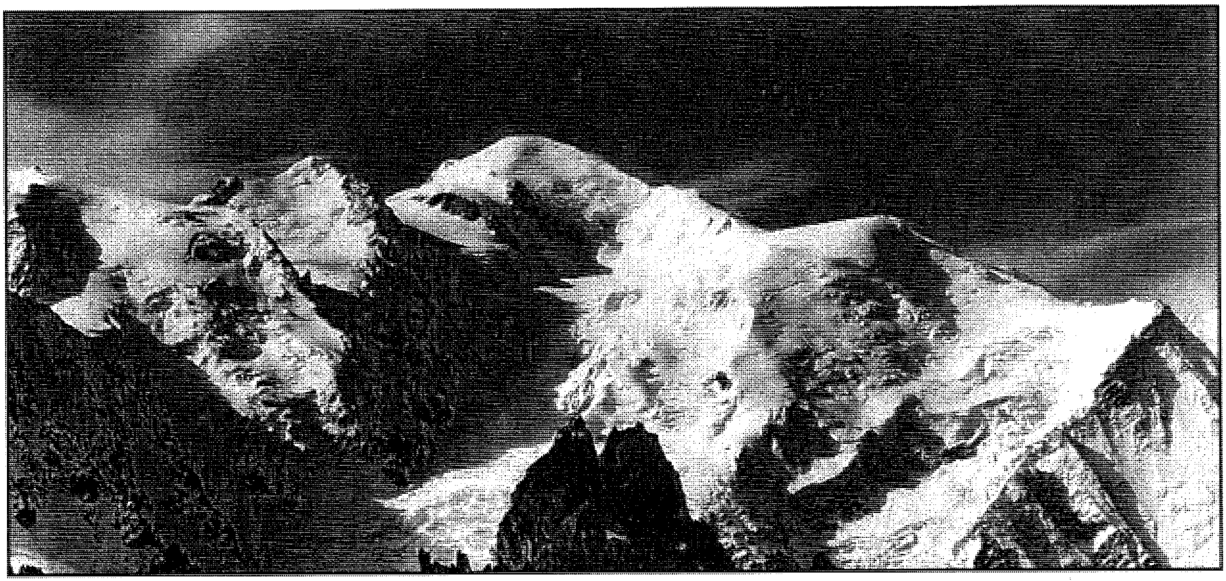
irem
de Grenoble

COPIRELEM

ACTES

XXVII[e] Colloque Inter-IREM
des formateurs et professeurs de mathématiques
chargés de la
formation des maîtres

« Évolution de l'enseignement des mathématiques et de la formation des maîtres »



Chamonix Mont Blanc : 10, 11, 12 mai 2000

UNIVERSITE JOSEPH FOURIER GRENOBLE 1
SCIENCES, TECHNOLOGIE, MEDECINE

irem
de Grenoble

COPIRELEM

ACTES

XXVII^{e} Colloque Inter-IREM
des formateurs et professeurs de mathématiques
chargés de la
formation des maîtres

« Évolution de l'enseignement des mathématiques et de la formation des maîtres »

Actes coordonnés par
Florence Michon
Robert Neyret
et Monique Gérente

Chamonix Mont Blanc : 10, 11, 12 mai 2000

Un grand merci à :

- La direction de l'Enseignement Scolaire (DESCO) ;
- l'IUFM de Grenoble et plus particulièrement au centre de Bonneville ;
- l'IREM de Grenoble ;
- la municipalité de Chamonix Mont-Blanc ;
- l'Ecole Nationale de Ski et d'Alpinisme ;
- la MAIF ;
- aux IUFM de toutes les régions de France.

qui ont contribué au bon déroulement de ce Colloque de l'an 2000.

Un grand merci à l'équipe de la revue grand N de l'IREM de GRENOBLE sans qui ces actes n'auraient pas vu le jour.

Un grand merci aux membres de la COPIRELEM qui m'ont apporté leur expérience, leur aide et leur confiance dans cette organisation.

Un grand merci enfin aux collègues, venus de tous les coins de France, riches de leurs compétences et de leurs curiosités pour ces journées de travail captivantes.

Florence MICHON
Responsable locale de l'organisation

SOMMAIRE

CONFERENCES :

COMMUNICATIONS :

ATELIERS :

ANNEXES :

CONFERENCES

AIDER A RESOUDRE DES PROBLEMES
POURQUOI ? COMMENT ? QUAND ?

CONFERENCE
Jean JULO
IREM / IMR - Université de Rennes 1

L'exposé de Chamonix se proposait de présenter un cadre global pour caractériser les démarches d'aide à la résolution de problèmes qui, actuellement, se développent assez largement dans l'enseignement des mathématiques. Mais je souhaitais que ce cadre reste en prise directe avec le travail empirique que je mène sur ce sujet depuis plusieurs années et pour cela j'avais choisi de parler concrètement de la manière d'aider les élèves à résoudre les problèmes dits de « partage inégal » (ou « inéquitable ») au niveau des classes de 6ème et de 5ème. Une mauvaise gestion du temps de parole m'ayant conduit à très peu aborder ce point, je tente de me racheter ici en insistant plus sur les aspects empiriques de cette question de l'aide à la résolution de problèmes. Ainsi, on trouvera en annexe une synthèse des principales expérimentations menées sur ces problèmes de partage avec la présentation de quelques aides auxquelles je me réfère d'ailleurs dans le texte.

Pourquoi aider à résoudre des problèmes ?

Nous aborderons cette question, plus épineuse qu'il n'y paraît à première vue, à trois niveaux : celui de la finalité (pourquoi aider au bout du compte ?), celui des faits à prendre en compte (que savons-nous ?) et celui des objectifs particuliers que nous retenons dans notre recherche d'aides performantes.

Une finalité

Repartons du postulat qui fonde aujourd'hui la plupart des travaux sur l'apprentissage/enseignement des mathématiques : c'est dans l'activité de résolution de problèmes que se trouve la *source* de la connaissance. Il existe un large consensus sur cette idée de « source » entendue comme condition nécessaire mais non suffisante de l'appropriation des connaissances (« tout concept découle de la résolution d'un problème » disait joliment Vygostky).

Posons-nous ensuite la question des progrès réalisés en matière d'apprentissage des mathématiques par la résolution de problèmes. Deux constats nous paraissent s'imposer :

⇨ d'abord celui d'un enseignement qui a profondément évolué en 25 ans à la suite d'un investissement important à la fois des enseignants (dans le cadre des IREM en particulier), des équipes de recherche en didactique et même de l'institution en accordant une place croissante à la résolution de problèmes dans les programmes de l'école élémentaire et du collège ; des notions comme celles d'*activité mathématique*, de *situation-problème* ou encore de *situation didactique* ont largement imprégné les pratiques et contribué à l'émergence d'un enseignement des mathématiques plus vivant, moins formel et moins élitiste qu'il ne l'était encore au début des années 70 ;

⇨ mais aussi un autre constat, amer celui là : tout laisse penser que nous n'avons d'aucune manière réduit les inégalités dans l'accès aux connaissances mathématiques (même de base) ; il est probable que l'« activisme » effréné des 25 années passées a globalement profité aux élèves, que chacun a un peu plus de chances aujourd'hui de comprendre quelque chose aux mathématiques (le niveau « monte ») ; pourtant personne n'ose soutenir que les écarts de compréhension auraient au moins commencé à se réduire ; les plus pessimistes allant même jusqu'à penser qu'ils se sont creusés, c'est-à-dire que ce sont les plus « mal à l'aise » dans le système qui auraient le moins profité de cette évolution pourtant notable de l'enseignement.

Comment expliquer ce fait ? Deux hypothèses principales méritent d'être examinées :

⇨ ce ne serait pas directement les activités ou les situations-problèmes qui seraient en cause mais plutôt la « suite », c'est-à-dire le processus par lequel on permet à des connaissances de se mettre en place à partir d'une activité de résolution de problèmes ; il faut bien reconnaître qu'on ne dispose toujours d'aucune théorie de l'apprentissage par la résolution de problèmes et qu'on n'en voit même aucune pointer à l'horizon ; on a bien quelques modèles cognitifs et didactiques qui nous éclairent localement et partiellement sur tel ou tel aspect des processus en jeu mais aucune théorie n'est en mesure d'expliquer comment de la compréhension et des connaissances peuvent émerger de l'activité de résolution de problèmes ; il est possible alors que ce soit cette ignorance qui permette à des difficultés d'apprentissage ponctuelles de se transformer en situations d'échec durables ;

⇨ l'autre hypothèse part de l'idée que c'est la « source » elle-même qui serait en cause ; nous faisons comme si la question de la résolution de problèmes était réglée, comme si nous avions acquis la maîtrise des situations permettant d'induire une telle activité chez la plupart des élèves ; or cela est sans doute loin d'être le cas et il se pourrait que ce soit « tout simplement » une carence en matière de *véritable occasion de résoudre des problèmes* qui soit à l'origine de certaines difficultés persistantes.

C'est cette seconde hypothèse que nous sommes enclins à privilégier. D'abord parce qu'elle est un peu moins décourageante que la première, mais surtout parce qu'elle correspond à notre intuition profonde après de nombreuses années consacrées à l'ingénierie de situations-problèmes de toutes sortes.

Pour préciser un peu cette finalité en terme de fonctionnement optimal des situations de résolution de problèmes en mathématiques, nous avons été conduit ces dernières années à redéfinir les critères d'un tel fonctionnement. C'est-à-dire à reposer la question : qu'est-ce donc au juste une situation de résolution de problème « qui marche » ?

Après avoir tenté, à la suite des travaux de Régine Douady, de rechercher des critères concernant la forme des situations (Julo & Houdebine, 1992), nous nous référons plutôt aujourd'hui à l'activité de celui à qui on propose un problème à résoudre. Et nous nous contentons de trois critères, simples à énoncer mais beaucoup plus exigeants que ceux utilisés auparavant. :

1- la situation induit chez l'élève une activité de type « résolution de problème »,
2- l'objet de cette activité a « un intérêt » du point de vue mathématique,
3- l'élève réussit à élaborer une procédure de résolution (« résout le problème »)

Ce n'est pas l'objet du présent exposé d'argumenter la pertinence de chacun de ces critères. Nous ferons seulement trois remarques directement en rapport avec la question de l'aide qui nous occupe :

➢ c'est ce qui passe au niveau de *chaque élève* et de la nature de son activité qui est important (et non la dynamique du groupe classe qui est vraisemblablement loin d'être suffisante à ce niveau de la « source » auquel nous nous situons ici) ;

➢ caractériser précisément l'*activité de résolution de problème* n'est pas une tâche insurmontable aujourd'hui (d'autant que cette caractérisation peut souvent être remplacée par un simple constat empirique si la technique d'observation est suffisamment rigoureuse) ;

➢ le troisième critère est, bien évidemment, le plus exigeant mais aussi le plus important ; il est de plus en plus vraisemblable, en effet, que le simple fait de « chercher » à résoudre un problème n'est pas suffisant (comme on feint de le croire dans l'enseignement par activités) ; ce qui est fondamental est de *réussir* à résoudre le problème c'est-à-dire d'aller au bout de ce processus d'*élaboration d'une procédure nouvelle (non connue)* qui est à la source de la compréhension et de l'apprentissage mais aussi, nous le savons tous, du véritable plaisir de la recherche.

Ces trois critères, et tout particulièrement le troisième, permettent d'esquisser une première réponse, la plus générale, à la question du pourquoi : aider pour permettre *la résolution du problème dans le cadre d'une authentique activité d'élaboration de procédure* (ayant de plus un intérêt mathématique, cela va de soi, même si ce critère est loin d'être le plus évident à caractériser...).

Deux faits

Il nous paraît important de rappeler deux faits désormais bien établis à propos de l'activité de résolution de problème et qu'il faut garder à l'esprit lorsqu'on cherche à préciser les raisons d'une démarche d'aide.

➔ La sensibilité très grande aux effets de contexte

Depuis les premiers travaux expérimentaux sur la résolution de problèmes, on sait qu'une modification même minime de la situation peut avoir une incidence sur l'activité de résolution. La première démarche d'aide à la résolution de problème que nous connaissions (Maïer, 1931) se situe d'ailleurs dans une telle étude systématique de toutes les variables de situation qui pourraient avoir un effet sur la découverte de la solution. On peut citer aussi les travaux sur la verbalisation (Gagné & Smith, 1962) qui montraient que le simple fait de demander aux sujets d'exprimer oralement leurs raisonnements augmente la probabilité de réussir le problème de la Tour de Hanoï. Mais c'est avec les travaux sur les énoncés de problèmes, à partir des années 70, que l'on va découvrir le rôle d'une multitude de facteurs dont on était loin de soupçonner qu'ils puissent modifier significativement la « compréhension » du problème (par exemple la place de la question ou encore l'implication personnelle dans l'énoncé : « Tu as 5 billes,... »).

Il est intéressant de noter, toutefois, que parmi tous ces travaux expérimentaux (que l'on peut chiffrer à plusieurs centaines), très peu débouchent sur des ingénieries d'aide. C'est d'abord qu'il s'agit souvent de recherches menées en psychologie mais c'est aussi qu'il s'avère difficile de maîtriser ces effets de contexte (on peut les retrouver nettement dans des conditions expérimentales avec un traitement statistique des performances mais beaucoup plus faiblement au niveau individuel et en situation d'aide - il peut même arriver que l'effet soit inversé dans ce cas...).

A partir des travaux de Newell & Simon (1972) et grâce à la notion de *représentation du problème* qui s'impose peu à peu, on comprendra mieux la nature de ces effets de contexte. Même l'expert le plus averti n'est pas un esprit parfaitement rationnel qui accéderait directement à la structure du problème et se contenterait d'enchaîner « logiquement » les différentes étapes de la résolution pour parvenir à la solution. Tous les raisonnements humains portent sur des éléments issus de processus qui sélectionnent, interprètent, structurent les informations disponibles dans la situation. C'est le résultat de cette activité mentale particulière que l'on convient d'appeler la *représentation du problème* et c'est à ce niveau, bien sûr, que la plupart des effets de contexte trouvent leur origine.

→ La sensibilité très faible aux apprentissages méthodologiques

On peut considérer que c'est en mathématiques et avec les travaux de Polya (1945) que débutent véritablement les tentatives d'entraînement systématique à la résolution de problèmes. L'idée est de mettre en place une compétence générale à partir d'un apprentissage de méthodes supposées pertinentes pour la résolution d'un ensemble très large de problèmes. L'idée est séduisante car conforme à l'idéal pédagogique de la formation d'une « tête bien faite » évidemment préférable à une « tête bien pleine ».

De nombreux programmes vont être expérimentés, en particulier dans les universités américaines, mais les résultats sont décevants. On constate un certain nombre d'effets dont certains sont appréciables (changement d'attitude à l'égard des mathématiques par exemple) mais pas de répercussion visible et durable au niveau des performances en matière de résolution de problèmes. A partir des années 80, une nouvelle orientation est prise avec l'idée de viser des compétences et des méthodes plus spécifiques ; on s'intéresse désormais soit à des classes de problèmes bien définies (par exemple : Willis & Fuson, 1988) soit à des aspects particuliers des démarches de résolution (par exemple : Pluvinage, 1992). Mais on se retrouve alors face à un paradoxe qu'ont souligné plusieurs auteurs : les effets de ces apprentissages qui se veulent toujours de nature méthodologique sont d'autant plus visibles qu'ils sont plus ciblés et qu'ils se rapprochent des apprentissages stéréotypés de règles d'action (« skills »), ce que l'on voulait justement éviter au départ...

Sans développer plus l'analyse de cette orientation, nous retiendrons le fait que l'activité de résolution de problèmes n'est pas directement sous le contrôle de « méthodes » que l'on pourrait inculquer au moyen d'entraînements adéquats. Une hypothèse qui semble aujourd'hui compatible avec ce constat est que l'expérience acquise en matière de résolution de problèmes est essentiellement stockée sous la forme de connaissances particulières directement liées aux apprentissages conceptuels réalisés et aux situations rencontrées. La notion de *schéma de problèmes*, en particulier, permet assez bien de rendre compte de la manière dont les problèmes rencontrés antérieurement interviennent dans la mise en place de la représentation d'un nouveau problème.

Cinq objectifs

A l'intérieur du cadre que nous venons d'esquisser et en nous appuyant sur les concepts de *représentation du problème* et de *schéma de problèmes*, cinq objectifs distincts peuvent être retenus pour piloter la conception et la mise en œuvre d'aides à la résolution de problèmes en mathématiques. Le premier est le plus important et génère assez directement les trois suivants. Le cinquième objectif est le plus problématique à nos yeux et est au centre des travaux que nous menons actuellement.

1 ↳ Permettre la construction d'une représentation fonctionnelle du problème

Intervenir spécifiquement au niveau de la représentation du problème est le moyen le plus sûr d'apporter une aide véritable en minimisant le risque de « tuer » le problème (c'est-à-dire en préservant le processus essentiel d'élaboration de procédure). L'objectif premier est donc d'aider l'élève à mieux se représenter la situation et la tâche particulières qui caractérisent le problème sans lui apporter la moindre indication sur la manière de le résoudre. Nous parlons ici de représentation *fonctionnelle* pour préciser que cette représentation devra permettre non seulement d'élaborer une procédure mais une procédure *de résolution* du problème (pas nécessairement la procédure optimale ou la procédure mathématique espérée mais une *procédure de réussite*).

2 ↳ Permettre la mobilisation et l'instanciation de connaissances « inertes »

Dès nos premiers travaux concernant les élèves en difficulté en mathématiques (Houdebine & Julo, 1988), nous avons été convaincus que ces élèves disposent de nombreuses connaissances mais qu'ils ne parviennent pas à les mobiliser *en situation*. Cette même hypothèse est faite par la plupart des chercheurs qui sont à l'origine des outils d'éducabilité cognitive (comme les ARL) mais c'est sur l'origine de cette sorte de « sous-fonctionnement » (connaissances acquises mais non fonctionnelles à un moment donné), que les hypothèses diffèrent. Dans la perspective adoptée ici, aider un élève à se représenter le problème en jeu, c'est aussi l'aider, indirectement, à mobiliser et à instancier de telles connaissances d'abord « inertes ».

3 ↳ Renforcer et développer la composante opératoire des connaissances en jeu

Cet objectif et le suivant font référence à un modèle de la connaissance que nous ne pouvons pas développer ici mais dont l'idée de base est de considérer que le concept est la forme mentale la plus élaborée sous laquelle peut exister une connaissance et qu'un concept est formé de plusieurs composantes. L'une de celles-ci est la composante issue des actions du sujet qui impliquent d'une manière ou d'une autre la connaissance. On sait que la théorie de Piaget accordait un rôle prépondérant (quasi exclusif) à cet aspect opératoire de l'acquisition des connaissances. Permettre la mobilisation de ces connaissances inertes que nous venons d'évoquer, c'est en premier lieu permettre à l'élève d'agir, donc à cette composante opératoire de « fonctionner » et de se renforcer.

4 ↳ Renforcer et développer la composante situationnelle des connaissances en jeu

Cette seconde composante correspond à l'expérience acquise en matière de situations. Le rôle de ces situations dans la construction même du concept et dans la manière dont il sera mis en œuvre apparaît de plus en plus important. La notion de *schéma de problèmes* a permis une première description de cette composante et continue d'être utile pour parler de l'un des objectifs particuliers que permet d'atteindre l'aide à la représentation du problème. Il est important, en effet, de résister à la tentation de concevoir les processus de représentation comme une aptitude que l'on pourrait développer en soi (erreur faite dans le passé avec le « raisonnement logique » par exemple). Les schémas de problèmes sont des connaissances (ou plus précisément des éléments de connaissances) qui se forment en situation et qui sont liées directement à la nature des situations et au type de rapport que l'élève établit avec elles. C'est au niveau de la constitution de cette « mémoire des problèmes » que les échecs et les réussites dans la résolution ont, vraisemblablement, des impacts très différents. On peut faire l'hypothèse que la construction d'une représentation fonctionnelle du problème est la condition même du renforcement et de l'extension des schémas de problèmes déjà en place. D'où une raison supplémentaire et importante pour les démarches d'aide à la représentation.

5 ↳ Induire la mise en œuvre d'outils de modélisation

Le troisième concept sur lequel s'appuie la démarche d'aide proposée ici est celui d'*outil de modélisation*. Nous avons évité de l'introduire plus tôt car il a le double inconvénient de renvoyer à une intuition très forte chez tous ceux qui enseignent et d'être le moins assuré du point de vue théorique. D'où une argumentation difficile à mener. L'intuition est celle qui consiste à penser que le meilleur moyen d'aider à se représenter quelque chose est de fournir une « représentation claire » de cette chose ; et on attribue généralement au registre graphique des vertus particulières pour cela : les dessins, schémas, graphes, tableaux,... sont supposés éclairer celui qui ne semble pas « comprendre » un problème. En fait, les processus cognitifs qui permettent d'intégrer à notre représentation des « outils » présents dans notre milieu culturel ne sont pas simples du tout à imaginer et à conceptualiser. Nous avons avancé l'hypothèse que ces processus ne sont pas ceux qui permettent à la représentation du problème de se mettre en place mais plutôt ceux qui vont permettre l'*opérationnalisation* de cette représentation, c'est-à-dire le passage à l'action (Julo, 1995). Ces outils dont on peut montrer qu'ils ont une fonction de *modélisation* dans la démarche de résolution interviendraient donc pour faciliter et amplifier l'opérationnalisation de la représentation. Ce rôle, souvent déterminant pour la résolution du problème, n'est pourtant pas celui d'une aide à la représentation au sens où nous l'entendons ici. Le fait que ces outils de modélisation renvoient la plupart du temps à une procédure donnée (ou une classe particulière de procédures) montre bien le « risque » que l'on prend en leur attribuant une fonction d'aide. La question qui se pose alors, et qui nous occupe beaucoup actuellement, est de savoir s'il est possible, dans certaines conditions, d'utiliser une démarche d'aide à la représentation du problème pour induire la mise en œuvre de certains outils que l'on juge important pour l'apprentissage mathématique en jeu (Julo, 2000).

Comment aider ?

C'est bien sûr pour répondre à la nécessité d'une communication à peu près cohérente que nous avons débuté par cette longue argumentation sur le « pourquoi ». Dans les faits, nous avons commencé par rechercher des aides avec comme seule intuition l'idée de ne pas orienter l'élève vers UNE procédure et d'essayer plutôt d'améliorer sa représentation du problème (IREM de Rennes, 1985). C'est sur la base de ce travail empirique et de quelques expériences un peu plus systématiques (voir annexe) que les options théoriques se sont précisées.

Il apparaît clairement aujourd'hui que la conception et la mise au point de situations de résolution de problèmes intégrant des aides nécessitent un très gros travail d'ingénierie. Même pour la seule classe des problèmes de partage inégal sur laquelle nous travaillons depuis plusieurs années, nous n'avons pu réunir à ce jour les conditions institutionnelles permettant de mener à bien une telle démarche de recherche-développement. Ce que nous présentons ici n'est donc pas une méthodologie complète et validée pour la production d'aides mais seulement un outil de classification et de caractérisation. Cet outil a été élaboré en vue d'un travail d'ingénierie en équipe de recherche. Peut-il servir au niveau d'une pratique individuelle d'aide ? Cela reste à voir car tant que nous ne disposons pas d'une large panoplie d'aides sérieusement expérimentées (aides spécifiques de chaque problème bien évidemment), il n'est pas certain qu'un outil méthodologique puisse être vraiment utile pour fonder sa pratique.

Caractéristiques générales d'une aide à la représentation

Avant de présenter les différents types d'aides qu'il nous semble utile de différencier, résumons les trois caractéristiques générales qui découlent des réponses apportées à la question « pourquoi ».

Une aide à la représentation du problème est une aide :

→ qui contient le moins possible D'INDICES SUR LA SOLUTION

→ qui oriente le moins possible VERS UNE PROCEDURE DE RESOLUTION

→ qui suggère le moins possible UNE MODELISATION DU PROBLEME

Ces caractéristiques ne font qu'opérationnaliser le fameux principe de Polya : *« aider ni trop ni trop peu »* (que l'on peut aussi énoncer sous la forme plus brutale : *ne pas tuer le problème*) en prenant en compte les données actuelles sur l'élaboration des procédures, la représentation du problème et la modélisation des situations.

Catégorisation des aides à la représentation

Nous retenons cinq catégories qui correspondent en fait à cinq niveaux de « risque » par rapport aux principes généraux énoncés ci-dessus.

1 Les explicitations

Il s'agit d'informations qui ont pour fonction de rendre le but et les conditions de réalisation du but plus explicites (et seulement ces deux caractéristiques du problème).

Elles concernent en particulier les difficultés éventuelles liées à l'énoncé et à sa formulation mais pas uniquement ; des difficultés plus générales de représentation du problème peuvent être levées par des modalités d'explicitation quelquefois très « légères ». Par exemple, pour les problèmes de partage inégal que nous avons étudiés, il apparaît que le contexte des ficelles (voir annexe) est le plus « parlant » pour les élèves. En revanche, l'explicitation du fait que les ficelles ont des longueurs différentes en les nommant la « grande », la « moyenne » et la « petite » dans l'énoncé (voir annexe) n'est pas apparue comme une aide significative. Remarquons ici que la tendance est toujours forte d'inclure les explicitations dans l'énoncé (aide concomitante à la présentation du problème), comme ce fut le cas pour cette indication, alors que la même information peut avoir plus d'effet lorsqu'elle intervient après une phase de recherche comme « aide » au sens habituel du terme.

Entrent dans cette catégorie : la définition de certains mots, la reformulation de certaines phrases, l'illustration de la situation (sans modélisation de celle-ci), l'expansion de l'énoncé (informations supplémentaires sur le contexte) ou au contraire sa contraction. Sur toutes ces modalités, il existe dans la littérature des données qui montrent qu'elles peuvent avoir un effet sur la représentation qu'un élève se fait du problème à résoudre.

2 Les problèmes analogues

Cette forme d'aide consiste à présenter plusieurs versions d'un problème caractérisé par sa structure. Il s'agit d'une forme particulière d'explicitation qui va plus loin que celles évoquées ci-dessus car elle touche à l'objet même du problème, à sa structure.

Notons que la caractérisation de cette structure n'est pas une donnée première et dépend de l'analyse que l'on fait de la classe de problèmes en jeu. De même le degré d'analogie retenu peut être variable, le cas d'énoncés strictement isomorphes que nous avons beaucoup étudié (voir annexe) constituant une sorte de limite. Enfin, les modalités de présentation de ces problèmes analogues peuvent être très différentes : en simultané dès le départ (aide concomitante à la présentation du problème) ou successivement, certains énoncés étant proposés comme aides possibles au cours de la démarche de résolution.

3 Les tâches surajoutées

Cette forme d'aide repose sur la réalisation d'une tâche secondaire liée étroitement à la tâche principale que constitue la résolution du problème. Le principe est de rendre l'élève actif en lui proposant un sous-but, éventuellement très éloigné du but principal, qui l'engage dans un processus de recherche.

D'une certaine manière, le découpage traditionnel des problèmes en sous-questions est basé sur ce principe, la différence étant que ce découpage est généralement conçu comme une aide à la résolution (indications fortes sur la procédure ou l'outil à mettre en œuvre) et non comme une aide à la représentation du problème.

L'aide A utilisée dans une expérience sur les problèmes de partage inégal et présentée en annexe est typique de cette catégorie (mais pas les aides E et G qui introduisent des outils de modélisation et relèvent de la catégorie suivante). Il existe de très nombreuses modalités possibles pour de telles tâches surajoutées mais il faut insister sur le fait qu'elles sont toutes relativement complexes à mettre en œuvre (Julo, 1993, 1995).

4 Les outils de modélisation

Cette forme d'aide consiste à apporter, d'une manière ou d'une autre, un outil permettant de modéliser la situation et donc de modifier la représentation du problème construite initialement par l'élève.

Cette forme est la plus familière et la plus spontanée lorsque l'on veut aider sans trop orienter vers la solution. Elle s'appuie souvent, lorsque cela est possible, sur des outils de nature graphique : proposer un schéma, par exemple, pour les problèmes de partage inégal. Mais l'apport d'un outil de modélisation est aussi, presque toujours, une orientation vers une procédure particulière de résolution (la procédure par fractionnement pour le schématisation traditionnelle des problèmes de partage inégal).

Il existe toutefois des modalités qui permettent d'atténuer cet inconvénient. L'outil de modélisation peut être introduit, par exemple, à l'occasion d'une tâche surajoutée comme dans les aides E et G présentées en annexe. Il peut, de la même manière, être introduit en liaison avec la présentation de problèmes analogues ainsi que nous l'avons fait pour le tableau de proportionnalité à l'occasion d'une expérience concernant d'autres problèmes que ceux évoqués ici (Julo & Cauzinille-Marmèche, 1996). La présentation simultanée de plusieurs outils de modélisation est aussi une manière de diminuer le risque qu'ils soient reçus comme des « modèles de résolution ».

5 Les explications

Cette dernière catégorie se caractérise essentiellement par le fait qu'un discours explicatif est associé aux informations apportées comme aides. La conséquence la plus immédiate est l'existence d'une dimension socio-cognitive forte dans ce que l'on apporte à l'élève (alors que les autres formes peuvent être vues comme faisant simplement partie de « l'environnement » du problème et constituant une sorte d'élargissement de son énoncé).

La modalité la plus familière est bien sûr celle de l'enseignant ou d'un autre élève qui "explique" le problème. Mais quantité d'autres modalités existent, en particulier pour les cas où les élèves travaillent en autonomie. Une expérience portant sur l'impact éventuel de corrigés comme aides est présentée en annexe. Les résultats sont peu concluants, l'orientation vers une procédure que peu d'élèves sont prêts à s'approprier étant trop prononcée. Dans une autre expérience, ce sont plusieurs corrigés correspondant à des procédures différentes qui sont proposés. On peut aussi introduire des explications au sein de dialogues (réels ou fictifs) entre des élèves qui travaillent ensemble à la résolution du problème, ainsi que nous l'avons fait avec un autre problème.

Il faut remarquer ici que l'explication donnée peut être très peu inductrice, ne portant par exemple que sur un mot de l'énoncé que l'élève ne comprend pas. Elle sera peu différente alors d'une explicitation. Mais dans la plupart des cas, l'explication comporte une orientation forte sur la manière de résoudre de problème, c'est-à-dire des indications de procédure et d'outil (on ne sait pas naturellement « expliquer un problème » - on sait mieux expliquer comment procéder pour le résoudre). Ce guidage est renforcé encore par la dimension interindividuelle de l'intervention (même lorsque celle-ci n'a pas de caractère prescriptif). C'est en ce sens que nous plaçons cette forme d'aide au dernier niveau de notre classification : c'est avec elle que le risque de *tuer* le problème est le plus grand.

Quand aider ?

Ni trop tôt ni trop tard pourrait-on dire sous forme de boutade et pour compléter le *ni trop ni trop peu.*

En fait, c'est la question la plus difficile. Si on décide de la poser... Il existe en effet un premier grand choix à faire entre deux modes d'intervention (auxquels il faudrait ajouter les aides concomitantes à la présentation du problème) :

➔ Les aides « à la demande »

C'est, bien évidemment, le cas le plus simple : l'élève dispose d'aides auxquelles il peut recourir lorsqu'il en ressent le besoin. Des choix restent à faire cependant ; citons par exemple :

- les aides sont-elles disponibles en permanence ? (sinon : quand le sont-elles ?) ;
- une seule aide est-elle fournie à chaque demande ou plusieurs au choix ? (mais dans ce cas : comment les désigner pour que l'élève puisse réellement choisir ?).

➔ Les aides à l'initiative d'un tuteur

C'est ici que les choses se compliquent. Le « tuteur » est celui qui décide *quand* intervenir et généralement aussi *comment*. La question centrale qui se pose alors est de savoir sur quoi il se base pour prendre ses décisions. Deux grandes options sont envisageables :

- le tuteur est un enseignant qui décide « en temps réel » comment agir

C'est-à-dire que l'enseignant suit le travail de l'élève et décide quant et comment intervenir pour l'aider. En dehors de la question du coût (un tuteur par élève), cette option pose un problème de compétence : il n'est pas du tout évident qu'un enseignant, même très expérimenté, soit apte à prendre les bonnes décisions en matière d'aide individuelle pour la résolution d'un problème donné (Julo, 1998). La connaissance approfondie du problème en jeu et la mise au point préalable d'aides adaptées aux exigences énoncées plus haut sont vraisemblablement les conditions d'une telle compétence.

- le tuteur s'appuie sur des règles de décision explicites

Ces règles tutorielles peuvent être très simples (basées seulement sur la durée par exemple : si l'élève n'a pas fourni de réponse au bout de 10 minutes une aide lui est apportée) mais sont alors peu intéressantes. Elles peuvent être plus complexes, prenant en compte des données propres à l'élève et cherchant à apporter au moment optimal l'aide optimale pour cet élève. Ce fut là l'ambition de ces logiciels que l'on a appelés justement des « tutoriels intelligents ». Mais la conception de tels systèmes a buté sur un obstacle majeur : celui du « modèle de l'élève » c'est-à-dire de la prise en compte effective de l'état des processus cognitifs pour un élève donné, à un moment donné. C'est là toute la difficulté : décrire convenablement où en est l'élève et pour cela être en mesure d'interpréter ses actions.

Par exemple pour les problèmes de partage inégal, nous disposons désormais d'une ébauche de modèle concernant la microgenèse de la représentation pour ces problèmes particuliers (Cauzinille-Marmèche & Julo, 1998) mais la question de la caractérisation et de l'interprétation de la démarche d'un élève donné dans un problème donné est loin d'être résolue.

Nous conclurons sur cette note un peu pessimiste qui laisse entrevoir l'étendue des travaux à mener. Il ne faut pas cacher que nous visons principalement, à travers les recherches présentées, des systèmes permettant la résolution de problèmes avec aides dans un contexte pédagogique de *grande autonomie*. Il nous semble que seuls de tels systèmes sont compatibles avec les objectifs que nous avons énoncés au début de cet exposé. Mais nous sommes aussi profondément convaincu que la conception de tels systèmes et, au-delà, leur intégration effective dans des séquences d'enseignement, nécessitent dès le départ des démarches de type recherche-action associant des enseignants, des chercheurs et toutes les compétences pouvant exister en matière d'ingénierie des situations de résolution de problèmes. Malheureusement, l'évolution actuelle des conditions institutionnelles de la formation des enseignants et de la recherche sur l'enseignement rend de plus en plus difficile la mise en place de recherches de ce type. Nous ne terminerons pas sans dire notre colère de voir les enseignants de nouveau enfermés dans un simple rôle de consommateurs de formations et de « résultats à connaître » alors qu'ils acceptaient de plus en plus volontiers de se placer dans un rôle de producteurs au sein de véritables équipes de recherche. Or cette implication des principaux acteurs dans la recherche était à l'évidence le moyen le plus sûr de faire évoluer véritablement et solidement l'enseignement.

Bibliographie

Cauzinille-Marmèche, E. & Julo, J. (1998). Studies of micro-genetic learning brought about by the comparison and solving of isomorphic arithmetic problems. *Learning and Instruction, 8, 3,* 253-269.

Cauzinille-Marmèche, E. & Pélissier, A. (1999). Cognitive progress triggered by worked-examples analysis or unassisted problem solving. Soumis : *Learning and Instruction.*

Chevallard, Y. (1989). *Arithmétique, algèbre, modélisation. Etapes d'une recherche.* Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, 16.

Gagné, R.M. & Smith, E.C. (1962). A study of the effects of verbalization on problem solving. *J. exp. Psychol., 63*, 12-18.

Houdebine, J. & Julo, J. (1988). Les élèves en difficulté dans le premier cycle de l'enseignement secondaire : pour une intervention didactique différenciée. *Revue Française de Pédagogie, 84.*

IREM de Rennes (1985). *Informatique et ingénierie didactique. Rapport 1984-85 du GRECO Didactique et acquisition des connaissances scientifiques.* Université de Rennes 1.

Julo, J. (1990). Surface features, representations and tutorial interventions in mathematical problem solving. *European Journal of Psychology of Education, 5*, 255-272.

Julo, J (1993). Le pétrolier fait-il fausse route ? *Les Cahiers Pédagogiques, 316*, 32-36.

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques.* Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Julo, J. (1998). Tutelle spontanée et tutelle experte. In: Dumas- Carré, A. & Weil-Barais, A. (eds). *Tutelle et médiation dans l'éducation scientifique.* Bern : Peter Lang.

Julo, J. (2000). Aide à représentation ou aide à la modélisation ? Le cas des problèmes de partage inégal. *Actes du Séminaire du Laboratoire de Didactique des Mathématiques*, Université de Rennes 1. A paraître.

Julo, J. & Cauzinille-Marmèche, E. (1996). L'effet de multiprésentation : mise en évidence dans la résolution d'un problème de proportionnalité. *Revue de Psychologie de l'Education, 1*, 49-77.

Julo, J. & Houdebine, J. (1992). Concevoir de « bonnes » fiches d'activité en mathématiques. *Repères IREM, 8*, 67-88.

Newell, A & Simon, H. (1972). *Human problem solving.* Englewoods-Cliffs NJ : Prentice-Hall.

Polya, G. (1985). *Comment poser et résoudre un problème.* Paris : Dunod.

Pluvinage, F. (1993). Didactique de la résolution de problèmes. *« Petit X », 32*, 5-24.

Schmidt, S. & Bednarz, N. (1997). Raisonnements arithmétiques et algébriques dans un contexte de résolution de problèmes : difficultés rencontrées par les futurs enseignants. *Educational Studies in Mathematics, 32*, 127-155.

Willis, G.B. & Fuson, K.C. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology, 80*, 192-201.

les deux plus grandes valeurs sont exprimées en fonction de la plus petite) mais il l'est beaucoup moins pour des problèmes caractérisés par des structures différentes ; l'acquis de la phase d'étude des corrigés semble donc peu généralisable ;
→ la présentation simultanée des corrigés a un effet plus important que leur présentation successive, en particulier dans le cas d'une structure relationnelle différente.

Cette expérience confirme donc les limites bien connues en didactique de la démarche consistant à « montrer » une procédure de résolution. Elle conduit toutefois à s'interroger sur le rôle que pourrait avoir une aide se présentant sous la forme d'une *explication* qui s'appuierait sur *plusieurs outils de modélisation* et *plusieurs procédures* (pour éviter le statut de « modèle de résolution » que l'élève donne spontanément au corrigé).

La dernière expérience que nous évoquerons, la plus récente, a été réalisée dans une perspective de psychologie cognitive (Cauzille-Marmèche & Pélissier, 1999). Elle concerne le rôle que peut avoir la présentation de corrigés dans la résolution des problèmes de partage inégal.

Nous ne décrirons pas ici les modalités précises de l'expérience qui sont assez complexes. Nous dirons simplement qu'elle se déroule en trois phases :
- dans la première, les élèves ont à résoudre successivement plusieurs problèmes du même type que ceux des expériences précédentes ;
- dans une deuxième phase, les élèves qui n'ont réussi à résoudre aucun des problèmes proposés sont répartis dans quatre conditions expérimentales ; dans les deux premières, les élèves reçoivent les corrigés de trois des problèmes qu'ils ont eu à résoudre auparavant, ces trois corrigés étant présentés soit successivement (10 min pour chacun) soit "en bloc" (30 min pour étudier les trois) ; les deux autres conditions servent à évaluer l'effet de ces corrigés (dans l'une on repropose seulement les problèmes de la première phase, la dernière étant une condition contrôle) ;
- dans la troisième phase, les élèves ont à résoudre des problèmes analogues à ceux de la première phase.

Il est important de préciser la nature des corrigés. Ceux-ci présentent toujours la procédure de fractionnement basée sur une représentation graphique des relations entre les trois valeurs à trouver (cette représentation elle-même variant légèrement d'un corrigé à l'autre) :

Exemple de corrigé

Pour le problème suivant :

> Théo, Daniel et Sandra ont 81 cassettes à eux 3.
> Daniel a 3 fois plus de cassettes que Théo.
> Sandra a 5 fois de plus de cassettes que Théo.
> Combien de cassettes à Théo ?
> Combien de cassettes à Daniel ?
> Combien de cassettes à Sandra ?

le corrigé suivant est proposé :

Un de tes camarades a rédigé ainsi sa solution :

```
              ---
              ---
       ---    ---
       ---    ---
---    ---    ---
 T      D      S
```

Donc Théo a 81 : 9, soit 9 cassettes.
Donc Daniel a 27 cassettes.
Donc Sandra a 45 cassettes.
Il a juste. Comment a-t-il fait pour avoir toutes ses réponses justes ?

Nous retiendrons des résultats de cette expérience les deux faits suivants :
→ l'effet des corrigés est très net pour les problèmes qui ont exactement la même structure relationnelle que ceux faisant l'objet d'un corrigé (c.a.d. la structure la plus simple : celle où

Aide G (Graphiques)

Indique le numéro du bon schéma

```
1   A  |---------|---------|---------|---------|
    B  |---------|---------|---------|
    C  |---------|

2   A  |---------|---------|---------|
    B  |---------|---------|---------|---------|
    C  |---------|

3   A  |---------|---------|---------|---------|
    B  |---------|
    C  |---------|---------|---------|

4   A  |---------|
    B  |---------|---------|---------|
    C  |---------|---------|---------|---------|

5   A  |---------|---------|---------|
    B  |---------|
    C  |---------|---------|---------|---------|

6   A  |---------|
    B  |---------|---------|---------|---------|
    C  |---------|---------|---------|
```

L'expérience se déroule de la manière suivante :

- chaque élève reçoit une fiche l'invitant à résoudre le problème ;
- si l'élève n'a pas fourni les réponses attendues au bout de 15 mn, une aide lui est fournie sous la forme d'une fiche, sans aucune explication supplémentaire ;
- 10 minutes après, l'élève reçoit une seconde aide s'il n'a toujours pas résolu le problème, puis une troisième 10 minutes plus tard ; l'ordre dans lequel les trois aides seront présentées (parmi les six possibles) est déterminé au départ et de manière aléatoire ;
- le travail est arrêté 15 mn après la troisième aide.

(lorsque l'élève a résolu le problème, un second problème du même type mais un peu plus difficile lui est proposé, puis un troisième encore plus difficile)

Le taux de réussite est de 12 % après la première phase de travail (sans aide) et passe à 52 % après la troisième aide. Mais les résultats mettent surtout en évidence deux faits importants :

1- les trois aides ne sont pas équivalentes du point de vue de leur effet sur la réussite ; on observe nettement l'ordre suivant G > E > A ; en effet, la présence d'un outil de modélisation dans l'aide (schéma ou écriture de type algébrique) oriente les élèves vers une procédure de fractionnement ainsi que le montre une analyse de leurs démarches ;

2- toutefois, on observe aussi qu'aucune des trois aides n'a un effet déterminant et que chacune peut avoir un impact qu'elle soit donnée en première, deuxième ou troisième position.

