont les suivants :

ED 230 - EDUCATIONAL PSYCHOLOGY 3 crs.

C'est un cours sur l'application des théories de l'apprentissage aux problèmes de l'enseignement.

ED 300 - SECONDARY SCHOOL METHODS 3 crs

C'est un cours sur les principes, les matières, et les méthodes d'enseignement dans les écoles secondaires.

ED 301 - EVALUATIVE TECHNIQUES - 2 crs

Un cours sur la mise à l'épreuve et l'évaluation des progrès des élèves.

ED 302 - INSTRUCTIONAL TECHNOLOGY 2 crs

Une introduction à la technologie de l'éducation, y compris les ordinateurs et les télécommunications.

ED 310 - BASIC READING PRACTICES FOR THE CONTENT AREA - 3 crs.

cours sur la lecture et le rapport entre la lecture et l'apprentissage.

ED 401 - HISTORY AND PHILOSOPHY OF EDUCATION 3 crs.

cours sur l'histoire et la philosophie de l'éducation.

ED 402 - CONTEMPORARY ISSUES IN EDUCATION 2 crs

cours sur les problèmes de l'éducation aujourd'hui.

Au total, nous avons :

57 credits d'éducation générale (y compris 6 credits de psychologie, 6 credits de mathématiques, et 8 credits de physique)

36 credits de plus en mathématiques et

32 credits en éducation professionnelle.

Cela fait 125 credits. Il faut 3 credits de plus (cours facultatifs) pour obtenir le B.S.E. en mathématiques

Voilà le programme des cours qu'un étudiant doit suivre pendant quatre années pour devenir professeur de mathématiques dans les écoles secondaires.

2) Formation des enseignants du primaire

Le deuxième programme que je vais vous décrire est le programme de formation des instituteurs et institutrices.

E.R.S. FOR ELEM. EDUC. PROGRAM

Regardez cette feuille intitulée EVALUATION RECORD-ELEMENTARY B.S.E.(en Annexe 2). Ici, ce sont les cours qu'on doit suivre si l'on veut devenir instituteur ou institutrice en école primaire. (K.6 p.98 M.U. Catalog).

Constatez que les cours requis sont semblables aux cours des étudiants qui se préparent à être professeurs de mathématiques.

Dans la colonne de gauche, on trouve les mêmes exigences que précédemment (sans les cours spécialisés en mathématiques et en physique). Dans la colonne de droite, en bas, les cours sont presque les mêmes.

La différence est à droite, en haut. Pour le programme de ceux qui se préparent à être professeurs en mathématiques, il y avait des cours de mathématiques à cette place. Mais pour les étudiants qui se préparent à être instituteurs ou institutrices, il y a à la place des cours sur l'éducation, la pédagogie, l'enseignement.

ELE 202 - PRE-PROFESSIONAL EXPERIENCE 1cr

C'est un cours semblable à ED 202 pour le programme B.S.E. - MATH. Il y a des observations dans les écoles.

ELE 301 -OBSERVATION AND PARTICIPATION 3 crs.

Un cours pour les étudiants de 3ème année.

ELE 350 - CHILD DEVELOPMENT 3 crs.

Un cours pour les étudiants en 2ème année. Il concerne les théories du développement des enfants, depuis la conception, jusqu'à l'adolescence.

ELE 383 -TEACHING OF READING 3 crs.

L'enseignement de la lecture.

ELE 384 - TEACHING OF MATHEMATICS 3 crs.

L'enseignement des mathématiques

ELE 386 - TEACHING OF SOCIAL STUDIES 3 crs.

L'enseignement des sciences sociales.

ELE 387 - TEACHING OF SCIENCE 3 crs.

L'enseignement des sciences.

ELE 403 - COMMUNICATION SKILLS WORKSHOP 3 crs.

Un cours sur les techniques d'amélioration des compétences des élèves en communication, la lecture et l'art de parler.

ELE 425 - DIAGNOSTIC ET REMEDDIAL READING 3 crs.

Un autre cours sur l'enseignement de la lecture.