Cette expérience montre principalement que le *cumul* d'aides, même très différentes dans leur « logique » (surtout dans ce cas ?), a un effet très positif sur l'activité de résolution de problème.

L'effet « corrigés »

L'effet de cumul

Cet effet a été mis en évidence dans une expérience réalisée au sein d'un groupe IREM alors que nous étudions l'impact de trois aides très différentes sur la résolution du problème suivant par des élèves de 6ème (expérience présentée dans : Julo, 1995) :

> On a trois ficelles A, B et C de longueurs différentes.
> A est 3 fois plus longue que B.
> C est 4 fois plus longue que B.
> Les trois ficelles mises bout-à-bout mesurent 240 cm.
> Quelle est la longueur de chacune des ficelles ?

Ces trois aides sont les suivantes :

Aide A (Affirmations)

Indique pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse d'après le texte du problème

Si la ficelle B mesurait 50 cm alors la ficelle A devrait mesurer 150 cm d'après le texte du problème : VRAI ☐ FAUX ☐

Si la ficelle C mesurait 210 cm alors la ficelle B devrait mesurer 70 cm d'après le texte du problème : VRAI ☐ FAUX ☐

Si la ficelle A mesurait 60 cm alors la ficelle B devrait mesurer 180 cm d'après le texte du problème : VRAI ☐ FAUX ☐

Si les ficelles A et B mesuraient ensemble 140 cm alors la ficelle C devrait mesurer 100 cm d'après le texte du problème : VRAI ☐ FAUX ☐

AidE E (Egalités)

Regarde bien ces 3 problèmes. L'un d'eux ressemble beaucoup au problème proposé. Lequel ?

1
$A = 3 \times B$ $C = 4 \times B$ $A + B + C = 240$
Trouver la valeur de A, B et C

2
$A = B$ $A + C = B$ $A + B + C = 240$
Trouver la valeur de A, B et C

3
$A = 3 \times C$ $C = 4 \times B$ $A + C = 240$
Trouver la valeur de A, B et C

- soit les élèves reçoivent une feuille comportant un énoncé de problème et on leur demande de le résoudre,
- soit ils reçoivent une feuille comportant trois énoncés strictement isomorphes (même structure, mêmes valeurs numériques) et on leur demande de choisir l'un des énoncés et de résoudre le problème qu'ils ont choisi ; les élèves ne sont pas informés qu'il s'agit de problèmes isomorphes.

La feuille correspondant à cette seconde condition expérimentale se présente de la manière suivante (dans la première condition les élèves reçoivent l'un de ces trois énoncés) :

Condition de multiprésentation

LIS CES TROIS PROBLEMES ET CHOISIS CELUI QUE TU VEUX RESOUDRE

PROBLEME 1

Judith, Catherine et Anne ont 126 ans à elles trois.
Judith est la plus âgée et Anne la plus jeune.
Judith est 4 fois plus âgée que Anne.
Catherine est 2 fois plus âgée que Anne.
Quel est l'âge de chacune ?

PROBLEME 2

On a trois ficelles : une grande, une moyenne et une petite.
Mises bout-à-bout elles mesurent 126 cm.
La grande ficelle est 4 fois plus longue que la petite.
La moyenne est 2 fois plus longue que la petite.
Quelle est la longueur de chacune des ficelles ?

PROBLEME 3

La somme de trois nombres A, B et C est 126.
Le nombre A est le plus grand et le nombre C le plus petit.
Le nombre A est 4 fois plus grand que le nombre C.
Le nombre B est 2 fois plus grand que le nombre C.
Quels sont les nombres A, B et C ?

L'expérience est réalisée en classe de 6ème et le temps imparti est le même pour les deux conditions (20 min).

Les résultats font apparaître une différence nette au niveau de la performance : les élèves réussissent plus souvent à résoudre le problème lorsqu'ils ont eu le choix entre trois énoncés.

D'autres modalités expérimentées consistent à demander aux élèves de résoudre *les trois problèmes* proposés (sans leur indiquer qu'il s'agit de problèmes isomorphes) ou encore à présenter *successivement* les trois énoncés. L'effet de multiprésentation est retrouvé dans tous ces cas.

Quelques exemples d'énoncés :

EXEMPLE 1

On a trois ficelles : une grande, une moyenne et une petite.
Mises bout-à-bout elles mesurent 240 cm.
La grande ficelle est 4 fois plus longue que la petite.
La moyenne est 3 fois plus longue que la petite.
Quelle est la longueur de chacune des ficelles ?

EXEMPLE 2

La somme de trois nombres A, B et C est 294.
Le nombre A est 8 fois plus grand que le nombre B.
Le nombre B est 3 fois plus grand que le nombre C.
Quels sont les nombres A, B et C ?

EXEMPLE 3

Pour fabriquer un cocktail avec du jus d'orange, du jus d'ananas et du jus de fruits de la passion, on doit respecter les proportions suivantes :
- mettre 2 fois plus de jus d'orange que de jus d'ananas,
- mettre 6 fois plus de jus d'orange que de jus de fruits de la passion.

Quelle quantité de chacun des jus faut-il pour préparer 5 litres de cocktail ?

A l'intérieur de cette sous-classe, trois catégories principales de problèmes doivent être distinguées en fonction de la nature des deux relations multiplicatives fournies :
si les trois inconnues sont telles que : A > B > C, on a trois possibilités :
- exprimer A et B en fonction de C (1er exemple),
- exprimer A en fonction de B et B en fonction de C (2ème exemple),
- exprimer A en fonction de B et en fonction de C (3ème exemple).

Il existe de nombreuses variantes liées aux valeurs numériques en jeu (celles qui servent à exprimer les rapports précédents, celle de la somme et celles des inconnues). Il existe aussi de nombreuses variantes liées aux grandeurs et, plus généralement, au contexte sémantique qui caractérise l'énoncé. Ainsi le premier exemple apparaît comme l'un des plus faciles parmi ceux que nous avons expérimentés avec des élèves de 6ème et le troisième comme l'un des plus difficiles.

Les principaux faits mis en évidence

L'effet de multiprésentation

Cet effet mis en évidence dans le cas de ces problèmes de partage inégal (Julo, 1990) a été retrouvé à plusieurs reprises avec des modalités un peu différentes (Cauzille-Marmèche & Julo, 1998) et avec un autre problème (Julo & Cauzinille-Marmèche, 1996).

Dans l'expérience princeps, il résulte de la comparaison des deux conditions suivantes :

en œuvre est suffisamment grande pour permettre des approches très variées de ces problèmes et susciter de vraies démarches de découverte dans la manière de les résoudre.

L'analyse des procédures chez des élèves de 6ème/5ème permet ainsi de distinguer deux grandes classes :
→ la classe des procédures que nous appellerons *par fractionnement* car elles consistent toujours, d'une manière ou d'une autre, à diviser la somme pour obtenir l'une des valeurs demandées ; les deux procédures décrites dans l'extrait de manuel joint en font partie et constituent deux sous-classes importantes mais il en existe d'autres ;
→ la classe des procédures que nous appellerons *par ajustement* car elles consistent à déterminer les valeurs demandées en essayant des nombres ; il existe ici aussi plusieurs sous-classes différenciées par le recours éventuel à un mode d'organisation des essais (dans un tableau par exemple) ou à une méthode d'encadrement (rapports de proportionnalité par exemple).

La seconde critique concerne l'idée même que cette transition entre arithmétique et algèbre puisse se faire, comme on le supposait, de manière naturelle, « sans violence », simplement en constatant qu'une méthode est plus efficace qu'une autre. Chevallard (1989) montre que c'est une telle illusion épistémologique qui sous-tend la stratégie classique d'introduction de l'algèbre et qui conduit à négliger tout le travail de modélisation propre au traitement algébrique des situations. Du point de vue cognitif, une autre illusion conduit à concevoir la mise en équation comme une simple « traduction » de l'énoncé du problème (Julo, 1995) et contribue ainsi, également, à l'occultation de l'activité de modélisation en mathématiques. Notons que des recherches récentes tendent à montrer qu'une telle conception réductrice du raisonnement algébrique est toujours présente chez de jeunes adultes se destinant à l'enseignement (Schmidt & Bednarz, 1997).

Prenant en compte ces deux sortes de considérations et les réflexions menées dans un groupe de recherche de l'IREM de Rennes (1985), nous avons choisi de nous intéresser aux problèmes de partage inégal en tant que tels et à la place qu'ils pourraient avoir dans l'enseignement des mathématiques en classes de 6ème et de 5ème. L'hypothèse didactique est que ces problèmes pourront avoir un rôle de préparation à l'algèbre si l'on parvient à réaliser deux conditions :
→ induire à leur propos une véritable activité de résolution de problème,
→ induire une activité de modélisation intrinsèquement liée à cette démarche d'élaboration de procédure et de découverte de solution.

La réalisation de ces deux conditions devrait contribuer, sur le plan cognitif, à faire vivre aux élèves la nécessaire rupture épistémologique que constitue le passage à l'algèbre.

Les problèmes pris en compte dans les expériences réalisées

A l'intérieur de la classe des problèmes de partage inégal, nous nous sommes intéressés exclusivement à un type particulier : les problèmes caractérisés par trois inconnues et trois relations dont l'une est une somme et les deux autres des rapports.

ANNEXE

Quelques données concernant les recherches en cours sur les problèmes de partage inégal

Les problèmes de partage inégal font partie de la tradition des problèmes arithmétiques et ont longtemps joué un rôle central dans la transition arithmétique/algèbre (Chevallard, 1989). L'extrait de manuel ci-dessous montre comment la notion de *solution algébrique* était introduite à partir d'une schématisation de l'énoncé sous forme de segments de droite.

PROBLEMES

Partage en deux parties dont l'une est multiple de l'autre

TYPE : « **Deux personnes ont ensemble 36 francs. L'une possède 5 fois plus que l'autre. Combien chacune a-t-elle ?** »

1ère |-----|-----|-----|-----|-----|

2e |-----|

SOLUTION - La première personne possède 5 fois ce que possède la deuxième. Ensemble elles possèdent 5+1 fois, ou 6 fois ce que possède la deuxième. Donc la deuxième a 36fr : 6 ou 6 francs et la première 6fr × 5 ou 30 francs.

AUTRE SOLUTION - Au lieu de représenter la part inconnue de chacune des deux personnes par une *portion de droite*, il est possible et plus aisé de représenter cette part par une *lettre* quelconque de l'alphabet, par x , par exemple.

En appelant x la plus petite des deux parts, la plus grande est $5x$, on peut dire :
x plus 5 fois x font 36 francs ; et on peut écrire :

$$x + 5x = 36 \text{ ; et } 6x = 36$$

D'où :

$$x = 36 : 6 = 6$$

Réponse : La deuxième personne a 6 francs ; la première a 6fr × 5 ou 30 francs.

REMARQUE - **Cette solution qui comporte un raisonnement dans lequel on désigne, par une lettre le nombre à chercher, le *nombre inconnu*, s'appelle une *solution algébrique* ; c'est, pour certains problèmes, le mode de solution le plus simple et le plus rapide.**

A. LEMOINE - Cours d'Arithmétique
Librairie Hachette - 1923

Cette manière de faire peut être critiquée de deux points de vue différents.

La première critique concerne l'absence complète de perspective de type « activité de résolution de problème ». On se contente de montrer une méthode de résolution qu'il faut apprendre à utiliser. Or, une particularité de cette classe de problèmes que l'on appelle de partage inégal est son intérêt en termes de processus cognitifs. D'abord, ces problèmes soulèvent des difficultés tout à fait nouvelles et importantes au niveau de la représentation (mentale) qui permettra de les « comprendre » puis de les résoudre (en particulier le statut des nombres-solutions change par rapport aux problèmes arithmétiques plus simples où ils sont des « résultats » d'opérations). Ensuite, la variété des procédures pouvant être mises

SCIENCES, ENSEIGNEMENT, DEMOCRATIE ET HUMANISME

OU

CE QUE JE CROIS AVOIR COMPRIS DES RECHERCHES SUR L'ENSEIGNEMENT DANS UNE PERSPECTIVE DE COHERENCE ENTRE SCIENCE, ENSEIGNEMENT, DEMOCRATIE ET HUMANISME

CONFERENCE :
Marc Legrand
Enseignant-chercheur à l'IREM de Grenoble

Cet exposé comporte quatre parties :

Première partie : Si on se place dans la perspective de fonder à l'école les bases d'une démocratie et si on pense qu'enseigner c'est aussi transmettre une certaine forme d'humanisme, quelles sont les valeurs naturellement associées à un enseignement scientifique et qui ne peuvent que très difficilement émerger d'un enseignement de pures techniques ?

Deuxième partie : Quels éléments forts des recherches en psychologie, en épistémologie et didactique de ces dernières décennies (recherches autour du constructivisme) permettent d'aborder avec de véritables chances de succès l'utopie fondamentale : faire découvrir, aimer et pratiquer les bases d'une démarche scientifique à la grande majorité de nos élèves ou de nos étudiants ?

Troisième partie : Que devient dans bon nombre de nos classes, voire de nos amphis, le constructivisme qui a circulé dans la communauté des professeurs via les articles, les congrès, les formations, les IREM, les IUFM ?

Quatrième partie - Retour sur un exemple significatif de notre propos : "Le jean".

I. Science, démocratie et humanisme

Un constat préliminaire

Quelle que soit la façon dont on s'y prend et quel que soit le public auquel on s'adresse, enseigner des mathématiques qui permettent d'entrer dans une démarche scientifique est long et difficile, mais il est clair aujourd'hui que si l'on tente de faire cela dans un enseignement de masse en s'appuyant exclusivement sur les modes d'enseignement traditionnels, on va droit à l'échec.
En effet, il n'est pas exagéré de dire que la plupart des élèves ou des étudiants qui s'en sortent actuellement n'attrapent en fait que la surface des choses (ce qui suffit pour obtenir les examens) ; les autres fuient de plus en plus (désertion des filières scientifiques) ou échouent très violemment.
La tentation est donc de plus en plus forte d'année en année d'abandonner toute ambition d'initiation réelle à une pensée scientifique et de "déconceptualiser" le plus possible nos

enseignements afin de lutter contre l'échec scolaire, en raison d'une vision de plus en plus utilitaire du savoir face à l'emploi..., par souci d'égalité des chances..., parce que... c'est ce que "tout le monde" semble souhaiter, en tout cas parce que c'est bien souvent dans ce sens que vont les pressions officielles.
Et c'est ainsi que chaque réforme ayant pour objectif de diminuer l'échec sans être accompagnée des moyens pour réussir sur le fond (par exemple, donner aux maîtres la possibilité de participer dans la durée à une recherche-formation continue), à tous les niveaux, de la maternelle à l'université, on passe progressivement mais imperturbablement d'un enseignement scientifique à l'enseignement de techniques déclarées "comme devant être directement utilisables par le futur citoyen", quand cela ne se réduit pas à l'enseignement de simples recettes pour réussir aux examens.

Ma question initiale est alors la suivante : pourquoi faudrait-il résister ?
En d'autres termes, puisque la plupart des élèves n'ont pas vocation à devenir des scientifiques purs et durs, quelles valeurs sont donc fondamentalement au cœur d'une culture scientifique et mathématique ? Et pourquoi ces valeurs pourraient-elles ne plus être transmises si on remplaçait l'enseignement scientifique par l'initiation à des techniques et l'enseignement des mathématiques par l'initiation au traitement informatique de problèmes mathématisés ?

Il me semble que l'enseignement d'une science est d'abord et avant tout l'enseignement d'une forme de pensée, d'une façon d'aborder les problèmes, de les traiter ou de se déclarer inapte à le faire, c'est l'initiation à une certaine philosophie pratique, philosophie qui s'actualise et s'effectue par la construction, la mise en œuvre, la maîtrise de modèles et de techniques adaptées.

La science, "quand elle est profonde", essaye de se délimiter un objet d'études, et tout en cernant au mieux son domaine de réalité, convient qu'elle ne peut le connaître totalement, qu'elle ignore et ignorera toujours ce que les choses sont en vérité, elle affirme que ce n'est pas son objet de savoir avec une certitude totale.
La science qui se respecte travaille à partir d'hypothèses et soutient des thèses qui résultent de spéculations faites dans des modèles, modèles qui eux-mêmes ne se prétendent pas être la copie conforme du réel, qui ne se prétendent pas "plus vrais, plus parfaits" ; ils ont seulement vocation à être cohérents en eux-mêmes, à être pertinents par rapport au "réel" dont ils cherchent à rendre compte, à être adéquats pour traiter les questions qu'on se pose.
C'est dans ces modèles que l'on trouve des formules mathématiques qui permettent de quantifier les choses, de calculer des résultats ; mais ces formules et ces lois mathématiques qui donnent toute leur fécondité aux modèles ne sont toujours pas vues par les scientifiques comme les lois de la nature, mais comme un moyen de mettre la nature en loi.
Ce qui est fondamental pour celui qui participe à l'activité scientifique, c'est cette pratique de va-et-vient permanent entre ce qu'il perçoit de façon quasi kinesthésique, ce qu'il en imagine et infère avec son esprit, ce qu'il crée avec ses modèles, ce qu'il arrive alors à calculer et à démontrer dans ses modèles, ce qu'il va pouvoir en inférer sur le "réel initial", ce qu'il va pouvoir prévoir et anticiper, et la façon dont il va contrôler la pertinence de ces inférences et de ces prévisions pour éventuellement rebondir en modifiant ses hypothèses et modèles ou en construire de nouveaux.

Ce qui caractérise les modèles scientifiques, c'est qu'ils sont créés en se pliant à une double contrainte, d'un côté le "réel", et de l'autre, une forme de pensée qui depuis plusieurs millénaires montre à l'usage toute sa fécondité et sa pertinence, "la pensée hypothético-déductive". (Dans un modèle scientifique, je peux effectuer l'acte intellectuel d'objectivation : "si certaines choses sont bien comme ceci, alors je peux me persuader et persuader rationnellement quiconque - je peux démontrer - que d'autres choses sont comme cela!").
Ces modèles qui semblent à première vue très mathématiques par la présence de formules, le sont surtout en définitive parce qu'ils épousent comme logique interne une logique essentiellement mathématique.
L'intérêt d'un tel enseignement scientifique pour tous n'est donc pas, à mon sens, de gaver tout futur citoyen de formules et de résultats dont il n'aura que faire dans la vie courante (une très petite minorité de gens utilisent effectivement les savoirs scientifiques en tant que tels, et le développement des logiciels "intelligents" ne fera que diminuer ce besoin). L'intérêt d'un tel enseignement est par contre d'apprendre très tôt à chacun que malgré nos phantasmes de toute-puissance cognitive, notre besoin de posséder des vérités absolues et notre désir que tous pensent comme nous, les vérités dures, les consensus larges et profonds sont rares et sont à construire ; ils ne s'obtiennent que par un certain renoncement au particularisme, que par un éloignement parfois énorme du réel.
La dynamique du point, par exemple, qui nous éclaire énormément sur un certain nombre de phénomènes du monde matériel qui nous entoure n'est le plus souvent simple et éclairante que lorsqu'elle élimine les forces de frottement et écarte l'influence des masses secondaires; et les théorèmes mathématiques auxquels nous accordons le statut de vérité universelle ne sont éclairants et sans faille que si nous les regardons d'abord comme des affirmations adaptées à un monde totalement idéalisé, totalement mathématisé et somme toute très éloigné des domaines pratiques où ce matériel intellectuel sera exploité.

L'intérêt d'un tel enseignement pour fonder une démocratie, c'est donc de proposer au futur citoyen des modes de mise en accord qui font appel à sa responsabilité d'être pensant ; recherche d'accords qui ne reposent ni sur l'autorité absolue d'un supérieur infaillible, ni sur l'abandon à l'irrationnel, à la chance ou la malchance, à la volonté divine.
Dans la construction de cette œuvre commune, l'erreur et la diversité des points de vue ne sont pas à considérer comme une faiblesse, une perte de temps et d'efficacité, mais au contraire comme un passage obligé vers l'obtention de solutions plus robustes, plus équilibrées, plus susceptibles de tenir dans la durée et dans l'action, surtout si cette action doit être collective.
La culture humaniste qui peut naturellement s'instaurer dans un tel apprentissage est de découvrir l'importance de la diversité des personnes et des points de vue dans la recherche d'un accord, d'accepter positivement cette différence qui relativise ma propre position, d'accepter ce métissage des idées et des approches qui m'interdit de vouloir occuper une position trop hégémonique, d'accepter tout cela donc comme une richesse pour soi et pour les autres et non comme un handicap, une perte de temps et d'efficacité.
C'est bien l'introduction à une culture humaniste que de découvrir dans l'action renouvelée la force des accords qui ne reposent ni sur la peur, ni sur la coercition imposée par l'autorité ou par un groupe de pression égoïste, mais plutôt sur la confrontation des raisons et des différents points de vue, sur le rapprochement des rationalités (accord sur les définitions, sur les principes de départ, sur les règles du jeu).

S'engager dans un débat scientifique, c'est en gros accepter le principe : "Tant que nous ne sommes pas d'accord sur les idées, ferraillons intellectuellement ; accepte que j'essaye de te convaincre car j'accepte aussi que tu me convainques. A la limite, tant mieux si en fin de compte la solution que nous adopterons n'est ni la tienne, ni la mienne exactement ; l'important est que tout cela nous ait permis de comprendre un peu mieux, d'être un peu moins naïf, d'élaborer une solution plus juste".

Toutes ces valeurs qui peuvent "naturellement" accompagner, prendre corps, devenir effectives dans un enseignement scientifique qui les reconnaîtrait explicitement et les mettrait en exergue, nous risquons de perdre une formidable occasion de les faire partager aux générations montantes si, par ignorance d'autres modes d'enseignement, par paresse intellectuelle, par refus d'affronter la difficulté, par conformisme passif ou intéressé, ou par une mauvaise analyse des enjeux sociaux et humains de l'instruction, nous réduisons l'enseignement scientifique à un enseignement de recettes et de techniques.

Je ne dis pas que le partage de ces valeurs est facile à réaliser, je soutiens seulement qu'il est totalement compatible avec l'esprit de la science et qu'il n'est pas nécessaire pour l'effectuer de supprimer des heures de maths ou de physique afin de les remplacer par des cours de méthodologie, d'instruction civique ou d'éthique scientifique ; je pense que ce partage de valeurs réclame seulement - et c'est énorme - de faire de la science en cours de sciences.

A l'opposé, l'idéologie du tout concret, de la réussite immédiate, du zéro risque, de la transparence totale, de l'information instantanée et illimitée a tendance à tuer les ingrédients de base de la démocratie et de l'humanisme et met l'homme sous la tutelle de la seule loi du profit.
En effet, la bonne technique tue le questionnement, interdit le doute, crée l'impatience : s'il y a une bonne solution il faut l'appliquer, tout de suite, universellement, et il faut se dépêcher de généraliser cela avant que d'autres ne prennent la place, il faut immédiatement abandonner les autres techniques éprouvées mais moins performantes (on voit aujourd'hui ce que cette philosophie donne au niveau des "innovations pédagogiques" ou au niveau agroalimentaire), il faut gommer systématiquement les différences qui vont s'opposer à la mise en application automatique de la technique universelle. Exit donc le doute, inutile d'apprendre à penser, à se questionner, concentrons nos efforts sur l'acquisition et la maîtrise de la dernière nouveauté (c'est extraordinaire de voir le temps que chacun passe aujourd'hui à digérer la nième version du dernier logiciel vendu à prix d'or et qu'il va bientôt falloir jeter pour laisser place à la n+1ème !)

Entendons-nous bien, pour moi il n'est pas question ici de péjorer les techniques, l'expérimental et le recours au concret, bien au contraire (personnellement, je ne comprends les mathématiques que dans la mesure où j'arrive à les mettre en résonance avec des phénomènes physiques, à les imager, à les représenter, à les métaphoriser dans d'autres domaines de réalité ; si je répare moi-même ma voiture et fais beaucoup de travail manuel, ce n'est pas d'abord par souci d'économie mais parce que je pense que le travail manuel est une véritable hygiène mentale : quand on délire trop dans l'exécution d'une tâche pratique, quand on maîtrise trop mal les techniques standard, quand on pense mal son problème, la réalité matérielle a tôt fait de vous rappeler à l'ordre, de vous rabattre le caquet si vos théories sont trop théorisantes ou vos prétentions trop simplistes du style "il n'y a qu'à...!").

Je suis donc parfaitement d'accord avec ceux qui soutiennent que rien n'est plus dangereux qu'un enseignement de théories et de modèles qui ne recouvriraient aucune réalité "concrète" et qu'il est vain, prétentieux et intellectuellement malhonnête de laisser croire qu'on peut développer longtemps une théorie sans apprendre à maîtriser simultanément les techniques correspondantes.
Par exemple, sans oublier l'échec partiel de l'enseignement des maths modernes parce que présentées de façon beaucoup trop formelle, on constate aujourd'hui l'erreur que nous avons à nouveau commise quand, par souci de justice devant les inégalités que créait la détention par certains de calculettes à mémoires, on a décidé de donner aux élèves des formulaires aux examens. Sur un plan symbolique, on leur a ainsi envoyé un mauvais message : on leur a fait croire que la connaissance de certaines formules de base, la reconnaissance de certaines formes, la capacité de se remémorer une formule ou de "vérifier" rapidement son exactitude étaient inutiles pour faire des maths, et du coup, on a piégé ces élèves dans une forme d'activité où ils ne peuvent faire que ce qu'on leur commande. En effet, pour prendre de l'initiative, il faut pouvoir libérer son esprit des tâches les plus élémentaires, et la maîtrise de techniques simples et de formules de base est précisément là pour nous permettre de penser à autre chose en s'en servant.
Ce que je veux préciser en opposant enseignement de la science et enseignement de techniques, c'est que c'est totalement différent de regarder les techniques comme étayage des philosophies, comme moyen libérateur d'énergies pour la recherche du sens, comme outils dans la construction et l'utilisation des modèles (ce qui correspond à un enseignement général) ou au contraire de considérer les techniques comme des savoirs en soi, comme des connaissances autosuffisantes (ce qui peut se concevoir à certains moments dans un enseignement professionnalisant).

A mon sens, le problème de la vie moderne n'est pas le défaut de techniques, mais le défaut d'une sagesse pratique, d'une pensée philosophique appliquée qui nous permette de maîtriser les "progrès techniques".
Le danger de la désertion des filières scientifiques, ce n'est pas à mon sens, comme une certaine idéologie cherche à nous le faire croire, le double risque : d'un côté, celui de manquer de techniciens purs, et de l'autre, de ne plus arriver à faire émerger l'élite scientifique dont un pays moderne aurait besoin pour penser et résoudre les problèmes des sociétés sophistiquées. Le vrai danger, je crois, c'est qu'il y ait de moins en moins de personnes qui puissent penser rationnellement les problèmes quotidiens du monde dans une vison économique large, et pas seulement en se laissant dominer par l'émotion, le court terme et l'égoïsme imbécile (le danger c'est qu'il y ait de moins en moins de personnes qui maîtrisent assez les connaissances et les raisonnements scientifiques pour pouvoir accepter au quotidien et faire avancer une véritable réflexion écologique).
En effet, il m'apparaît chaque jour davantage que la plupart des problèmes humains réclament pour être résolus avec humanité que nous nous reconnaissions différents dans une égale dignité. Cela est très difficile pour tout le monde, pour les techniciens purs, bien sûr, qui ont tendance à rester enfermés dans un champ trop étroit, mais aussi et a fortiori pour l'élite telle qu'elle est conçue aujourd'hui, car, si douée et dévouée soit-elle, ayant souvent été écartée de la société par la sélection et formée dans un climat de supériorité, il lui est après

coup quasiment impossible de "bien penser" les problèmes du commun des mortels tant ses modes de vie et de raisonnement lui sont étrangers.

Si donc nous percevons mieux les raisons pour lesquelles un véritable enseignement scientifique peut être considéré comme indispensable pour la très grande majorité de citoyens, non pas pour qu'ils deviennent tous des scientifiques purs et durs mais pour qu'ils acquièrent une réelle compréhension de la portée et des limites de la science, pour qu'ils acquièrent aussi, au delà des résultats, de véritables méthodes de travail individuelles et collectives (prendre l'habitude de chercher à avoir un avis, à le donner et à en exposer les raisons, découvrir que différences, erreurs et contradictions identifiées et reconnues comme telles ne font pas les guerres mais au contraire peuvent aider à les éviter), si donc sans demander à la science de nous rendre "bon et généreux" - ce qui n'est pas son objet - nous lui reconnaissons la vertu de nous donner des moyens pour mieux exercer nos responsabilités de citoyens et d'humains, ma deuxième question fondamentale est alors la suivante :

Pourquoi donc ne sommes-nous pas plus vigilants pour garder son aspect scientifique à l'enseignement des sciences?

A mon sens, notre manque de vigilance repose sur trois faits au moins :

- Sous-estimation de l'importance des valeurs attachées à la démarche scientifique et non prise de conscience de notre responsabilité à les faire partager

Je pense que nous ne voyons pas assez les valeurs dont nous venons de parler comme intimement liées à la démarche scientifique et simultanément indispensables pour fonder une démocratie non policière, pour permettre un humanisme raisonné.
Par suite, nous ne nous sentons pas directement en charge de transmettre ces valeurs, i.e. bien que la plupart des professeurs soient, je crois, assez fondamentalement d'accord avec l'essentiel de ce que je viens de dire (certains d'entre nous se montrent même souvent agacés de mon insistance : "Legrand rabâche avec ses valeurs, il enfonce des portes ouvertes!"), dans l'action, nous sacrifions à ces idéaux largement partagés d'autres valeurs plus secondaires, mais qui par leur urgence et leur accessibilité deviennent prioritaires (pragmatisme, réussite aux examens, égalitarisme, ne pas sortir du rang, ne pas bousculer les gens, préserver l'harmonie avec son entourage, etc. etc.)

- Il existe une sorte d'incompatibilité de fond entre science et enseignement

Non seulement les pratiques intellectuelles de la science (relativité des jugements, expérience du doute, travail sur l'erreur, coopération basée sur la différence, changement de points de vue et questionnement) ne structurent pas nos enseignements, mais en un certain sens elles s'y opposent (ce qu'on enseigne doit être vrai, l'élève ne doit pas douter de ce qu'on lui dit, l'erreur, les contradictions, les retours en arrière sont considérés d'abord comme du "non su", du temps perdu ; le travail collectif se prête mal à l'évaluation individuelle, l'acceptation de la différence des formes d'esprit se plie mal à la sélection, à la recherche des meilleurs, les changements de points de vue et les questions "tordues" sont incompatibles avec des

programmes chargés qu'il faut parcourir très rapidement, les tâtonnements, les productions erratiques sont insupportables quand on veut immédiatement obtenir des rédactions achevées, écrites avec les mots et la syntaxe du spécialiste, etc.)
En clair, nous aimerions bien faire de la science en classe, mais trop de facteurs semblent s'y opposer catégoriquement !

- Méconnaissance de la force et de la portée du constructivisme

Nous n'avons pas assez pris conscience que de nombreux travaux en épistémologie (Bachelard et all.), en psychologie (Piaget et all.), en didactique (Brousseau et all.) nous fournissent des outils puissants pour affronter aujourd'hui même, avec de bonnes chances de succès, le paradoxe d'un enseignement scientifique hautement souhaitable pour tous, mais pratiquement irréalisable avec les moyens didactiques traditionnels.

II. Ce que je crois avoir compris et retiens du constructivisme quand on le travaille dans un désir de plus de cohérence entre enseignement, démocratie et humanisme

1. La perte de l'illusion de la toute-puissance de la "bonne explication" ou l'apport fondamental de Bachelard

Pour moi, comme pour tout professeur, je pense, la question fondamentale est celle du sens, mais contrairement à ce que l'on souhaiterait, le sens d'un savoir n'est pas intrinsèque mais résulte de ce que chacun construit par une suite d'interactions entre ce qu'on lui enseigne, ce qu'il sait déjà (juste ou faux) sur ce domaine, ses expériences pratiques (objectivées ou non) et les rapprochements (plus ou moins pertinents) qu'il opère avec d'autres domaines de connaissance.
Face à un "même savoir enseigné" donc, chaque élève va construire des significations qui lui sont propres et qui peuvent transformer, voire dénaturer le savoir jusqu'à lui faire perdre sa consistance.
Ce que Bachelard nous dit d'essentiel, c'est que les vérités scientifiques sont rarement la simple application du bon sens (contrairement à ce que disent si fréquemment les professeurs quand ils n'arrivent pas à se faire comprendre : "faites preuve d'un peu de bon sens !"). En particulier, quand la science nous apporte une idée vraiment importante, elle le fait le plus souvent en allant contre des préjugés, contre un certain sens commun, contre un savoir localement vrai, i.e. vérifié sur les cas particuliers qui nous sont familiers.

Pour dépasser ces préjugés, ces raisonnements erronés, ces savoirs trop locaux mais bien enracinés, Bachelard nous avertit : la bonne explication risque de ne pas suffire !

En d'autres termes, puisque les théories et les concepts scientifiques sont le plus souvent élaborés pour dépasser une contradiction, pour résoudre un problème, pour répondre à des questions, Bachelard nous invite à penser que c'est en pénétrant cet ensemble, en entrant dans cette problématique qu'on a le plus de chances d'accéder à leurs significations principales. Les savoirs scientifiques se construisant souvent en remettant en question ce qui semblait aller de soi, en allant contre ce que l'on pensait "naturellement", en dépassant certains a priori, c'est probablement en prenant conscience simultanément de ce qu'on a

voulu changer et de ce que l'on a changé qu'on évitera le plus de faire des contresens quand on appréhendera des constructions intellectuelles élaborés par d'autres.
Un problème didactique majeur surgit alors : une fois la théorie achevée, sa signification globale et la signification profonde de ses différents objets risquent d'échapper ou pour le moins de ne plus apparaître de façon naturelle à ceux qui cherchent seulement à l'apprendre, parce que précisément ces derniers ne sont plus dans la position révolutionnaire (donc pleine de sens) d'auteurs d'un changement à effectuer, mais dans la position dangereusement rassurante (au niveau du sens) de ceux qui ignorent qu'il a fallu effectuer un changement, ou qui le savent mais en ont oublié les raisons, ou qui, par familiarité non questionnée, croient évident le changement à effectuer! (Par exemple, depuis la petite école on nous dit que le périmètre du disque est $2\pi R$ et l'on finit par penser que c'est du même ordre que de dire que le périmètre du rectangle est $2.(L + l)$!).
Et à ce niveau donc…ce que le constructivisme nous apporte de totalement révolutionnaire (car cela va contre le sens didactique commun, contre le désir naturel de tout professeur), c'est la destruction du phantasme de la toute-puissance de la bonne explication magistrale.
Pour l'essentiel, ce que Bachelard nous convie à accepter, c'est que la partie la plus fondamentale du sens des savoirs ne peut s'enseigner avec des explications seulement, même si elles sont complétées par la résolution d'exercices et problèmes qui les illustrent. Pour que l'élève donne un sens adéquat à ce que nous lui enseignons, il faut donc qu'il se constitue un ensemble de questions et de problèmes ad hoc, il faut qu'il partage d'une certaine façon notre problématique scientifique, faute de quoi toutes nos belles constructions rationnelles, toutes nos splendides démonstrations, toutes nos applications qui les illustrent, risquent de se transformer en beaucoup de non-sens ou de contresens.

Tout cela, je l'avais ressenti confusément très tôt en tant qu'élève et étudiant :
- d'un côté j'avais remarqué que dès que ça se complique un peu en classe, si en tant qu'élève ou étudiant on ne précède pas d'une certaine façon ce que le professeur veut montrer, ses (sur)explications arrangent rarement les choses. J'avais éprouvé sur moi-même et depuis j'ai observé dans les classes et les amphis que les vraies questions des élèves - les questions sur le sens d'une technique ou d'une théorie - et les réponses des professeurs se situent très souvent sur des planètes différentes (la question est technique et la réponse est théorique, ou inversement la question est globale et la réponse est particulière). Dans ce cas, les sur-explications rationnelles, voire les métaphores du professeur ne font souvent qu'approfondir le malentendu : pour ne pas paraître idiot devant la classe ou l'amphi ou pour faire plaisir au prof, l'élève "lâche assez vite le morceau" en faisant semblant d'avoir compris, mais tout porte à croire qu'il n'en a pas eu pour son argent ; pire, il hésitera à questionner à nouveau de peur de passer pour un imbécile!
- d'un autre côté, j'avais remarqué à l'inverse que les présentations de concepts ou de techniques considérées comme lumineuses sur l'instant, notamment les présentations très organisées, très sobres et astucieuses, dépoussiérées de toute problématique embarrassante, bref les simplifications énormes effectuées par le professeur (à l'insu de l'élève mais qu'il accueille avec enthousiasme : "ce cours est clair, avec ce prof c'est simple, on comprend tout, etc.") cachent souvent si bien le fond des choses que pour comprendre véritablement (et pas seulement appliquer dans les cas standard) il faut avoir l'audace de déconstruire le bel édifice. Sans cette déconstruction et une reconstruction plus personnelle, impossible d'arriver à donner un véritable sens (ce que l'on découvre souvent en devenant professeur ou chercheur).

Tout cela donc, je l'ai d'abord douloureusement compris en tant qu'élève, car ne voyant pas très bien le sens de ce qu'on faisait en classe, notamment en mathématiques, j'ai pendant des années été un très mauvais élève (si j'avais été de milieu défavorisé, mes études se seraient arrêtées à 14 ans, mais ayant un père philosophe j'ai pu poursuivre, et rien que pour cela je me sens une dette sociale). Je ne suis devenu "bon élève" que le jour où j'ai compris que mon besoin de sens, c'était essentiellement à moi de le satisfaire par le jeu de la déconstruction - reconstruction de ces édifices livrés tout faits par les professeurs, et par l'acharnement à dépasser les paradoxes qui ne manquent pas d'apparaître dès qu'on cherche à approfondir ce qu'on vous enseigne. Tout cela donc, je l'avais instinctivement compris et intériorisé au fil des années, mais devenu enseignant..., je me suis empressé de l'oublier ou plutôt de le rationaliser naïvement : si je ne comprenais pas toujours en tant qu'élève, c'est parce que mes maîtres expliquaient mal, ne donnaient pas assez d'images concrètes ou de représentations dans différents registres. J'ai donc pendant des années soigné énormément mes explications (notamment les explicitations sur le sens des définitions, sur la teneur des hypothèses, d'un théorème, etc.) et je faisais très attention à proposer moult comparaisons et métaphores pour aider mes élèves ou mes étudiants à ..."comprendre" !
En retour, ce qui est bien naturel, j'exigeais de mes étudiants ... qu'ils comprennent mes bonnes explications ! Pour certains c'était parfait, mais pour d'autres, et scandale! il y en avait, ça ne marchait pas! J'exerçais alors inconsciemment une certaine violence (comme je l'avais subi) sur ceux qui avaient l'audace de ne pas se plier à mes efforts pour les aider à comprendre : je leur reprochais plus ou moins explicitement de ne pas jouer le jeu ! de ne pas travailler assez ! de le faire exprès ! de n'être pas à leur place ! etc. etc.
Le pire, c'est que cette débauche de métaphores et de bonnes explications sur le sens, je l'exerçais précisément sur ce que Bachelard nomme "obstacle épistémologique" : ces savoirs tellement énormes, tellement révolutionnaires au niveau du changement de sens qu'ils introduisent, qu'il n'y a pratiquement aucune chance de les faire passer ou de les dépasser par de simples explications ou de subtiles métaphores, ces savoirs pour lesquels ce qu'il faudrait expliquer d'un coup pour les introduire est trop difficile pour que ça puisse se simplifier facilement sans falsification grave sur le sens - nous y reviendrons.

Devant cette mise en évidence de la non-transparence du sens, un enseignement scientifique démocratique est-il encore envisageable ?

2. L'émergence d'un nouveau mode cognitif ou l'apport décisif de Piaget

Si pour une part le sens ne peut s'enseigner directement, si même les savoirs les plus importants se présentent sous forme d'obstacles épistémologiques, que faire pour favoriser un enseignement en compréhension ?

- Laisser faire la nature ! Quelques élèves, quelques étudiants construisent seuls du sens à partir des explications qui leur sont données et, parfois même, malgré ces explications (ils ont le courage de retravailler le cours, l'audace de le reconstruire en faisant autrement, ils se posent spontanément des foules de questions et de problèmes, et même s'ils ne comprennent pas tout, tout de suite, ils en comprennent assez pour que ce soit passionnant et pour que l'alchimie de la compréhension et du sens fonctionne pour eux dans le temps). Ce "laisser faire la nature" est plus ou moins le choix ou le non choix majoritaire de l'école et surtout de l'université qui sélectionne ainsi son élite ; pour les raisons éthiques et politiques évoquées précédemment, il me parait très insatisfaisant.

- Regarder comment la plupart des jeunes enfants surmontent victorieusement le formidable obstacle de la compréhension du monde qu'ils découvrent, du langage qu'ils ignorent, des codes de vie nulle part recensés, et tout cela alors que précisément le monde adulte ne peut que très mal le leur expliquer avec des mots puisque le sens des mots et des symboles ne leur est pas connu.
La façon dont Piaget (et de façon générale la psychologie cognitive) a mis tout cela en lumière va nous permettre d'imaginer non plus un mode d'enseignement, mais deux modes complémentaires bien que diamétralement opposés, modes que le professeur pourrait exploiter tour à tour en fonction des savoirs visés, des étapes sur ces savoirs et des problèmes de sens qu'ils posent.

Nous tirons de ces recherches en épistémologie et psychologie cognitive la modélisation suivante :
Pour enseigner, le professeur a le choix entre deux modes cohérents au plan philosophique et didactique : le monstratif et le constructivisme.

Le mode (dé)monstratif : logique d'exposition, clarté, exhaustivité, exactitude, rapidité

Quand il semble que le sens construit par l'élève hors du contrôle direct du professeur ne risque pas d'oblitérer la majeure partie du discours magistral, il est convenu que le professeur adopte un mode d'exposition du savoir dans lequel il montre, démontre, explique tout ce qu'il présente, il est alors le garant de la vérité et de la pertinence de tout ce qui s'énonce sur ce mode.
Pour garder la clarté et la logique de l'exposition, pour que l'explication tienne dans un temps circonscrit, le professeur ne pose donc pas de vraies questions et ne souhaite pas qu'on lui en pose trop ; par exemple, quand il donne la parole à un élève, c'est parce qu'il sait en gros ce qu'il va dire (juste ou faux) et veut s'en servir pour illustrer son propos, pour souligner un aspect. Dans ce mode, (toujours par souci de clarté, de logique et de rapidité) le savoir est présenté de façon non problématique, en ce sens que le professeur le débarrasse de tous les errements qui l'ont fait émerger et (excepté quelques recommandations de prudence) il atténue la portée des fausses pistes et des paradoxes auxquels il pourrait donner lieu.
Dans ce mode, l'élève doit faire une confiance totale à son professeur au niveau épistémologique, il écoute, note et ne le questionne que si des éléments externes semblent manquer (par exemple il ne peut lire une formule, un symbole, le professeur utilise un mot qui lui est totalement étranger), mais il ne fait jamais cela de façon polémique ou revendicative, il est "bon élève".
Au niveau du sens, l'élève essaye de se calquer sur son professeur ; par exemple, s'il est questionné, il tente de répondre dans le sens auquel il pense que le professeur l'invite, il ne se rebelle pas de ne pas tout comprendre même si certaines choses lui paraissent inutiles, fausses ou absurdes. En clair, l'élève fait le pari que tout ce que le professeur énonce doit être compréhensible, juste et pertinent, il s'abstient donc de suivre son idée si elle est contraire à celle du prof et il retient son envie de demander des explications à chaque fois qu'il ne comprend plus, en se disant que tout cela s'éclaircira probablement a posteriori, quand il reprendra son cours, fera les problèmes et les exercices d'application.

Les deux moments où ce mode didactique semble le mieux adapté sont

- quand ce que l'on veut enseigner "paraît" suffisamment simple et clair : l'expérience des années précédentes montre qu'il n'y a pas là de vraies sources d'incompréhension, ou bien s'il y a des difficultés, elles ont déjà été travaillées, et il faut maintenant opérer une synthèse, mettre de l'ordre sur des notions délicates, mais les élèves les connaissent déjà assez bien, ils savent de quoi on parle et où on va ;
- quand, au contraire, il est évident que ce qu'on veut enseigner ne peut s'éclairer spontanément, dans un temps donné, par la simple action rationnelle des élèves ou des étudiants, ou par un débat dans lequel les idées arrivent dans le désordre : il s'agit de présenter un nouveau mode de pensée, une preuve technique ou très élaborée qu'aucun élève ne peut inventer, il s'agit de définir de nouveaux objets, de faire tenir debout un élément de théorie qui ouvre un nouveau champ d'investigation, ou au contraire en fin d'une phase constructiviste, il faut tirer les conclusions d'un débat chaotique, il faut institutionnaliser le savoir mis en jeu : synthétiser un ensemble d'expériences, nommer, réordonner, achever les preuves et conclure après une élaboration erratique.

<u>Le mode constructiviste</u> (tutoiement du théorique, catalyseur de sens, révélateur des contresens)

Quand on peut craindre trop de perte de sens si le savoir est "montré" directement, en particulier quand le savoir va trop contre des savoirs et les pratiques antérieures, a fortiori quand il s'agit d'aborder un obstacle épistémologique, il est convenu que le <u>professeur</u> n'expose plus le savoir mais le <u>problématise</u>, c'est-à-dire que, sans même le nommer directement ou indirectement, il cherche à susciter un champ de questions et de thèses chez l'élève, non pas pour que ce dernier invente, découvre, construise le savoir qu'il veut enseigner, mais pour que ce savoir que l'élève ignore encore, lui apparaisse comme un besoin, comme une nécessité scientifique (et non comme une nécessité didactique : l'élève n'a pas à aller rechercher ce savoir dans le répertoire de ce qu'on lui a appris récemment), comme répondant à des questions qu'il se pose, comme devant avoir une certaine signification.

Pour arriver à cela, le professeur s'appuie quand c'est possible sur des situations fondamentales : situations paradigmatiques qui ont vocation à créer le besoin du savoir que l'on veut enseigner et à en configurer des significations pertinentes, compatibles avec les développements ultérieurs.

Dans ce mode, le professeur, s'il garde l'entière responsabilité didactique (il est garant qu'on apprend), se dessaisit par contre de la responsabilité épistémologique qu'il assurait dans le mode précédent (il ne se prétend plus être garant du vrai, du faux et de la pertinence; il fait momentanément la dévolution de cette responsabilité à la classe, à l'amphi).

Le professeur crée donc des difficultés là où il se le serait interdit dans l'autre mode, suscite des conflits, organise une genèse artificielle de problèmes et de contradictions susceptibles de créer le besoin des théories et concepts qu'il veut enseigner (il recrée artificiellement un espace d'expérimentation et de contradictions qui, sinon, risqueraient de n'apparaître que très lentement ou pas du tout pour une majorité d'élèves).

Dans ce mode l'élève, la classe, l'amphi doivent comme dans le précédent, et peut-être encore plus, continuer à faire confiance à la didactique du professeur ("je ne sais pas où il

nous emmène, mais je sais qu'à terme, si on joue le jeu, on va apprendre quelque chose qui est au programme mais que ce professeur ne peut nous expliquer directement").
Pour apprendre, l'élève doit donc continuer à être docile au niveau de sa participation au "jeu cognitif" organisé par le professeur (il n'a pas à refuser de travailler le problème qui lui est posé - il peut le juger absurde mais alors il devra expliquer pourquoi - il n'a pas à parler intempestivement de tout et de rien, etc.) ; par contre il doit maintenant prendre des initiatives et des risques au niveau épistémologique (proposer des conjectures, des preuves, des contre-exemples, manifester ses doutes, proposer ses explications, en exiger de ceux qui le contredisent).
En clair, contrairement au mode précédent (où il devait taire ses insatisfactions intellectuelles et interroger sur le mode "je n'ai pas bien compris..., je n'ai pas entendu"), l'élève doit pouvoir s'adresser au groupe classe en disant "je pense que ...et voilà mes raisons" et se rebeller contre tout argument d'autorité qui sanctionnerait son propos rationnel.
Puisque la fonctionnalité de ce mode est de forcer l'apparition du sens par rapprochement d'idées et affrontement des obstacles qui s'opposent à la compréhension, ce qui prime maintenant, c'est que les élèves disent ce qu'ils pensent être vrai (même et surtout si c'est faux), ce qu'ils croient comprendre, qu'ils expliquent ce qui les convainc et ce qui les laisse perplexes. Toute action pour baisser la garde trop tôt au niveau épistémologique, pour ne pas aller au conflit en faisant semblant d'être d'accord, toute action pour chercher à découvrir ce que le maître pense afin de se calquer sur son opinion sont des façons pour l'élève de casser le mécanisme cognitif mis en jeu dans ce mode ; et pour le professeur, toute action tendant à manipuler le débat pour que les choses viennent "miraculeusement" dans le bon ordre, pour atténuer les conflits d'idées en laissant transparaître son opinion, pour faire disparaître prématurément un vocabulaire impropre, pour rectifier ou compléter subrepticement les raisonnements erronés ou inachevés (afin que ça avance et que ce qui est écrit au tableau soit correct) sont autant de façons d'appauvrir la fonction de catalyseurs de sens que sont le dépassement des contradictions, la transformation progressive d'un vocabulaire impropre, la rectification par nécessité épistémologique (parce qu'on s'aperçoit peu à peu que ça ne montre rien, qu'il y a des contre-exemples) des raisonnements erronés ou incomplets.

<u>Deux remarques à propos de ces modes didactiques</u>

a) <u>Les excès du retour de balancier</u> : le mode monstratif, quand il est exclusif, fait des ravages au niveau du sens (cela devient totalement évident dans un enseignement de masse de la maternelle à l'université) ; comme, de plus, il a été rendu impopulaire par l'idéologie dominante issue d'un constructivisme dont la fonction a été mal comprise, nombreux sont ceux qui aujourd'hui vilipendent son aspect le plus voyant, le cours magistral, le taxe de tous les maux, demandent sa suppression ou le pratiquent honteusement. (L'élève devrait, entend-on souvent dire, construire lui-même son propre savoir : mystification totale ! Et c'est au nom de cette mystification qu'on va interdire au professeur de "faire cours" !)
A mon sens, il ne faut surtout pas supprimer cette colonne vertébrale de la transmission du savoir qu'est le cours magistral, mais il faut par contre apprendre à mieux cibler sa fonction, à mieux délimiter sa place et le restreindre à cela pour qu'il ne provoque pas les effets pervers classiques (les pertes de sens et le dressage au conformisme qui apparaissent

inexorablement quand le monstratif est insuffisamment contrebalancé par des phases constructivistes). Nous y reviendrons à propos du contrat didactique.

b) <u>Nécessité d'organiser des phases constructivistes</u>

Le mode constructiviste, une fois identifié, apparaît comme incontournable : que chacun fasse un peu d'introspection pour voir ce qu'il a réellement compris et retenu de ce qu'on lui a enseigné et il constatera très probablement que ce qui s'est intériorisé l'a été à la suite de phases constructivistes, pas toujours perçues comme telles, car pas forcément voulues, organisées et explicitées par l'enseignant.
Personnellement, le professeur qui m'a fait faire le plus grand saut en avant dans la compréhension des mathématiques avait la double caractéristique de "se planter" en cours (par manque de préparation et par trop d'occupations administratives), mais au lieu de sortir le lapin du chapeau, il avait l'honnêteté intellectuelle et le culot de chercher à voix haute.
Cette double obligation l'amenait à problématiser le cours de façon inhabituelle : "Qu'est-ce que je cherche au juste ? Pourquoi je n'y arrive pas en m'y prenant ainsi ? Regardons dans un cas particulier ! Si je modifiais un peu les hypothèses ou la conclusion ! etc.", et comme il ne trouvait pas tout de suite et explorait à voix haute de fausses pistes, il nous montrait ainsi comment on pouvait chercher intelligemment en mathématiques.
Tout en "râlant comme un pou" contre ce professeur qui ne préparait pas assez ses cours, mais fasciné par cette façon de poser les problèmes sur la table, j'entrais sans le vouloir dans son contrat didactique improvisé, c'est-à-dire que je cherchais avec lui ou contre lui et me transformais sans m'en rendre compte par cette nouvelle approche.
Ce n'est qu'au bout de deux ou trois mois que j'ai compris que j'étais en train de changer ma façon de penser les mathématiques, découvrant alors qu'en changeant de regard et de méthodes je pouvais moi aussi avoir des idées mathématiquement intéressantes.
Il s'agit là, bien entendu, d'un constructivisme sauvage peu recommandable car il n'avait pas d'effets très heureux sur la majorité des étudiants, qui se sentant trop en rupture de contrat, attendaient passivement que le cours reprenne (c'est-à-dire que le professeur, ayant retrouvé sa solution, l'énonce proprement afin qu'ils puissent la noter sans ratures), mais on peut néanmoins dire que le mécanisme qui faisait avancer ceux qui cherchaient avec ou contre lui était bien de type constructiviste.

Enfin, on peut remarquer que la "nature" a souvent des vertus didactiques constructivistes très efficaces, par exemple quoi de mieux pour un jeune chauffeur qu'un bon petit accident où il n'y a que de la tôle et des égratignures, cela peut mieux que la répétition quotidienne des conseils de prudence des parents lui en faire comprendre le bien-fondé et lui éviter de provoquer un accident beaucoup plus grave quelque temps après.

<u>Le lien fondamental entre l'épistémologie et le cognitif</u>

Nous venons de voir que l'analyse de la transmission des savoirs dans une perspective humaniste et démocratique nous conduit à porter une attention toute particulière à la préservation du sens dans nos enseignements. A la lumière des recherches apparaît la nécessité de prendre en compte et de bien distinguer deux modes didactiques, le monstratif et le constructivisme, dont chacun a ses caractéristiques propres et ses exigences contradictoires.

Pour que ces deux modes cohérents ne se retrouvent pas rabattus sur un mode hybride, le pseudo-constructivisme, incohérent au plan didactique et philosophique, mais largement répandu, semble-t-il (comme on le verra dans la troisième partie), il nous faut, pour ne pas entretenir en classe un malentendu fondamental sur le sens de nos actions didactiques, clarifier les choses sur le type de regard que nous pouvons porter sur le savoir.

3. Deux regards bien différents sur le Savoir

On peut envisager le savoir essentiellement comme :

- externe à celui qui connaît

c'est alors ce qu'on enseigne, ce qui est... "indiscutablement vrai", ce... qu'il faut savoir !
ou au contraire comme

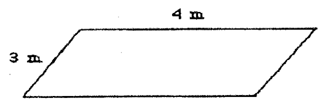
- interne à celui qui connaît

c'est alors un outil de transformation de la personne par la réflexion.

Prenons un exemple pour préciser cette distinction :

A la question (impertinente à ce niveau) :

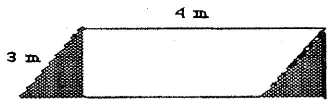
Quelle est l'aire de ce parallélogramme de côtés 3 m et 4 m ?



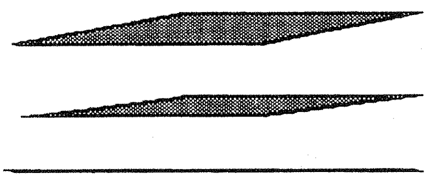
plus de 50% des étudiants de première année d'université répondent :

$$A = 12\ m^2\ !!!$$

Certains donnent "spontanément" une "preuve" :

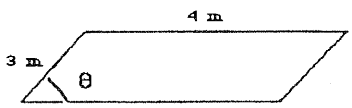


Rarissimes sont ceux qui mettent en évidence la variable "aplatissement" !



Pourquoi ? ??
Si par contre on pose la ("même") question :

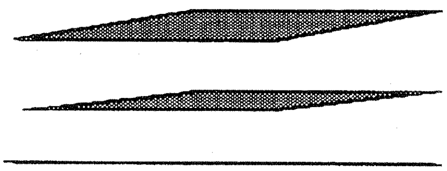
Quelle est l'aire de ce parallélogramme de côtés 3m et 4m ?



la réponse majoritaire devient : $A = 12.\sin(\theta)$.
Formule exacte qui "dit presque tout" !

Constat
La formule exacte est "connue de tous", donc nos étudiants ont appris quelque chose à propos de l'aire et peuvent le mettre en œuvre si on les interroge dans le registre où ils ont appris ; mais nous aurons tendance à dire que ce qu'ils connaissent n'est encore qu'un savoir externe puisque dans l'action, cela ne leur dit rien sur l'aire réelle de la figure mise en jeu, cela ne leur donne pas la force, la sagesse de résister à la pression de la question "quelle est l'aire?" (sous-entendu dans un contrat didactique classique : il y en a une et on peut la calculer avec les paramètres donnés. Donc ici : aire = longueur × largeur). C'est donc un savoir non intériorisé !

Le Savoir interne ici, ce serait : A défaut de connaître l'inclinaison



je ne peux répondre car tout est possible entre 0 et 12 m^2 !!!

Ce que m'apporte ici l'éclairage scientifique en terme de connaissance sur le monde, ce n'est pas essentiellement la connaissance d'une formule exacte que je peux mettre en œuvre quand tous les paramètres pertinents sont désignés (enseignement de techniques), c'est la capacité de subodorer qu'ici un paramètre caché (la hauteur ou l'angle) joue un rôle déterminant sur ce qui nous intéresse : l'aire.

Ce que m'apporte globalement l'intériorisation de la démarche scientifique en terme de participation au débat démocratique, c'est la sagesse de savoir qu'il ne faut pas se précipiter sur les solutions évidentes sans les travailler un peu au préalable, sans essayer de les "étirer", de les "déformer" pour voir si elles résistent, et ce malgré et surtout quand l'injonction m'est faite de répondre instantanément par des questions de la forme : "quelle est …?".
L'intériorisation scientifique change mon regard sur le monde en me montrant que le plus souvent, les problèmes en apparence très simples sont mal posés et qu'il convient de les reformuler avant de se précipiter à répondre, car suivant la (re)formulation qu'on effectue, les réponses peuvent différer.
Ici, par exemple, à la question "quelle est l'aire …?", on pourrait rétorquer : "si vous me dites qu'il s'agit d'un parallélogramme semblable à celui que vous représentez, j'aurais envie de répondre qu'il vaut environ entre huit et dix mètres carrés, mais si vous voulez plus de précision il faudra me préciser l'angle ou la hauteur. Si par contre vous déclarez que vous laissez cette variable libre (ce qui est la convention du mathématicien, quand il ne dit rien), alors je vous réponds que tout est possible entre 0 et 12 mètres carrés, et que suivant ce que vous voulez faire, cette variabilité de l'aire pourra être exploitée comme un avantage ou au contraire subie comme un handicap, suivant que c'est vous qui contrôlerez cette variable ou

quelqu'un d'autre. Sachez enfin que la formule : Aire = 12 sin (θ), non linéaire en θ, vous dit exactement comment agit cette variable angle sur l'aire de ce type de parallélogramme."

Il résulte de tout cela que …

Nous savons assez naturellement enseigner les savoirs externes et nos élèves savent assez bien apprendre la partie technique de ces savoirs, mais quel est l'intérêt véritable de ces apprentissages s'ils ne se transforment pas en savoirs internes ?
Nous savons que ces savoirs intériorisés "D'où vient ce que je pense être vrai ?" sont nécessaires à tous pour permettre à chacun d'assumer ses responsabilités de citoyen et d'humain, puisque ce sont eux qui aident à démasquer préjugés et croyances irraisonnées.
Mais ces savoirs intériorisés

- ne s'enseignent pas… "naturellement",
- sont très délicats à évaluer,
- vont "contre" la culture courante !

Devant toutes ces objections, sommes-nous donc condamnés à observer que l'essentiel, la construction du sens, l'intériorisation des savoirs restent et resteront toujours l'apanage d'une petite élite et que l'école ne peut rien (malgré ses désirs égalitaires généreux) pour rétablir un équilibre des chances à ce niveau ?

Le dernier gros obstacle à surmonter pour aller vers un enseignement respectant la construction du sens : la création d'un outil pour changer de mode didactique.

Si vous me suivez dans l'analyse que j'effectue ici dans une perspective humaniste et démocratique des éléments cruciaux mis en évidence par les recherches sur l'enseignement, vous devez arriver à la conclusion que, pour que l'utopie que "beaucoup puissent comprendre beaucoup" ne soit pas perdue d'avance, il faut que le professeur puisse faire alternativement appel à la docilité intellectuelle de l'élève (cours magistral) ou à sa responsabilité épistémologique (dévolution à l'élève d'une véritable responsabilité scientifique).
Si ce double jeu réussit, on peut alors escompter qu'au delà des savoirs dont il hérite en apprenant, l'élève se construira simultanément un en soi sur lequel il pourra s'appuyer en tant que citoyen et humain, il pourra se dire : "le savoir que j'ai appris m'a transformé en ce sens que d'une part je possède des connaissances attestées et reconnues à l'extérieur, et d'autre part ce que je sais, je ne le connais pas n'importe comment, je l'ai suffisamment confronté à d'autres domaines de réalité, j'en connais assez les limites et la portée pour oser m'en servir dans l'action, je sais jusqu'où je peux l'exploiter pour mener des raisonnements non simplistes".

En clair, il faut que le professeur puisse jongler entre deux modes d'enseignement qui, bien qu'ils soient complémentaires au niveau du but visé, demeurent néanmoins totalement contradictoires au niveau de leur logique interne.

Or rien n'est plus difficile pour un professeur que de changer de registre. Je me demande toujours comment des imitateurs peuvent au cours d'un sketch passer instantanément d'un personnage à l'autre ! Heureusement pour eux, ils doivent seulement amuser et créer de l'émotion, ils n'ont pas de fonction didactique à assumer et peuvent ainsi mieux se concentrer sur leur propre jeu. Ils doivent bien entendu sentir la salle et surveiller qu'ils provoquent bien les émotions voulues - thèse de Diderot - mais ils n'ont pas pour fonction de faire en sorte que la salle elle-même comprenne les mécanismes de leur imitation et devienne capable de les pratiquer.

Le changement de jeu didactique du professeur est donc plus délicat d'une certaine façon, puisque face au "jeu de l'apprentissage", il n'y a plus un seul acteur mais deux, le professeur et l'élève, voire le groupe d'élèves ou d'étudiants ; le professeur peut d'une certaine façon faire passer "en force" son jeu monstratif, mais le jeu constructiviste, lui, il ne peut que le proposer, et si l'élève, la classe, l'amphi ne suivent pas, il ne se passe rien ou la foire d'empoigne.

Rien n'est plus difficile aussi pour l'élève et a fortiori pour le groupe classe ou amphi que de passer d'un jeu à un autre, puisque d'aucuns à certains moments se sentant mieux dans un jeu vont faire pression pour y rester, alors que d'autres se sentant mieux dans l'autre vont exercer une pression inverse, et d'autres enfin, ne comprenant plus rien à ce qui se passe, ne vont plus jouer du tout ou vont "botter en touche".

A cette difficulté de changement de jeu s'ajoute la difficulté que culturellement, pour le moment, les deux jeux, le monstratif et le constructiviste, n'ont pas valeur égale : autant l'enfant, s'il n'est pas trop surprotégé par ses parents, se livre spontanément à un jeu constructiviste qui lui fournit peu à peu ses savoirs internes de base (encouragé par ses parents, il ne cherche pas à se soustraire à ce mode didactique car d'un côté ça l'amuse et de l'autre il y va de sa survie pour apprendre à devenir un petit d'homme), autant l'élève et l'étudiant ont plus tard de bonnes raisons de refuser un tel jeu constructiviste en classe. En effet, après avoir inconsciemment intériorisé une grande partie de leurs savoirs de base de cette façon, il leur est enseigné depuis des années beaucoup de connaissances qui, bien que peu intériorisées, leur permettent néanmoins de passer avec succès examens et concours.

Si donc le professeur ne veut pas devoir s'appuyer alternativement sur une autorité excessive, puis sur une démagogie réductrice des savoirs, qui auront tôt fait de miner son entreprise didactique, il faut qu'il dispose d'un outil de pilotage de son groupe classe ou amphi adapté à l'objectif à atteindre et à l'inertie de son navire.

Tous nos élèves et nos étudiants souhaitent réussir, combien désirent connaître sont prêts à changer de façon d'apprendre pour savoir autrement ?

Il est clair que pour la majorité d'entre eux, la plupart de leurs savoirs restent totalement externes, mais en ont-ils conscience, ont-ils repéré le rôle du passage de l'externe à l'interne, ont-ils pris acte que ce qu'ils savent vraiment n'est que ce qu'ils ont intériorisé, et ont-ils compris comment s'est faite pour eux cette intériorisation ? On peut parier que dans l'état actuel du système, leur réflexion didactique spontanée frôle par moment ces questions (surtout quand ils échouent fortement), mais reste néanmoins infiniment éloignée des exigences cognitives du constructivisme au niveau des réponses pratiques qu'ils y apportent !

Il manque donc au professeur qui vise la construction du sens et l'intériorisation des savoirs, un savoir théorique qui l'autorise (qui légitime rationnellement pour lui, pour les élèves, les parents, les collègues, etc.) à adopter des modes d'enseignement très différents en fonction de la complexité des savoirs mis en jeu et un moyen de faire comprendre au coup par coup à l'élève, à la classe, à l'amphi qu'il serait intéressant d'accepter un changement de mode didactique.

4. Le contrat didactique ou l'apport fondamental de Guy Brousseau

Le contrat didactique est l'explicitation du fait qu'en présence d'un savoir, toutes les interactions d'un professeur avec ses élèves n'ont de sens et de légitimité que si elles sont vues comme correspondant à la double intention : pour le professeur, enseigner ce qu'il sait à ses élèves, et pour l'élève, apprendre ce que ce maître leur enseigne!

Le contrat didactique est donc ce formidable concept auquel Guy Brousseau va donner une portée épistémologique énorme avec la notion de situation fondamentale (situation d'initialisation du sens des concepts et théories, de dévolution à l'élève d'un début de responsabilité vis-à-vis de la vérité et de la pertinence de ce qui va s'élaborer), concept de contrat qui, retravaillé d'une certaine façon par Yves Chevallard, va (re)donner tout son sens à la notion de cours magistral (vu comme moyen n'ayant pas d'équivalent à ce jour pour faire partager une part de ce qu'on connaît à l'issue d'une construction intellectuelle élaborée).
Ce double usage du contrat donne la possibilité au maître de travailler explicitement ce qui me paraît être central dans notre vision de l'enseignement : la transmission aux élèves, aux étudiants de l'héritage culturel que représentent d'une part les savoirs constitués en terme de résultats et de techniques, et d'autre part le savoir regardé comme méthodes de travail, comme philosophie pratique, comme mode de raisonnement.

Le contrat est donc cet outil intellectuel qui, explicité sur le devant de la scène didactique, va permettre aux acteurs, professeur et élèves, de jouer en conscience, dans le respect mutuel et dans la dignité, le double jeu : à certains moments, pour apprendre avec ce maître je dois moi, élève, accepter de n'avoir aucune responsabilité sur le sens et la pertinence de ce qu'il me propose (je m'assujettis totalement à la pensée de ce maître) et moi, professeur, je dois oser assumer pleinement cette responsabilité, en particulier je ne dois pas me cacher derrière l'élève en lui faisant dire ce qu'il ne peut pas inventer (dérapage pseudo-constructiviste). A d'autres moments, quand on m'y invite, je dois moi, élève, pour comprendre et pour intérioriser ce qu'on m'enseigne, accepter de quitter ma position d'assujettissement intellectuel pour assumer en vraie grandeur une responsabilité sur le sens et la pertinence des idées qui circulent en classe, je dois alors accepter d'engager des convictions personnelles et les défendre rationnellement ; symétriquement moi, professeur, je dois à ces moments m'effacer du devant de la scène au plan épistémologique, je dois en particulier accepter de ne plus tenir le premier rôle et par suite assumer la perte du pouvoir que me confère habituellement la reconnaissance institutionnelle de ma supériorité au niveau de la vérité et de la pertinence.

Comme le contrat didactique permet au professeur de faire cette dévolution, il n'en perd pas pour autant la face, et par suite son autorité magistrale (les élèves savent qu'il sait mais s'interdit d'intervenir pour les laisser penser, ce qui n'a rien à voir avec la situation catastrophique - ou en tout cas, qui ne peut se répéter souvent sans miner le contrat - où lors d'un cours magistral ou d'une conférence , l'orateur est interrompu par un participant qui se lève pour dire publiquement "votre explication ne me convient pas, en voici une meilleure !" ou encore "ce que vous avancez est faux et je vous le démontre !")

Le contrat est donc l'explicitation de la possibilité et des raisons de ce double jeu : celui de la délégation par l'élève à son prof de toute responsabilité intellectuelle fondamentale (mode monstratif, cours magistral) et celui de la dévolution par le professeur à l'élève ou au groupe classe ou amphi d'une part importante de la responsabilité scientifique (mode constructiviste, situations fondamentales, débat scientifique).

C'est cet ensemble qui, à mes yeux, fonde la didactique des sciences ! Il y a bien sûr quantité de travaux qui ont depuis vingt ans apporté des éclairages complémentaires sur ce noyau dur, mais sincèrement je ne pense pas être partial ou réducteur en disant que pour moi l'essentiel est là ; en tout cas, c'est ce dont je me sers tous les jours pour enseigner autrement et c'est ce qui nous a permis, par exemple, de concevoir et de réaliser une didactique qui tend à respecter à la fois l'enseignement magistral d'un contenu strict en amphi et son intériorisation par une majorité d'étudiants : le débat scientifique en cours de mathématiques.

<u>Le</u> didactique - <u>La</u> didactique

Nous dirons donc qu'il y a <u>du didactique</u> lorsque, face à un savoir, un contrat (le plus souvent implicite) - le contrat didactique - place des personnes dans les positions dissymétriques de maître et d'élève.
<u>Ce contrat</u>
- traduit une double obligation :
  "enseigner ceci ... à... ceux-là , apprendre cela ... avec... celui-ci",
- définit des rôles :
  ceux que maître et élève(s) s'attribuent pour marquer le nécessaire décalage
  entre celui qui "sait" qu'il sait (autrement),
  et celui qui sait "qu'il ignore" (ou ne sait pas encore de la même façon).

<u>La didactique</u>, c'est le pari de la rationalité : pour tenter de mieux comprendre et maîtriser le réel (le didactique), on le "met à distance" en construisant théories et modèles.

Cet effort théorique a un triple effet :

a) D'abord il replace le professeur qui prépare son cours, analyse le comportement de sa classe ou de l'élève, dans une position plus objective et plus respectueuse de l'altérité de son ou ses interlocuteurs.
Acceptant la pertinence de cette position théorique, le professeur va se dire : "ce qui m'intéresse c'est le réel de mon enseignement, c'est le progrès de tel ou tel élève, ce qui prime donc, c'est le didactique, mais j'accepte que ce réel sur lequel j'exerce mon métier ne me soit pas directement accessible, je ne peux le penser qu'au travers de modèles et les modèles par définition ne sont pas la réalité".
Adoptant cette position scientifique je vais alors, en tant que professeur, m'interdire de dire à un élève ou à un étudiant (tout du moins sans lui faire un clin d'œil complice) : "je sais ce que vous pensez !", "vous ne pensez rien !" , "vous faites n'importe quoi !", "vous refusez

d'apprendre, etc." et je serai obligé, non par politesse, psychologie ou démagogie, mais par conviction intime et parce que c'est le message que je veux lui faire parvenir, de m'adresser à lui de la façon suivante : "avec ce que vous manifestez je suppose que vous pensez ceci ou cela, avec ce que je vois vous me donnez l'impression de ne penser à rien, de ne rien vouloir faire, je n'arrive pas à donner du sens à votre démarche, etc ."
Et on s'aperçoit rapidement que cette position, infiniment plus respectueuse du travail souterrain de chacun pour apprendre et comprendre, permet de traiter positivement les erreurs et les atermoiements comme des passages obligés vers un savoir intériorisé, permet de travailler les situations erratiques et de transformer les échecs momentanés en occasions d'apprendre et de comprendre plus profondément. (Si on se replace un instant dans la perspective d'un enseignement permettant l'initiation à la vie démocratique, on est obligé de convenir qu'un groupe de personnes qui adoptent une telle attitude les unes vis-à-vis des autres, a plus de chances d'arriver à des ententes profondes que celui où chacun est persuadé connaître parfaitement les pensées et arrière-pensées de tous les autres).

b) Ensuite cet effort théorique replace au centre de nos préoccupations la question première des droits et devoirs de chacun dans la relation didactique :

* par le contrat le professeur a le devoir d'enseigner un savoir (celui du programme) à des personnes (ses élèves ou ses étudiants) : peut-il s'abstenir de leur faire cours ? (est-on certain que sans la colonne vertébrale d'un cours construit l'élève pourra apprendre ?)

* par ce contrat le professeur doit aussi permettre à ses élèves de comprendre et d'intérioriser : peut-il ne faire que du monstratif ? est-il assuré que sans situations constructivistes fondamentales l'élève pourra donner du sens à ce qui lui a été si magistralement enseigné, pourra rectifier les malentendus et contresens qui accompagnent presque toujours les échanges frontaux ?

* par ce contrat l'élève a le devoir d'apprendre ce que lui propose son maître : peut-il se révolter contre le savoir et les méthodes proposées par le professeur ou doit-il s'assujettir?

* par ce contrat enfin, l'élève doit faire sien (intérioriser) ce qui lui vient de l'extérieur: a-t-il le droit d'exiger du maître qu'il "fasse cette intériorisation" de force ou doit-il accepter le jeu de la responsabilité et du risque des situations constructivistes qui lui sont proposées pour cela ?

<u>Un point très important sur l'autorité du professeur</u>
J'observe le plus souvent que si le professeur se soumet lui-même aux devoirs du contrat didactique qu'il explicite, il peut à chaque fois que c'est nécessaire donner les raisons de l'autorité dont il doit faire preuve (par exemple en distribuant la parole, en exigeant que tout le monde se taise et écoute quand une personne expose son point de vue, en arrêtant un débat - avec explications - s'il pense qu'il est allé assez loin pour produire du sens, etc.) afin de bien distinguer autorité et autoritarisme, ce dernier étant vécu par l'élève comme une violence, comme un acte de domination d'un adulte exerçant son pouvoir sur des jeunes.
En exerçant toute son autorité de maître et rien que celle-là, le professeur par contre se montre le gardien de la décision commune : nous avons décidé d'apprendre ensemble et nous avons vu qu'il fallait réunir un certain nombre de conditions pour que ça marche. Ses interventions sont donc perçues par les élèves comme la garantie d'un attachement à leurs progrès : il ne laissera pas aller les choses au point où on n'apprend plus ou plus assez.

Je suis souvent interloqué par la violence inefficace d'une autorité magistrale qui s'exerce sans se justifier ("Taisez-vous! Ce que vous dites est stupide! Vous feriez mieux de réfléchir avant de parler ! etc."). Je suis par contre souvent époustouflé de la force non violente d'une autorité magistrale qui s'exerce en classe en se référant toujours au contrat (l'élève accepte plus qu'on ne le croit le type de contrainte : "j'exige cela de vous ... pour que vous puissiez apprendre et comprendre" et en moyenne il coopère, même si c'est difficile et que rien n'est jamais définitivement gagné).

c) Enfin, la didactique, et en particulier le concept de contrat didactique, oblige à prendre acte de la non transparence du sens et à accepter un fait qui va à l'encontre des croyances pédagogiques les plus profondes des scientifiques, notamment des mathématiciens : nos énoncés dépersonnalisés et détemporalisés le sont-ils vraiment pour tous ? nos définitions claires, nos problèmes précis, nos questions non ambiguës sont-elles aussi univoques qu'on le croit ? leur signification ne dépend-elle pas de qui parle, à quel moment, dans quel contexte, et de celui à qui il s'adresse, i.e. du contrat qui lie les interlocuteurs ?

Etude d'un exemple très significatif de la force et de la portée du contrat : le cas des problèmes absurdes du type "âge du capitaine"

Le problème "absurde" suivant :

"Sur un bateau il y a 26 moutons et 10 chèvres. Quel est l'âge du capitaine?"

problème auquel les enfants refusent habituellement de répondre hors école, ou répondent avec un clin d'œil, n'a provoqué aucune réaction d'humour ou de révolte dans les années 80 quand, sur proposition d'un groupe d'animateurs de l'IREM de Grenoble, il a été posé dans une école par un professeur !!
Les élèves se sont mis au travail, et sur 97 élèves de CE1 et CE2, 76 ont donné une réponse en utilisant les nombres figurant dans l'énoncé :

26 moutons $\rightarrow$ 26 ans

ou 26 + 10 = 36 !!!

A la question "Que penses-tu de ce problème?",
Peter qui a répondu : "le capitaine a 26 ans",
ajoute (montrant ainsi qu'il est parfaitement sain sinon de corps tout du moins d'esprit)

"je trouve que c'est bien, mais je ne vois pas quel rapport entre des moutons et un capitaine!"

Anne qui a répondu : "on ne peut pas savoir l'âge du capitaine", nous rassure : "enfin une élève qui fait preuve de bon sens" pensons-nous ! Mais elle s'empresse de nous décevoir par son changement de comportement car, face au nouveau problème sémantiquement équivalent :
"Il y a 7 rangées de 4 tables dans la classe. Quel est l'âge de la maîtresse ?"
Anne répond maintenant
"La maîtresse a 28 ans, car 7 * 4 = 28 ! "
Ce changement d'attitude nous déconcerte totalement ; on se met à désespérer et, si on n'y regarde pas davantage, on est prêt à suivre Stella Baruk dans ses indignations les plus

vigoureuses où le coupable est désigné sans appel : "l'école ne rendrait-elle pas nos enfants idiots ? le cours de math n'est-il pas une formidable machine à former des "automaths"? ")

A la nouvelle question :
"Tu as 10 crayons dans chaque poche; quel âge as-tu ?",
- Paul répond : "20 ans !"
La question ayant été posée par oral, le maître lui dit en forme de reproche
"oh! Paul, tu sais bien que tu n'as pas 20 ans !"
Et Paul actualisant la maxime "à chacun son métier et les vaches seront bien gardées" rétorque sans se démonter :
- "c'est ta faute, tu ne m'as pas donné les bons nombres !"

Cette série de constats affligeants avait d'abord consterné les initiateurs de cette expérience, expérience reprise ou plutôt rapportée avec enthousiasme par Stella Baruk dans son livre "L'âge du capitaine", parce qu'elle semblait illustrer à merveille sa thèse qui consiste à dénoncer (parfois avec une grande perspicacité, mais souvent de façon abusive et totalement désespérante) l'état d'abêtissement dans lequel l'école et le cours de math mettent les élèves qu'elle doit après coup "réparer".
Cette expérience ré-analysée ensuite par Yves Chevallard avec le filtre du contrat didactique (dans le texte en littérature grise "Remarques sur la notion de contrat didactique" publication de l'IREM d'Aix-Marseille et c'est bien dommage, car c'est à mon sens un de ses plus beaux textes) nous permet d'interpréter très différemment cette suite de faits pour le moins troublants.

Sous l'éclairage d'un contrat didactique essentiellement monstratif, la première leçon qu'on peut tirer de cette expérience est la suivante : non!... ces élèves ne sont pas bêtes ou abêtis, étourdis, illogiques, ils ne font pas n'importe quoi et ne font pas forcément non plus la preuve d'un manque de réalisme affligeant, etc... non ..., leur comportement semble au contraire suivre une logique implacable, une logique très fine et indispensable pour pouvoir vivre en société : "la logique de celui qui pour participer activement à la vie d'un groupe social doit en accepter les codes et conventions".
Ici le contrat didactique, nulle part écrit, indique à l'élève que les professeurs ne posent jamais de problèmes "vraiment absurdes" et ne fournissent jamais de données inutiles ; si donc aujourd'hui le maître pose la question "quel est l'âge ... ", c'est qu'on peut le calculer en utilisant les données et un peu de bon sens!
A partir de cette lecture du contrat, chacun va agir au mieux pour occuper une place digne dans la classe et apprendre ; on va donc oublier "qu'on ne peut marier des moutons et des chèvres pour trouver l'âge d'un capitaine" et ne se souvenir que d'une chose : il faut trouver un âge plausible tenant compte des données. Proposons donc 26 ou 26 + 10 (personne ne propose 26 x 10 ici, alors que 4 x 7 et non 4 + 7 est proposé pour l'âge de la maîtresse).
Dès le départ, avec la question inhabituelle à l'école "que penses-tu de ce problème?", Peter montre clairement comment il vit paisiblement sa schizophrénie en dissociant bien les choses :
- d'un côté, il y a la manipulation des nombres que lui demande le professeur et il trouve le problème bien, puisque la manipulation paraît simple,

- de l'autre il y a la réalité du problème pour laquelle il reconnaît spontanément qu'il n'y a pas de rapport.

Le paradoxe au niveau de la logique de Peter qui répond "le capitaine a 26 ans" en sachant pertinemment qu'il n'y a pas de rapport est un faux paradoxe puisqu'en fait, pour Peter, il n'y a pas un, mais deux problèmes qui se traitent dans deux logiques différentes.

Le problème traité dans la vie réelle "il n'y a pas de rapport", le problème traité dans la logique du contrat "il y a nécessairement un rapport", d'où les deux avis non contradictoires puisque non situés sur le même plan, avec prééminence ici de la logique du contrat puisqu'on est en classe et qu'il s'agit de répondre à la question "quel est ...?".

La réaction de Paul à la fin vient magistralement confirmer cette thèse.

De même, la double attitude d'Anne, incohérente à première vue, peut à nouveau s'interpréter dans une logique implacable en terme de contrat didactique. (Tout comme pour Paul ou Peter, on ne sait pas en réalité ce qui s'est passé dans la tête d'Anne et le lui demander ne garantirait pas qu'on le saurait davantage, la fonction d'un modèle n'est pas de dire le vrai mais de donner un fil conducteur, une logique pour interpréter, voire anticiper.)

Dans le premier problème, seule une addition est possible (or l'addition est un vieux savoir), ce n'est donc pas un enjeu de savoir (Anne sait additionner et la maîtresse le sait). Anne donne donc une priorité au réalisme de l'histoire et déclare "on ne peut pas savoir".

Dans le second problème c'est différent, car une multiplication peut être envisagée et la multiplication est un savoir plus actuel ; il y a maintenant un réel enjeu didactique à montrer qu'on sait faire. Anne restant dans la logique du contrat didactique change donc de logique vis-à-vis de la résolution du problème : elle donne maintenant la priorité à la nécessité de montrer qu'elle sait faire la multiplication cachée derrière cette bête histoire de tables et de maîtresse, histoire dont le côté réaliste absurde s'estompe donc pour Anne derrière le fait qu'elle a là une bonne occasion de montrer qu'elle sait faire ce qu'on attend d'elle en classe.

Ce que le concept de contrat didactique nous montre d'essentiel ici, ce sont deux choses : la première assez évidente et l'autre beaucoup plus complexe, car débouchant sur deux attitudes "opposées".

* Ce qui paraît maintenant évident, comme nous l'avons déjà dit, c'est que le sens d'un problème et par suite d'un savoir pour un élève n'est pas intrinsèque au problème, à la définition, à l'explication, mais est à regarder dans le couple question posée, définition proposée et interprétation possible de tout cela au travers des contrats didactiques envisageables par l'élève.

** Ce que souligne l'aventure de l'âge du capitaine, c'est jusqu'à quel point d'aveuglement le contrat didactique permet à l'élève, à la classe, de suivre son professeur sans se révolter comme il le ferait assez naturellement en cas de conflit s'il participait à un échange plus symétrique avec des pairs. En s'assujettissant à son maître l'élève parvient, on le voit ici, à donner du sens à tout ce que ce dernier lui propose, même quand dans une logique de sens commun il devrait s'insurger contre l'absurdité de la situation !

Et là, dans un souci d'humanisme et de démocratie, deux faits doivent être pris en considération :

a) Si ce phénomène d'aveuglement devant les contradictions et l'absurdité se généralise (et pour certains élèves il semble que ce soit souvent le cas, rappelons-nous que sous influence du contrat didactique la majorité des étudiants de DEUG succombent à l'injonction de donner l'aire du parallélogramme de côté 3 m et 4 m quand on le leur demande), ce type d'assujettissement de l'élève à son maître ne risque-t-il pas d'engendrer à la longue un dérapage collectif extrêmement dangereux sur un plan éthique. En effet ce dérapage, quand il a lieu, n'est-il pas semblable à celui des membres d'une secte qui apprennent, par la répétition du geste de délégation de responsabilité, à s'aliéner progressivement à un gourou et finissent ainsi par perdre toute faculté de jugement, tout libre-arbitre !!!! (certains proposent, pour cette raison, de réduire le plus possible, voire de supprimer l'enseignement scientifique de masse et en particulier mathématique).