SPE 360 - EXCEPTIONAL CHILDREN 3 crs.

Un cours sur les enfants exceptionnels, surdoués et ceux ayant de graves problèmes à suivre l'enseignement.

AREA of concentration

Un domaine de la concentration.

Chaque étudiant doit également suivre des cours dans un domaine particulier, pour un total de 15 credits. Les domaines possibles sont :

EARLY CHILDHOOD EDUCATION
EXCEPTIONAL CHILDREN
HUMANITIES
MATHEMATICS
NATURAL SCIENCES
SOCIAL SCIENCES

Voici donc le programme de la formation des instituteurs et institutrices à MANSFIELD UNIVERSITY. C'est typique des autres programmes aux Etats-Unis.

Je vous remercie de votre attention.

Bibliographie :

(1) "The Catalog" 1989-1990 MANSFIELD UNIVERSITY,
(2) "A guide for education majors" academic year 1991-1992 MANSFIELD UNIVERSITY

ANNEXE 1 : MATHEMATICS B.S.E.

EVALUATION RECORD MATH B.S.E

	SH	GRADE	QP	DATE
Ele 090 Basic Rdg/Stdy Skl	3			
Eng 090 Basic Writing Skl	3			
Ma 090 General Mathematics	3			

GENERAL EDUCATION

Com 101 Oral communication	3			
Eng 112 Composition I	3			
Eng 313 Composition II (Min C)	3			

HEALTH/PHYSICAL EDUCATION (total 3 SH)

HPE 100 Health	2			
HPE 101-151	1			
HPE 101-151	1			
HPE 101-151	1			

FINE ARTS (total 3 SH)

ArH 101 Intro to Art	3			
Mus 100 Intro to Music	3			
Tht 110 Intro to Theatre	3			

DISTRIBUTION REQUIREMENTS
(min 42 SH in 4 group & Elect)

GROUP 1 HUMANITIES (min 9 SH / max 18 SH)
Approved courses 9 SH

Hst 201 OR 202	3			

GROUP 2 FOREIGN LANGUAGES
(min 6 SH one lang. / max 12 SH)

GROUP 3 NATURAL SCIENCE (min 9 SH / max 18 SH)
Approved Courses 9 SH

Env 188 Gen'l Physics I	4			
Env 211 Gen'l Physics II	4			

GROUP 4 MATHEMATICS (min 6 SH / max 12 SH)

MA 140 Anly Geom&Calc I	3			
MA 140 Anly Geom&Calc II	3			

GROUP 5 SOCIAL SCIENCE (min 9 SH / max 18 SH)
Approved Courses 9 SH

Psy 101 Intro Gen'l Psych	3			

GENERAL EDUCATION ELECTIVES (min 9 SH/ max 12 SH)

Psy 321 Adolescent Psych	3			

NAME ______________________

SOC. SEC. NO. ______________ DATE ADMITTED

MATH EDUC MAJOR 36 SH		GRADE	QP	DATE
Ma 160 Program Math Sci	3			
Ma 240 Anly Geom&Calc III	3			
Ma 241 Anly Geom&Calc IV	3			
Ma 250 Appd Prob & Stats	3			
Ma 260 Discrete Structure	3			
Ma 280 Linear Alg&Matrix Thry	3			
Ma 304 Hist & Phil Math	3			
Ma 329 Modern Geometry I	3			
Ma 361 Modern Algebra I	3			
MATHEMATICS ELECTIVES - 3 SH (310 &above)				
	3			
* MATHEMATICS ELECTIVES - 6 SH (by advisement)				
	3			
	3			
* Courses below 310 require written approval				
PROFESSONAL EDUCATION 32 SH				
Ed 101 Intro to Education	1			
Ed 202 Sec Ed-Pre-Prof Exp	1			
Ed / Psy 230 Educ Psych	3			
Ed 300 Secondary Sch Mtds	3			
Ed 301 Evaluative Tech	2			
Ed 302 Instructional Tech	2			
Ed 310 Basic Rdg Practices	3			
Ed 401 Hist & Phil Educ	3			
Ed 402 Contemp issues	2			
Ed 400 Student Teaching	12			
FREE ELECTIVES	SH			