Ce que montre de façon caricaturale cet exemple, c'est donc le danger qu'il y a, dans un enseignement de masse, à prendre le mode monstratif comme unique mode d'enseignement, car si nous rapprochons la réponse de Paul "c'est ta faute, tu m'as pas donné les bons nombres", réponse dans laquelle il dit clairement comment il voit la répartition des rôles à l'école :
- moi je suis le "manar" des chiffres, tu me donnes dix et dix, je te renvoie : ça fait vingt ! et je fais ainsi mon boulot d'élève!
- tu me dis, toi, que ça n'a pas de sens, que ce n'est pas pertinent, mais ... le sens, la pertinence, ce n'est pas mon affaire d'élève, le sens et la pertinence, c'est ton travail à toi de professeur !!!"

Si donc nous rapprochons ces réponses du drame du sang contaminé fabriqué et distribué par des scientifiques qui savaient eux aussi d'une certaine façon que c'était absurde, que c'était de la mort qu'ils fabriquaient et contribuaient à distribuer en guise de soins, on se sent une responsabilité en tant que maîtres potentiels de ces ex-élèves.

Bien sûr ces scientifiques qui travaillaient dans un laboratoire étaient sous l'influence d'un contrat social qui leur dictait de se taire et leur assurait que ce n'était ni leur devoir, ni leur intérêt de dénoncer les insuffisances du service, qu'ils avaient des chefs et que ce n'était donc pas leur rôle de se rebeller contre un meurtre collectif, et pourtant ... !!!

Si donc on pense qu'instruire, c'est aussi éduquer, la réponse de Paul crie à nos oreilles la nécessité de proposer souvent et à tout niveau et malgré un environnement souvent hostile (contraintes de programme et d'examens en particulier) des contrats diamétralement opposés.

Nécessité donc de proposer des contrats constructivistes dans lesquels l'élève saura au contraire qu'il est de son devoir d'élève de ne plus chercher une solution à partir de l'interprétation qu'il se fait du désir didactique du professeur, saura aussi que tout en acceptant de travailler sur le problème que son maître lui soumet intentionnellement pour qu'il réfléchisse sur un savoir précis et en découvre mieux le sens, il doit, lui élève, (pour apprendre et comprendre) oublier que ce maître a des intentions didactiques, pour ne plus voir que le problème scientifique qu'il doit affronter.

Il doit ainsi faire l'expérience de l'intérêt qu'il y a à dire ce qui lui paraît contradictoire ou absurde, même si d'une certaine façon il a tort.

Il me semble, par exemple, qu'il se produit un événement crucial sur le plan éthique comme sur le plan épistémologique quand un élève, un étudiant et pas forcément un très bon, doute face à la classe entière ou face à l'amphi, et que grâce à ce doute qui a osé s'exprimer, le groupe se remet au travail, bascule peu à peu et découvre son erreur.

Il y a là, je pense, une sorte de preuve pragmatique de l'intérêt individuel et collectif qu'il y a à ce que la loi du groupe autorise chacun à se désolidariser de la pensée dominante quand elle lui paraît trop fausse, trop injuste, et dise pourquoi ! Il y a là une invitation individuelle et collective à oser être rebelle quand c'est nécessaire. (Et Dieu sait si c'est important pour que pouvoir collectif ne rime pas avec irresponsabilité individuelle.)

Enfin, au delà de ces problèmes éthiques, on peut craindre sur un plan épistémologique que si les savoirs sont régulièrement acquis sans confrontation avec ce qu'on sait par ailleurs, l'homme ainsi instruit soit plus dangereux qu'utilement éclairé par son savoir, car comment pourrait-il intérioriser les savoirs proposés par ses maîtres si la "sur-confiance" qu'il leur prodigue lui interdit, même en cas d'absurdité patente, de remettre en cause ce qu'il a appris? Il risque par un accès trop scolaire au savoir de devenir un doctrinaire aveugle et dangereux !

b) Mais la prise de conscience des effets pervers possibles et bien réels des contrats didactiques classiques (perte de sens, perte de responsabilisation scientifique, et à la limite perte de tout jugement personnel) ne doit pas par souci d'humanisme et de démocratie nous faire ignorer tout le versant positif du côté aliénant du contrat didactique, en particulier du contrat monstratif, car on peut alors au nom d'idéaux égalitaristes choisir (par exemple en décidant de supprimer le cours magistral) de jeter le bébé avec l'eau du bain, i.e. de priver l'élève d'éléments fondateurs de la démocratie : pouvoir insérer son jugement propre dans un dispositif de pensée longuement construit et largement partagé.
En effet, les savoirs qui nous donnent force, pertinence et autorité pour agir, discuter, échanger, sont certainement ceux sur lesquels nous avons construit du sens, ceux que nous avons intériorisés par un processus de type constructiviste, mais pour que cette construction personnelle puisse se produire, il faut qu'elle puisse s'adosser à une construction externe qui ne peut surgir spontanément d'un débat scientifique autour de l'étude d'un problème.
Les savoirs forts sont donc ceux qui s'insèrent dans une construction théorique plus globale (fonction de colonne vertébrale du cours magistral, fonction de l'institutionnalisation qui rattache et positionne de façon monstrative les savoirs privés exprimés par les élèves au savoir actuel de la communauté savante).

Par exemple, si ce que j'écris dans cet article vous éclaire sur des points que vous connaissez bien, c'est parce qu'il est construit et réordonne d'une certaine façon ce que vous connaissez autrement, et que, même si vous avez des objections, vous ne pouvez casser sa logique interne en m'interpellant à tous les paragraphes pour m'obliger à présenter d'autres arguments ou à les présenter autrement. Mais de plus, si ce que j'expose ici a quelque valeur, c'est autant parce que j'explique et argumente à partir de nos recherches et expérimentations personnelles que parce que cela s'appuie sur tout le travail de communautés beaucoup plus larges, travail que je n'expose pas ici et qui, même si nous en ignorons la majeure partie, influence néanmoins mon propos et lui donne de la cohérence.

En résumé
Ce que montre cet ensemble de réflexions et de faits, c'est tout le rôle que l'on peut donner à ce concept de contrat didactique, d'une part pour mieux comprendre ce que l'on enseigne véritablement, ce que l'élève peut apprendre, et d'autre part pour mieux assumer notre fonction de professeur et faire accepter à l'élève sa position d'élève.

En effet, dès qu'un contrat didactique lie professeur et élèves face à un savoir, de par ce contrat :

- le professeur "mène le jeu", il "doit" être "le maître" (et il doit accepter d'exercer cette position, sinon le cours perd son sens)!
- pour apprendre l'élève doit "entrer dans le jeu du professeur", il doit s'assujettir à sa pensée, il "doit" être "sujet" (de ce maître), sinon il ne peut apprendre.

C'est à mon sens une erreur profonde de vouloir, pour des raisons de démocratie, d'égalitarisme, de psychosociologie, d'affectivité déplacée, ou tout simplement de modernité, de vouloir donc symétriser cet échange qui ne peut et ne doit se faire sur le mode de l'égalité des points de vue (puisqu'il ne s'agit pas d'échange de points de vue mais de transmission de savoirs).

De par ce contrat, il n'est pas dans le droit de l'élève de discuter la validité du savoir du professeur et le mode de transmission choisi, ni de refuser d'entrer dans les jeux successifs que le professeur organise ; il est par contre dans son droit d'apprendre des choses exactes, de comprendre, de pouvoir intérioriser et il entre alors dans les devoirs du professeur d'avoir une consistance épistémologique et d'exploiter la force extraordinaire du contrat didactique (s'il ne l'a pas lui-même miné, en voulant adopter une position trop symétrique par rapport à ses élèves) pour proposer des changements de contrat, pour organiser des ruptures entre monstratif et constructivisme.

Il faut toute la force du contrat du cours magistral ou de la conférence pour obtenir de ses interlocuteurs un silence intérieur et extérieur, une qualité d'écoute qui seule permet de faire entendre jusqu'à son terme un propos construit et organisateur (ce que ne permet jamais l'échange égalitaire), il faut toute la force du contrat du débat scientifique pour que l'élève sorte de sa position trop irresponsable d'auditeur et de non spécialiste pour devenir auteur, critique, et accepte d'assumer une responsabilité scientifique sur des domaines où il est en grande partie ignorant.

Dans les deux cas, ce qui justifie l'autorité du maître et la docilité de l'élève (y compris pour accepter d'être rebelle sur un plan épistémologique tout en acceptant de garder une position d'élève), c'est la clause fondamentale du contrat didactique (qui fonde le métier de professeur) : dans la relation didactique les acteurs font tout pour que le professeur puisse transmettre le savoir que l'élève doit pouvoir apprendre et intérioriser.

Ce que l'expérience montre constamment, c'est que lorsqu'on a compris la fonction du contrat didactique et qu'on prend le temps de la faire partager à ses interlocuteurs (savoir externe, interne, rôle du monstratif et du constructivisme), il a une force colossale (je ne parle pas bien entendu des classes où le contrat social est trop profondément altéré pour qu'il soit possible de négocier les bases les plus élémentaires du contrat didactique), il permet le double jeu, et si les situations proposées sont épistémologiquement consistantes et didactiquement cernées, la majorité des élèves entrent dans ce double jeu et le pratiquent avec beaucoup plus de professionnalisme que ce que l'on peut le penser initialement, ils apprennent ainsi beaucoup, et semble-t-il ... dans un vrai bonheur !

III. Que devient le constructivisme dans la majorité de nos classes et de nos amphis ?

Cette année nous avons travaillé avec des étudiants de licence de mathématiques dans un module de sensibilisation au métier de l'enseignement, et nous leur avons proposé le contrat suivant :
Donnons-nous quelques éléments de didactique (essentiellement ceux que je viens de préciser et quelques autres points présentés ci-après) et mettons à l'épreuve ces outils théoriques dans deux contextes différents :
- celui de la licence de mathématiques : vous essayez alors d'analyser vos propres enseignements, les méthodes de vos professeurs, vos méthodes de travail, vos propres difficultés et réussites pour apprendre, comprendre, intérioriser ;
- celui des écoles, collèges et lycées où vous irez faire des observations (six demi-journées).

L'observation didactique

1- <u>Quelques compléments</u> (ce paragraphe est le condensé des compléments qui ont servi de support à l'observation didactique à laquelle nous avons invité ces étudiants.)

Pour qu'un regard extérieur sur la classe ne soit pas du voyeurisme et pour se donner le moyen de faire un pas de côté quand on observe sa propre situation d'apprentissage, on doit s'abstenir le plus possible d'analyser les enseignements qu'on observe sous la forme "c'est bon!", "c'est mauvais!" (jugements de valeurs) et s'imposer par contre des cadres qui permettent de saisir l'adéquation entre buts et moyens.

Pour cela, on peut :

* rattacher ce que l'on analyse à l'une des cinq composantes suivantes (composantes qui, dans l'action, sont bien entendu totalement imbriquées) :

Cinq composantes d'une situation d'enseignement

- l'épistémologie (l'atelier Circuit a servi de base pour donner sens à ce concept, cf compte rendu d'atelier),
- le cognitif : présentation des modes monstratif et constructiviste et explicitation de leurs logiques internes (voir ci-après),
- le psycho-affectif (voir ci-après),
- le socio-culturel (pour l'essentiel, les considérations développées dans la première partie),
- l'éthique (idem).

* adopter tour à tour, quand on observe, l'un des quatre points de vue suivants :

Quatre angles d'observation

1) Général (on note le cadre, le contexte, le contenu, les événements marquants).

2) Identification de la problématique du professeur (voir ci-après).

3) Modèles cognitifs, effets de contrat (voir ci-après).

4) Cadre psycho-affectif, socio-culturel et éthique (voir ci-après).

Identification de la problématique du professeur
Le professeur semble-t-il
- avoir choisi d'enseigner un ou plusieurs savoirs ? (concepts, méthodes, techniques, etc.)
- vouloir privilégier un aspect du savoir aux dépens des autres ou au contraire vouloir équilibrer ?
- avoir repéré un obstacle : une simple difficulté, une possibilité de blocage, de contresens ?

Comment réorganise-t-il le savoir en conséquence ?
Envoie-t-il des messages explicites/implicites pour faire partager sa problématique ?
Y a-t-il (in)cohérence entre explicite et implicite : réactions des élèves ?

Modèles cognitifs
Deux modèles, le modèle (dé)monstratif et le modèle constructiviste, assument en cohérence le paradoxe :
"pour comprendre, il faudrait savoir et pour savoir..., il faudrait avoir compris".
Ces modèles sont complémentaires car aucun n'est auto-suffisant pour tous les apprentissages, mais...leurs logiques propres sont si contradictoires qu'il est impossible de les alterner sans renégocier explicitement le contrat.
Ils ne peuvent donc engendrer de modèles médians sans fortes contradictions.

Logiques internes de ces modèles : prééminence des certitudes ou du doute.

<u>En mode monstratif</u>, pour arriver à "tout" montrer, démontrer, il faut absolument :
- éliminer les atermoiements et le doute pour privilégier les bonnes solutions,
  - → bien structurer, garder le fil de sa pensée,
  - → neutraliser les pensées divergentes,
  - → ne pas faire appel aux conceptions des élèves,
- découper et aplanir les difficultés
  - → décontextualiser, "naturaliser" le savoir.

En <u>mode constructiviste</u>, pour que le savoir apparaisse comme réponse aux questions et problèmes, il faut absolument créer du doute et accepter :
- l'implication personnelle de l'élève
  - → en cours l'élève propose, soutient, n'est pas d'accord,
- la retenue de l'opinion magistrale
  - → le prof s'interdit pendant un temps de donner son avis,
- les propositions maladroites ou erronées
  - → erreurs, maladresses ≠ stupidités, temps perdu,
- la complexité et la fragilité du "direct".

Deux éléments complémentaires et indissociables de ces modèles :

Dans la phase problématique où les élèves cherchent, discutent, conjecturent, critiquent les solutions qui leur sont proposées, l'élève n'invente pas le savoir, ne le construit pas (mystification), l'élève construit du sens à propos du savoir que le professeur va institutionnaliser.
Dans la phase d'institutionnalisation, le professeur doit introduire une part importante du savoir, "il doit faire cours", mais en lien étroit avec les éléments de réflexion apportés par les élèves pendant la phase problématique.

Aucune des deux phases isolée ne se suffit, c'est leur complémentarité qui donne force et consistance à ce dispositif d'enseignement.

L'analyse didactique des effets de contrat

Pour analyser et comprendre ce que font véritablement les élèves et leur professeur en classe, voyons le didactique comme un jeu dans lequel professeur et élèves "gagnent ou perdent" ensemble!

Convenons alors que ce qui caractérise un jeu, c'est la nature des coups permis !
Ce qui caractérise le joueur, c'est son comportement face à des choix réels !

La place du doute dans la classe : pour savoir si l'élève apprend, comprend véritablement, il faut que le professeur ait créé du doute, des occasions de choix, d'erreurs !
La discipline (matière) définit les coups théoriquement permis !
Le contrat didactique fixe la nature des coups réellement autorisés !

Principe de base de l'analyse didactique
Quand un joueur ne peut envisager qu'un seul coup (jeu de la bataille) ... il le joue sûrement, mais personne ne peut attribuer la moindre signification à sa décision puisqu'il n'a rien décidé!

L'effet Topaze

Les moutons étaient entrés dans ....
Les moutons......étaient entrés..
Les moutons-ses..........étaient.
Les moutons-se s s S.....
Mettez un S à mouton !

L'usage incontrôlé de l'effet Topaze

Comme tous les moyens détournés pour provoquer une action ou une réponse "qui ne vient pas de soi", cet effet n'est pas à proscrire s'il est conscient, à visée psychosociale (sauver une situation dramatique, redonner du courage, ne pas perdre du temps sur un point jugé mineur pour garder les énergies de la classe pour autre chose, etc.).
Mais il doit être pratiqué avec économie dans un clin d'œil complice à l'élève, à la classe, à l'amphi, car son abus fait croire à l'élève et au prof. que l'on sait ce qu'on ignore, que l'on a compris ce qui est obscur, que l'on peut passer à la suite puisqu'on "sait faire".

C'est une façon de tricher avec le savoir en transformant un jeu d'échecs en jeu de la bataille : en théorie on fait des maths (jeu d'échecs), mais par une succession d'effets Topaze (intonations, forme des questions, remarques judicieusement placées, etc.) on glisse les réponses dans les questions et on fait de l'activisme pédagogique. (Au niveau épistémologique, on est revenu au jeu de la bataille.)

Le rôle du psycho-affectif

Le contrat doit gérer l'acceptation par l'élève des changements de jeu du maître.

L'Amour paradoxal maître-élève

- Si ce maître "m'aime" : il doit me faire "réussir" et ... "échouer" aussi! (me faire buter sur des obstacles pour que j'intériorise)
- Comme je " l'aime bien", je voudrais le garder mais... il faudrait aussi que j'aspire à le quitter (le savoir, pour être intériorisé, ne doit pas rester attaché à un maître).

Au delà donc d'apparences autoritaires/cordiales, le contrat repose sur deux types d'amour très différents au niveau de la nature des savoirs qu'ils rendent possibles :

* un amour-estime au premier degré

- l'élève : "Avec ce prof. c'est facile, on réussit bien, on comprend tout, on sait tout de suite ce qu'il attend... !"
- le prof : "Ils ne peuvent pas tout comprendre ; je ne peux pas les laisser trop se tromper, je suis donc bien obligé de les guider, de leur donner ...la solution !"

* un amour-estime au deuxième degré

- l'élève : "Ce prof. est exigeant, il fait chercher, il laisse se tromper, il fait travailler sur les erreurs."
- le prof : "J'ose les placer devant des situations ouvertes, j'ose leur laisser du temps pour avoir des idées et les exprimer maladroitement, car je parie qu'ils peuvent aller bien plus loin que ce qu'ils montrent lorsqu'on les guide trop pour "gagner du temps ", je suis persuadé qu'au fond ils aspirent à être pris au sérieux même s'ils font pression pour être maternés..!"

Le concept insupportable dans un amour au premier degré : l'obstacle épistémologique

Un obstacle épistémologique
C'est un savoir
- trop "énorme" pour être simplement (dé)montré ou expliqué sans déformation de sens!
- trop "révolutionnaire" pour être directement accepté;
- qui nécessite un tel changement de point de vue que l'élève qui ne l'aborde pas comme solution d'un problème crucial, "ne peut accepter de renoncer à ce qui, en lui, s'oppose à sa compréhension" !

D'où le principe du conflit (socio)cognitif qui a pour but de faire découvrir concrètement à l'élève qu'il est en présence de deux savoirs qui se contredisent. Il va donc lui falloir (par nécessité rationnelle et non par docilité) renoncer au plus ancien, au mieux enraciné, afin de laisser le nouveau (plus exact, plus général) transformer sa façon de regarder le monde, de traiter les problèmes!

2. Première exploitation avec les étudiants de cette approche théorique des phénomènes d'enseignement : l'observation didactique d'une vidéo.

Nous avons réparti les étudiants en deux grands sous-groupes, chacun ayant à travailler sur une vidéo de classe différente. Chacun de ces deux sous-groupes s'est alors redivisé en quatre groupes d'observation spécifique pour analyser la vidéo sous l'un des quatre angles d'observation que nous avons définis précédemment.
Après avoir visionné vingt minutes de cours, chacun des huit sous-groupes a effectué pendant une heure une première analyse de son observation. Nous nous sommes alors retrouvés tous ensemble afin que ceux qui avaient observé d'une certaine façon exposent aux autres ce que leur angle d'observation leur avait permis de concevoir sur le travail de cette classe et nous soumettent les questions que cela les amenait à se poser.

Cette séquence de quatre heures nous a montré que des étudiants de licence, munis des bases théoriques que je viens de résumer, étaient capables de faire des analyses assez fines et percutantes du jeu scolaire : jeu du professeur, jeu de l'élève, jeu des élèves.
D'une certaine façon, on peut dire que, ne se sentant pas directement impliqués en tant que professeurs et "sortant d'en prendre" en tant qu'élèves, des étudiants acceptent beaucoup plus facilement que des professeurs chevronnés de jeter un regard froid sur la réalité mathématique du jeu didactique qui se déroule dans une classe.

A l'issue de ces analyses de vidéo, nous avons épinglé quelques-unes des pathologies majeures d'un constructivisme mal compris :
Une analyse trop sommaire du constructivisme entraîne une confusion entre

Action ↔ Action réflexive
Prise de parole ↔ Engagement intellectuel
Manifestation de l'erreur ↔ Echec.

Raisons possibles de ces dérapages : vide épistémologique, affectif mal maîtrisé, usage incontrôlé de l'effet Topaze, refus des obstacles épistémologiques, phantasme de toute-puissance du prof. et refus du principe de réalité.

3. Deuxième exploitation de cette approche des phénomènes d'enseignement : l'observation didactique dans des classes de la maternelle à l'université.

Suite donc à ce travail, ces cinquante étudiants sont allés observer dans différentes classes ; voici le bilan de leur rapports d'observation :

- à première vue, … la plupart des cours se présentent comme … constructivistes!

Hors de l'université, très rares sont les professeurs qui font du monstratif pur, la plupart proposent des activités, posent des questions et des problèmes, les élèves parlent, … travaillent en groupes.

- par une analyse plus fine, on voit que :
Les élèves, sans cesse sollicités par les questions du professeur, réagissent moins en fonction du problème qu'il leur pose qu'en fonction de ce qu'ils espèrent être la réponse attendue : ils proposent et... le professeur trie !!!

Les professeurs ne font jamais véritablement cours, car par un jeu subtil de questions qui suppriment doute et problème, ils font dire aux élèves ce qu'ils ne leur laissent pas le temps de découvrir.

Les élèves n'engagent pas leur responsabilité, n'entrent pas dans de vrais débats, car tout passe et repasse par le professeur.

Souvent les questions spontanées et les débats des élèves en petits groupes abordent des incompréhensions et problèmes de fond ; et si... le professeur laissait mûrir la situation, certains blocages trouveraient peut-être un début de solution... mais il faut que le cours avance!

Alors le professeur

- n'entend pas la question, ou la repousse comme hors sujet,
- résout lui-même le problème ou fait appel au bon élève ou à "Topaze".

Dommage ... !

La classe est active et "réussit" presque toujours dans les temps à aller là où le professeur voulait en venir. Malgré ces manipulations répétées il règne en classe une ambiance de travail chaleureuse et confiante car une grande complicité unit l'élève à son professeur dans un amour-estime au premier degré.

Nous avons nommé ce mode très souvent observé le "pseudo-constructivisme", mode incohérent sur les plans philosophique et didactique, mais qui semble socialement bien accepté. C'est plus "une mode" qu'un modèle didactique, car sans véritable visée philosophique ni fondement cognitif, c'est ce que Rudolf Bkouche appelle l'illusion langagière ou "activisme pédagogique".

Des étudiants ont questionné des professeurs du primaire, secondaire ou du supérieur sur leurs problématiques, il leur a souvent été répondu qu'ils n'en avaient pas ... et... pas besoin ! Ils ont un programme à traiter!

Quand certains ont fait remarquer qu'en laissant plus de doute, de responsabilité aux élèves, cela pourrait... il leur a été répondu qu'on n'avait pas le temps !

Souvent ces étudiants ont conclu, eux aussi, que c'était...dommage, mais qu'on ne pouvait faire autrement!

Alors, l'ambition de pouvoir alterner à bon escient entre les modes monstratif et constructiviste sans repli frileux sur un mode intermédiaire pseudo-contructiviste, utopie folle ou réaliste ?

Cela dépend ... ; en effet, tous les étudiants qui ont observé des séquences constructivistes sans complaisance (et il y en a eu un certain nombre) constatent que c'est possible !!
C'est lent et aventureux, mais... ça marche bien mieux qu'ils ne le pensaient :

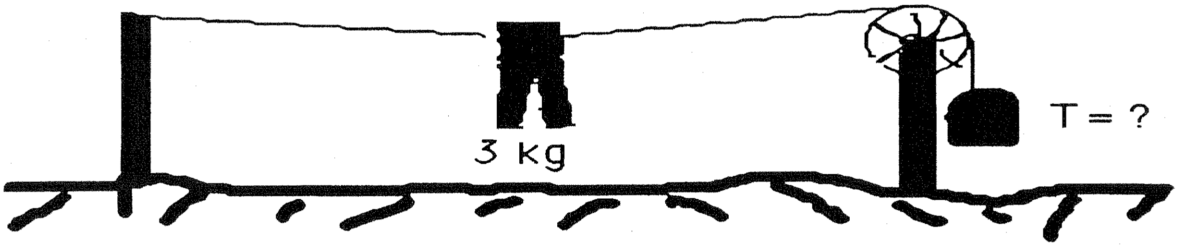
- beaucoup d'élèves, et pas seulement les bons jouent le jeu, comprennent !
- contrairement à l'autre pratique où le temps gagné se paye souvent en contresens et non sens, le temps perdu ici se retrouve là, notamment quand le professeur, au moment de l'institutionnalisation, arrive à inscrire les démarches erratiques des élèves dans la logique de son exposé magistral : quand, par exemple, il arrive à montrer aux élèves en quoi leurs fausses pistes donnent du sens aux définitions qu'ils avait initialement négligées, comment la suite de conjectures rectifiées montre l'importance des hypothèses restrictives du théorème final, comment la suite des tentatives avortées de preuves donne une raison à la complexité de la preuve finale. Preuve qui apparaît aux observateurs comme beaucoup plus signifiante et éclairante quand le professeur décide de l'effectuer lui-même à ce moment-là au lieu de chercher à tout prix à la faire dire aux élèves en ayant un recours éhonté à l'effet Topaze. (Eclairante et signifiante pour les élèves dans la mesure où elle permet au professeur de montrer comment on peut réagencer avec logique et rigueur les bribes de raisonnements qui ont effectivement été produits dans le débat, mais de façon souvent très disparate et dans un grand désordre).

Alors..., pour juger de ce qui est possible ou impossible dans une classe, à un moment donné, c'est ... à chacun... de prendre ses responsabilités !

IV) Retour sur un exemple caractéristique

Problème pratique

Ce blue-jean mouillé suspendu sur ce fil à linge pèse environ 3 kg.



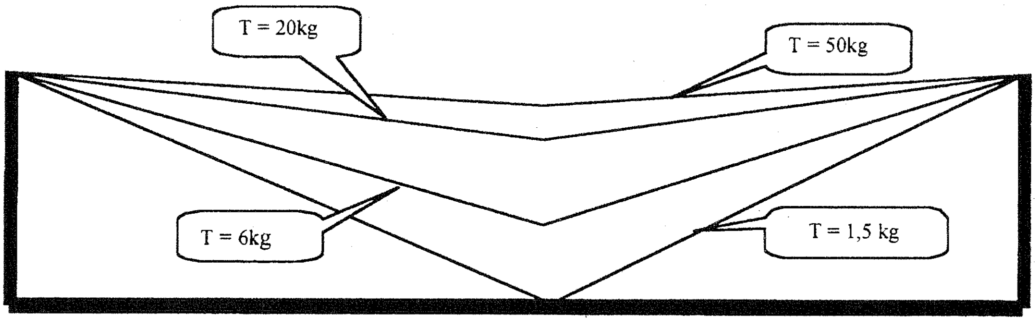
<u>Question cruciale</u> (par ex. pour choisir un fil à linge adapté)

A votre avis, <u>la tension T du fil</u> *(c'est-à-dire l'équivalent en kg du contrepoids qu'il faudrait suspendre à son extrémité pour soutenir ce blue-jean dans cette position)* ***est-elle plutôt de :*** (cochez la valeur qui vous semble la mieux adaptée - ni trop, ni trop peu -)

1,5 kg	3 kg	6 kg	20 kg	50 kg	100 kg	?
3	27	15	0	0	1	20
7	35	40	6	1	0	12

Les réponses de la première ligne sont celles des étudiants de licence et celles de la deuxième ligne les réponses de moniteurs d'un CIES (étudiants-professeurs de sciences effectuant une thèse en mathématiques, physique, chimie ou informatique et ayant un quart de service d'enseignement à l'université).

Si on réalise l'expérience précédente dans des conditions "normales" (poteaux de 2m de hauteur et distants de 4m), on obtient approximativement les positions suivantes :



En clair, pour que le jean occupe la position figurée dans le dessin initial, il faut que la tension s'approche de 50 kg et non 1,5 kg , 3 kg ou 6 kg, tensions avec lesquelles le pantalon traîne par terre.

Nous avions amené un dispositif expérimental : poteaux, fil à linge, poids marqués, etc. permettant de faire les expériences ensemble en prenant successivement T = 1, 5, 3, 6, 20, ...et il y a un léger émoi quand chacun est obligé de constater que les choses ne vont vraiment pas dans le sens généralement prévu.

La question qui nous intéresse maintenant est la suivante :

Pourquoi proposer une telle situation au lycée ou en licence, pourquoi engager un débat sur une situation de type "jean" dans une formation à l'enseignement (CIES, IREM, IUFM)?

Proposition d'institutionnalisation (au niveau d'une formation d'adultes)

Dans l'introduction de nouveaux savoirs, nous devons effectuer un choix entre rupture et continuité, i.e. entre affrontement ou évitement des "obstacles épistémologiques".

Premier choix : celui de la simplicité et de la continuité avec le connu :
"Aujourd'hui ce dont nous allons parler, c'est presque comme d'habitude..."

Deuxième choix : celui de la rupture avec ce qu'on connaît déjà, et l'affirmation d'une certaine complexité :
"Aujourd'hui ce dont nous allons parler, c'est plus compliqué mais... il y a des raisons."

Ici, le savoir visé est "le vectoriel". Pour l'introduire, deux possibilités :

Premier choix, celui de la simplicité et de la continuité avec le connu (le nombre) :

Un vecteur $\vec{V}$ est un triplet de "trois nombres" $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3)$.

Deux vecteurs $\vec{V}$, $\vec{W}$ s'additionnent simplement $\vec{V} + \vec{W} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$.

Si $\vec{F}$ représente une force, sa longueur $\| \vec{F} \|$ est le nombre positif qui mesure l'intensité de cette force, elle se calcule par la formule :

$$\|\vec{F}\| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}$$

Ce vecteur-là s'enseigne et s'apprend "bien", mais ... est-il apte à nous aider à "bien penser" les situations complexes où les nombres échouent ?

Deuxième choix : celui de la rupture avec ce qu'on connaît déjà, et l'affirmation a priori de la nécessité de la complexité.

Le vecteur doit donc apparaître comme ce nouveau concept-outil qu'il nous faut inventer, construire pour modéliser les situations où l'outil nombre échoue.

"Le jean" au service de cette intention didactique

Pour "le jean", penser les "tensions" seulement comme des nombres positifs est très "pervers" puisque cela
- nous pousse à choisir 1,5 kg , 3kg ou 6 kg (trois valeurs qui ne sont vraiment pas adaptées à la réalité !)

Deux raisonnements auxquels les nombres "poussent" :

a) $T = 1{,}5$ car $1{,}5 + 1{,}5 = 3$

b) $T < 3$ kg car, si on pend le jean avec un seul fil et que la poulie est bien graissée, la tension est égale au poids du pantalon; si maintenant on remet le deuxième fil, il vient s'ajouter au premier, la tension T diminuera, donc $T < 3$kg !!!

- détourne notre attention du paramètre crucial "angle" : pour contrer le poids du jean, **les deux tensions** (à droite et à gauche du jean) ne **s'ajoutent pas comme des nombres positifs mais comme des vecteurs,** c'est-à-dire que tout en "coopérant pour soulever le pantalon", ces tensions se neutralisent et ce d'autant plus que l'angle qu'elles forment est voisin de 180° (contrairement à la somme de deux nombres qui est toujours supérieure en valeur absolue à chacun d'entre eux lorsqu'ils "coopèrent à l'obtention d'un même résultat").

L'expérience pratique est ici édifiante car, après avoir dépassé la déception de voir le jean traîner inexorablement au sol quand on applique une tension T comparable au poids P du pantalon, on découvre qu'on a beau augmenter cette tension autant que faire se peut (par ex. en montant à plusieurs sur le contrepoids) il reste toujours une flèche et l'on découvre expérimentalement le fait crucial : pour que **Angle → 180°, il faut que Tension** → ∞

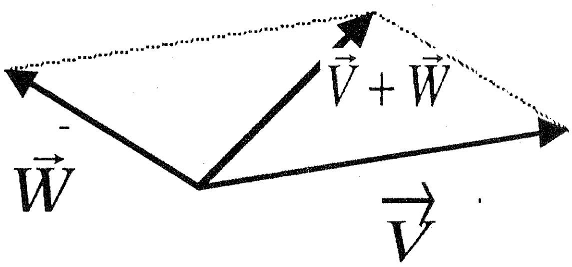
<u>Le cours magistral peut alors commencer :</u>

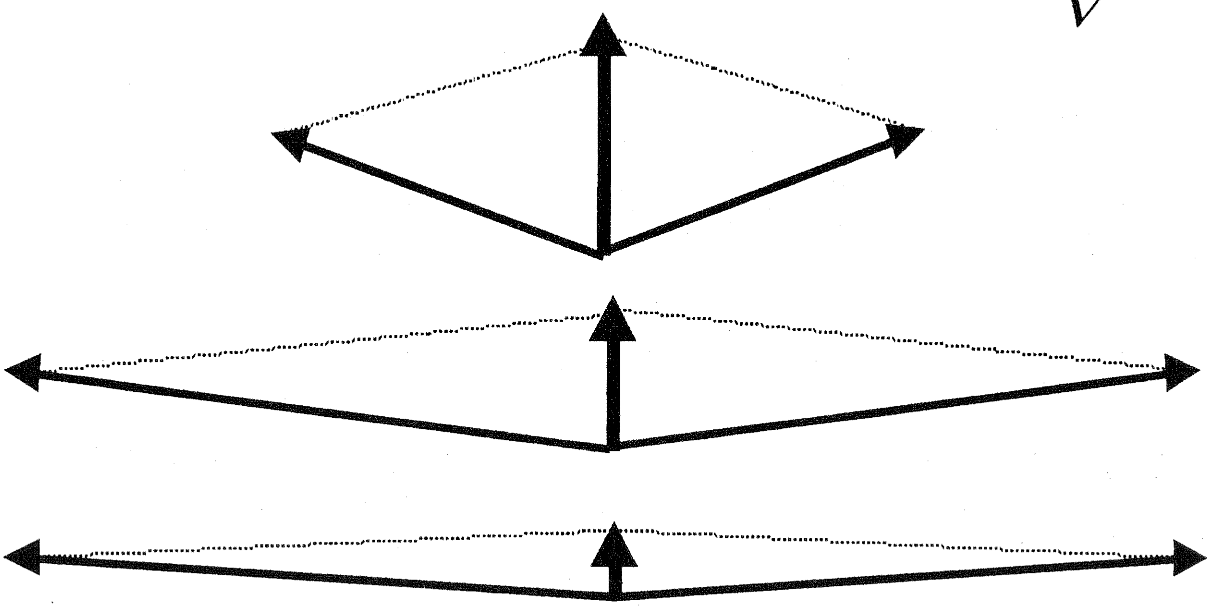
Au professeur de proposer une grandeur apte à représenter cette situation (le vecteur).

Cette grandeur complexe, l'élève ne peut l'inventer seul mais il peut maintenant en comprendre la nécessaire complexité : la situation du "jean" devrait le pousser à abandonner (momentanément) le confort des nombres positifs (qu'il connaît et qui s'ajoutent si facilement) pour ouvrir son esprit à ces grandeurs plus complexes, les vecteurs, qui tiennent compte de la direction lorsqu'on les ajoute.

Dans cette optique, on peut alors montrer que "la règle du parallélogramme" prend en compte (par sa complexité) tout ce que l'expérience du jean nous a montré.

(Une illustration de ce problème en exploitant la règle du parallélogramme sur un logiciel de géométrie est très intéressante ici, car elle montre que dès que l'angle est voisin de 180°, si on veut garder une tension finie, il faut diminuer le poids du pantalon jusqu'à ne plus rien pouvoir étendre!)

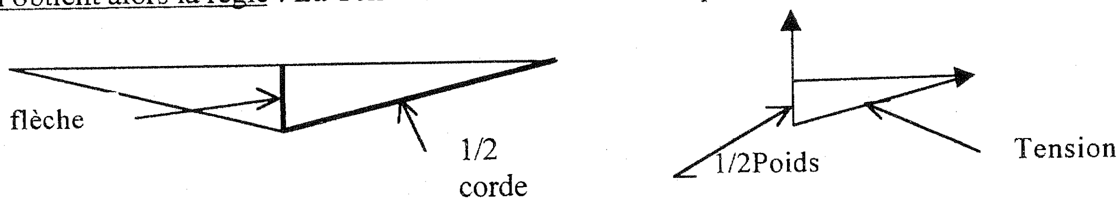




Retour de la théorie sur la pratique

Cette mathématisation de la tension par un vecteur, pertinente au niveau qualitatif, l'est aussi au niveau quantitatif, car en utilisant Thalès on peut calculer :

On obtient alors la règle : La Tension est au 1/2 Poids ce que la 1/2 Corde est à la flèche.



Si 1/2 corde = 2m , flèche = 0,05m , le rapport 1/2 corde / flèche = 40 .

Dans ce modèle, la tension devrait donc être 40 fois le 1/2poids, soit 20 fois le poids, soit environ 60 kg ! ce que l'expérience tend à confirmer.

Bilan épistémologico-didactique de cette situation

1) Au niveau épistémologique

Il est clair que dans une telle présentation, le vecteur introduit ici n'est pas réputé "plus vrai" ou "plus probant" que le nombre (un modèle ne prouve jamais une réalité, mais est plus ou moins pertinent pour prévoir, expliquer et quantifier), il est par contre d'emblée montré pertinent et complexe.

C'est grâce à son addition compliquée que le vecteur est apte à rendre compte d'une situation de vie où le bon sens et l'ancien savoir nombre échouent.

Par suite...le pseudo paradoxe des normes qui, bien que nombres positifs, ne s'additionnent pas comme on l'attend

$$\left\|\vec{V} + \vec{W}\right\| \underset{rarement=}{\leq} \left\|\vec{V}\right\| + \left\|\vec{W}\right\|$$

est ici une déconvenue nécessaire : de très grands vecteurs peuvent avoir une somme ridicule et par suite, si on n'est pas dans un repère orthonormé, les composantes d'un vecteur peuvent être 100, 1000... 10^{10} fois plus grandes que le vecteur lui- même, c'est le prix à payer pour avoir un bon outil de modélisation des situations non unidirectionnelles !

2) Au niveau didactique

Il est clair aussi que le mode utilisé ici est constructiviste :

- il se veut donc au service de la construction du sens, il n'a pas pour fonction de faire découvrir le savoir - ici le vecteur - mais d'en faire (re)découvrir la portée et la nécessaire complexité ;

- il réclame aussi que les élèves s'impliquent et "se trompent":

* le but n'est pas de faire dire des bêtises aux élèves, de les "humilier d'une certaine façon" afin d'asseoir le pouvoir du Maître ;

* c'est un moyen de faire découvrir que le "bon sens", sans être stupide, nous pousse souvent à proposer des solutions très inadaptées, et que l'explicitation et le décorticage de nos raisonnements erronés (loin d'être du temps perdu) sont souvent indispensables pour comprendre (même pour ceux qui croient avoir compris et qui, dans un certain cadre, ne se trompent pas - effet de contrat - effet Topaze).

Le double problème psychologique que doit affronter ce mode constructiviste : le trop et le trop peu de confiance en soi

- celui qui se considère comme ignorant, qui est timide, qui doute beaucoup de lui, risque de ne pas vouloir s'impliquer dans un jeu qui pourrait mettre au grand jour ses faiblesses,

- inversement, celui qui croit tout connaître, qui s'est toujours vu bon élève, peut éprouver un certain agacement à se tromper, à voir des "moins forts" avoir des idées intéressantes, peut être vexé de s'être "laissé prendre" quand il découvre qu'un savoir qui le rendait infaillible ne fait pas le poids dans des situations moins "scolaires".

Cette frustration peut le pousser à casser un jeu qui ne le met pas immédiatement à son avantage.

Dans les deux cas, on voit tout l'intérêt que l'individu aurait à dépasser l'obstacle psychologique qui l'invite à ne pas jouer, mais pour cela il faut qu'il accepte de changer en profondeur son rapport au savoir.

D'où l'importance de l'outil contrat didactique pour négocier cette situation en terme de Savoir externe $\rightarrow$ Savoir interne.

En effet, il me semble que ce n'est que dans cette perspective d'intériorisation des savoirs que chacun (maître ou élèves) peut accepter de perdre du temps avec une telle situation, accepter de frotter le réel quotidien au réel mathématique, accepter de faire intervenir des maths en cours de physique (ou de la physique en cours de math) en ne considérant plus l'autre discipline comme inférieure, comme un simple outil au service de la discipline noble, mais comme un autre mode de pensée totalement complémentaire et "nécessaire" pour forcer l'intériorisation.

Bibliographie

- Qu'est-ce que la science ? A.F. Chalmers (Le livre de poche)
- La formation de l'esprit scientifique, G. Bachelard 1938 Paris Vrin.
- A quoi sert l'école? Rudolf Bkouche, décembre 2000, Repères IREM à paraître
- "L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique", Rudolf Bkouche, octobre1992, Repères IREM n°9 (Topiques Editions)
- Enseigner autrement en DEUG A 1ère année, 1990 (Publications inter - I.R.E.M)
- Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques, 1993, S. Johsua et J.J. Dupin, (PUF)
- Débat scientifique en cours de mathématiques, M.Legrand, janvier 93, Repères IREM n°10 (Topiques Editions)
- La pulsation mathématique, rigueur et ambiguïté, la nature de l'activité mathématique, ce dont il s'agit d'instruire, René Guitart, l'Harmattan
- Mathématiques, mythe ou réalité : un point de vue éthique sur l'enseignement scientifique, M. Legrand, juillet 95, Repères IREM n°20&21 (Topiques Editions)
- La problématique des situations fondamentales M. Legrand, avril 97, Repères IREM n°27 (Topiques Editions)
- La crise de l'enseignement, un problème de qualité, M. Legrand (Aléas Editeur, 15 quai Lassagne, Lyon)
- La pureté dangereuse, B.H. Lévy (Grasset)
- La transposition didactique, Y. Chevallard (La Pensée sauvage)
- La théorie des situations, G. Brousseau (La Pensée sauvage)

COMMUNICATIONS

DIFFERENTS TYPES DE SAVOIRS EN JEU DANS L'ACTIVITE PROFESSIONNELLE DES PROFESSEURS ETUDE DU CAS D'UN JEUNE PROFESSEUR DES ECOLES DANS LA TACHE "PRESENTATION DU PROBLEME AUX ELEVES".

COMMUNICATION :
Sylvie COPPE
IUFM de Lyon - UMR GRIC Equipe COAST CNRS Lyon 2

Cette recherche ayant été menée avec C. Rolet, les parties 1 et 2 (cadre théorique et méthodologie) sont communes aux deux articles.

1 - Présentation de la recherche - Cadre théorique

Dans cette communication, nous nous proposons de donner quelques résultats concernant une recherche en cours (Coppé S., Guillot G., Rolet C., Tisseron C. (à paraître)) portant sur les savoirs en jeu dans l'activité professionnelle des professeurs enseignant les mathématiques. Pour le moment, nous avons étudié le cas d'un jeune professeur des écoles que nous avons filmé à plusieurs reprises à deux ans d'intervalle ; nous avons donc pu mettre en évidence des évolutions dans sa pratique.
Nous cherchons à décrire et à analyser les pratiques professionnelles des professeurs afin de repérer et d'étudier les savoirs professionnels mis en jeu dans leur pratique quotidienne. A plus long terme, notre but est de donner quelques fondements à des pratiques de formation améliorant l'intégration et l'articulation de ces différents types de savoirs. Il s'agit d'une étude de type macroscopique visant à dégager des grands traits qui pourront être ensuite développés de façon plus fine.
Ainsi, nous considérons que, quelle que soit la discipline enseignée, le professeur met en jeu différents types de savoir qui sont utilisables (utilisés) à différents moments de son travail comme, par exemple, en classe quand il prend des décisions, quand il règle un problème avec un élève, mais aussi hors de la classe quand il prépare son cours, quand il corrige des copies, etc. Pour le moment, nous prenons le terme savoir dans un sens très large et nous avons identifié a priori :
- des savoirs relevant des disciplines scolaires traditionnelles (français, mathématiques, etc) pour lesquels il existe un savoir savant, dont le processus de transposition a été étudié, et qui donnent lieu, en général, à un programme explicite dans le cadre de la formation et dans le cadre de la pratique,
- des savoirs relevant des didactiques de ces disciplines. Ils concernent l'enseignement et l'apprentissage de savoirs disciplinaires. Ils ont été établis récemment et il en existe des textes de référence, ou bien ils sont issus de recherches en cours. Notons que leur transposition reste un sujet de recherche (S. Johsua (1996), J. Portugais (1995), par exemple) et qu'ils n'ont pas forcément donné lieu à l'écriture d'un programme officiel,
- des savoirs faisant appel à d'autres disciplines telles que la philosophie, la psychologie, la sociologie, etc. Ils permettent de développer un discours et des savoir-faire sur la profession sans être centrés sur une discipline et sur les conditions de son exercice,
- des savoirs ou savoir-faire qui, a priori, ne relèvent d'aucune discipline reconnue comme telle et dont la transmission se fait soit par oral, soit par imitation et pour lesquels il n'existe pas ou peu d'écrits de référence.

Nous choisissons de regrouper ces deux derniers types de savoirs sous le vocable de savoirs pédagogiques, nous conformant en cela à une classification largement adoptée par certains auteurs (M. Durand (1996), C. Gauthier (1997)).
Si ces différents types de savoirs sont mis en œuvre dans la pratique professionnelle des enseignants, nous ne prétendons pas qu'ils sont seuls à piloter l'action de l'enseignant : celui-ci agit aussi avec sa propre philosophie de l'éducation, ses propres représentations et croyances.

Certains de ces savoirs sont explicites, ils ont pu être institutionnalisés, par exemple lors des cours à l'IUFM, d'autres restent implicites, mais ils sont partagés par une certaine communauté (les professeurs confirmés, les maîtres de stage, etc.). On pourrait dire qu'ils "se laissent voir". Certains sont écrits (on peut les trouver dans des ouvrages de référence), d'autres se transmettent par oral. On peut également les distinguer par leur caractère public ou privé (dans ce cas, nous incluons les représentations que se font les professeurs des mathématiques, de l'apprentissage, de l'enseignement, etc).

De plus, si on se place dans une perspective écologique (Y.Chevallard (1994)), nous pouvons voir qu'ils ont différentes origines, qu'ils vivent et se construisent dans différents "lieux". Nous prenons le terme lieu dans un sens très large qui recouvre à la fois des lieux géographiquement différents (IUFM, établissements scolaires, bibliothèques, etc.) mais également des personnes différentes (formateurs d'IUFM, maîtres de stage, autres enseignants, etc.) ou des outils différents (manuels scolaires, ouvrages généraux, logiciels, etc).
Nous faisons l'hypothèse que l'intégration, par les stagiaires ou les professeurs confirmés, de ces différents types de savoirs provenant de lieux différents et relevant pour certains de la formation théorique initiale et/ou continue et pour d'autres de la formation pratique reste à la charge de ceux-ci. Or cette intégration ne va pas de soi. La mise en œuvre de situations de classe avec une ingénierie complexe suppose des savoirs et savoir-faire, qui, s'ils ne sont pas effectifs, font obstacle à la mise en œuvre de la situation ou à sa bonne marche. Si un travail long et complexe n'est pas poursuivi au-delà des années de formation à l'IUFM, il est fort probable que les connaissances acquises ne soient pas mises en œuvre dans la pratique quotidienne de la classe, et que les maîtres reproduisent, des attitudes et des gestes des enseignants qu'ils ont connus en tant qu'élèves. Ainsi la mise en place de situations nouvelles risque d'être abandonnée.

En liaison avec cette étude théorique nous cherchons à retrouver l'expression de ces savoirs dans la pratique effective. Pour cela, nous utilisons le modèle théorique développé par Y. Chevallard (1996, 1997, 1998) à propos de "la fonction professorale", dans lequel il introduit les notions de tâches, techniques, technologies et théories. Il indique alors "Je pose alors que *toute pratique se laisse analyser de différents points de vue et de différentes façons, en un système de tâches*, c'est-à-dire d'activités relativement bien circonscrites, qui se découpent dans le flux de la pratique." (souligné par l'auteur).
Ces tâches sont accomplies au moyen d'une certaine manière de faire, ou technique : "ensemble réglé de gestes que l'on accomplit dans un certain dispositif" (Y. Chevallard (1995)). Le couple type de tâches-techniques constitue par définition, un savoir-faire. Mais un tel savoir-faire ne saurait vivre à l'état isolé : il appelle un environnement technologico-théorique ou savoir (au sens restreint), formé d'une technologie, "discours" rationnel censé justifier et rendre intelligible la technique et à son tour justifié et éclairé par une théorie. Le système de ces quatre composantes, types de tâches /technique /technologie /théorie constitue alors une organisation praxéologique ou praxéologie : "le rôle du professeur, tel que le décrivent les textes, ou tel qu'on peut l'observer sur le terrain, se laisse exprimer en termes de

types de tâches, ou plus exactement, de praxéologies" (Chevallard (1997)). Mais le système de tâches correspondant, ou plus précisément la praxéologie au sens ci-dessus n'est pas défini de façon univoque, il diffère suivant qu'on envisage par exemple ce qui est prescrit par l'autorité de tutelle, ou ce qui peut être effectivement observé, voire ce qui pourrait exister sous certaines conditions.
Nous reprenons donc notre question de départ que nous formulons ainsi. En considérant un professeur dans sa pratique professionnelle, on peut identifier un certain nombre de tâches qu'il a à effectuer et/ou qu'il effectue. On peut faire l'hypothèse qu'il emploie pour cela un certain nombre de techniques plus ou moins conscientes et/ou explicites. On peut alors se demander s'il est capable de justifier ses actions, ses prises de décision par un discours technologique voire théorique. Nous cherchons actuellement à répertorier, à décrire et à qualifier ces différentes tâches, à mettre en évidence des techniques qui les spécifient et, éventuellement, des technologies correspondantes. Nous pensons que tous ces éléments sont l'expression des différentes connaissances des enseignants.

Notons que cette définition des tâches et des techniques pose problème puisqu'en considérant une tâche on peut identifier une technique qui à son tour peut être considérée comme une tâche. Par exemple, si la tâche est "ouvrir une porte", on peut envisager la technique suivante : se diriger vers la porte, prendre la poignée, l'actionner, tirer la porte vers soi, sortir, etc". mais on peut également considérer la tâche "prendre la poignée" et étudier les techniques associées. En bref, se pose donc le problème du degré de granularité du découpage. Comme nous visons à étudier et à analyser la pratique professionnelle de professeurs du point de vue de l'intégration de différents savoirs, nous considérons qu'il faut partir de la cohérence de leurs actions et donc partir des tâches explicitées et finalisées par un objectif identifié soit par eux-mêmes (par exemple dans une fiche de préparation ou dans un entretien), soit par nous-mêmes (à partir de la fiche de préparation, ou bien à partir de ruptures repérées dans les activités des élèves).
Chaque objectif ainsi exprimé permet d'interpréter la phase correspondante comme la réalisation d'une tâche, les gestes sont alors interprétés comme des techniques pour réaliser la tâche. Nous voyons ainsi que ce qui nous est donné est le flux des actions de l'enseignant dans lequel nous repérons des gestes et nous identifions et nous décrivons des tâches. Ce découpage est fait à partir de l'identification d'une phase significative du point de vue du fonctionnement du savoir dans la classe ou du point de vue de la gestion des interrelations entre les acteurs ou entre les acteurs et le savoir.
Sur cette question, notre position nous paraît voisine de celle de A. Lerouge (1999) qui reprend la notion d'unité significative élémentaire en référence à C.S. Pierce (1978) et à J. Theureau (1992).

Enfin ce travail de repérage des tâches s'accompagne d'un travail de caractérisation possible.
Ainsi, par exemple, on peut distinguer les tâches prescrites et les tâches réalisées (J.Rogalski (2000) parle alors d'activités). Ces tâches peuvent être prescrites par l'institution (par exemple, enseigner la division au cycle 3) ou prescrites par le professeur lui-même de façon plus ou moins explicite (proposer le problème d'introduction de la division de tel manuel). Les tâches réalisées peuvent être analysées comme la mise en œuvre effective des tâches prescrites (avec un certain décalage) ou bien ce sont des tâches imprévues.
On peut aussi distinguer les tâches routinières et les tâches problématiques du point de vue de leur mise en œuvre par l'enseignant. Les tâches routinières sont effectuées par le professeur sans que celui-ci ait besoin de décrire les techniques associées qui deviennent naturalisées "ces dernières nous semblant dès lors naturelles, non apprises, depuis toujours disponibles." (Y. Chevallard (1995)). Notons que la mise en mots de ces techniques est souvent difficile

puisqu'elles sont complètement intégrées et que cela est heureux puisque nous sommes capables de faire bien plus de choses que l'on peut en dire.
Les tâches problématiques peuvent être non prévues mais pas toujours. Prenons par exemple la gestion d'une phase de validation dans une situation mathématique où la responsabilité de la preuve est à la charge des élèves. Cette tâche peut être problématique pour un enseignant inexpérimenté. Elle peut devenir routinière lorsque le problème mathématique sur lequel elle s'appuie a été expérimenté souvent par l'enseignant.
Nous pouvons enfin distinguer des tâches à caractère plus nettement didactique, car propres à la discipline enseignée (donner un travail à faire aux élèves, fournir des aides individualisées, gérer les erreurs, gérer les débats, la validation, le bilan, l'évaluation, etc.), et d'autres, à caractère plus pédagogique, concernant davantage la gestion des interactions (créer et maintenir l'attention des élèves, gérer l'espace de la classe, les relations entre élèves, les incidents critiques, etc).
Notons que ces caractérisations ne sont pas indépendantes. Une tâche prescrite peut être routinière ou bien une tâche réalisée peut être problématique, etc.

2 - Méthodologie

Comme nous l'avons dit, nous étudions la pratique quotidienne des maîtres. Nous n'intervenons donc pas sur les préparations, sur les activités proposées. La méthodologie de recueil de données que nous avons adoptée est la suivante.
Nous filmons une ou plusieurs séances de classe. La caméra est tenue à l'épaule par le chercheur qui se tient quasiment immobile au fond de la classe : les seuls déplacements sont latéraux pour éviter certains contre-jour. L'objectif est fixé sur le professeur ou bien en plan large sur la classe vue de dos. Le but est de troubler le moins possible le déroulement de la classe. L'enregistrement se fait en continu.
Nous demandons au professeur de nous donner ses fiches de préparation (s'il en fait) et tous les documents dont il se sert avec les élèves.
Nous visionnons la bande vidéo une première fois et nous faisons un premier découpage de la séance pour mettre en évidence des tâches, en commençant à décrire les techniques et en émettant des hypothèses sur les technologies associées. Nous prévoyons également un certain nombre de demandes d'explicitations pour le professeur filmé.
Quelques jours après, nous visionnons la bande vidéo avec le professeur filmé et nous avons un entretien enregistré avec lui, dans lequel nous menons un questionnement pour lui faire expliciter ses choix, ses critères de décision. Nous avons le souci de ne pas demander au professeur de se justifier. Nous arrêtons la bande et nous entamons le dialogue chaque fois qu'il veut apporter un complément d'informations ou que nous voulons une explicitation. Cet entretien nous aide à analyser ce qui s'est passé pendant la leçon en termes de tâches, techniques et technologies et à valider certaines des hypothèses faites dans la première analyse.
Tous ces documents sont décryptés. Notre étude portant sur le professeur, nous ne cherchons pas à repérer systématiquement les élèves qui interviennent dans le déroulement. Nous les notons E pour un seul élève et Es quand il y en a plusieurs. Le professeur est noté A. Dans l'entretien, l'interviewer est noté I. Les gestes ne sont décrits que dans la mesure où ils éclairent notre propos, et restent donc très globaux. Nous numérotons les items et nous les notons S pour ceux de la séance et D pour ceux de l'entretien.
Nous exploitons donc ces films à deux niveaux : par une analyse directe en fonction de notre propre analyse a priori et par l'analyse de l'entretien.

Actuellement nous avons fait et décrypté trois films portant sur une leçon de mathématiques (nous avons également filmé une séance de biologie et une séance de géographie dont nous ne parlerons pas ici).

- A filmée en 97 en CE2
Leçon sur la division
Seconde première rencontre avec la division (elle l'avait déjà fait à la séance précédente en réalisant des distributions de cartes) : problème de division mais sans utiliser la technique opératoire. Le support utilisé est la leçon d'Objectif Calcul CE2 p. 156.

- A filmée en 99 en CE1 dans une première école (notée CE1/1)
Leçon sur la multiplication
Première rencontre avec la multiplication : travail sur des collections et des groupements particuliers d'objets. Le support utilisé est la leçon d'Objectif Calcul CE1 p. 52.

- A filmée en 99 en CE1 dans une seconde école (notée CE1/2)
Leçon sur la multiplication
Suite de la séance de 99/1 : seconde première rencontre avec la multiplication : problème qui vise à faire émerger des écritures contenant fois. Le support utilisé est le Problème des quadrillages.

3 - Un exemple de découpage en tâches/techniques

Pour illustrer notre propos sur le cadre théorique nous proposons ici un exemple de découpage d'une séance en termes de tâches et techniques. Nous avons choisi d'analyser la séance de CE2 de 97.
Nous n'étudions pas ici la fiche de préparation (voir la communication de C. Rolet (à paraître)), mais celle-ci nous sert à définir les tâches que la maîtresse se prescrit.

A partir de cette fiche et de la vidéo, nous pouvons donc identifier la tâche principale (faire résoudre aux élèves un problème de division sans en utiliser la technique opératoire) qui est ensuite découpée en sous-tâches pouvant correspondre à des phases dans l'activité des élèves (mais pas toujours). Pour cette séance, nous avons mis en évidence les tâches suivantes :

- t_1 : faire résoudre la première partie du problème (trouver le nombre de portions de fromage à commander)
- t_2 : faire comparer les calculs d'Edouard avec ceux des enfants
- t_3 : faire répondre aux questions 1 et 2 par les élèves et de continuer la résolution
- t_4 : faire résoudre le problème de façon collective au tableau pour obtenir l'écriture canonique de la division : $2325 = 193 \times 12 + 9$.

Pour chacune de ces sous-tâches, nous avons repéré des techniques associées. Notons que ces tâches et techniques sont quelquefois décrites dans sa fiche de préparation mais pas toujours : par exemple, elle indique t_2 mais ne la décrit pas en terme de technique ou bien ce sont des techniques qui sont décrites (par exemple t_{11}, t_{12}, t_{13}). D'autres, sont inférées par nous à partir de l'enregistrement vidéo.

Pour t_1 les techniques associées sont :

- t_{11} : après avoir distribué le texte du problème, A se tient au bureau, elle demande aux élèves de lire le texte individuellement à voix basse. Ainsi, elle annonce (item S1) "je vous distribue un petit bout d'exercice" et en item S3 "vous le lisez silencieusement et vous y réfléchissez".

- t_{12}: A interroge un élève pour lire le problème à haute voix à toute la classe et elle conduit un questionnement collectif de nature particulière sur laquelle nous reviendrons (items S7 à S25).

- t_{13}: A aide individuellement les élèves pendant qu'ils cherchent et qu'ils répondent aux questions ou qu'ils résolvent le problème Des items S26 à S34, elle circule dans la classe pendant que les élèves cherchent le nombre de boîtes à commander de façon individuelle . A l'item S35, elle annonce "bon alors maintenant je vais vous distribuer la suite du problème" alors que les élèves protestent car ils n'ont pas fini. Elle continue donc à passer dans les rangs pour voir le travail des élèves.

Dans l'entretien, elle explique très clairement comment elle procède (items S125 à S148) : elle circule dans la classe, elle s'arrête auprès d'un élève particulier. Elle s'accroupit pour être à sa hauteur, elle jette des coups d'œil à la classe. Elle se relève quand elle constate qu'il y a trop de bruit. Elle passe alors voir un autre élève ou elle revient au tableau. Elle garde donc le contrôle de sa classe même si elle s'adresse à un élève en particulier.

Pour t_2 :

t_2: A conduit un questionnement collectif à la classe. A l'item S50, elle reprend la parole pour faire expliciter les calculs d'Edouard. Pendant la phase de travail individuel, A a repéré un élève Mathieu qui a fait une erreur attendue : il a multiplié le nombre d'élèves par 12. Elle utilise cette erreur pour indiquer aux autres ce qu'il ne fallait pas faire et donc ce qu'il fallait faire. Ceci est expliqué dans l'entretien à l'item D274 "ben j'avais déjà vu un peu en passant dans les rangs quelles étaient les erreurs donc j'avais dû repérer que ça devait être Mathieu qui avait fait ça j'en avais profité pour lui dire montre nous ce que tu as fait et les autres est-ce que vous êtes d'accord ?".

Ce moment (items S54 à S72) lui permet donc de faire une correction de ce que les élèves ont commencé à faire.

Pour t_3 :

t_3 : A utilise les techniques τ_{11}, τ_{12}. On peut penser grâce à sa fiche de préparation qu'elle voulait utiliser τ_{13} mais comme les questions 1 et 2 sont particulièrement simples, elle ne peut le faire car le fait de faire lire les questions comme elle le fait, revient à y répondre.

Pour t_4 :

- t_4: A conduit un questionnement à la classe, elle écrit au tableau les opérations, les résultats. Elle garde les résultats importants à gauche du tableau et elle écrit et elle efface dans la partie centrale. Elle questionne les élèves nominativement. Ceux-ci n'écrivent pas et ne se déplacent pas (par exemple pour venir faire des opérations au tableau). Dans l'entretien, elle indique qu'elle fait cela de façon spontanée, qu'elle ne l'avait pas prévu et puis que c'était une façon pour elle de faire avancer le temps didactique.

A partir de l'item S77 (tâches t_3 et t_4) elle prend la parole et elle écrit les réponses de la question 1 au tableau en interrogeant les élèves. Elle signale aux enfants (item S88), "j'aimerais que chacun vous vous penchiez sur la question et que vous réfléchissiez, vous avez deux minutes..." On pourrait penser qu'elle va laisser les élèves chercher (tâche t_3) mais en fait elle reprend très vite la parole (item S91) car elle a vu un élève qui se trompait. Elle terminera la séance de façon collective (jusqu'à l'item S265).

En conclusion, on peut donc voir qu'elle respecte partiellement ce qu'elle a prévu dans sa préparation en termes de tâches ou de techniques. Elle suit également son découpage temporel pour t_1 et t_2 mais à partir de t_3 elle garde la parole et ne laisse plus les enfants chercher ni individuellement ni par écrit. Nous avons remarqué que les deux tâches qui correspondent à la résolution des deux parties du problème relèvent de deux techniques différentes de gestion de classe. On peut expliquer ce choix par le fait que la première partie (trouver le nombre de portions à commander) est en fait un problème de réinvestissement ne nécessitant pas une division mais une multiplication, opération connue des élèves alors que la seconde partie correspond à un problème nouveau sur la division.
En ce qui concerne les technologies, notons que A donne peu de justifications. Elle indique souvent qu'elle procède "comme ça" sans véritablement l'avoir prévu. Un point a attiré notre attention, ce sont les techniques t_{11} et t_{12} employées pour la tâche t_1 que nous décrivons et étudions plus particulièrement ci-dessous.

4 - Les moments de présentation du problème aux élèves

Nous allons maintenant étudier plus particulièrement la tâche qui consiste à donner le problème aux élèves. Notons que nous faisons cette étude parce que nous constatons, en étudiant le cas de A, l'importance de ce moment et ses implications dans le travail des élèves et donc du professeur.
Il s'agit donc de présenter le problème aux élèves avant qu'ils le résolvent eux-mêmes. C'est un premier choix de ce professeur que de privilégier cette tâche. Nous pourrions imaginer différentes techniques : donner le texte (en les distribuant ou en le faisant distribuer) puis dire aux élèves de le résoudre ou bien donner le texte (en les distribuant ou en le faisant distribuer) puis le lire soi-même ou encore donner le texte et organiser la lecture par les élèves, etc. En fait, A a une technique bien installée que nous allons décrire.

a - Donner le problème en 97

A commence par présenter "un petit bout d'exercice". Nous pensons que la notion d'exercice renvoie à une consigne scolaire de la maîtresse. Nous interprétons cette expression "Un petit bout" comme un découpage didactique qui, d'une part, relève de la seule responsabilité de la maîtresse et qui, d'autre part, ne donne pas aux élèves l'appréhension globale du sens de l'exercice. La question d'un élève "un problème ?" et la réponse de A "juste un petit problème" nous amène à penser que cette façon de présenter les choses est d'une part, susceptible d'induire la représentation d'un problème par les élèves sur le modèle d'une consigne d'exécution. D'autre part, nous pensons également, sans avoir interrogé A sur ce point, que c'est peut-être une façon de minimiser le problème, de le rendre plus simple pour les élèves. Nous retrouvons cela en 99/1 (item S176) "bon ce que je vais faire maintenant c'est vous distribuer des petits exercices".

La technique que choisit A consiste à demander aux élèves de lire le problème individuellement, puis à choisir un élève qui lira à haute voix. En fait, elle fait bien davantage car elle met en place un questionnement particulier dans lequel, après une question ouverte, elle pose des questions fermées visant à faire émerger les données numériques (nombres et unités) et seulement elles. Nous pouvons voir, dans l'extrait suivant, dans les items de S18 à S24 que les questions portent toutes sur les données numériques qui, une fois qu'elles ont été citées, sont récapitulées à l'item S24. Du point de vue des marqueurs de langage, notons la fréquence des questions portant sur "combien". La maîtresse valide les réponses des élèves interrogés nommément, et reformule leurs réponses. Il n'y a pas de temps d'attente entre questions et réponses et les élèves sont soumis à un impératif de rapidité.

S9 - A : alors j'aimerais que quelqu'un m'explique quel est le problème
S10 - A : Philippe, tu peux nous expliquer le problème ? qu'est-ce qu'on cherche ?
E : réponse inaudible
S11 - A : alors ?
S12 - E : on va cherche le nombre de boîtes à commander.
S13 - A : oui le problème c'est qu'une école veut commander des fromages
S14 - E : *(en écho)* des fromages
S15 - A : combien ? est-ce qu'on sait combien ?
S16 - E : non
S17 - A : qu'est-ce qu'on sait par contre ? Amandine ?
S18 - E : que dans une boîte il y a 12 fromages
S19 - A : oui et ? Johan ?
S20 - E : et qu'un élève doit avoir 5 portions de fromage
S21 - A : on sait que chaque élève doit avoir 5 portions de fromage. Est-ce qu'on sait le nombre d'élèves ?
S22 - Es : oui. oui
S23 - A : combien ? chut. on lève la main
A se déplace devant le tableau
S24 - A : 465. donc 465 élèves vont avoir 5 Vache-qui-rit chacun. elles sont livrées par boîtes de 12 et vous devez trouver combien le directeur doit commander de boîtes. D'accord ? Vous avez bien compris ?
Alors vous allez prendre vos cahiers d'essai et vous allez essayer de chercher, commencer à chercher comment vous pouvez faire.

Sur le plan langagier, la structuration est visible dans l'emploi du mot "alors" qui donne le feu vert pour continuer, du mot "oui" qui sert à valider. Le langage nous montre aussi les articulations entre le mode affectif et le mode cognitif dans les demandes aux élèves ("j'aimerais que") et le manque de confiance qu'elle semble manifester vis-à-vis de leur réussite dans la recherche demandée ("vous allez essayer de chercher, commencez à chercher", "dépêchez-vous !").

Tout ceci est confirmé dans l'entretien : elle indique qu'elle ne prépare pas ses questions à l'avance et qu'elle a choisi "un élève qui lisait relativement bien" pour que les autres puissent comprendre. En fait, elle précise (item D76) qu'avant c'était elle qui lisait mais que l'inspecteur lui a conseillé de faire lire un enfant. Nous pensons donc qu'elle choisit un enfant qui lit bien car il remplace ainsi la maîtresse et fait avancer le temps didactique. On voit donc qu'elle a suivi le conseil, voire l'injonction de l'inspecteur, supérieur hiérarchique, et qu'elle a intégré cet élément dans sa technique. Elle indique ensuite très clairement ce que nous avons expliqué ci-dessus à savoir que pour elle les données importantes sont, en 97, seulement les données numériques (qui vont alors être utilisées dans des calculs) comme si la compréhension du problème ne passait que par leur traitement.

D80 - A : ben j'ai essayé de faire émerger toutes les données dont ils avaient besoin pour résoudre le problème et le comprendre
D81 - I : toutes les données. D'accord. C'est-à-dire que vous avez insisté sur quoi ?
D82 - A : le nombre d'élèves, le nombre de fromages par enfant, et puis les boîtes de 12.

Elle ne permet aux enfants de passer à une phase de recherche écrite qu'ensuite (fin de l'item S24) comme si elle pensait qu'il faut d'abord comprendre le problème en faisant émerger les données numériques avant de passer à l'écrit (et certainement aux calculs).
Nous avons donc là, nous semble-t-il, un élément de sa technologie qui se caractérise par la séparation entre compréhension et action matérielle. Les questions sont très précises et présupposent chez les élèves la compréhension du sens général du problème. La distinction objectif/tâche n'est pas faite, le problème général n'est pas le guide du questionnement. La résolution du problème est envisagée comme une succession de sous-tâches à faire. Tout est tourné vers l'action ou vers des suites d'actions à produire. Il n'y a pas d'identification de ce qui est vraiment en jeu à chaque étape par rapport à la compréhension générale de l'ensemble.
Cette technologie (ou théorie) implicite guide ses actions quand elle donne un texte de problème aux élèves et nous retrouvons cela au moment où elle distribue la seconde partie du texte et également en 99. Elle va demander aux enfants de lire ce nouveau texte mais cette fois-ci, comme les réponses aux questions ne nécessitent pas de calculs elle va faire lire et donner les réponses en même temps alors qu'elle avait prévu de laisser les élèves chercher (items S77 à S88).
Il semble que A ait comme implicite le fait que si on explique parfaitement les choses et qu'on les entend, alors on peut résoudre le problème. Elle fait comme si la verbalisation, et elle seule, déconnectée de l'action, conditionnait la compréhension. Il y a là, nous semble-t-il, une confusion entre prise d'informations et mobilisation de connaissances. Ce phénomène est assez connu et souligné par J. Julo (1995) "On a souvent voulu découper cette démarche (il s'agit de la résolution de problèmes) en opérations successives : lire l'énoncé, comprendre le problème, définir un plan, ... Pourtant ni la construction de la représentation, ni la résolution de problèmes en général, ne sont des processus linéaires. Il reste admis, au contraire, que plusieurs processus interviennent simultanément et interagissent pour faire avancer notre compréhension et notre démarche de résolution."
On peut se demander si le souci que A a de la structure du temps (importance de l'avancée du temps didactique), et de sa gestion ne contribuent pas à déposséder les élèves de la compréhension générale du problème.
Notons également que cette séparation compréhension/action devient actuellement un phénomène important dans les manuels de l'école primaire dans les activités intitulées "résolution de problèmes" (S. Coppé, R. S. Balmes (1999)).

b - Donner le problème en 99

On retrouve le même phénomène, mais c'est plutôt l'observation des dessins ou des grilles qui va être importante. On peut faire l'hypothèse qu'elle pense qu'en observant bien on va comprendre le problème.
Par exemple, en 99/2 :
S4 - A :Vous les regardez ces quadrillages chut
Elle continue de distribuer, les élèves discutent. Elle s'assoit au bureau
S5 - A : bien alors chut vous les avez regardés
S6 - Es : oui
S7 - A : c'est tous les mêmes ?
S8 - Es : non
S9 - A : bon c'est trois quadrillages différents alors j'aimerais chut qu'avec votre voisin ou votre voisine vous en choisissez que vous en choisissiez un en secret sans le dire à personne juste vous deux attendez avant de choisir et que une fois que vous l'aurez choisi vous allez me

chercher une écriture un message pour dire voilà celui que j'ai trouvé taratata pour le faire deviner aux autres enfants de la classe
S10 - E : j'ai pas bien compris
S11 - A : je réexplique t'as pas bien compris
S12 - Es : moi aussi/ moi aussi
S13 - A : alors à deux vous allez en choisir un et il va falloir que vous fassiez deviner aux autres lequel vous avez choisi
S14 - Es : ah
S15 - A : ah il faut que vous trouviez des caractéristiques de ce quadrillage.

Notons sur cet extrait, un phénomène que nous voulons pointer. Dans sa formulation, lorsqu'elle présente une tâche aux élèves, elle ne distingue pas la tâche en lien avec l'apprentissage visé (écrire un message) et la suite d'actions à réaliser qui est un moyen pour favoriser cet apprentissage (choix du quadrillage, écriture du message, validation par la reconnaissance du quadrillage).
De même en 99/1, lors du problème d'introduction, elle demande d'abord de chercher une classe parmi 1, 2 ou 3 avant de donner le critère (il doit y avoir 4 équipes de 5).

S52 - A : ben attendez j'ai pas encore posé la question. je sais pas ce que tu as pu comprendre alors voilà je voudrais que vous me disiez, sans le dire, vous le gardez dans votre tête que vous me cherchiez dans quelle classe si c'est la numéro 1 la numéro 2 ou la numéro 3
A se relève pour aller mettre les numéros 1 2 et 3 au dessous de chaque rectangle
S53 – A : dans quelle classe il y a 4 équipes de 5. dans quelle classe il y a 4 équipes de 5 attendez baissez les doigts après je demanderai. je laisse le temps à tout le monde. Stéphanie, tu réfléchis ? tu as trouvé ? dans quelle classe est-ce qu'il y a 4 équipes de 5?

Nous retrouvons encore une fois cette tâche de lecture en 99/2, quand elle présente le Jeu des carreaux colorés : elle lit la règle et la fait relire par un élève.

S281 - A : bien on va la lire ensemble cette règle je vais la lire je vais la lire Règle du jeu des carreaux colorés c'est un jeu on n'a pas encore joué à celui là alors trois joueurs un dé des grilles de six bandes de quatre ou cinq ou six carreaux de large d'accord est-ce que vous les voyez ces grilles ?
S282 - Es : oui /c'est à côté /c'est à côté
S283 - A : c'est à côté non pas celle-là oui celle-là si tu veux à chaque tour chaque joueur tire au hasard une grille donc chaque joueur aura soit une grille de
S284 - E : quatre
S285 - A : quatre carreaux de large soit une grille de
S286 - E : cinq
S287 - A : cinq carreaux de large soit une grille de
S288 - E : six
S289 - A : six carreaux de large celui qui a colorié le plus de carreaux marque un point. est-ce que c'est celui qui a colorié le plus de bandes ?
S290 - Es : non/ non/ si/ si
S291 - A : bon ben on verra on verra ensuite une partie se joue en cinq tours donc en fait ils tirent cinq fois le dé d'accord et le gagnant est celui qui marque le plus de points qui n'a pas bien compris on relit
S292 - E : non
S293 - A : on relit la règle une fois
S294 - E : non

S295 - A : ben si pour ceux qui ont pas bien compris on l'a relit allez quelqu'un d'autre va la relire

Dans l'entretien, nous lui demandons de préciser si elle ne voulait pas faire jouer les élèves plutôt que de simuler le jeu, ce qui nous semblait être une façon de comprendre la règle. Voici ce qu'elle répond, ce qui montre bien l'importance qu'elle attache à cette phase de compréhension.

D188 - A : je pensais que ça allait prendre trop de temps et euh oui ça allait prendre trop de temps euh et finalement euh je pense que la phase de réflexion pour comprendre le jeu aurait été la même que pour comprendre là finalement. je ne sais pas si je me fais bien comprendre
D189 - I : oui tout à fait
D190 - A : oui le temps passé pour comprendre la règle euh de toute façon ils en auraient eu besoin pour jouer également donc

Elle souligne encore une fois cette importance de la lecture dans l'entretien de 99/1.

D389 - I : vous dites très souvent vous lisez dans votre tête euh alors ça c'est quelque chose que vous faites visiblement
D390 - A : tout le temps oui ils lisent une fois dans leur tête on lit ensemble soit moi soit j'en fais lire un parce que il y en a qui ne lisent pas euh pas bien et si on le lit pas ensemble ils sauront pas quoi

En conclusion, nous pensons que ce professeur a des techniques relativement installées, quasi routinières et la technologie qui leur est associée est composée soit d'arguments qui paraissent complètement naturels (il faut comprendre le problème avant d'agir), qui ne sont pas remis en cause, soit d'arguments d'autorité comme le conseil de l'inspecteur (il faut faire lire le texte du problème par les élèves) ou comme dans les évaluations de CE1 ou autres références institutionnelles ("oui ben je pense qu'au CE1 même pour les évaluations par exemple les problèmes ils lisent une fois tout seuls et on lit une fois ensemble" (item D394)).

5 - Conclusion

Nous avons voulu montrer d'une part, un exemple de découpage d'une séance de classe en terme de tâches/ techniques/ technologie/théorie et d'autre part nous avons étudié une tâche particulière "donner le problème aux élèves".
En ce qui concerne le premier point, il nous semble que ce découpage a permis de décrire des tâches et des techniques et de montrer que ce qui pouvait paraître une même tâche était réalisée avec des techniques différentes. Nous avons également montré que les éléments technologiques sont peu évoqués. Enfin cela nous a permis de mettre en évidence une tâche qui paraît très importante pour la maîtresse et qui a des conséquences importantes sur la résolution des problèmes et donc sur les apprentissages.
En étudiant l'évolution de A, nous montrons ce qui relève d'une permanence, d'une affirmation des techniques employées pour réaliser cette tâche. Le professeur emploie un jeu de questions/réponses linéaire et fermé visant d'une part, à paraphraser le texte pour faire comprendre le problème avant de passer à la résolution et d'autre part, à faire dégager par les élèves, a priori, les données (numériques ou non) pertinentes des problèmes.

Plus généralement, en ce qui concerne les savoirs du professeur, il nous semble que les savoirs disciplinaires et didactiques sont utilisés pour repérer certains aspects à prendre en compte du point de vue pédagogique, mais apparemment peu pour analyser les situations et leurs effets. Sur le plan disciplinaire, ce professeur considère qu'il n'a pas de problème, il "se fait confiance" (même si, de fait, cela a des répercussions non négligeables).
Sur le plan didactique, il lui reste de la formation des savoirs relativement généraux, qui donnent un cadre large de pensée : le savoir le plus ancré concerne le principe du repérage et le traitement de certaines erreurs, ce qui rejoint aussi sa philosophie de l'éducation. Sur le plan pédagogique, elle a acquis, grâce à l'expérience et à des conseils de personnes du terrain, des techniques (non explicitées dans la préparation) permettant un bon déroulement de la classe ; la technologie associée est alors souvent relative à l'efficacité dans la conduite de classe. Par là même, nous nous demandons si cette expertise ne fait pas en quelque sorte écran à un réel questionnement sur les savoirs disciplinaires et didactiques, aussi bien dans les moments de planification que dans les moments de bilan.
Enfin, cette étude de cas nous a permis d'approfondir les outils théoriques, de dégager des questions et des pistes de recherche visant à approfondir certains points et à diversifier les regards sur la pratique professionnelle.

Bibliographie

CHEVALLARD Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques.* Vol. 12/1 p.73-112. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.
CHEVALLARD Y. (1995). La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. *Actes de la VIIIe Ecole d'été de didactique des mathématiques. Saint Sauves en Auvergne.* pp. 83-122 : IREM de Clermont-Ferrand.
CHEVALLARD Y (1997). Familière et problématique, la figure du professeur *Recherches en didactique des mathématiques* Vol 17/3 p. 17-54. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.
CHEVALLARD Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Actes de l'Université d'été.* La Rochelle juillet 1998 : IREM de Clermont Ferrand.
COPPE S. BALMES R. S. (1999). Les activités d'aide à la résolution de problèmes en cycle 3. *Grand N n° 63.* IREM de Grenoble.
COPPE S., HOUDEMENT C. (2000). Les activités de résolution de problèmes à l'école primaire. *Actes du colloque de la COPIRELEM Limoges 3, 4, 5 Mai 1999. IREM de Limoges.*
COPPE S., GUILLOT G., ROLET C.,TISSERON C. (à paraître). Différents types de savoir en jeu dans l'activité professionnelle des professeurs. Une étude de cas. Rapport INRP dans le cadre d'une recherche sur la polyvalence des maîtres.
DURAND M. (1996). *L'enseignement en milieu scolaire.* Paris : P.U.F.
GAUTHIER C. (Ed.) (1997). *Pour une Théorie de la pédagogie. Recherches contemporaines sur le savoir des enseignants.* Montréal : De Boeck Université.
JOHSUA S. (1996). Le concept de transposition didactique n'est-il propre qu'aux mathématiques ? In C. Raisky, M. Caillot (Eds.). *Au-delà des didactiques, le didactique. Débats autour des concepts fédérateurs.* De Bœck Université.
JULO J. (1995). *Répresentation des problèmes et réussite en mathématiques.* P.U.R.
LEROUGE A. (1999). Logique didactique et logique d'acteur dans l'analyse d'une séance de mathématiques, *Xème Ecole d'été de didactique des mathématiques, Actes*, IUFM de Caen.
PORTUGAIS J. (1995). *Didactique des mathématiques et formation des enseignants.* Peter Lang.
ROGALSKI J. (2000). Approche de psychologie ergonomique des pratiques de l'enseignant. *Actes du colloque de la COPIRELEM. Limoges 1999.* IREM de Limoges.
ROLET C. (à paraître). Différents types de savoir en jeu dans l'activité professionnelle des professeurs. Etude du cas d'un jeune professeur des écoles dans la tâche "préparation d'une séance". *Actes du colloque de la COPIRELEM. Chamonix 2000.*
THEUREAU J. (1992). Le cours d'action : analyse sémio-logique. Essai d'une anthropologie cognitive située. Berne : Peter Lang.

Manuels
M. L. PELTIER, D. VERGNES, C. CLAVIE (1998). Le Nouvel Objectif Calcul CE1. Hatier.
M. L. PELTIER, D. VERGNES, C. CLAVIE (1995). Le Nouvel Objectif Calcul CE2. Hatier.

PRATIQUES DE CALCUL MENTAL, PRODUCTION COLLECTIVE D'ECRITS MATHEMATIQUES ET RESOLUTION DE PROBLEMES NUMERIQUES A L'ECOLE ELEMENTAIRE ET AU DEBUT DU COLLEGE

COMMUNICATION
D. BUTLEN, M. PEZARD,
IUFM de CRETEIL, équipe DIDIREM

Introduction

La recherche présentée ici porte sur les liens entre les habiletés calculatoires, la construction de représentations d'un problème numérique et la résolution de celui-ci chez des élèves de la fin de l'école élémentaire et du début du collège.
Dans ce but, nous étudions l'impact d'une pratique régulière de calcul mental sur la résolution de problèmes. Nous avons choisi cette entrée car nous admettons que le calcul mental est un champ d'expérience pour la résolution de problèmes numériques. En effet, la pratique du calcul mental accroît les habiletés calculatoires des élèves ; elle renforce leurs connaissances des propriétés des nombres et des opérations et les rend plus disponibles. De plus, une pratique régulière de calcul mental développe les capacités d'initiative des élèves ; elle leur permet de ne pas recourir immédiatement aux algorithmes écrits, parfois coûteux, mais au contraire d'explorer rapidement, par différents tâtonnements ou essais, diverses voies de résolution d'un problème numérique.
Notre travail s'inscrit dans le cadre de la didactique des mathématiques. Il étudie dans quelle mesure et sous quelles conditions une pratique régulière de calcul mental aide à la résolution de problèmes numériques. *Pour cela, nous construisons deux scénarios faisant intervenir plusieurs variables liées à la gestion de la classe, aux contenus mathématiques, aux différents niveaux scolaires (fin de l'école élémentaire et début du collège) et au temps d'expérimentation.*

Dans un premier temps, nous testons un dispositif expérimental minimal caractérisé par une simple pratique régulière de calcul mental (calculs mentaux, résolutions mentales de problèmes). Nous ne le décrirons pas ici ; nous renvoyons le lecteur à [11] (Butlen D. et Pézard M. 1996)
Dans un second temps, nous étudions des conditions permettant d'améliorer les résultats précédents en testant un dispositif d'enseignement intégrant le premier et présentant deux nouvelles composantes : une explicitation régulière, par le professeur, des méthodes rencontrées en mathématiques ; un recours à la production d'écrits collectifs. Cette production collective d'écrits est supposée favoriser une distanciation de l'élève par rapport à l'action et au contexte de l'apprentissage, une explicitation, par l'élève, des notions et méthodes fréquentées et plus généralement une décontextualisation de celles-ci. Or nous supposons que cette dernière favorise la résolution de problèmes en général.