Adv. Standing ______________________

S.H. Credited ______________ Required 128 SH

Date										
SH Sched.										
SH Earned										
Qual. Pts.										
G P A										

SPECIAL RULES
1) 090 courses do not count toward graduation.
2) Max 6 SH in major allowed in G.E. Dist. area.
3) Max 2 courses with same prefix in GROUPS
4) Max 12 SH with same prefix in G.E. Dist . area.
5) One non-major professional elective allowed

ANNEXE 2 : ELEMENTARY B.S.E.

EVALUATION RECORD

NAME

SOC. SEC. NO. DATE ADMITTED

	SH	GRADE	QP	DATE
Ele 090 Basic Rdg/Stdy Skl	3			
Eng 090 Basic Writing Skl	3			
Ma 090 General Mathematics	3			

GENERAL EDUCATION

	SH	GRADE	QP	DATE
Com 101 Oral communication	3			
Eng 112 Composition I	3			
Eng 313 Composition II (Min C)	3			

HEALTH/PHYSICAL EDUCATION (total 3 SH)

	SH	GRADE	QP	DATE
HPE 100 Health	2			
HPE 101-151	1			
HPE 101-151	1			
HPE 101-151	1			

FINE ARTS (total 3 SH)

	SH	GRADE	QP	DATE
ArH 101 Intro to Art	3			

DISTRIBUTION REQUIREMENTS
(min 42 SH in 4 group & Elect)

GROUP 1 HUMANITIES (min 9 SH / max 18 SH.)
Approved courses 9 SH (9 SH req.)

	SH	GRADE	QP	DATE
Hst 201 OR 202	3			

GROUP 2 FOREIGN LANGUAGES
(min 6 SH one lang. / max 12 SH)

GROUP 3 NATURAL SCIENCE (min 9 SH / max 18 SH)
Approved Courses 9 SH (9 SH & 1 Lab

GROUP 4 MATHEMATICS (min 6 SH / max 12 SH)
(2 courses req.)

GROUP 5 SOCIAL SCIENCE (min 9 SH / max 18 SH)
Approved Courses 9 SH

	SH	GRADE	QP	DATE
Geo	3			
Psy 101 Intro Gen'l Psych	3			

GENERAL EDUCATION ELECTIVES (min 9 SH/ max 12 SH)

	SH	GRADE	QP	DATE
Mus 100 Intro to Music	3			

ELEM. EDUC MAJOR 44 SH		GRADE	QP	DATE
Ele 202 Pre-Prof Exper	2			
Ele 301 Observ & Pratic	3			
Ele 350 Child Development	3			
Ele 383 Tchg Reading	3			
Ele 384 Tchg Mathematics	3			
Ele 386 Tchg Soc Studies	3			
Ele 387 Tchg Science	3			
Ele 403 Commun Skills Wkshp	3			
Ele 425 Diag & Remedl Rdg	3			
SpE 360 Except Children	3			
AREA OF CONCENTRATION - 15 SH				
(Early Childhd Educ, Exceptional Children, Foreign Lang.,				
Humanities, Math, Natural Science, Social Sciences)				
PROFESSONAL EDUCATION 25 SH				
Ed 101 Intro to Education	1			
Ed / Psy 230 Educ Psych	3			
Ed 301 Evaluative Tech	2			
Ed 302 Instructional Tech	2			
Ed 401 Hist & Phil Educ	3			
Ed 402 Contemp issues	2			
Ed 400 Student Teaching	12			
FREE ELECTIVES	SH			

Adv. Standing ____________________

S.H. Credited ______________ Required 128 SH

Date										
SH Sched.										
SH Earned										
Qual. Pts.										
G P A										

SPECIAL RULES
1) 090 courses do not count toward graduation.
2) Max 6 SH in major allowed in G.E. Dist. area.
3) Max 2 courses with same prefix in GROUPS
4) Max 12 SH with same prefix in G.E. Dist . area.
5) One non-major professional elective allowed