Dans une première partie, nous présentons le cadre général de la recherche et notre problématique. Nous exposons ensuite la méthodologie et les principaux résultats. Nous concluons en montrant l'intérêt de notre ingénierie pour certains élèves en difficulté en mathématiques.

Problématique et cadre théorique de la recherche

Notre recherche s'inscrit prioritairement dans le cadre théorique de la didactique des mathématiques, tout en s'appuyant sur certains travaux de sociolinguistique et de psychologie cognitive.

1. Une recherche s'inscrivant dans la continuité de certains travaux de didactique des mathématiques

Nous prenons en compte les résultats des travaux sur le "méta", en particulier ceux d'A. Robert et de J. Robinet [38], ceux des travaux sur les élèves en difficulté (M.J. Perrin [33], D. Butlen et M. Pézard [9]) et ceux des travaux sur la mémoire didactique (J. Centeno , G. Brousseau [13]).

2. Une prise en compte des travaux de sociolinguistique sur le rapport au savoir, sur les liens entre langage et rapport au savoir

Notre recherche s'inspire , en la particularisant, de l'idée de "bilan de savoir " exploitée par B. Charlot, E. Bautier et J.Y. Rochex dans [14]. Toutefois nous ne l'utilisons pas seulement comme outil de diagnostic mais comme élément moteur de notre dispositif d'enseignement.

Nous reprenons, en les adaptant au domaine de l'enseignement des mathématiques, les notions de rapport au savoir définies par E. Bautier, B. Charlot et J.Y. Rochex dans [14], [2] et [3]. Nous pensons notamment que le rapport au savoir construit par les élèves en mathématiques relève plutôt d'un processus dialectique entre rapport identitaire et rapport épistémique. Nous développons cette idée dans un article à paraître dans RDM [12] en nous appuyant sur deux types d'arguments : d'une part la nature même des concepts mathématiques et d'autre part les étapes possibles de la conceptualisation en mathématiques. En effet le caractère à la fois outil et objet des concepts ne permet pas de distinguer aussi nettement le rapport identitaire lié à l'expérience et donc à l'aspect utilitaire du savoir, du rapport épistémique lié au savoir en tant qu'objet.

Nous reprenons aussi l'idée de processus d'objectivation du savoir en proposant une situation spécifique qui permette à l'élève de prendre de la distance par rapport à l'action et au contexte de l'apprentissage. Nous appuyant sur l'idée qu'un rapport épistémique au savoir se construit à travers l'écrit, nous proposons aux élèves de produire collectivement un texte écrit faisant le bilan des savoirs mathématiques fréquentés.

3. Une recherche s'appuyant sur certains travaux de psychologie cognitive portant sur les systèmes mnésiques et sur les représentations de problèmes

Dans l'interprétation de nos résultats, nous nous appuyons sur certains travaux, en particulier ceux de J.F. Richard [35], de M. Fayol [20] et de J. Julo [27] sur la représentation des problèmes. Nous retenons notamment le modèle de fonctionnement de l'espace mental se traduisant par l'équation : ET = ES + EO
ET : espace de traitement des données
ES : espace de stockage des données et de construction de la représentation associée à un problème.
EO : espace requis par les opérations.

Nous retenons également la définition de la représentation d'un problème proposée par J.F. Richard dans Psychologie Française n°29 : " *un problème est défini par trois catégories d'éléments : la situation initiale, la situation terminale ou but à atteindre, les transformations (matérielles ou symboliques) permises pour y parvenir. La représentation du problème est l'interprétation que le sujet se donne de ces différents éléments.* "

Des travaux de J. Julo, nous retenons les trois processus [27] qui lui paraissent importants dans la construction de représentations particularisées de problèmes : le processus d'interprétation et de sélection, le processus de structuration et le processus d'opérationnalisation.
Le processus d'interprétation conduit le sujet à sélectionner certaines informations pertinentes du point de vue de la tâche à réaliser et à les décoder. Ce décodage passe par une interprétation du " contexte sémantique "[1]
L'analyse du processus de structuration amène J. Julo à évoquer la notion de " schéma de problèmes ". Les problèmes que l'élève rencontre sont mémorisés en tant que connaissances spécifiques et intégrés comme telles à sa structure cognitive.
Le processus d'opérationnalisation *«est celui qui permet le passage à l'action, qu'il s'agisse d'une action effective (commencer des calculs, faire un dessin, tâtonner...) ou d'une action mentale (faire des déductions...) »* . Ce processus se caractérise par la mise en œuvre de connaissances opératoires issues de l'expérience du sujet sur la résolution de problèmes.

J. Julo évoque deux cas permettant de mieux comprendre comment l'élève élabore des procédures de résolution. Le premier cas est celui de la mobilisation " d'un prototype de problème ". Le second cas est celui des problèmes dans lesquels l'élève peut agir, faire des essais, tâtonner. L'étude de ce cas l'amène à préciser la notion d'heuristique : " *il s'agit de connaissances propres à la résolution de problèmes qui ne conduisent pas directement à la solution d'un problème donné mais qui augmentent la probabilité de découvrir celle-ci* ". Il les définit aussi comme des règles d'action qui orientent la recherche dans une direction ou dans une autre.

[1]Contexte sémantique : ensemble très vaste d'éléments de nature différentes dont certaines variations peuvent faciliter ou perturber la mise en place de la représentation du problème.

D'après J. Julo, le processus de structuration et les connaissances spécifiques que sont les schémas de problèmes pourraient avoir un rôle important dans le passage à une représentation opérationnelle.

Pour conclure, notre recherche comporte donc la construction et l'expérimentation de deux scénarios d'enseignement, l'analyse des données et l'interprétation des résultats selon deux dimensions : d'une part, la nature des écrits produits par les élèves et leurs effets sur le processus de conceptualisation ; d'autre part, l'étude de conditions (pratique régulière de calcul mental, production d'écrits collectifs, explicitations de méthodes) permettant d'aider à la résolution de problèmes.

Méthodologie

1. Description des scénarios d'enseignement, des publics testés et des modalités d'évaluation

Rappelons que nous ne décrivons ici que le second scénario, celui faisant intervenir, en plus d'une pratique régulière de calcul mental, une production d'écrits mathématiques collectifs résumant ce qui a été fait et appris en classe dans le domaine numérique et une explicitation orale, régulière, par le professeur, des méthodes rencontrées.

Nous avons diversifié le public de notre expérimentation sur trois niveaux de classe : une classe de CM2 (Melun, 77), une classe de sixième (collège de Maisons-Alfort, 94) et une classe de collège suivie pendant deux ans (en sixième et cinquième, collège de Vanves, 92). Les élèves testés sont souvent en difficulté en mathématiques : la classe de sixième de Maisons-Alfort est une classe faible ; la classe de sixième, suivie en cinquième, est la plus faible du collège de Vanves.

Les activités régulières de calcul mental

La classe de CM2 pratique régulièrement, toute l'année, du calcul mental, sous deux formes : d'une part des activités brèves et régulières (5 à 10 minutes tous les jours) ; d'autre part, des activités plus soutenues (environ trente minutes, une fois par semaine) au cours desquelles, il y a notamment une explicitation des différentes procédures utilisées ou susceptibles de l'être (voir annexe 1).
Les professeurs des deux classes de sixième et de la classe de cinquième consacrent, tout au long de l'année, 1 heure 30 sur trois semaines au calcul mental se découpant dans l'ordre de la façon suivante : trois séances de 10 minutes, une séance plus importante de quinze à vingt minutes de bilan, une séance de 45 à 50 minutes de production collective d'écrits.

La situation de production d'un écrit collectif

Tous les deux semaines en CM2, toutes les trois semaines dans les classes de collège, nous avons mis en place une situation spécifique de "bilan et production d'un écrit collectif", organisée ainsi : deux élèves de la classe doivent, en dehors du temps scolaire, rédiger un texte de quelques lignes (entre 5 et 10 lignes) résumant tout ce qui a été appris d'important en calcul mental depuis la séance précédente et notamment ce qu'il est utile de retenir de ces activités pour résoudre des problèmes numériques.

La consigne donnée aux élèves est la suivante : *"En 10 lignes maximum, vous rédigez un texte résumant tout ce qui a été appris depuis la dernière séance pendant les activités de calcul mental et de résolution mentale de problèmes ; vous préciserez si ce que vous avez appris lors de ces activités vous a été utile dans d'autres activités."*

Cette consigne a fait l'objet d'explicitations orales renouvelées à chaque séance (du moins au début) permettant de clarifier l'attente du professeur.

Le texte, écrit au tableau ou sur une feuille lisible par tous, est soumis au débat de l'ensemble de la classe pendant vingt à trente minutes au CM2, trente à quarante minutes au collège. Il est éventuellement amélioré collectivement puis adopté par la classe. Il est ensuite recopié dans un classeur (individuel mais aussi collectif) ; chaque élève peut ainsi y avoir accès. L'ensemble de ces textes constitue une mémoire collective écrite du travail effectué par les élèves dans le domaine numérique. Ils explicitent ainsi ce qu'ils jugent collectivement important de retenir des activités pratiquées.

Cette situation a un double but de diagnostic et d'apprentissage.
D'un point de vue de diagnostic, nous pensons avoir ainsi accès à ce que les élèves retiennent des activités de calcul mental faites en classe, à ce qui est important pour eux, et dans une certaine mesure, à certaines de leurs conceptions des nombres et des propriétés des opérations. Nous pensons recueillir des indices sur le niveau de disponibilité de ces connaissances ainsi que des indications sur certains réinvestissements d'une pratique régulière de calcul mental dans la résolution mentale et écrite de problèmes.
Du point de vue de l'apprentissage, nous admettons que ces séances où les élèves doivent produire un écrit collectif leur permettent de prendre du recul par rapport aux méthodes mises en œuvre, de les dépersonnaliser, de les décontextualiser et donc de mieux se les approprier.

Afin de mieux mesurer les effets de notre ingénierie et de préciser l'apport des activités de calcul mental et de production d'écrits collectifs à la résolution de problèmes, nous avons recueilli, en fin d'année, des textes individuels de bilan dans les classes entraînées et dans des classes témoins (2 classes de CM2, de sixième et de cinquième). D'après les enseignants, ces dernières sont constituées, dans l'ensemble, d'élèves ne présentant pas de difficultés particulières.

Les élèves des classes entraînées et des classes témoins de CM2 et de sixième doivent écrire en fin d'année (mois de juin) un texte individuel correspondant à la consigne ci-dessous :

"Vous devez écrire un texte résumant tout ce que vous avez appris d'important cette année pour résoudre des problèmes, tout ce qu'il faut retenir, utiliser, faire, pour savoir résoudre des problèmes où interviennent des nombres.
Le texte ne doit pas être trop long. Il doit tenir sur une feuille."

Pour les élèves de cinquième, la consigne est légèrement différente :
"Ecris tout ce qui te semble important de retenir à propos de ce que tu as appris cette année en calcul mental et plus généralement ce qui te sert dans la résolution de problèmes."

2. Méthodologie adoptée pour analyser les différentes productions des élèves

Pour analyser les productions des élèves, nous avons adopté deux grilles complémentaires de lecture. Le premier type de grille permet une analyse des textes collectifs et individuels produits par les élèves des classes entraînées et témoins centrée sur la place prise par les différents types d'énoncés mathématiques ou de méthodes.
Le second type de grille nous permet d'affiner cette analyse en nous intéressant plus particulièrement à un type d'énoncé : l'énoncé intermédiaire entre l'énoncé formel et l'exemple seul.
Pour mener ces deux analyses, nous avons découpé les textes des élèves en unités significatives : nous entendons par unité significative une partie de texte ayant un sens en elle-même indépendamment des autres ; elle peut comporter plusieurs mots, une ou plusieurs phrases.

Dans un premier temps, nous nous proposons donc d'analyser les textes collectifs en adoptant quatre points de vue, inspirés de la grille d'analyse mise au point par I. Tenaud et A. Robert (cf. I. Tenaud [44]) : la présence ou non d'énoncés mathématiques, la présence ou non d'énoncés de méthodes, la description du contexte de la situation d'apprentissage (énoncé de la consigne ou de la tâche à effectuer) et éventuellement de sa finalité (cf. annexe n°2).

Chaque type d'énoncé est analysé selon son degré de contextualisation. Pour les énoncés mathématiques, nous avons distingué trois niveaux : l'énoncé formel (théorème, définition, propriété, règle de calcul...), l'énoncé formulé à partir d'un exemple, et l'exemple (ou le contre-exemple) seul sans énoncé de règle généralisante.

Pour les énoncés de méthodes, nous avons distingué quatre niveaux : l'énoncé de méthodes très générales non liées à un contenu mathématique, l'énoncé de méthodes faisant référence à un contenu mathématique assez général, l'énoncé de méthodes décontextualisées, attachées à un contenu mathématique précis et explicité, et enfin l'énoncé d'exemples de procédures ou de techniques de calculs contextualisées.
Le tableau ci-dessous présente pour chaque niveau un exemple d'énoncé.

Niveau de contextualisation des énoncés de méthodes		Exemple d'énoncé
méta 1	Enoncé de méthodes très générales non liées à un contenu mathématique	" *c'est utile de connaître plusieurs techniques de calcul pour ne pas être en difficulté*" ou bien " *il faut expliquer nos erreurs pour ne pas les refaire ou pour éviter que d'autres les refassent* "
méta 2	Enoncé de règles ou de méthodes faisant référence à un contenu assez général	" *pour faire une opération juste, il faut chercher l'ordre de grandeur* " ou bien " *quand l'opération est trop compliquée, il faut remplacer les nombres difficiles par des nombres simples* "
méta 3	Enoncé de règles ou de méthodes décontextualisées mais attachées à un contenu mathématique précis	*nous avons remarqué que quand on multiplie un nombre par 0,5 ; on le divise par 2"* ou bien, à propos de la règle des zéros : "*dans notre tête, mentalement, nous nous sommes dit que l'exposant indiquait de combien de rangs vers la droite, on déplaçait la virgule*"
méta 4	Enoncé d'exemples ou de procédures ou de techniques de calcul contextualisés ou de démarches de résolution	$1{,}5 \times 10^4 = 15000$" Ou bien : "*Nous multiplions* 42×56 $42 \times 50 = 2100$ $42 \times 6 = 252$ $2100 + 252 = 2352$"

Nous voyons dans les exemples ci-dessus qu'un même énoncé peut être considéré à la fois d'un point de vue mathématique et d'un point de vue méthodologique. Dans le premier cas, nous nous intéressons à l'aspect objet de la notion concernée ; dans le second cas, à l'aspect outil.

Pour l'analyse des bilans individuels, nous avons adopté des critères d'analyse légèrement différents des précédents, mais prenant toujours en compte le niveau de contextualisation.

Dans un second temps, nous affinons notre analyse des énoncés mathématiques et de méthodes en nous intéressant plus particulièrement aux énoncés intermédiaires entre l'énoncé formel et l'exemple seul. Pour cela, nous avons défini une nouvelle classification qui nous permet de distinguer six niveaux de formalisation : les exemples mathématiques (E1) ou de méthodes (E2) illustrant une action ou une consigne, les énoncés intermédiaires (niveau 3 à 5) et enfin les énoncés mathématiques ou de méthodes formels (E6) ainsi que les énoncés formels décrivant un outil heuristique (H6).

Nous regroupons six types d'énoncés intermédiaires allant des énoncés les plus contextualisés comme l'exemple mathématique ou de méthode induisant une règle à caractère général mais non formulée (E3 ou E3bis) aux énoncés mathématiques ou de méthodes illustrés par un exemple (E4) ou formulés à partir d'un exemple (E5) et aux énoncés évoquant un outil heuristique illustré par un exemple (H4) ou formulé à partir d'un exemple (H5)

Nous devons signaler une limite méthodologique : les informations recueillies sont essentiellement de caractère déclaratif. Les élèves, individuellement comme collectivement, sont

amenés à expliciter par écrit des notions et des méthodes ; ces déclarations ne sont pas forcément synonymes d'actions ou d'apprentissages. Un élève qui explicite une méthode de résolution de problèmes ne l'utilise pas forcément et inversement un élève peut l'utiliser sans l'expliciter.
De plus, le caractère déclaratif des bilans peut être renforcé par des effets de contrat : l'élève peut, par exemple, "réciter" le discours méthodologique du maître sans pour autant l'utiliser dans la réalité.
Nous considérons toutefois que ces productions nous donnent des informations, parfois incomplètes, mais toujours révélatrices des apprentissages effectués. Notons que les textes obtenus occultent parfois certaines activités, en particulier celles devenues habituelles, au profit d'activités nouvelles.

<table>
<tr><th colspan="2">Type d'énoncé</th><th>Exemple d'énoncé</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Groupe n°1

Exemples de méthodes et d'exemples mathématiques illustrant une action ou une consigne (niveaux 1 à 2)</td><td>E1
Exemple illustrant une action ou une consigne (plutôt du type méthode)</td><td>" Cette semaine, nous avons joué au compte est bon. On nous donnait quatre nombres. Il fallait essayer de s'approcher le plus possible du nombre donné (ou de l'atteindre) en faisant des additions, des multiplications, des divisions ou des soustractions . Tous les nombres devaient être utilisés une et une seule fois.
Ex : trouver un nombre (132) avec 6-16-4-32
6x16=96
96+32=128
128+4=132. "</td></tr>
<tr><td>E2
Exemple mathématique seul, illustrant une action ou une consigne</td><td>" Cette dernière semaine, nous avons donné la valeur exacte du quotient sous forme de fractions et nous l'avons encadré entre deux nombres entiers naturels puis nous avons précisé en l'encadrant entre deux nombres décimaux allant jusqu'au centième, millième, 1/10n
ex : 2857,00 8
45 xxxxx
57 357,12
10
20
4

357<357,12<2857/8<357,13<358 ".</td></tr>
<tr><td>E3
Enoncé mathématique ou de méthodes encore fortement contextualisés comme l'exemple mathématique ou de méthode induisant une règle à caractère général mais non formulée</td><td>"Pour trouver le nombre de chiffres au quotient de la division de 8657 par 39 :
je multiplie 39 par 10 : 39x10=390, comme c'est trop petit,
je multiplie 39 par 100 : 39x100=3900, comme 3900 est inférieur à 8657
mais que 39x1000=39000 est supérieur à 8657
donc il y a 3 chiffres au quotient car il est encadré par 100 et par 1000".
Ou bien : "Nous multiplions 42x56
42x50=2100
42x6 = 252
2100+252 = 2352
On a décomposé la multiplication par une addition avec un nombre exact de dizaines".</td></tr>
</table>

Groupe n°2 Enoncés intermédiaires entre l'exemple seul et l'énoncé formel (niveaux 3 à 5)	E3bis Enoncé intermédiaire entre l'exemple de méthode très contextualisé et la méthode formulée à partir d'un exemple	" Cette quinzaine, nous avons cherché 3,4 ou 5 nombres qui se suivent (consécutifs) afin que leur somme arrive à un nombre déterminé. Il suffit de faire la solution avec les N (inconnu) : N+(N+1)+(N+2)=249 3N+3=249 249-3=246 246:3=82 N=82 N+1=83 N+2=84 "
	E4 Règle mathématique ou méthode illustrée par un exemple	" Cette quinzaine, nous avons fait des multiplications par 25. Il fallait multiplier par 100 et diviser par 4. Ex: 22x25= ? On fait : 22x100=2200 2200/4=550. "
	E5 Règle mathématique ou méthode formulée à partir d'un exemple	" Dans notre tête, mentalement, nous nous sommes dit que l'exposant indiquait de combien de rangs vers la droite, on déplaçait la virgule ". " Là comme le multiplicateur était 104, on l'a déplacée de 4 rangs vers la droite et on a complété par deux zéros car il manque deux nombres à la partie décimale. Exemple 1,50 x 104 = 15000. "
	H4 outil heuristique illustré par un exemple	" Avant de trouver le résultat, il faut trouver un ordre de grandeur pour avoir une idée du résultat ex : 12,2 que l'on arrondit à 10 "
	H5 outil heuristique formulé à partir d'un exemple	" Pour résoudre un problème, il faut trouver le ou les nombres que l'on a besoin. Par ex : un marchand vend un chou à 10F pièce, un kg de carottes à 12F. Combien coûtent 5 choux ? Le nombre le plus important est celui du chou car il ne faut que le prix du chou pour répondre. "
Groupe n°3 Enoncés Mathématiques ou de méthodes formels	E6 Enoncé mathématique ou de méthode formel	" multiplier un nombre par des puissances de 10 : on met autant de zéros à droite du nombre que l'indique l'exposant. "
	H6 Outil heuristique énoncé formellement	" Il faut se donner un ordre de grandeur et ensuite calculer. Si on se donne un ordre de grandeur, c'est pour ne pas tomber complètement à côté du résultat. " " Le calcul en croix sert à trouver le nombre qui nous manque dans le tableau de proportionnalité. " Ou bien : " on peut faire un dessin pour s'aider "

Résultats et interprétation

1. Le statut des énoncés intermédiaires et le processus de conceptualisation

Tout d'abord, notre ingénierie favorise une prise de distance par rapport au contexte de l'apprentissage. Elle amène les élèves à dépasser le stade de l'action pour produire des énoncés mathématiques et de méthodes davantage décontextualisés. Cette décontextualisation s'accompagne d'une part plus importante prise par le débat collectif, particulièrement en CM2 et en cinquième. Nous soulignons aussi la présence, dans les textes collectifs comme dans les bilans individuels des classes entraînées, d'énoncés intermédiaires entre l'énoncé formel et l'exemple seul. Nous allons préciser ce résultat et étudier le rôle qu'un tel type d'énoncé peut jouer dans le processus de conceptualisation des notions mathématiques.

a. Emergence d'énoncés intermédiaires dans les classes entraînées

En CM2 et en cinquième, les élèves participant davantage au débat comme à l'activité de production d'écrit en général, produisent plus d'énoncés intermédiaires que ceux de sixième.
Tout se passe comme si le fait de " jouer le jeu " du débat et de la production collective amène les élèves à expliciter davantage leurs formulations, pour convaincre les autres et pour affiner leur propre pensée, voire se convaincre eux-mêmes, et donc à produire des énoncés au statut intermédiaire.

Dans les bilans individuels, la proportion d'élèves produisant des énoncés intermédiaires ou formels (niveau 3 à 6) est nettement plus importante dans les classes entraînées. L'écart entre classes entraînées et classes témoins varie de 80% (sixièmes du collège de Maisons-Alfort) à 20% pour les cinquièmes du collège de Vanves. Cet écart porte sur la présence d'énoncés intermédiaires pour les trois niveaux de classes, mais aussi sur la présence d'énoncés formels pour les classes de CM2 et sixième.
Notre ingénierie permet à davantage d'élèves de produire des énoncés mathématiques ou de méthodes témoignant d'un niveau intermédiaire de conceptualisation plutôt que des descriptions d'activités.
Nous constatons un double effet de notre ingénierie : d'une part une production plus précoce d'énoncés formels en CM2 et partiellement en sixième, d'autre part l'apparition, dès le CM2, d'énoncés intermédiaires. Ces énoncés intermédiaires sont soit des exemples génériques (énoncés comprenant une règle formalisée et un exemple), soit des exemples induisant une règle générale plus ou moins explicitée.

Notons de plus une évolution plus marquée vers plus d'énoncés s'appuyant sur un exemple générique en cinquième entraînée.

b. Le processus de conceptualisation : des étapes et des cheminements différents

Il n'y a pas de correspondance automatique entre production d'énoncé formel et compréhension

L'élève qui produit un exemple générique associé à un énoncé général dans un souci de communication, n'a pas automatiquement une compréhension plus faible du concept que celui qui produit l'énoncé formel seul. Nous pouvons être en présence d'un effet de contrat : en fonction du contexte, l'élève doit comprendre les normes à respecter : produire un énoncé formel correspondant à un savoir socialement reconnu, produire un énoncé prenant en compte l'éventuel degré de compréhension de l'interlocuteur ou bien encore produire un énoncé qui témoigne de son cheminement personnel. Le statut de l'interlocuteur est important. S'il s'agit du professeur, l'élève jugera peu utile et sans doute peu conforme d'illustrer la règle par un exemple. Par contre, s'il s'agit d'expliquer à un pair ou de s'expliquer à lui-même, il aura plus facilement recours à l'exemple.
De plus, un énoncé formel ne témoigne pas forcément d'une bonne acquisition du concept ni même de la maîtrise de la formulation utilisée ; il peut être, dans la pratique, une simple reproduction, plus ou moins fidèle, du cours du professeur. De nombreux élèves de cinquième des classes témoins produisent ainsi des énoncés qui laissent penser que la notion n'est pas complètement maîtrisée, exemple : " $a \pm (b \pm c) = a \pm b \pm c$ " ou " $a - (b - c) = a + b + c$; $a - (b + c) = a + b - c$ ".

Un exemple de cheminements différents : le cas des deux sixièmes entraînées

L'étude comparée des qualités respectives des textes individuels et collectifs des deux sixièmes entraînées met en évidence des différences concernant les apprentissages effectués dans ces deux classes considérées toutes les deux comme faibles.

Nous observons des effets pratiquement inversés sur les productions des deux sixièmes.
En effet, les textes collectifs de la sixième de Maisons-Alfort semblent privilégier les énoncés formels, alors que les textes individuels des même élèves laissent une part importante aux énoncés s'appuyant sur des exemples ayant un caractère générique plus ou moins prononcé.
Par contre, dans la sixième de Vanves, les textes collectifs accordent une place équivalente aux exemples génériques et aux énoncés formels, alors que les textes individuels laissent une place plus importante aux énoncés formels.

Nous pouvons donner plusieurs éléments d'explication à ce résultat faisant intervenir les contenus mathématiques évoqués, les pratiques des enseignants et l'importance prise par le débat et la communication entre élèves.
Les pratiques des enseignants des deux sixièmes ne sont pas identiques ; le professeur de Vanves accorde une place plus importante à un enseignement "méta". De plus, le débat collectif est plus difficile à mettre en œuvre à Maisons-Alfort qu'à Vanves ; cela a évidemment un effet sur les productions collectives des élèves. Contrairement à leurs camarades de Maisons-Alfort, dans un souci de communication, les élèves de Vanves proposent des exemples génériques dans leurs textes collectifs. Ce souci est moins fort dans les textes individuels.

Nous constatons donc un décalage dans le temps entre les deux sixièmes. A Maisons-Alfort, un texte apparemment conforme aux attentes habituelles de l'enseignant peut s'imposer, surtout s'il bénéficie d'un accord tacite des bons élèves qui reconnaissent " une bonne formulation ". Quand le débat est faible, le contrat valide les énoncés formels ; d'autant plus qu'un énoncé mathématiquement incontestable ne peut être refusé par l'enseignant même si ce dernier doute de son appropriation par tous. Seul le jeu de la communication peut à moyen terme changer les règles du contrat. L'apparition progressive puis massive d'exemples à caractère générique témoigne d'un nouveau contrat qui devrait s'accompagner d'une meilleure appropriation des notions par un plus grand nombre d'élèves.
Le faible taux d'exemples à caractère générique produits par les élèves des classes témoins nous conforte dans cette analyse.

Les élèves de la sixième, particulièrement faible, de Maisons-Alfort semblent profiter plus tardivement des conditions particulières à notre ingénierie. En effet, dans leurs productions collectives, les énoncés intermédiaires ne sont produits qu'en fin d'année, période qui est aussi à celle de l'écriture des bilans individuels. Par contre, les élèves de Vanves produisent ce type d'énoncés plus tôt dans l'année, à l'occasion des productions collectives.

c. Le statut de l'énoncé intermédiaire dans le processus de conceptualisation

L'énoncé intermédiaire peut représenter un niveau intermédiaire entre le cas particulier et la règle générale, entre l'expérience et le décontextualisé, entre la situation d'apprentissage et le concept.
Nous évoquons ici des thèmes centraux dans les théories de l'apprentissage développées par Vygotski.
Nous pouvons nous référer au processus de formation des concepts, qu'il décrit comme passage d'une structure de généralisation à une autre, pour éclairer certaines étapes du processus de conceptualisation de notions mathématiques.
En effet, nous pouvons interpréter les énoncés intermédiaires comme révélateurs d'une première généralisation de l'expérience personnelle et collective des élèves ; celle-ci se traduit, entre autres, par le passage d'un exemple seul ou d'une description d'action à un énoncé intermédiaire faisant intervenir un exemple à caractère générique. Les élèves accompagnent l'énoncé formel (ou reconstruisent cet énoncé à l'aide) d'un exemple qui ne coïncide pas forcément avec une expérience vécue. Cet exemple peut être retrouvé, mais l'analyse précise des textes nous amène à penser qu'il est plutôt reconstruit, voire inventé, par l'élève sur le moment, dans un double souci de communication et d'explicitation de sa pensée.
Bien sûr, ces exemples font écho à ceux traités en cours mais s'en différencient sur plusieurs points : contexte légèrement différent ou valeurs numériques inventées pour l'occasion...

Nous pouvons établir un parallèle entre énoncé formel et énoncé intermédiaire d'une part et ce que Vygotski définit à propos des concepts et des pseudo-concepts.
Le pseudo-concept est décrit comme un équivalent fonctionnel du concept, en apparence semblable au concept, mais qui en diffère quant au mode de généralisation et de catégorisation

dont il résulte. Ces deux niveaux de conceptualisation, bien que différents, permettent toutefois aux individus de communiquer et de se comprendre (au moins partiellement).
D'une façon un peu analogue, l'énoncé intermédiaire permet aux élèves de se comprendre, de se mettre d'accord sur une formulation ; mais il peut toutefois renvoyer individuellement à des niveaux de formalisation et de conceptualisation différents.

L'énoncé intermédiaire révèle donc un " compromis " dans la formulation mais aussi un processus de conceptualisation s'appuyant sur une dialectique entre collectif et individuel.
Devant produire un écrit pour le groupe classe, les élèves construisent des énoncés intermédiaires. L'analyse des bilans individuels des classes entraînées montre que ce type d'énoncé perdure dans les bilans individuels aux côtés d'énoncés plus formels (les exemples seuls se raréfient).
Il semble donc que l'énoncé intermédiaire, dans un premier temps résultat d'une démarche collective, témoigne ensuite d'un apprentissage individuel par un double mouvement de contextualisation et de décontextualisation. Tout se passe comme si l'appropriation des énoncés intermédiaires produits collectivement permettait aux élèves d'une part, de recontextualiser certains énoncés formels afin de leur donner du sens ; d'autre part, de généraliser leurs exemples individuels afin de les dépersonnaliser tout en autorisant des appels éventuels à l'expérience.
Nous sommes ici en présence d'une appropriation collective qui précède et induit une appropriation individuelle. Cela renvoie dans une certaine mesure aux théories développées par Vygotski mettant en valeur le caractère d'abord social et collectif de l'apprentissage.

2. Des références plus nombreuses aux pratiques de calcul mental ; vers la construction d'outils heuristiques

Signalons tout d'abord que notre ingénierie débouche sur une production plus importante, plus riche et plus décontextualisée d'énoncés de méthodes.

Dans les classes non entraînées, l'apport du calcul mental est peu explicité par les élèves et essentiellement calculatoire. Il est tout autre dans les classes où notre ingénierie a été mise en oeuvre.
L'analyse des déclarations des élèves des différents niveaux scolaires fait apparaître une graduation dans les apports du calcul mental à la résolution de problèmes.
Tout d'abord, en CM2, une pratique régulière de calcul mental débouche sur une plus grande aisance et une plus grande rapidité de traitement des opérations lors de la résolution de problèmes numériques.
En sixième, l'apport est plus riche : les techniques étant plus sûres, les élèves utilisent le calcul mental d'une part pour prévoir et contrôler leurs résultats (" *Pour moi, c'est important de trouver l'ordre de grandeur des opérations car après on peut comparer à son résultat et il faut trouver un résultat très proche de l'ordre de grandeur"),* d'autre part pour faciliter leur recherche, par exemple, en simplifiant les données numériques du problème.
Cet apport est encore plus riche en cinquième où nous décelons un changement de statut des nombres dans un énoncé de problème : l'élève peut remplacer les données numériques soit par des nombres plus simples (arrondis ou plus petits) soit par des lettres pour trouver plus facilement le raisonnement à effectuer (" *si dans des problèmes on a des chiffres difficiles, on*

peut les remplacer par des lettres ou par des nombres plus simples " ou bien " *quand il y a des nombres compliqués, on les simplifie ; après les avoir simplifiés, on cherche une méthode et lorsque l'on trouve on l'applique aux nombres compliqués* "). Les données numériques ne sont plus "figées" mais peuvent varier ; l'accès au modèle est alors plus aisé. Le calcul mental devient donc un outil de recherche lors de la résolution de problèmes.

Dans un premier temps, notre ingénierie permet donc une explicitation de la part des élèves des apports du calcul mental à la résolution de problèmes ; puis, en les amenant à dépasser les habiletés calculatoires, elle débouche sur de nouveaux apports. Grâce à une prise de distance par rapport aux données numériques et à une exploration plus aisée des relations entre ces données, la recherche du modèle se trouve facilitée. Nous pouvons dire que ce nouvel apport relève de l'heuristique dans la mesure où il aide l'élève à acquérir des stratégies de résolution de problèmes numériques.

<u>Le calcul mental, un champ d'expérience pour la résolution de problèmes numériques</u>

Le calcul mental contribue à accroître les habiletés calculatoires des élèves. Cela peut se traduire, lors de la résolution de problèmes numériques, par une meilleure maîtrise des calculs. Cela renforce aussi l'assurance et l'aisance des élèves engagés dans des calculs lors d'une résolution de problèmes. Ce dernier aspect est souligné dans les bilans individuels des élèves de la classe de CM2 entraînée. Nous retrouvons cet apport à l'état de traces dans les déclarations des élèves des classes témoins de sixième et de cinquième.

Nous allons essayer d'expliquer, en nous appuyant sur un exemple, comment le calcul mental permet d'accroître les capacités d'initiative des élèves lors de la résolution d'un problème numérique.

Le problème " des briques "[2] ci-dessous a été proposé dans la classe de sixième entraînée de Vanves, les stratégies des élèves ont pu être observées à cette occasion.

"*On empile des briques de 0,1 mètre de hauteur pour construire un mur de 2 mètres de haut. Combien de briques empile-t-on les unes sur les autres ?*"

Ce problème est en général très mal réussi quand il est posé dans un devoir écrit. La reconnaissance de l'opération à effectuer ainsi que l'obtention du résultat de l'opération sont deux obstacles importants.

Nos observations semblent montrer qu'une pratique régulière de calcul mental autorise l'élève à rechercher des procédures de résolution non standards, à faire des essais, à accepter de faire des erreurs (par exemple : " *compter combien de fois on doit ajouter 0,1 pour obtenir 2* " ou bien " *calculer en plusieurs étapes, soit le nombre de briques dans une hauteur de 1 mètre, puis de 2 mètres : "0,1 x 10 = 1 donc 20 briques", soit la hauteur de 2 briques et donc le nombre de*

[2] Cet exemple est développé dans une contribution à la brochure de la commission inter-Irem premier cycle intitulée *des mathématiques en sixième* : " le rôle du calcul mental dans la connaissance des nombres, des opérations et dans la résolution de problèmes ", Butlen D. Monfront A.M. Pézard M.

briques ; *"0,1 x 2 = 0,2 donc 20 briques"* , ou encore " *des essais de multiplication de 0,1 par divers nombres pour trouver lequel donnera 2* ").

Une pratique régulière de calcul mental permet aussi de jouer sur la taille des nombres en simplifiant les données numériques ou en les remplaçant par des lettres. Nous avons par exemple relevé les procédures suivantes : " *traduction par une expression littérale très contextualisée, les lettres évoquant les grandeurs : B x N ? = N* " ou bien " *expression du modèle par une phrase : la hauteur d'une brique multipliée par le nombre de briques est égale à la hauteur totale* " ou enfin " *transformation des nombres donnés par des nombres plus "simples" : je remplace par exemple 0,1 par 5 et 2 par 50, alors je sais le faire* ".

La pratique du calcul mental est propice à ce détour éliminant, dans un premier temps, les nombres "difficiles". En effet, pour oser négliger en début de recherche les nombres jugés compliqués, il faut que l'élève ne fasse pas du traitement de l'opération une priorité. De même, il faut que la peur d'avoir à la réaliser avec de tels nombres ne l'envahisse pas trop. Une pratique régulière de calcul mental peut donner cette disponibilité nécessaire à l'appropriation du problème.

Une pratique régulière de calcul mental permet donc à l'élève de ne pas recourir immédiatement aux algorithmes écrits, parfois coûteux, mais au contraire d'explorer rapidement différentes voies de résolution du problème. L'élève peut ainsi davantage adapter ses stratégies aux données du problème. Certaines déclarations extraites des bilans individuels le confirment comme par exemple : "*quand je fais du calcul mental, j'utilise beaucoup de façons pour trouver le résultat. Ma façon dépend beaucoup des nombres ou de la question du problème.* "

Le changement de statut des données d'un problème numérique - elles ne sont plus "figées" mais peuvent varier - contribue sans doute à l'initialisation de la notion de variable. En tout cas, cela semble important pour la construction de la représentation de certains problèmes.

L'analyse des bilans individuels des élèves des classes témoins montre qu'un enseignement méthodologique "classique"[3] ne suffit pas seul, du moins à ce niveau de scolarité, à créer un lien entre les apprentissages effectués en calcul mental et ceux relatifs à la résolution de problèmes. Les élèves évoquent des étapes de résolution indépendantes des contenus : lecture "intelligente" de l'énoncé, tri des données, recherche de l'opération, calcul, vérification en recalculant, rédaction d'une phrase réponse... Ils explicitent d'autre part certaines règles de conduite du "métier de bon élève" : bien présenter ses calculs, bien rédiger, réfléchir...

Ces attitudes et compétences sont sans doute importantes pour les apprentissages mais on peut légitimement s'interroger sur leur efficacité quand elles ne s'accompagnent pas d'outils mathématiques mobilisables lors de la résolution effective de problèmes.

Les effets de notre dispositif se situent davantage au niveau de l'activité mathématique de l'élève. Les résultats de notre seconde expérience confirment et précisent l'apport du calcul mental à la résolution de problèmes numériques. Notre ingénierie semble permettre aux élèves de dépasser les effets d'un enseignement méthodologique "classique" et leur apporter des outils de recherche

---

3 Nous entendons par enseignement méthodologique " classique ", un apprentissage des grandes étapes de résolution d'un problème, assez indépendant des contenus mathématiques ou bien l'explicitation de certaines " attitudes de bon élève ".

qui relèvent de l'heuristique. En effet, l'élève devient davantage capable d'explorer les relations entre les données d'un problème soit en utilisant des techniques proches de l'algèbre (remplacer des nombres par des lettres et écrire les relations en jeu), soit en jouant sur la taille et la nature des nombres (remplacer par des nombres plus simples, passer de D à N...).

3. Une démarche intéressante pour certains élèves en difficulté, un chemin original vers le formalisme

Rappelons que notre expérimentation s'est déroulée dans des classes plutôt faibles. La classe de cinquième entraînée était la plus faible du collège de Vanves. Les classes témoins sont jugées par leurs professeurs d'un niveau supérieur. Si, comme nous l'avons souligné précédemment, notre ingénierie permet à davantage d'élèves de produire des énoncés mathématiques ou de méthodes (intermédiaires ou formels), nous pouvons penser que des élèves plutôt faibles sont concernés.
Nous allons essayer d'affiner le profil des élèves ayant recours à des énoncés intermédiaires.

Les énoncés intermédiaires sont produits essentiellement par les “ bons élèves ” et par les élèves plutôt faibles en CM2 et cinquième. En sixième, ce sont surtout les “ bons ” élèves qui produisent les énoncés intermédiaires. A ce niveau scolaire, le faible débat, le rapport à l'écrit et les effets de contrat peuvent expliquer ce résultat. Ce sont les élèves les plus performants qui s'autorisent à produire plus d'énoncés mathématiques ou de méthodes en ayant recours partiellement au formalisme.
En cinquième, les élèves en trop grande difficulté n'ont pas assez d'une année pour dépasser les descriptions de contextes ou d'activités ; toutefois deux tiers d'entre eux produisent quelques énoncés formels.

Il semble donc que notre ingénierie crée des conditions permettant à des élèves faibles, sur une durée de deux ans, de produire des énoncés intermédiaires. Cette production s'accompagne, d'après les évaluations du professeur, de réels progrès en mathématiques. Il est évidemment difficile de dire qui des deux précède l'autre.
Ce sont surtout des élèves en difficulté moyenne qui bénéficient des conditions créées par notre expérimentation.

L'ensemble de notre dispositif d'enseignement permet à ces élèves en difficulté moyenne de produire des énoncés mathématiques plus décontextualisés mais ancrés dans leur expérience personnelle. Cette production n'aurait pas été possible pour ces élèves sans l'aide de leurs pairs et sans l'explicitation de méthodes par le professeur. La mémoire collective de la classe ainsi construite semble constituer pour chacun un ensemble d'expériences, de connaissances et de savoirs en partie décontextualisés, vécus en commun avec les autres élèves et avec le maître, partiellement codifiés dans leur mémoire personnelle ; cela leur permet d'élargir leurs possibilités de formulation mais aussi de s'approprier, au moins partiellement, certaines notions et méthodes mathématiques.

Il semble que les outils heuristiques construits lors de notre expérimentation pourraient aider les élèves de collège à s'approprier une démarche algébrique. En effet, explorer les relations entre les données d'un problème, remplacer les nombres par des lettres... sont des techniques qui seront, par la suite, utilisées en algèbre, en particulier quand il s'agit de " mettre en équation " un problème. Il semble que notre ingénierie serait efficace à un moment bien particulier du cursus et sans doute pour des élèves présentant des difficultés moyennes. En effet, elle doit précéder un enseignement d'algèbre, permettre de donner du sens à celui-ci en s'appuyant sur des exemples de transformations de procédures arithmétiques en procédures " pré-algébriques ". Mais elle ne doit pas intervenir trop tard car une démarche algébrique institutionnalisée en écraserait les effets. D'autre part, ce passage risque de s'avérer inutile pour des élèves capables de s'approprier rapidement une démarche algébrique.

De même que les énoncés intermédiaires permettent à certains élèves, notamment en difficulté, de dépasser le contexte de l'apprentissage tout en donnant du sens aux énoncés formels, les outils heuristiques décrits précédemment peuvent être interprétés comme une étape dans l'appropriation des méthodes explicitées par le professeur. Celles-ci, grâce aux expériences accumulées en calcul mental et à une prise de distance due aux écrits collectifs, se concrétisent tout en gardant un degré de généralisation suffisamment large pour être réutilisables dans des contextes voisins. Ainsi, par exemple, la phrase " *chercher l'opération* " afin de répondre à la question posée, se transforme en " *remplacer les nombres par des nombres plus simples pour trouver l'opération* ". La première reste souvent un " geste " vide de sens pour des élèves en difficulté[4], elle s'avère tout aussi inutile pour des élèves ayant déjà construit un schéma automatique de reconnaissance... Nous retrouvons un résultat analogue à celui évoqué plus haut : des démarches trop formelles ou trop générales pour des élèves plutôt faibles peuvent s'ancrer dans des expériences individuelles tout en gardant un certain degré de généralisation. Ces démarches ne seraient pas possibles pour ces élèves sans l'aide de leurs pairs et sans l'explicitation de méthodes par le professeur. La mémoire collective de la classe ainsi construite semble constituer pour chaque élève un ensemble d'expériences, de règles d'action partiellement décontextualisées, qui lui donnent de nouvelles possibilités de formulation et d'action. La réflexion collective permet ainsi une appropriation individuelle des méthodes explicitées par l'enseignant ou par les élèves.

Ces étapes intermédiaires dans la conceptualisation de notions mathématiques, comme dans la construction d'outils heuristiques ou dans l'acquisition et la mise en œuvre de démarches " pré-algébriques ", peuvent constituer des étapes originales, nécessaires pour certains élèves en difficulté. Ce cheminement n'est possible que si certaines contraintes institutionnelles et cognitives sont dépassées. En particulier, cette construction demande du temps ; notre recherche montre que les résultats ne deviennent vraiment significatifs que dans la classe de cinquième, soit donc au bout de deux années de pratique régulière de calcul mental et de production collective d'écrits mathématiques.

[4] M.J. Perrin a relevé ce phénomène ; en particulier, le manque de capitalisation et le manque de méthodes sont des caractéristiques fréquentes des élèves en difficulté.

Bibliographie

[1] ALLARDICE B.S., GINSBURG H.P. (1983) Children's psychological difficulties in mathematics In H.P. Ginsburg (Ed), *the development of mathematical thinking*, New-York Academic Press.

[2] BAUTIER E. (1995) *Pratiques langagières, pratiques sociales. De la sociolinguistique à la sociologie du langage*, Paris, l'Harmattan

[3] BAUTIER E. (1996) Les élèves et le rapport au savoir, In COPIRELEM*documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques, Actes du stage d'Angers de la COPIRELEM*, IREM Paris VII

[4] BAUTIER E., ROBERT A. (1988) Réflexions sur le rôle des représentations métacognitives dans l'apprentissage des mathématiques, *Revue Française de Pédagogie* n°84, pp 13-19, INRP Paris

[5] BOERO P. (1989) Mathematical literacy for all experiences and problems Proceedings, In PME XIII

[6] BRIAND J. (1993) *l'énumération dans le mesurage des collections. Un dysfonctionnement dans la transposition didactique*, Doctorat de Didactique des mathématiques, Bordeaux, Université de Bordeaux 1

[7] BRISSIAUD R. (1989) *Comment les enfants apprennent à calculer.*, Paris, Ed. RETZ.

[8] BUTLEN D. et PEZARD M. (1992) Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de CE2 en difficulté, *cahier de DIDIREM* n°13, IREM de Paris VII, Université de Paris VII.

[9] BUTLEN D. et PEZARD M. (1992) Elèves en difficulté, situations d'aide et gestion de classe associée , *Grand N* n°50 , pp.29-58 , IREM de Grenoble, Université de Grenoble 1.

[10] BUTLEN D. et PEZARD M. (1992) Calcul mental et résolutions de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du CP au CM2 *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol 12-2-3, La pensée sauvage, pp. 319-368

[11] BUTLEN D. et PEZARD M. (1996) Rapports entre habileté calculatoire et prise de sens dans la résolution de problèmes numériques, étude d'un exemple : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire, *cahier de DIDIREM* n°27, IREM de Paris VII, Université de Paris VII.

[12] BUTLEN D. et PEZARD M. (1999) Rôle de l'écrit collectif dans la conceptualisation de notions mathématiques et dans l'acquisition de méthodes de résolution de problèmes, article à paraître.

[13] BROUSSEAU G. et CENTENO J.(1992), Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol 11/2.3, La pensée sauvage

[14] CHARLOT B., BAUTIER E. et ROCHEX J.Y. (1992) *Ecole et savoir dans les banlieues... et ailleurs*, Paris, Armand Colin

[15] CHEVALLARD Y. (1984-1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre, 1ère, 2ème partie, *Petit X* n°5, 19, IREM de Grenoble, Université Joseph Fourier.

[16] CHEVALLARD Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre, 3ème partie *Petit X* n° 23, IREM de Grenoble, Université Joseph Fourier.

[17] CONNE F. Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problème d'arithmétique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol 5-3

[18] CONNE F. (1993) Savoirs et connaissances *Recherche en Didactique des Mathématiques* , Vol. 13, La pensée sauvage, Grenoble

[19] DENIS M. (1982) Représentation imagée et résolution de problèmes. *Revue Française de Pédagogie* , n° 60.

[20] FAYOL M. (1990) *L'enfant et le nombre.*, Neuchâtel, Delachaud / Niestle

[21] FAYOL M. HABDI H. et GOMBERT J.E. (1987) Arithmetic Problems Formulation and Working Memorie Load Laboratoire de Psychologie Université de Bourgogne - Dijon.

[22] FAYOL M. (1985) Nombre, numération et dénombrement. Que sait-on de leur acquisition ? *Revue Française de Pédagogie* n° 70.

[23] FAYOL M. et MAURY S. (1986) Combinatoire et résolution de problèmes aux cours moyens 1 et 2 . *Recherches en Didactique des Mathématiques.*, Volume 7-1, Editions la Pensée Sauvage, pp. 63-104

[24] FISCHER J.P. (1981) Développement et fonctions du comptage chez l'enfant de trois à six ans *Recherches en Didactique des Mathématiques.*, Vol 2-3, Editions la Pensée Sauvage

[25] FISCHER J.P. (1988) Complexité de compréhension et d'exécution des opérations arithmétiques élémentaires *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol 9-2. Editions la Pensée Sauvage, pp. 133-154

[26] FISCHER J.P. (1987) L'automatisation des calculs élémentaires à l'école. *Revue Française de Pédagogie* n°80

[27] JULO . (1995) *Représentations des problèmes et réussite en mathématiques*, Rennes, Presses Universitaires de Rennes

[28] LABORDE C. (1982) *Langue naturelle et écriture symbolique*, Thèse de Doctorat d'Etat, Grenoble, Université de Grenoble

[29] LAHIRE B. (1993) *Culture écrite et inégalités scolaires,* Lyon, Presses Universitaires de Lyon

[30] LEGRAND M. (1991) Circuit ou les règles du débat mathématique, In Commission Inter-IREM Université, *Enseigner les mathématiques autrement en DEUG A, première année*, Lyon, IREM de Lyon.

[31] LEGRAND M. (1990) Un exemple de discours sur les mathématiques et leur apprentissage, In Commission Inter-IREM Université, *Enseigner les mathématiques autrement en DEUG A, première année*, Lyon, IREM de Lyon.

[32] LEONTIEV A.N. (1959) Principles of mental development and the problem of intellectual backwardness. In B.J. Simon (Ed), *Educational Psychology in the USSR*. London : Routledge Kegan.

[33] PERRIN-GLORIAN M.J. (1992) *Aires et surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème* Thèse de Doctorat d'État, Paris, Université de Paris VII

[34] RESNICK L.B. (1983) A developmental theory of nomber understanding. In H.P. Ginsburg (Ed), *The development of mathematical thinking*. New-York Academic Press.

[35] RICHARD J.F. (1982) Mémoire et résolution de problèmes, *Revue Française de Pédagogie* n° 60.

[36] ROBERT A., TENAUD I. (1989) Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C, *Recherches en Didactique des Mathématiques* n° 9.1, La Pensée Sauvage, pp 31-70,

[37] ROBERT A. et ROBINET J. (1992) Représentations des enseignants et des élèves *Repères-IREM* n°7; Editions Tropiques, pp.93-99

[38] ROBERT A. et ROBINET J. (1996) Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol 16.2*

[39] ROCHEX J. Y. (1997) L'oeuvre de Vygotski : fondements pour une psychologie historico-culturelle, Note de synthèse, *Revue Française de Pédagogie* n°120, pp 105-147

[40] ROGALSKI. J. (1984) A propos de l'acquisition de la bidimensionnalité chez les élèves d'âge pré-scolaire et scolaire. et Enseignement et acquisition de la bidimensionnalité. *Cahiers de didactique des mathématiques* n° 12 et 13, Paris, IREM de Paris VII.

[41] ROUCHIER A. (1991) *Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaire : proportionnalité, structures itéro-récursives, institutionnalisation.* thèse de Doctorat d'état, Orléans, université d'Orléans

[42] SARRAZY B. (1997) Sens et situations : une mise en question de l'enseignement des stratégies métacognitives en mathématiques , *Recherches en didactique des mathématiques* vol. 17/2,La Pensée Sauvage-Editions, pp 135-166,

[43] SENSEVY G. (1994) *Institutions didactiques, Régulation, Autonomie. Une étude des Fractions au Cours Moyen* Thèse de Doctorat, Marseille, Université de Provence

[44] TENAUD I. (1991) *Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C : enseignement de méthodes et travail en petits groupes*, Thèse de Doctorat, Paris, Université de Paris VII

[45] VERGNAUD G. (1981) *L'enfant, la mathématique et la réalité.* Editions Peter Lang.

[46] VERGNAUD G. (1989) Questions de représentation et de formulation dans la résolution de problèmes mathématiques, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, Vol 2

[47] VYGOTSKI L. S. (1985) *Pensée et langage*, Paris, Editions sociales.

Annexe 1

Cette annexe présente des exemples d'activités de calcul mental proposées dans chaque niveau de classe

Annexe 1.a : exemples d'activités de calcul mental, niveau CM2

1. Compter Décompter
compter de 9 en 9 à partir de 7
compter de 13 en 13 à partir de 4
décompter de 8 en 8 à partir de 123
décompter de 14 en 14 à partir de 246
...

2. Règle des "zéros"
178 x 10 17 x 1000 5000 x 10 30000 : 10 400000 : 1000
...

3. Additions et soustractions mentales
39 + 45 60 - 26 119 + 36 83 - 49...

4. Multiplications et divisions mentales
32 x 5 32 x 25 28 x 9 34 x 11 ...
158 : 2 305 : 5 549 : 9 568 : 8 ...

5. Problèmes à résoudre mentalement
La distance entre chaque arrêt d'un autobus est d'environ 1500 mètres ; au premier arrêt 10 personnes montent, au second arrêt 3 personnes descendent, au troisième arrêt 5 personnes montent ; Y-a-t-il plus ou moins de personnes dans l'autobus quand il repart après ce troisième arrêt ? Combien en plus ou en moins ?

Un quadrillage rectangulaire comporte 168 carreaux en tout, il y a 4 carreaux sur la largeur, combien y-a-t-il de carreaux sur la longueur ?

Un restaurant propose un menu du jour à 70 F. Il y a 4 choix possibles pour l'entrée, trois choix possibles pour le plat principal et 2 choix possibles pour le dessert ; combien de menus différents peut-on constituer ?

Avec ses bottes de 7 lieues, le Petit Poucet se déplace de ville en ville ; il fait des pas de 8 km ; s'il parcourt 50 km, combien de pas va t-il faire ?

6. Le jeu de Syracuse
On part d'un nombre n ; s'il est pair on le divise par 2 ; s'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1. On arrive toujours à 1...
exemple avec : n = 17, 15, 25

Annexe 1.b : exemples d'activités de calcul mental, niveau sixième

1. Compter décompter

Compter de 0,3 en 0,3 à partir de 7,2
Décompter de 0,3 en 0,3 à partir de 7,2

2. Ordre de grandeur

Donner une valeur approchée de 0,195 x 4,11 ; de 0,294 x 0,4
Le quotient de la division 9675 : 43 est-il de l'ordre de 2, 20 ou 200 ?
Ordre de grandeur de 21,7 x 39, à l'unité près.
Des deux fractions 5/7 et 7/5, laquelle est plus petite que 1 ?

3. Opérations mentales

407,8 - 100   407,8 - 10   407,8 - 0,1   407,8 - 1/100

4. Calcul rapide sur les fractions

1/9 x 3/5   2/7 x 3/4   23,5 + 4/100 ...

Donner quatre écritures différentes de 35/8 en utilisant les signes +,-,x.

5. Problèmes à résoudre mentalement

J'achète 48 bonbons à 0,80 F l'un. J'ai 24 F. Ai-je assez ? J'ai 50 F. ai-je assez ?

J'ai 18 F. dans mon porte-monnaie, combien au maximum puis-je acheter de sucettes coûtant 1,50 l'une ?

2 groupes montent dans un car. Il y a 30 personnes dans le premier groupe, le nombre de personnes du deuxième groupe est égal au 2/3 de celui du premier. Combien de personnes sont montées ?

On sait que deux élèves sur trois ont plus de 12 au contrôle. Donner 3 exemples de classes, en indiquant pour chacune le nombre total d'élèves et le nombre d'élèves ayant eu plus de 12 au contrôle.

Annexe 1.c : exemples d'activités de calcul mental, niveau cinquième

1. Ordre de grandeur d'un résultat

73 x 10,2   4731,4 + 5036 1000,3 - 218

2. Priorité des opérations, énoncé de problème

Effectue 200 + 4 x 30
Invente un problème qui se résout par ce calcul.

3. Travail sur les fractions

Ecris sous forme d'un entier le plus grand possible plus une fraction
3/2   14/3

Donne une autre écriture fractionnaire de :
4/6   7/3

Ecris en ordre croissant :
4/5   2/5   7/4   7/5

Ecris une fraction égale à :
0,25   1,2

Ecris si possible un nombre décimal égal, sinon la valeur approchée à 0,01 près de :
3/2   3/4   2/3

Effectue :
3/7 + 5/7   1 - 7/9 2 + 3/5
6 X 7/3   2/5 x 4/5   2/7 x 3/4

4. Problèmes à résoudre mentalement

Julien a eu 30 sur 40 au premier devoir et 20 sur 30 au deuxième, quel est la meilleure note ?

Huit garçons et quatre filles mangent chacun un petit pain au chocolat à 2,50F. pièce Combien les enfants ont-ils dépensé en tout ?

Un rectangle a une longueur de 6 cm et une largeur de 6 cm, un autre rectangle a une longueur de 17 cm et une largeur de 15 cm. Leurs côtés sont-ils proportionnels ?

Un pull valait 200 F. Combien vaut-il après une augmentation de 25%.

Après 20% de réduction, un livre coûte 40 F. Combien coûtait-il avant la réduction ?

Annexe 2

Grille d'analyse des textes collectifs

		1	2	3	4	
		mathéma-tique	discours de méthodes	description d'un apprentis-sage	description de finalités d'apprentis sage	Total
1	énoncé d'un théorème, d'une définition, d'une propriété, d'un algorithme de calcul					
2	règle formulée à partir d'un exemple					
3	un exemple, un contre-exemple					
4	méta 1 : énoncé de méthodes très générales non liées à un contenu mathématique					
5	méta 2 : énoncé de règles ou de méthodes faisant référence à un contenu assez général					
6	méta 3 : énoncé de règles ou de méthodes décontextualisées mais attachées à un contenu mathématique précis					
7	méta 4 : énoncé d'exemples ou de procédures ou de techniques de calcul contextualisés ou de démarches de résolution					
8	énoncé d'une activité (chronique)					
9	énoncé d'une consigne					
10	validation (preuve, démonstration, argumentation)					
	Total des énoncés (par type de point de vue)					

L'ARITHMETIQUE DANS LES EXERCICES ET PROBLEMES DU CERPE : QUELQUES ELEMENTS D'ANALYSE

COMMUNICATION
Marie–Pierre GALISSON
IUFM de Versailles

Résumé
Utilisant le cadre de l'anthropologie des savoirs (Y. Chevallard), cette communication a pour objet de préciser le rapport institutionnel à l'arithmétique pour un étudiant en première année d'I.U.F.M. Le support d'analyse comporte tous les énoncés d'exercices et de problèmes des sujets proposés au CERPE entre 1992 et 1998 et les éléments de corrigés, publiés par la COPIRELEM.
Proposant une description des savoirs et savoir-faire sollicités dans la partie dite « théorique » de l'épreuve, cette analyse présente, dans une première partie, une typologie des tâches fréquemment rencontrées et des techniques permettant de les réaliser. Cette première grille d'analyse s'avérant limitée, la seconde partie propose une catégorisation des sujets en fonction de la nature des savoir-faire attendus (maîtriser des notions abordées à l'école primaire ; établir des parallèles avec l'activité de l'élève ; modéliser, généraliser, démontrer).
En conclusion, émergent quelques éléments d'analyse :
Sur l'importance accordée au champ de l'arithmétique par rapport aux autres champs d'étude ;
Sur les invariances et les évolutions dans le choix des thèmes privilégiés par les concepteurs de sujets ;
Sur la spécificité de l'activité arithmétique en fonction des thèmes et des contextes des énoncés.

I. Introduction

Sur l'ensemble des champs que couvre la partie disciplinaire du CERPE, l'arithmétique semble se caractériser comme un thème d'étude fidèle aux Recommandations Officielles[1] : c'est un thème « relevant de notions enseignées à l'école primaire, permettant d'évaluer la rigueur d'un raisonnement logique, la capacité à utiliser diverses représentations, favorisant l'explicitation d'un modèle mathématique, son traitement et la possibilité de mettre en regard des stratégies utilisables par les élèves de l'école primaire ».

Cette première impression, ressentie à l'issue de mes premières expériences de formateur et confortée par les analyses effectuées par M.L. Peltier[2] dans sa thèse, sur la spécificité des compétences sollicitées en arithmétique, m'a conduit à m'interroger sur le rapport institutionnel qu'un étudiant en première année de formation pouvait entretenir avec ce savoir

---

[1] Recommandations relatives aux concours de recrutement de professeurs d'école ; note de service N 94271 du 16- 11, 1994 reprenant un extrait du B.O. n°5 (30 janvier 1992).

[2] PELTIER M.L. (1995) *La formation initiale, en mathématiques, des professeurs d'école : entre conjoncture et éternité,* Thèse de doctorat Université Paris VII.

(rapport tel qu'il peut apparaître à travers les savoirs et savoir-faire évalués dans la partie disciplinaire de l'épreuve).
C'est donc, un peu dans le prolongement de la recherche menée par M.L. Peltier dans la première partie de sa thèse, partie où elle propose une caractérisation « des mathématiques du professeur d'école », cherchant à vérifier si les évolutions qu'elle avait constatées dans le domaine de l'arithmétique se trouvaient confirmées les années suivantes, que s'est inscrit mon travail.
Pour définir « le » domaine de l'arithmétique du professeur d'école, j'ai repris l'ensemble des thèmes retenus par M.L. Peltier comme caractérisant ce domaine, c'est-à-dire Multiples, Diviseurs, PPCM et PGCD ; Division euclidienne et congruences ; Nombres premiers ; Numération et bases, y adjoignant, toutefois « Entiers, décimaux, rationnels ». Ces thèmes couvrent à peu près tout ce qui concerne le nombre ; je n'ai pas pris en compte la proportionnalité, bien qu'on ne puisse négliger l'importance de sa composante numérique (application d'un pourcentage, utilisation de la règle de trois, étude d'un tableau de nombres).
Pour étudier le rapport institutionnel d'un étudiant en position de PE à l'arithmétique, c'est-à-dire décrire l'activité mathématique du candidat « dans l'institution : partie disciplinaire du concours », j'ai utilisé la notion de praxéologie ou organisation mathématique définie par Y. Chevallard[3]. Ce concept, défini comme un quadruplet (tâche, technique, technologie, théorie), permet de décrire les savoirs et savoir-faire mis en œuvre par le candidat dans l'effectuation des tâches prescrites par les énoncés de concours. L'utilisation de cet outil d'analyse sur l'ensemble des sujets donnés au concours depuis 1992 et jusqu'en 1998 m'a permis d'obtenir une typologie (non exhaustive) des tâches relatives aux thèmes précédemment définis, d'identifier les techniques induites et de resituer ces techniques dans l'environnement technologico-théorique permettant de les éclairer et de les produire.
Toutefois, la difficulté d'exprimer en terme de tâches directement formulables dans le cadre arithmétique, un certain nombre de consignes, m'a amené à différencier la fonction des savoirs en jeu en prenant en compte le contexte des situations, la formulation des consignes, la nature des procédures de résolution attendues. C'est la raison pour laquelle il m'a paru pertinent de différencier les énoncés en tentant de déceler les «traces» des intentions affichées dans les Instructions Officielles. Ces intentions peuvent être appréhendées à travers la fonction assignée aux savoirs par les tâches. J'ai distingué trois types de fonctions attribuées au savoir arithmétique :

- Evaluer la capacité du candidat à restituer des savoirs, appliquer directement des savoir-faire (que ce soit à un niveau élémentaire ou supérieur) ; les savoirs et savoir-faire servent à réaliser des tâches que l'on peut qualifier de routinières ; les consignes sont transparentes et le contexte est arithmétique.
- Evaluer la capacité du candidat à établir des parallèles entre les stratégies des élèves et une stratégie plus experte (éclairée par un savoir non connu de l'élève ou implicitement utilisé par celui-ci) ; les savoir-faire mis en œuvre ouvrent une perspective sur ce que peut être l'activité mathématique de l'élève : une activité de recherche, une démarche de justification… ; les consignes sont « ouvertes », le contexte et l'énoncé ne sont pas porteurs d'indices informationnels sur le savoir en jeu.
- Evaluer la capacité du candidat à modéliser une situation, à conjecturer et à justifier ou prouver, à généraliser ; les savoirs sont des outils de modélisation, de résolution ; les procédures de résolution peuvent nécessiter des changements de cadres ; l'activité induit une nécessaire réflexion sur ce qu'est l'activité mathématique ; les questions peuvent

[3] CHEVALLARD Y. (1999), *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*, Recherches en didactique des mathématiques, Vol 19/2.

être « ouvertes » ou préciser la nature de la tâche à réaliser (démontrer, établir), il y a pluralité des contextes : les cadres sont variés.

(Les exemples de sujets illustrant cette classification seront proposés dans la partie II).

Cette classification effectuée sur l'ensemble des sujets apporte un éclairage supplémentaire sur le rapport institutionnel du candidat à l'arithmétique, dans le volet disciplinaire de l'épreuve : elle constitue la troisième partie.

Dans une dernière partie, j'essaie d'identifier les invariances et les évolutions dans les choix des concepteurs de sujets, de préciser ce qui peut distinguer l'arithmétique des autres champs d'étude, lui conférer un statut spécifique dans la formation de PE.

II. Typologie des tâches et techniques rencontrées

Sur l'ensemble des cinq domaines, je n'illustrerai que ceux qui me paraissent les plus significatifs, à savoir les domaines désignés sous les rubriques « Multiples, diviseurs, PGCD et PPCM », « Division euclidienne et congruences » et « Nombres premiers ».

Les listes proposées sont construites de la façon suivante : les tâches citées sont précédées par un numéro, les techniques utilisables pour effectuer ces tâches sont repérées par une puce. Sont relevées tout d'abord des tâches mettant en jeu des notions explicitement présentes dans la formulation de la consigne ou dans l'énoncé (aspect objet d'étude) ; en italique, sont ensuite proposées des tâches dans lesquelles le savoir en jeu est un outil de modélisation ou de résolution (le savoir n'est pas nommé, la tâche n'apparaît pas explicitement dans la consigne). Dans les deux premiers domaines, sont cités, en fin de liste, des « genres de tâches » (Résoudre), leur présence témoigne de leur fréquence sur l'ensemble des années et précise les limites du champ d'étude.

Dans chacun de ces trois domaines, nous essaierons de mettre en avant quelques éléments d'analyse et d'illustrer quelques difficultés.

Dans le domaine « Multiples, diviseurs, PGCD et PPCM », nous relevons :

1. Etablir qu'un entier a est divisible par un entier b :

En le décomposant sous la forme du produit de l'entier b par un entier à trouver :

dans un cadre numérique, en effectuant des divisions ;

dans un cadre algébrique, en utilisant une factorisation soit à partir d'une expression définissant a, soit à partir du codage littéral caractérisant a.

En utilisant des critères de divisibilité.

2. Etablir la divisibilité d'un nombre a par le produit de deux facteurs premiers entre eux :

En utilisant le fait que a est divisible à la fois par chacun des deux facteurs.

3. Enoncer les critères de divisibilité.
4. Déterminer un entier naturel a dont on sait qu'il est divisible par un entier b :

En appliquant les critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9, 10, 25,...

En résolvant des équations déduites de la modélisation algébrique de la situation.

5. Déterminer la liste de tous les diviseurs d'un naturel :

En essayant successivement les naturels dans l'ordre croissant et en utilisant les critères de divisibilité ;

En construisant un arbre après avoir décomposé le nombre en produit de facteurs premiers.

6. Déterminer le nombre de diviseurs d'un naturel s'exprimant sous la forme $a^p \times b^q$:

En utilisant un arbre.

7. Calculer le PGCD de deux ou plusieurs entiers (explicitement demandé dans un seul sujet sur 5) :

En recherchant le plus petit diviseur commun dans les listes de leurs diviseurs respectifs ;
En effectuant le produit des facteurs, communs à leur décomposition en produit de facteurs premiers, affectés du plus petit exposant parmi les exposants présents.
8. Résoudre un problème sans recourir à une mise en équation :
En utilisant un schéma et un raisonnement conduisant à l'identification d' une grandeur inconnue dont un multiple peut être déterminé à l'aide d'un dénombrement et de calculs additifs et (ou) soustractifs ;
En modélisant la situation de façon à déterminer un PPCM, puis des multiples adéquats.

Les tâches portant sur les notions « objets d'étude » permettent d'évaluer la capacité du candidat à restituer des savoirs, à les appliquer dans un contexte arithmétique. Ces notions (multiples, diviseurs, divisibilité) relèvent de l'école élémentaire. Dans les techniques, on peut souligner, à côté de l'utilisation des propriétés arithmétiques (propriétés dont certaines sont connues des élèves de cycle 3), le rôle des modélisations et traitements algébriques (quand le nombre étudié le nécessite) et le statut un peu à part de l'objet « arbre ».

La tâche 1 est un assez bon exemple : nous trouvons cette tâche dans les énoncés qui suivent :
Les énoncés des exercices sont reproduits sous leur forme originelle. De façon à favoriser une meilleure compréhension, des questions préliminaires sont parfois présentes, les tâches étudiées sont en gras.
Exemple 1
*3)[...] **Justifier que 100 001 est un multiple de 11,** (Rouen 1997).*
La technique consiste à effectuer la division euclidienne, s'assurer que le reste est nul ou à utiliser le critère de divisibilité par 11.

Exemple 2
Décomposer 111 111 en produit de facteurs premiers.
En utilisant la décomposition obtenue, montrer que le nombre 888 888 est divisible par 37 ;
Décomposer 888 888 en produit de facteurs premiers. (Grenoble 1992).
La technique repose sur la reconnaissance, dans l'écriture, d'une décomposition sous forme de produit de facteurs de l'expression qui définit le multiple d'un entier.
Exemple 3
Un nombre A s'écrit avec 3 chiffres. En permutant ses chiffres des dizaines et des unités on obtient un nombre B. En permutant ses chiffres des dizaines et des centaines on obtient un nombre C. En permutant ses chiffres des centaines et des unités on obtient un nombre D.
Sachant que A-B = 18 et C-A = 360 :
Calculer D-A.
Montrer que A est multiple de 3.
Trouver A sachant qu'il est multiple de 9 (donner toutes les solutions). (Nancy- Metz 1993).
L'expression de A ayant été déterminée ainsi : A = 111c + 42, c'est la factorisation de l'expression algébrique qui permet d'effectuer la tâche ; le critère de divisibilité par 3 peut être aussi utilisé : A = cdu et c + d + u est multiple de 3 (on peut établir en effet que : d-u = 2, u-c = 2 ; d'où c + d + u = 3u).
Exemple 4
Soit n un nombre entier naturel écrit en base dix avec quatre chiffres différents, on pose n = mcdu.
On appelle n' le nombre entier naturel dont l'écriture en base dix est obtenue à partir de celle de n en permutant :
Le chiffre des unités de mille avec celui des unités ;
Le chiffre des centaines avec celui des dizaines.

Montrer que la différence entre n et n'est un multiple de 9 (prendre m > u).
Rappeler le caractère de divisibilité par 9 des entiers naturels.
Soit n = 7421, vérifier sur cet exemple la propriété trouvée à la première question. *(Toulouse 1993).*
C'est la même technique que la précédente, l'utilisation du critère de divisibilité par 9 est explicitement attendue.

Exemple 5
Dans cet exercice on ne considère que des entiers naturels.
Montrer que la somme de trois nombres consécutifs est un multiple de 3.
Soit N un nombre somme de quatre entiers consécutifs. Montrer que N-2 est multiple de 4.
Avec quelle condition sur N la réciproque est - elle vraie ?
La somme de 51 nombres entiers consécutifs est 1785, quels sont ces nombres ? (Indication : on rappelle que pour tout entier p, on a $1 + 2 + ... p = p(p+1)/2$) (Lyon 1997).
La technique met en jeu modélisation algébrique et factorisation de l'expression obtenue, avant de nécessiter une référence à la définition d'un multiple.

S'il semble possible de décrire l'activité mathématique du candidat, en termes de savoirs et savoir-faire explicites, quand il effectue ce type de tâches, la situation diffère quand les tâches sont de type 7 ou de type 8 : comment rendre compte de la modélisation que le candidat doit réaliser et du parallèle qu'il peut établir entre son activité et celle de l'élève ?

Exemple 1
[...] 8.1 On considère les entiers 42, 21 et 14. Trouver leur plus grand commun diviseur (PGCD).
8.2. Montrer que si 7 est un diviseur commun aux deux naturels ab et bc, alors 7 divise également le nombre ca. En déduire que dans ce cas abbcca est divisible par 7.
8.3. Donner la liste de tous les nombres qui s'écrivent abbcca avec ab et bc divisibles par 7. Par quel entier plus grand que 50 sont-ils tous divisibles ? (Rouen 1997).
Exemple 2
Les dimensions d'une caisse à parois rectangulaires sont en cm : 150 ; 165 ; 105. On veut fabriquer des boîtes cubiques aussi grandes que possible dont l'arête est mesurée par un nombre entier de centimètres et avec lesquelles on se propose de remplir entièrement la caisse.
Calculer la mesure de l'arête des boîtes ainsi que le nombre de ces boîtes. (Paris1992).
Exemple 3
Un terrain triangulaire a pour dimensions 120, 96 et 72. Déterminer le nombre minimal de piquets nécessaires pour l'entourer, sachant qu'ils doivent être régulièrement espacés, d'un nombre entier de mètres et qu'il doit y avoir un piquet à chaque sommet du triangle. (Antilles - Guyane1995).
Si, en 1997, le sujet de Rouen demande explicitement de calculer le PGCD de 42, 21 et 14, les sujets de Paris (1992), Antilles - Guyane (1993 et 1995), Rouen 1(1998) nécessitent que le candidat modélise lui-même la situation (la situation présente d'ailleurs le même contexte en 1992, 1993, 1998) : il s'agit de déterminer les dimensions de boîtes parallélépipédiques permettant de remplir d'autres boîtes ou de savoir si des boîtes de dimensions données permettent ou non d'en « paver » d'autres. Les changements de cadres qu'induisent ces tâches (du cadre de la géométrie et de la mesure au cadre arithmétique) ne peuvent être évoqués sans tenir compte du contexte : comment exprimer les savoirs et savoir faire qui génèrent ces changements de cadres ?

Exemple 4

Trois émissions se partagent 180 minutes, la $1^{ière}$ dure 2 fois plus longtemps que la $3^{ième}$, qui elle dure 12 minutes de moins que la $2^{ième}$. Trouver la durée de chaque émission par un schéma, sans sortir du domaine de l'école primaire.

Donner une solution algébrique. (Antilles - Guyane 1996).

Liés aux tâches de type 8, les problèmes de partages inégaux conduisent aussi le candidat à faire un pas de côté pour abandonner son mode de pensée algébrique et adopter une procédure arithmétique utilisable par les élèves de l'école élémentaire.

Existent encore des problèmes où des procédures arithmétiques peuvent avantageusement se substituer aux procédures algébriques.

Exemple 5

35 personnes paient 756 F de plus qu'un groupe de 13 personnes : quel est le prix du menu ? (Amiens 1994).

Ou encore des problèmes conduisant à la détermination de PPCM :

Exemple 6

Placés par tablées de 6, 8 ou 10, il reste toujours un convive isolé : déterminer le nombre de convives, sachant qu'il est inférieur à 100 ? (Paris 1993), les chocolats de Charlie (Nancy-Metz 1994).

L'ensemble des sujets qui comportent ce type de tâches semble évaluer la capacité du candidat à maîtriser à un niveau plus expert, des notions enseignées à l'école élémentaire et à faire le lien entre procédure élève et procédure plus élaborée.

Dans l'environnement technologico-théorique relatif à ce domaine, voici quelques uns des éléments qui peuvent sembler en constituer les « fondements ». Je fais le choix de relever, comme éléments caractéristiques à ce domaine, des savoirs qui constituent à la fois des objets d'étude et des outils de résolution.

Ces éléments qui rendent intelligibles, justifient et produisent les techniques utilisées sont les suivants : les définitions du multiple et du diviseur d'un entier naturel, les critères de divisibilité d'un entier par 2, 3, 5, 9, 11, 25 et par les puissances de 10, la transitivité de la relation « est diviseur de » (i.e. : Si a divise b et si b divise c alors a divise c.). D'autres éléments interviennent : outils dans les techniques mises en œuvre, ils seront cités dans le domaine qui leur est plus spécifique.

Dans le domaine « Division euclidienne, congruences », nous relevons les tâches (numérotées) et les techniques possibles (précédées d'une puce) ci-dessous :

Une expression numérique ou algébrique de type : $D = d \times q + r$ étant donnée :

Déterminer le quotient et le reste dans la division euclidienne de D par d ;

Déterminer le couple (dividende, diviseur), quotient et reste étant connus, le dividende étant majoré ;

Déterminer le dividende, le quotient et le reste étant connus, le dividende est majoré ;

Déterminer le dividende, sachant que reste et quotient sont égaux, le diviseur est connu :

En utilisant les relations qui définissent la division euclidienne : $D = d \times q + r$ et $r < d$.

Compléter une division posée à « trous » :

En utilisant la technique opératoire de la division euclidienne ou en utilisant la liste des multiples du diviseur.

Déterminer les restes dans une division de diviseur connu d'une suite d'entiers consécutifs, de carrés de nombres entiers consécutifs, de multiples consécutifs d'un entier donné, des puissances successives d'un naturel. Etablir une conjecture et l'utiliser pour une généralisation :

En repérant des régularités (par exemple, la périodicité) et en modélisant la situation à l'aide d'une division euclidienne dont le reste donne « sens » à la périodicité observée.
Donner l'écriture chiffrée dans une base n (n distinct de 10) d'un entier N exprimé par son écriture chiffrée en base 10 :
En utilisant la division euclidienne et le principe de numération.
Déterminer un nombre obtenu en comptant ou en décomptant de n en n, à partir d'un entier donné ; dire si un entier peut être atteint en comptant ou en décomptant de n en n :
En utilisant la division euclidienne pour déterminer suivant les cas, le dividende, le reste, le quotient. (Il s'agit de déterminer l'un des termes d'une suite arithmétique, de rang connu ou inversement).
Déterminer le terme correspondant à un rang donné dans une suite périodique modélisant un phénomène observable :
En effectuant la division euclidienne du « rang » par le nombre correspondant à la longueur de la période et en établissant une relation entre les restes obtenus et les rangs.
Résoudre dans N une équation du premier degré à deux inconnues :
En utilisant une méthode de recherche « simple, claire et systématique ».
Il semble pertinent de penser que les deux premières tâches proposées (tâches 1 et 2) ont pour objectif de vérifier que le candidat maîtrise une notion qu'il aura à enseigner, à savoir la division euclidienne. Dans les tâches qui suivent, certaines s'apparentent aux tâches prescrites aux élèves (par exemple tâche 5) pour introduire la division euclidienne, en début d'apprentissage, comme outil de résolution ou mettent en jeu la division euclidienne comme outil de modélisation (tâches 3 et 6), puis de résolution. Ces tâches, proposées dans un premier temps à un niveau élémentaire, conduisent ensuite à des conjectures, des généralisations, des démonstrations.

Voici quelques exemples. Dans le type de tâche 1, on trouve (notamment les premières années de cette étude) des énoncés du type suivant :
Exemple 1
Dans l'ensemble de l'exercice, on considère les nombres entiers naturels D et q tels que :
$D < 4500$ *et* $q = 82$.
La division euclidienne du nombre D par le nombre d fournit le quotient $q = 82$ *et le reste* $r = 45$. *Recherche, en justifiant la réponse, l'ensemble des couples (D,d) qui répondent à la question.*
Même question avec $r = 112$.
Discuter suivant la valeur du reste, l'existence de solutions. (Créteil 1992).
Objet d'étude, la division euclidienne permet au candidat de révéler sa maîtrise des relations entre dividende, quotient, diviseur et reste, sa connaissance de la propriété du reste ; les contraintes de la situation permettent aussi d'appréhender sa capacité à élaborer une justification ou une recherche exhaustive des solutions.
Pour illustrer le type de tâche 3, je relève :
Exemple 2
Dans la division par 5, un nombre A donne un reste de 3.
On multiplie A par 14 ; quel est le reste, dans la division par 5, du nombre ainsi obtenu ?
On multiplie A par un entier m supérieur à 1. Donner un procédé permettant de calculer le reste, dans la division par 5, du nombre ainsi obtenu. Appliquer ce procédé aux cas où $m = 328$ *puis* $m = 5^{36} + 2$.
On désigne par Am le produit de A par m.

Compléter le tableau suivant :

Dividende		*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*0A*	*1A*	*2A*	*3A*
Reste dans la division par 5													

D'une manière générale, connaissant le reste de la division par 5 de Am, quel sera le reste de A (m+1), dans la division par 5 ?
Comment prévoir, en fonction de m, le reste de Am, dans la division par 5 ?(Nantes 1992).
Le reste de la division est explicitement objet d'étude, l'étude de cas particuliers, conduit à la généralisation et la démonstration nécessite une procédure algébrique s'appuyant sur le rôle du reste. La notion de congruence est sous jacente. L'absence de cette notion, comme outil de résolution ainsi que celle du raisonnement par récurrence, comme méthode de preuve, conduisent à des tâches nécessitant une procédure de résolution fondée sur l'observation, l'identification de régularités et un raisonnement arithmétique s'exprimant dans un langage naturel.

La tâche de type 5 s'apparente tout d'abord à une tâche élève.

Exemple 3
On décompte de 3 en 3 à partir de 50 tant qu'on obtienne un entier naturel : « 50, 47, 44, 41,... ».
Quel nombre termine cette suite ?
On décompte toujours de 3 en 3 tant qu'on obtienne un entier naturel, mais à partir de 8932 : « 8932, 8929, 8926,... ».
Quel nombre termine cette suite ?
Combien comporte t-elle de termes ?
Quel est le centième terme ? (Lille 1994).
Exemple 4
[...]De façon générale, si a < b, donner un procédé général et rapide permettant de dire s'il est possible d'atteindre b en partant de a en comptant de 23 en 23 ; donner le plus petit entier naturel à partir duquel en comptant de 23 en 23, on peut atteindre 31600.(Nantes 1996).
S'inspirant de situations d'apprentissage proposées par des manuels (par exemple Objectif Calcul CM1 Hatier 87) pour introduire la technique de la division euclidienne, ces sujets suggèrent indiscutablement les liens entre l'activité de l'élève et la capacité du maître à maîtriser la notion en jeu, à lui donner sens comme outil de modélisation et de résolution (explicitement dans le sujet de Nantes 1996). La modélisation et le traitement arithmétique ou algébrique sont en général nécessaires pour « aller au bout » d'une tâche de type 5.
Les tâches de type 7 (résolution de problèmes) requièrent plus spécifiquement une aptitude à mettre en œuvre des procédures de recherche méthodiques organisées, procédures qui seront à développer chez les élèves.
Exemple 5
Le directeur d'un centre aéré dispose de 1090 F. Sachant qu'il doit utiliser intégralement cette somme d'argent et qu'il peut acheter des ballons à 40 F l'un et des cordes à sauter à 15F l'une, donner en justifiant un exemple de choix possibles, tous les choix possibles en présentant clairement la méthode. (Rouen 1995).
La procédure de résolution attendue, ne pouvant relever d'une technique relative aux congruences, nécessite pour s'avérer efficace d'utiliser des propriétés arithmétiques (recherche du PPCM et du PGCD de 15 et 40). Si dans ce cas précis, les variables numériques

jouent un rôle déterminant dans la complexité de la procédure, le contexte reste évocateur d'un problème scolaire.
Coexistent donc, dans ce domaine, des tâches très diverses. La plupart des sujets qui comportent ces tâches vont amener le candidat à une réflexion, soit sur la pluralité des démarches de résolution en fonction des outils disponibles (pour l'élève, pour le maître), soit sur la démarche de preuve, de généralisation. Soulignons à ce sujet, le rôle important que joue l'outil algébrique dans de nombreuses procédures de résolution : l'absence de la notion de congruence nécessite la modélisation algébrique de la situation.

Les éléments technologico-théoriques qui vont s'adjoindre à ceux précédemment cités sont, pour une part, des éléments disponibles (ce sont des objets de savoir identifiés, reconnus). Je relève tout d'abord la définition de la division euclidienne. Cet objet de savoir est objet d'étude mais aussi l'outil qui permet de donner existence à un élément tel que le principe de numération (principe souvent sollicité que ce soit dans l'un ou l'autre des domaines présentés). Le second élément disponible est le principe de numération : il rend intelligible le système décimal, permet l'étude des propriétés des nombres. Sont d'autre part implicitement convoqués mais non disponibles, la notion de congruence, la compatibilité de la relation « est congru à » avec l'addition et la multiplication dans Z. De même, la notion de suite numérique (arithmétique notamment), le raisonnement par récurrence apparaissent comme des objets « évanescents ». La fonction que ces notions pourraient assurer (justification de propriété, par exemple des critères de divisibilité, généralisation de propriétés à des entiers dont le nombre de chiffres n'est pas limité,...) n'existe pas ; une certaine dimension de l'arithmétique (dimension où les nombres ne sont pas nécessairement de « taille » définie, où l'outil algébrique montre ses limites) est occultée.

Dans le domaine « Nombres premiers »
Décomposer un entier naturel en produit de facteurs premiers :
En utilisant les critères de divisibilité par les entiers premiers (si possible), on obtient un diviseur et son quotient associé : tant que le quotient associé n'est pas premier, le processus est à réitérer. La décomposition s'exprime comme le produit de tous les diviseurs premiers identifiés.
En déterminant les diviseurs premiers de façon méthodique, en testant dans l'ordre croissant les diviseurs premiers et en réitérant la méthode sur le quotient associé à un diviseur identifié ; la procédure est ensuite analogue au processus précédent.
Dire si un nombre est premier :
En vérifiant que tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à la partie entière de sa racine carrée ne sont pas diviseurs du nombre.
Exprimer un rationnel sous la forme d'un quotient de deux entiers premiers entre eux *(sous forme irréductible) :*
En simplifiant une écriture fractionnaire (si le rationnel est exprimé sous cette forme) *i.e.* en déterminant d le PGCD du numérateur a et du dénominateur b ; ainsi a = da' et b = db' et le quotient cherché est le quotient de a' par b'.
En transformant une écriture chiffrée par une procédure permettant d'éliminer les parties décimales, en une écriture fractionnaire et en appliquant le procédé précédent.
Peut-être un peu brièvement, ce domaine (peu représenté) se caractérise par sa « technicité » : les exercices qui relèvent de ce domaine, semblent posés pour évaluer l'aptitude du candidat à restituer des techniques, les appliquer de façon systématique, sans référence à quelque activité réflexive sur la finalité de la tâche.

Exemples
Décomposer 111111, puis 888888 en produit de facteurs premiers (Grenoble 1992).
Dire si l'affirmation est vraie : Tous les nombres premiers sont impairs (Rouen 1996).
Simplifier les fractions 1001/100 001 et 2 500 025/825 (Rouen 1997).
Ces énoncés caractérisent les activités tournant autour de ce thème (le savoir en jeu est objet et outil d'étude). Il s'agit pour le candidat de connaître la définition d'un nombre premier, les premiers nombres premiers, de connaître quelques techniques dans lesquelles ils interviennent (pour simplifier des fractions, voire justifier d'une divisibilité).

Les objets théoriques que doit connaître le candidat sont les suivants : les définitions d'un nombre premier et de deux nombres premiers entre eux, la propriété d'existence et d'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers de tout naturel non premier. L'environnement technologico-théorique comprend donc des objets qui n'ont pas de rapports directs avec les objets de savoir et les techniques enseignées à l'école élémentaire. Il existe une composante théorique dans « l'arithmétique du professeur d'école » qui révèle un besoin institutionnel de ne pas confondre activité arithmétique et activité « pratique ». Les savoirs en jeu n'apparaissent pas comme immédiatement utilisables dans la pratique professionnelle du professeur des écoles, la formation semble prendre en compte une culture arithmétique où les propriétés des nombres constituent la composante théorique.

Sur l'ensemble des savoirs disponibles, en conclusion on peut noter que sont toutefois essentiellement représentées des notions très liées avec les contenus de l'école primaire : le candidat doit révéler son aptitude à appréhender avec recul des notions qu'il aura à introduire, auxquelles il devra donner sens dans sa pratique future.

III. Classification des sujets

Me référant aux diverses « fonctions » de l'arithmétique définies dans l'introduction et décelables, me semble t-il, dans la nature des compétences sollicitées, je distingue trois, voire quatre types de sujets :
Les sujets mettant en œuvre des techniques élémentaires (cycle 3 ou 5$^{\text{ième}}$) pour réaliser des tâches relevant de notions liées à l'école élémentaire ou non nécessairement liées étroitement à cette dernière mais relevant d'une application directe de techniques usuelles ; plus simplement, ils peuvent être caractérisés comme des sujets dont l'objectif est d'évaluer des « compétences de base ».
Les sujets portant sur des notions élémentaires, contextualisés et pour lesquels les procédures de résolution envisageables permettent de prendre en compte l'activité mathématique de l'élève en situation de recherche.

Des sujets traitant de notions non nécessairement élémentaires et devant évaluer l'aptitude du candidat à conjecturer, généraliser, justifier ou démontrer, à modéliser, à valider sa procédure, à réfléchir sur le sens de sa démarche.
Un quatrième type de sujets pour lesquels il me semble que peuvent être appliqués les deux derniers critères.

Quelques exemples significatifs viennent d'être précisés dans la typologie des tâches.
Voici donc une répartition des sujets par année en fonction de ce classement :

Années	rapport nombre sujets arithmétiques sur nombre total	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
1992	15/25	2	3	7	3
1993	18/28	6	6	5	1
1994	19/28	5	7	2	5
1995	12/26	4	3	4	1
1996	15/26	4	5	6	0
1997	9/21	1	2	6	0
1998	15/21	4	5	5	1

L'interprétation de ces résultats semble fort délicate : je ne peux éliminer une part d'*a priori* dans le choix des éléments qui m'ont conduit à cette répartition. Je ne peux occulter ma méconnaissance des politiques de formation internes aux centres IUFM et ne pas prendre en compte les conjonctures ponctuelles qui ont joué sur les critères de recrutement.
Il me semble toutefois pertinent de souligner que chaque année, séparément, les trois premiers types de sujets sont représentés.
Certains sujets évaluent des compétences que nous pouvons qualifier de « compétences de base » (au sens des évaluations nationales). Par compétences de bases, j'entends des techniques telles que l'identification de la nature de nombres à partir de leur « désignation canonique », l'effectuation d'opérations dans D ou Q, la comparaison des nombres, l'identification de bases, l'application de techniques relatives à la divisibilité... Le savoir en jeu est objet explicite de l'étude.
Je note aussi une certaine régularité dans la fréquence des sujets de type 2. Ce sont des problèmes relevant d'équations diophantiennes du premier degré à deux inconnues dans N ou pouvant induire des résolutions de type arithmétique. Ce sont encore les problèmes nécessitant une modélisation arithmétique (recherche de diviseurs communs, utilisation de la division euclidienne, par exemple). Ces sujets mettent en avant l'aspect outil de résolution de l'arithmétique.
Le nombre de sujets de type 3 est majoritaire cinq années sur huit : l'arithmétique intervient dans les tâches prescrites comme outil de modélisation, de généralisation ou de preuve dans des situations portant, soit sur l'étude d'un objet arithmétique (critère de divisibilité, Nantes 1994), principe de numération, soit sur une notion relative à un autre cadre (commensurabilité de grandeurs, Clermont- Ferrand 1995)...

Peu de sujets rentrent dans la dernière catégorie. Parmi ceux qui parviennent à articuler des tâches spécifiques au cycle 3 et des tâches nécessitant modélisation ou preuve, je relève les types de problèmes suivants : les problèmes traitant de techniques opératoires (technique de multiplication à la Russe, Bordeaux 1994), les problèmes relevant de mise en équations nécessitant une recherche exhaustive dans le cadre numérique et une modélisation dans un cadre algébrique, voire graphique. La notion arithmétique est tantôt l'enjeu de l'étude, tantôt un outil mis en parallèle avec des outils de cadres différents.

IV. Conclusion

IV .1. Place accordée au domaine de l'arithmétique et évolution dans les choix des concepteurs

Pour répondre aux questions concernant l'importance relative du champ de l'arithmétique et les possibles évolutions dans les choix des concepteurs de sujets, les résultats observés sur l'ensemble des années et des académies sont mis en parallèle. Sont donc relevés la fréquence des sujets portant sur l'arithmétique au cours des années passées, et le nombre de sujets par année, octroyant à la composante arithmétique un barème compris entre 3 et 8 points. Ce barème[4] nous permet d'estimer le rôle non négligeable de cette composante dans le volet disciplinaire du concours :

Années	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Nombre de sujets traitant d'arithmétique	15	18	19	11	15	9	15
Nombre total de sujets disponibles	25	28	28	26	26	21	21
Barème compris entre 3 et 8 points	9	16	14	6	9	7	10

On peut constater une assez grande variabilité. La chute brutale observée en 1995 peut en partie s'expliquer par la restructuration du volet disciplinaire, elle coincïde avec l'augmentation notable de la composante « géométrie et mesure ». L'influence considérable de la démonstration hypothético-déductive que pressentait M.L. Peltier dans sa thèse se trouve avérée. Ce phénomène épisodique semble s'être renouvelé en 1997, la diminution des sujets consécutifs aux regroupements de plusieurs académies conforte la prédominance des domaines relatifs à la géométrie, aux fonctions et à la proportionnalité. En 1998 la tendance se modifie : les activités concernant le « nombre » retrouvent un certain « poids ».
Chaque année, sauf en 1995 et 1997, plus de la moitié des sujets comporte une partie traitant d'arithmétique. Chaque année encore, sauf en 1995, la fréquence des sujets accordant entre trois et huit points à la partie arithmétique du volet disciplinaire oscille entre un tiers et un peu plus d'un demi.

Les thèmes abordés (invariance et évolution)

Le tableau ci-après permet un éclairage sur la représentativité des cinq thèmes au cours des années. Il permet de préciser que les tâches relevées précédemment ne sont pas nécessairement des tâches fréquemment demandées.

[4] le barème, quand il n'est pas donné, est évalué en tenant compte d'indications données par M.L. Peltier et à l'aide d'une péréquation personnelle.

Dans la colonne (*), nous donnons le rapport « *nombre de sujets arithmétiques / nombre total des sujets* ».

Années	(*)	Multiples, diviseurs, PGCD, PPCM	Division euclidienne, congruence	Nombres premiers	Numération, bases	Entiers, décimaux, rationnels
1992	15/25	8	7	1	4	2
1993	18/28	6	7	2	6	4
1994	19/27	9	11	0	3	4
1995	12/26	5	5	0	2	4
1996	15/26	8	5	3	5	4
1997	9/21	5	2	2	5	3
1998	15/21	7	3	0	3	6

Des domaines (dans l'absolu) sont abordés avec une certaine constance. Par exemple, les tâches mettant en jeu les notions de multiples, diviseurs, PGCD sont assez présentes ; ces tâches constituent sur l'ensemble le domaine dominant. Parfois objet d'étude, mais aussi outil pour résoudre des problèmes (dans des contextes familiers aux élèves), ces notions vivent de façon ostensible dans les programmes de l'école primaire. Inversement les tâches relatives à la notion de nombres premiers restent peu fréquentes ; il est possible de penser que, ne pouvant constituer qu'un objet d'étude en lui-même, peu en rapport avec les contenus de l'école primaire, cette notion reste marginale (certes, elle intervient implicitement comme outil dans le domaine de la simplification des fractions, mais ceci reste sans rapport avec l'école ; la simplification des fractions n'est pas traitée à l'école élémentaire).

Le nombre des sujets portant sur la division euclidienne (objet d'étude et outil de modélisation), après avoir connu une progression sur les trois premières années, subit une baisse certaine. Peut-être, faut-il considérer que l'ensemble des tâches envisageables (en fonction des techniques dont dispose l'ensemble des étudiants) ayant été circonscrit, la nécessité de « trouver du nouveau » entraîne les concepteurs de sujets à délaisser ce domaine pour un temps.
Minoritaires, par rapport aux deux premiers domaines jusqu'en 1996, les tâches relatives aux numérations et aux nombres retrouvent une importance équivalente à ceux-ci en 1997 et en 1998. Je note (ceci se dessinait dès l'année 1996) une tendance à proposer au candidat une étude sur la nature, les propriétés des nombres et sur les écritures chiffrées qui peuvent leur être associées, sans rester exclusivement dans l'ensemble des entiers naturels.

Si globalement nous pouvons admettre que les notions de multiples et de diviseurs constituent les notions de référence au cours des sept années écoulées, que des notions semblent s'effacer pour un temps, nous pouvons aussi conjecturer que les activités relatives à la nature et à la désignation des nombres (non entiers en particulier) semblent prendre place dans l'édifice des savoirs évalués : les difficultés rencontrées par les élèves de cycle 3 dans le domaine des décimaux (difficultés relevées dans les évaluations nationales de 6ème) ne sont peut-être pas étrangères à cet état de fait.

IV . 2 . La spécificité de l'activité arithmétique pour un PE en première année de formation.

Quelques caractéristiques de l'arithmétique qui pourrait être celle du professeur d'école :
Les notions arithmétiques peuvent intervenir comme outils de modélisation du réel et de résolution de problèmes, comme outils pour comprendre d'autres savoirs arithmétiques (par exemple, la division euclidienne rend intelligible le principe de numération), comme objet de conjecture (propriété) nécessitant la mise en œuvre d'une démarche de preuve. Cette démarche de preuve peut consister en une recherche méthodique et exhaustive des cas envisageables ; elle peut accessoirement passer par un traitement algébrique. Cette démarche de preuve peut encore, la conjecture ayant été élaborée à partir de l'étude de cas particuliers, mettre en œuvre une ébauche de raisonnement par récurrence (la justification est la description en langage naturel de l'expérimentation). Dans ce dernier cas, une procédure plus experte sous tendrait l'utilisation d'un raisonnement par récurrence et fort souvent les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition et la multiplication dans Z.
Ces éléments théoriques sont absents, mais il n'en reste pas moins qu'une réflexion sur le statut de la modélisation et de la preuve est suscitée.

Il faut encore prendre en compte la spécificité de nombreux énoncés qui sont accessibles à des élèves de cycle 3, comme certaines des procédures de résolution qu'ils induisent. L'activité mathématique peut être perçue comme une activité moins « cloisonnée » entre celle de l'expert, celle de l'élève et celle du maître.
Enfin, il peut sembler que dans la « forteresse de la preuve », tenue presque totalement par la démonstration hypothético–déductive dans les domaines de la géométrie et de la mesure, s'ouvre une brèche pour un type de raisonnement, de preuve fondée sur « l'enjeu de vérité, la conjecture et la modélisation »[5]. Citons par exemple « l'existence des critères de divisibilité, le principe de numération décimale ». L'enjeu existe, il faut comprendre une propriété ou le fonctionnement d'un algorithme. La conjecture n'est pas donnée d'emblée (ça se voit sur le dessin ou c'est demandé dans l'énoncé, comme souvent en géométrie), elle s'élabore à partir d'une étude de cas nécessitant calcul numérique et recherche méthodique. Enfin, une modélisation arithmétique ou algébrique peut conduire à l'explication, à la preuve.
Il apparaît que l'intérêt de ces activités réside essentiellement dans le rapport qu'elles peuvent entretenir avec l'activité de recherche de l'élève et dans l'éclairage différent qu'elles portent sur la preuve. La démarche de preuve, en arithmétique, trouve en partie sa spécificité dans ses différences avec la démonstration en géométrie euclidienne. La conjecture n'est plus élaborée de *visu* ou explicitement donnée dans l'énoncé. La réalisation d'une démonstration constituée d'un enchaînement de pas de raisonnement utilisant des résultats de cours, structurée et rédigée suivant des normes (normes dont il est difficile d'ignorer qu'elles n'ont pas favorisé l'épanouissement de nos étudiants dans le domaine mathématique) n'est pas « la » finalité de l'activité, c'est la recherche (non nécessairement triviale), les résultats et leur justification qui constituent l'enjeu de l'activité. Il ne semble donc pas absurde de supposer que les activités arithmétiques, jouant de leur « nouveauté », (non familières aux étudiants, elles viennent d'être réintroduites dans le second degré), favorisant la compréhension de notions et techniques travaillées à l'école primaire, contribuent de façon fondamentale à l'édifice des savoirs que doit construire le futur professeur d'école.
Par ailleurs, les limites qu'imposent parfois certaines méthodes de résolution algébrique peut nous interroger sur l'absence de notions telles que les congruences, de démarches de preuve

---

[5] GRENIER D. (1999), Les mathématiques discrètes : objets et démarche, *Recherches en didactique des mathématiques, vol 18/2.*

telles que le raisonnement par récurrence. Si l'une des finalités de la formation initiale est de susciter, chez les étudiants, une véritable réflexion sur ce qu'est l'activité mathématique, ne s'agirait-il pas de redistribuer, plus équitablement, les rôles entre démonstration hypothético-déductive en géométrie et raisonnements arithmétiques ?

BIBLIOGRAPHIE

ASSUDE T. (1999), Evolution de l'enseignement de l'arithmétique et formation des maîtres, Actes de la COPIRELEM, IUFM de Versailles et DIDIREM. (14 p).

CHEVALLARD Y. (1985), La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné, Grenoble, La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherche en didactique des mathématiques, vol 12/1 pp 73-112, La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1995), Familière et problématique, la figure du professeur. Recherches en didactique des mathématiques, vol 18/1 pp 17 - 54, La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique , Recherches en didactique des mathématiques, vol 19/2 pp 221-266, La Pensée Sauvage.

GALISSON M.P. (1999), Un éclairage sur le rapport institutionnel à l'arithmétique, à travers l'analyse des sujets du CERPE, DEA de Didactique des disciplines. Paris VII.

GRENIER D. (1999), Les mathématiques discrètes : objets et démarches, Recherches en didactique des mathématiques, vol 18/2 pp 61-100, La Pensée Sauvage.

PELTIER M.L. (1995), La formation initiale, en mathématiques, des professeurs d'école : « entre conjoncture et éternité », Thèse de doctorat, Université Paris VII.

Annales et corrigés du CERPE (Années 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98) COPIRELEM, IREM de Bordeaux.

" L'extraordinaire dans la classe de mathématiques "

PRATIQUES PROFESSIONNELLES DE PROFESSEURS D'ECOLE ENSEIGNANT LES MATHEMATIQUES EN ZEP

COMMUNICATION :
Marie-Lise Peltier
IUFM de ROUEN

Résumé : L'article présente le compte-rendu d'une recherche en cours sur les pratiques professionnelles de quelques professeurs d'école enseignant les mathématiques en ZEP, au cycle 3. Il s'agit d'une recherche dite clinique qui s'attache à une l'étude approfondie de quelques cas. Après avoir précisé la méthodologie utilisée pour recueillir les données, et le cadre théorique dans lequel est conduite l'étude, nous décrivons rapidement le lieu de la recherche, les difficultés rencontrées, les détours obligés. Nous donnons enfin les premiers résultats obtenus à l'issue de deux années de travail.

Introduction

La recherche que je vais présenter est une recherche en cours que nous menons avec Bernadette NGONO et Annie DUBUT. Elle est issue au départ d'un questionnement de formateur en mathématiques de professeurs d'école. J'avais fait le constat, dans mon travail de thèse, que, dans des classes dites "difficiles", les stagiaires ne parvenaient pas à mettre en place des situations d'apprentissage construites à partir d'ingénieries testées par des recherches en didactiques ni même plus modestement des situations au cours desquelles les élèves étaient susceptibles d'avoir une certaine autonomie pour se confronter à un problème. J'avais alors énoncé deux facteurs principaux qui me paraissaient conduire à ce constat : le niveau de maîtrise en mathématiques du stagiaire et la spécificité de la classe. En effet, dans le cas de l'enseignement dans des classes difficiles, la question relative à la nécessaire maîtrise des contenus mathématiques permettant à tout enseignant une certaine marge de sécurité, semble se doubler de celle relative à la spécificité du public, à son comportement, à ses attentes, à son rapport aux savoirs. On pourrait dire que les ZEP jouent un rôle "d'amplificateur" des problèmes que l'on peut trouver dans toutes les classes.
Il nous a donc semblé indispensable, dans un premier temps, d'aller observer ce qui se passe effectivement dans des classes des quartiers sensibles et d'analyser les pratiques effectives de maîtres qui ont en charge ces classes au quotidien.

1. Cadre théorique et questions initiales

Ces travaux s'inscrivent dans le cadre des recherches didactiques sur les pratiques professionnelles des professeurs enseignant les mathématiques, élaboré par Aline ROBERT (1996). Le cadre théorique de référence est celui de la didactique professionnelle, issu d'une extension de celui de la didactique des mathématiques dans le sens où il est nécessaire de modifier certains concepts précédemment élaborés, et d' en d'emprunter à d'autres champs de recherche, en particulier à l'ergonomie cognitive et à la sociologie.
Les questions au début de cette nouvelle recherche étaient donc les suivantes :
- quelles sont les pratiques des maîtres enseignant les mathématiques dans des classes difficiles ?
- quelles mathématiques sont enseignées ?
- sous quelles modalités ?

L'étude que nous menons est une étude que l'on peut qualifier de "clinique" dans la mesure où il s'agit d'une étude approfondie de quelques cas et non d'une étude quantitative. Les résultats obtenus ne peuvent en aucune manière être considérés comme des résultats généraux, mais ils permettent de mettre en évidence des pratiques effectives construites en réponse aux problèmes rencontrés.
Le dispositif prévu initialement comportait des enregistrements de séances ordinaires dans plusieurs classes de ZEP. Chaque séance devait être suivie d'un entretien avec le maître, entretien également enregistré, au cours duquel le maître donnerait son point de vue sur la séance, justifierait ses choix, éventuellement les réfuterait, sans prise de position de la part du chercheur. Ce corpus ferait ensuite l'objet d'une analyse la plus précise possible dans le cadre théorique que nous avons défini pour tenter d'identifier d'une part les mathématiques enseignées dans la classe, à partir d'une étude précise des contenus abordés et des tâches proposées aux élèves, et d'autre part les pratiques effectives des maîtres.

Nous n'avions pas pris en compte au départ l'éventuelle difficulté à trouver des classes à observer. Or très vite, après avoir pris divers contacts, nous nous sommes heurtées à des fins de non recevoir, certes polies, plus ou moins argumentées, mais toujours réelles. Finalement, seuls deux enregistrements de séances ont pu être faits, dans des conditions difficiles, et les entretiens correspondants n'ont pu avoir lieu. Ces enregistrements sont difficiles à étudier en raison des nombreuses perturbations ayant eu lieu au cours des séances.
Mais un point était pour nous essentiel : nous avions réussi à pénétrer dans des classes très difficiles et nous étions prêtes à tout pour pouvoir y rester.

2. Le cadre de la recherche

2.1. L'école

L'école est située dans un quartier très défavorisé de Rouen et fait partie de la ZEP de Rouen Nord.
Elle accueillait, en 1998-1999, 179 élèves encadrés par 10 maîtres (9 femmes, 1 homme), en 1999-2000, l'effectif ayant baissé d'une dizaine d'élèves, il y a eu une fermeture et le départ d'une enseignante de notre équipe. La directrice a une demi-décharge. Parmi les enseignants 8 (et maintenant 7) sont professeurs d'école, les deux autres sont instituteurs issus de l'école normale. Leur ancienneté varie entre 6 et 4 ans, leur ancienneté dans le poste entre 4 et 2 ans.

98,7% des élèves sont issus de famille de PCS[1] 3. Les élèves sont environ à 70% des enfants issus de l'immigration, ils sont originaire d'Afrique noire francophone et des pays du Magreb.
Aux évaluations nationales de 6ème, les écoles de ZEP ont en moyenne un score inférieur de moins de 10 points par rapport aux écoles hors ZEP, " notre " école, avec un score inférieur en moyenne de 20 points, se situe de manière très nette dans la tranche des écoles les plus en difficulté.

2.2. La genèse du projet des enseignantes

Les évaluations nationales dénotant dans cette école un faible niveau d'acquisition de connaissances mathématiques et de maîtrise de compétences élémentaires en mathématiques, les six enseignantes du cycle 3 et la directrice de l'école avaient décidé, en 1997-98, de mettre en place des "ateliers de remédiation". Ces ateliers avaient fonctionné sous forme de groupes de niveau mélangeant tous les élèves du cycle 3. Les exercices proposés étaient des reprises des exercices travaillés au cours des séances de mathématiques dans les différentes classes.
Le bilan de ces ateliers de remédiation, effectué par l'équipe d'enseignantes fut réservé. Celles-ci notaient un certain nombre de points faibles relatifs aux problèmes de liaison entre les ateliers (d'où la quasi impossibilité à changer les élèves de groupes de niveau au cours de l'année), aux problèmes des effectifs trop nombreux dans les niveaux faibles, des problèmes de gestion à l'intérieur même d'un groupe en raison des différences de niveau de classe des élèves, des problèmes de redondance avec les activités ordinaires et surtout la faible motivation des élèves.
Suite à ce bilan, les enseignantes pensèrent qu'il serait intéressant de proposer des "ateliers de remédiation" plus motivants sous forme d'ateliers de jeux mathématiques de type "jeux de société" et sollicitèrent notre accompagnement pour la mise en place de ce projet en 1998-99.

3. Retour sur les problèmes rencontrés, recherche d'une méthodologie adaptée

C'est en prenant appui sur la méthodologie couramment désignée par l'expression "observation directe à découvert et participante"[2] pratiquée en sociologie pour analyser les pratiques que nous avons repris le travail de recueil des données.
Il s'agit "d'aller voir sur place" ce qui se passe au quotidien dans les classes, être physiquement présente pour regarder se dérouler les séances en temps réel pour prendre des notes, enregistrer les échanges dans le but de rendre compte de ce qui se passe et de l'analyser.
"L'observation directe est en fait une technique contraignante de recueil de matériau et une pratique réflexive conduisant à son ordonnancement" (AM ARBORIO, P. FOURNIER[3]). Ce mode d'investigation s'oppose aux analyses statistiques, il privilégie l'induction, les constats sont au départ très fortement contextualisés et il faut se garder de généralisations immédiates.
Il s'agit de restituer les logiques des acteurs, de rechercher la cohérence des comportements, notamment en prenant en compte le contexte et les contraintes auxquelles les acteurs sont soumis. D'après les sociologues, l'observation directe paraît particulièrement adaptée à l'observation de situations mettant en scène un ensemble fini et convergent d'interactions, de groupes de personnes ayant une activité particulière, des pratiques communes, ou faisant

---

[1] PCS : Profession, catégorie sociale.

[2] Cette méthode, issue de l'école de Chicago, est apparue en France après la guerre.

[3] L'enquête et ses méthodes : l'observation directe. A-M. ARBORIO, P.FOURNIER (1999) Nathan Université.

partie d'une même institution. De ce fait, cette méthode semble pouvoir être retenue pour notre étude des pratiques des professeurs d'école enseignant en ZEP.

Notre méthode actuelle consiste donc à nous "immerger" le plus possible dans l'école de manière à observer non seulement les pratiques des enseignantes dans leur classe, mais aussi le cadre dans lequel elles travaillent, les contraintes et les pressions auxquelles elles sont soumises, les attentes des élèves, des parents, de la directrice de l'école qui est associée aussi à la recherche, de la hiérarchie. Nous souhaitons également saisir le rôle qu'elles se donnent, qu'elles pensent tenir, le sens qu'elles donnent à leur travail, les ressources qu'elles mobilisent pour faire face aux différents imprévus. Nous essayons d'être attentives aux propos échangés en salle des maîtres, dans les couloirs, lors des séances de travail, aux références qu'elles donnent, aux allusions qu'elles font à leur propre histoire, à leur passé scolaire, aux différents postes qu'elles ont occupés. Ce travail d'imprégnation nécessite un temps très long et beaucoup de patience car nous avons parfois l'impression qu'il se passe toujours un peu la même chose, ce qui nous conduirait à ne plus aller observer, mais en fait, "il faut s'accommoder d'une certaine lenteur, car c'est cette lenteur qui est créatrice" (FARGE 1989). Nous consignons donc le maximum d'observations et enregistrons le plus possible d'éléments qui forment une sorte de "journal" de ce qui se passe. Ces observations ne peuvent naturellement pas être objectives, nous savons que la subjectivité peut être un obstacle à la connaissance, que nous pouvons adopter les systèmes de références des enseignantes sans y prendre garde ou au contraire que nos observations peuvent être orientées par nos propres structures de pensée et nos propres modes de catégorisation. Pour minimiser ces effets, d'une part, nous confrontons entre nous nos observations, nos "pré-analyses", nos modes d'interprétation et nous essayons de pratiquer une auto-analyse de notre propre manière de penser en interrogeant notre propre histoire personnelle pour tenter de restituer le plus objectivement possible nos observations. "Ce retour sur la pratique même de l'observation fait de la subjectivité non un obstacle mais plutôt une ressource" (ARBORIOO, FOURNIER, 1999). Quant aux modifications liées à notre présence, leur évolution au cours des années nous permette progressivement de prendre connaissances des manières successives dont nous sommes perçues, des images initiales que les enseignantes s'étaient construites sur nous-mêmes, des rôles qu'elles nous attribuent, des intentions qu'elles nous prêtent. Progressivement, nous commençons à comprendre les premières réticences à notre venue, les motivations qui les ont conduites à finalement accepter d'être observées, les bénéfices qu'elles en attendent, les gratifications qu'elles en espèrent.
Notre travail d'analyse commence en fait dès la prise de notes et le décryptage des bandes audio. Nous essayons de pointer les régularités dans les discours en classe et hors de la classe, les contradictions, les cohérences internes des modes de fonctionnement de chacune, de manière à mettre en évidence leur rapport à l'enseignement en général, à l'enseignement des mathématiques en particulier, mais aussi leur rapport à l'école, aux mathématiques, à l'éducation, et au milieu dans lequel elles enseignent.

4. La mise en place des ateliers de jeux mathématiques en 1998-1999 et l'évolution du projet en 1999-2000

Les objectifs des maîtresses étaient en priorité de remédier aux difficultés des élèves en mathématiques, de combler certaines lacunes (en mélangeant à nouveau les élèves des trois niveaux) et de motiver les élèves grâce à l'aspect ludique des activités proposées. Mais le choix de passer par des jeux de société était également argumenté plus ou moins implicitement par des objectifs transversaux tels que développer l'autonomie, la socialisation, le respect des autres, le respect des règles, des objets, l'entraide, etc.

Dans les six classes, des jeux ont été conçus, fabriqués et testés par les élèves puis proposés en atelier. Un compte-rendu détaillé de cette mise en œuvre est relatée dans la brochure "Géoloie et autres jeux mathématiques à l'école Clément Marot", diffusée par l'IREM de ROUEN (2000).

Le bilan des enseignantes suite à la première année d'expérimentation de la mise en place des ateliers jeux était relativement positif. Les enseignantes avaient apprécié le travail en équipe, la mise en commun des démarches, des méthodes, des progressions que cette expérience a suscités. Elles avaient noté des progrès au niveau de l'aisance en calcul chez certains enfants, avaient découvert l'implication de certains autres, etc. Elles mettaient en avant l'intérêt des élèves, leur investissement, leur dynamisme, l'aspect socialisant de ce type d'activités (élaborer un projet et s'y tenir, anticiper, écrire des règles et les accepter, connaître les autres), mais finalement, parlaient peu des mathématiques. Elles notaient aussi que l'observation de l'évolution des compétences mises en œuvre par les élèves était difficile car il était pratiquement impossible de suivre les mêmes élèves au cours des différentes séances. Les résultats de l'évaluation de fin d'année ont déçu les enseignantes ; ils mettaient, d'après elles, en évidence la fragilité des acquis, les difficultés de transfert des compétences des ateliers-jeux vers des exercices plus traditionnels. Si le dispositif autour des jeux avait permis en partie d'atteindre les objectifs transversaux qu'elles s'étaient fixés (socialisation, respect, entraide, motivation), il était loin d'être évident qu'il ait conduit à une meilleure maîtrise des compétences mathématiques visées. Il faut ici mentionner que malgré ce constat contrasté, les enseignantes ne se sont pas découragées, elles ont accepté de remettre en question certaines des décisions prises et ont souhaité reprendre le projet en le modifiant pour l'année 1999-2000.

Au cours de cette deuxième année[4], les objectifs des enseignantes se sont donc déplacés, il ne s'agit plus de vouloir simplement remédier à des difficultés récurrentes en mathématiques mises en évidence par les résultats des évaluations nationales, mais de réfléchir à la manière de conduire les élèves à construire et s'approprier des connaissances en mathématiques en articulant le plus étroitement possible les séances "ordinaires" et les séances consacrées aux jeux et en réfléchissant aux progressions à mettre en place sur les différentes notions.

Les objectifs transversaux toujours présents ne sont plus visés spécifiquement car, en nous appuyant sur l'expérience de l'année écoulée, les maîtresses et nous-mêmes sommes pratiquement convaincues qu'ils pourront être atteints "de surcroît" par la mise en place du projet. En revanche, ce qui est apparu fondamentalement nécessaire aux enseignantes, c'est de réfléchir de manière extrêmement précise :

- au rôle que l'on peut faire jouer à la phase de conception des jeux
- à celui que l'on peut faire jouer à celle du jeu effectif
- aux compétences réellement susceptibles d'être développées lors des différentes phases de ce type de dispositif
- aux problèmes de la validation que soulève le jeu en autonomie
- et surtout à la manière dont ce type de dispositif intégrant des phases de conception, de fabrication, et de jeu effectif peut être en étroite relation avec les activités quotidiennes proposées par les enseignants.

---

[4] Notre projet de recherche a été accepté cette année par l'INRP dans le cadre des recherches autour des pratiques des maîtres enseignant les mathématiques en ZEP du centre Alain Savary. IV

5. Premiers éléments d'analyse

5.1. A propos des jeux

* Les jeux

Lorsque les enfants conçoivent eux-mêmes des jeux (élaboration des règles, choix des valeurs numériques, etc.), la phase de conception semble être une activité riche, qui peut être assez facilement articulée avec la progression prévue par le maître, et susceptible de permettre aux élèves de développer une réelle réflexion mathématique. Cependant l'analyse des compétences que le maître souhaite développer par le jeu ne conduit pas toujours à une négociation avec les élèves de la fonction d'entraînement assignée a priori aux jeux. Par exemple, le choix des valeurs numériques ne convient pas pour que cette fonction puisse être effective (beaucoup d'enfants proposent des calculs très difficiles pour "piéger" les joueurs ; lors du jeu effectif, ils n'ont plus du tout envie de faire ces calculs).
Dans le cas de jeux faisant intervenir des propriétés, nous avons trouvé lors de la première année un certain nombre d'erreurs qui n'avaient pas été repérées par les enseignantes et qui traduisent chez elles des confusions ou des oublis dans le domaine de la géométrie, mais également dans celui de la numération. (confusion de vocabulaire, méconnaissance des propriétés caractéristiques des quadrilatères, erreurs de raisonnement, etc.).
Les jeux géométriques, bien que variés du point de vue de la forme, sont relativement pauvres au niveau des notions envisagées et du type de tâche à effectuer par les élèves au moment du jeu.
Plusieurs jeux, notamment des jeux géométriques, peuvent se dérouler sans que les compétences prévues soient travaillées, sans que les connaissances visées soient investies.
L'évolution dans la mise en place des ateliers de jeux cette année nous conduit à nuancer ces propos. Les jeux construits cette année par les élèves permettent un entraînement à la fois à la mémorisation de faits numériques et un développement de compétences de calcul rapide réfléchi et de plus, ils permettent tous une validation autonome.

* Les élèves et les jeux

Lors des phases de jeu, il est plus difficile de contrôler avec précision ce qui se passe. Certains enfants effectuent beaucoup de calculs ou réfléchissent intensément (souvent, ces enfants calculent pour tous les joueurs, vérifient, animent le jeu), mais d'autres enfants restent très passifs intellectuellement même s'ils donnent l'impression de s'intéresser au jeu.
Les modes de validation prévus lors de la conception (feuilles réponses, calculatrices, etc.) ne sont pas toujours utilisés par les enfants au cours du jeu effectif. Parfois le problème se règle assez bien par les interactions entre les élèves, mais dans d'autres cas, lorsque les calculs sont plus difficiles, le groupe ne cherche pas à valider et un consensus se fait (souvent autour du leader) même si les résultats sont erronés.
Les enfants sont relativement peu autonomes, ils jouent assez sérieusement quand un adulte est là, mais certains abandonnent très vite lorsqu'ils sont livrés à eux-mêmes.
Enfin, après l'attrait du nouveau, nous constatons une obsolescence rapide de l'intérêt des élèves : "on a déjà joué une fois, on ne veut plus jouer à ce jeu-là".

* Jeux et apprentissage
Du point de vue des apprentissages visés, l'évaluation faite en fin d'année 1999 montre un faible transfert des compétences développées par les jeux (conception et jeu effectif) dans des exercices papier crayon nécessitant les mêmes compétences et mettant en évidence de nombreuses confusions dans le vocabulaire rencontré au cours des phrases de jeu avaient renforcé ces confusions.
L'étude précise que cette évaluation a été faite par Bernadette NGONO, et sera prochainement publiée. Elle montre que certaines connaissances ne peuvent être renforcées dans ces situations de jeux que pour des élèves les ayant au moins partiellement assimilées. Dans le jeu, lorsqu'il y a hésitation d'un joueur, la réponse est généralement apportée par un autre, pour accélérer le déroulement, sans qu'il y ait nécessairement justification (ainsi un élève peut terminer la partie et même gagner sans avoir répondu une seule fois). De plus, la réponse donnée par l'un des autres peut être erronée et si elle est apportée par un élève ayant suffisamment de prestige dans le groupe, elle est adoptée immédiatement par tous.
Si l'on s'interroge sur les bénéfices attendus par l'élève de cette situation de jeu, le plus important pour lui est vraisemblablement le plaisir et le divertissement. C'est d'ailleurs, sans doute, ce qui conduit les maîtres à considérer ces situations de jeux comme motivantes pour les élèves. Or, très vite, l'élève n'est pas dupe, il mesure rapidement que les stratégies à mettre en œuvre pour gagner passent par la confrontation avec des activités avec lesquelles il est en échec ; l'enjeu, le désir de gagner, ne sont pas suffisamment forts pour provoquer chez lui un effort coûteux sur le plan cognitif, nécessaire à la réussite de la tâche. Quant aux interactions entre les élèves, il n'y a pas de raison pour qu'un élève quitte son rôle de partenaire de jeu pour jouer au petit maître et donner des explications à celui qui ne comprend pas.
On se trouve finalement devant une contradiction. On souhaite favoriser les apprentissages, tout en développant des compétences transversales chez les élèves en difficulté ; pour cela, on cherche des situations ludiques et on mise sur les interactions entre les élèves. Mais si les connaissances nécessaires pour réussir la tâche et pour entrer dans les interactions avec les pairs ne sont pas disponibles chez certains élèves, l'interaction didactique n'a pas lieu, et finalement seuls les élèves pour lesquelles les connaissances à utiliser sont suffisamment disponibles peuvent bénéficier de la situation et progresser.
Les ateliers jeux mis en place dans ces classes n'avaient pas pour objectif d'être le lieu d'acquisitions nouvelles, mais il semble qu'ils n'aient pas pu pas non plus permettre à des élèves en difficulté d'améliorer leur réussite à des tâches non surmontées dans les séances ordinaires. Là encore, les modifications apportées cette année conduisent à une amélioration sensible. Les bilans intermédiaires, effectués à partir à la fois des observations des élèves et des entretiens avec les enseignantes, montrent un très fort investissement des élèves dans les phases de recherche précédant la fabrication effective des jeux, une meilleure connaissance des nombres et de leurs propriétés, une meilleure maîtrise des tables d'addition et de multiplication. La validation étant prévue lors de la conception, nous notons moins de dérives au moment du jeu effectif. De plus, les enseignantes ayant réellement intégré la phase de conception des jeux à leur progression, les enfants s'intéressent, semble-t-il, autant aux questions posées sur les cartes qu'aux règles de jeu avec lesquelles ils pourront utiliser ces cartes. Ils ont délaissé en partie les aspects esthétiques au profit des contenus travaillés, et finalement, semblent assez conscients qu'il s'agit de jeux ayant pour but de les faire travailler ; mais ils ne sont pas démotivés pour autant car ils y semblent y trouver le plaisir ou le divertissement qu'ils peuvent en attendre.

5.2. A propos des pratiques des enseignantes observées

* La gestion du groupe entier

Les enseignantes avec lesquelles nous travaillons n'ont pas vraiment de problèmes d'autorité, elles sont manifestement respectées par leurs élèves, et entretiennent avec eux de bonnes relations, chaleureuses, stimulantes, fondées sur le respect mutuel et la confiance. Mais les élèves sont en fait très bruyants, très agités, facilement violents entre eux, très indisciplinés. Les effectifs des classes sont faibles (souvent aux alentours de 16 enfants) et pourtant le groupe entier semble extrêmement difficile à gérer. Plusieurs enseignantes semblent utiliser des techniques de gestion du groupe et de la discipline très proches de celles préconisées et employées dans des classes de maternelle petite section et moyenne section : voix très douce, retour au calme par lancement d'une nouvelle activité ou par un chant ou un conte, reprise individuelle et très discrète des manquements au travail ou à la discipline, généralement non verbale, démarrage d'une activité avec un petit groupe d'élèves et invitation des autres à venir voir et commenter ce qui se passe, etc. Il semble donc que spontanément certains maîtres agissent avec ces enfants de 8 à 12 ans comme s'ils n'avaient jamais été scolarisés, comme s'il était impossible de faire des interventions collectives qui pourraient être entendues par tous, comme s'il était impossible de donner une consigne collective qui soit suivie de la mise au travail de tous. Dans d'autres classes, les enseignantes obtiennent une discipline presque militaire, les enfants ne bougent pas, ils travaillent individuellement sur des fiches photocopiées qui leur sont distribuées successivement (au rythme du travail de chacun[5]) et qui ne donnent que très rarement lieu à une correction collective.

* L'individualisation du travail

Dans les pratiques ordinaires que nous avons pu observer, les enseignantes semblent vouloir souvent éviter d'avoir à gérer le groupe classe dans son ensemble. Elles distribuent au plus vite des tâches à des groupes d'élèves, avec des supports écrits et individuels même si les enfants ont l'autorisation de travailler à plusieurs. Elles interviennent de manière très individualisée et personnalisée auprès des élèves. En quelque sorte, la différenciation pédagogique préconisée par les textes officiels est pratiquée de fait dans ces classes. Mais les revers de cette différenciation et de cette individualisation du travail sont nombreux : manque d'autonomie par rapport au savoir - le maître est toujours sollicité pour valider le travail effectué -, absence de débats entre élèves, perte de sens des activités proposées qui sont la plupart du temps parcellisées, segmentées pour devenir des micro-tâches d'exécution d'une règle, ou d'une technique, etc.

On peut comprendre alors que, conscientes de tous les manques d'une forme de pédagogie de cette nature, les enseignantes voient dans l'utilisation de jeux mathématiques un moyen d'en combler certains (autonomie, socialisation, etc.). Même s'il est relativement clair pour elles que les jeux ne permettent que rarement de donner du sens à une notion, il semble que, sans en avoir vraiment conscience, les enseignantes visent en fait davantage à faire acquérir à leurs élèves des savoir-faire que des savoirs. Les savoir-faire peuvent en partie s'acquérir par

[5] Certains enfants remplissent difficilement une fiche pendant que d'autres en terminent quatre ou cinq. L'enseignant passe dans les rangs et donne des explications à voix basse.

répétition, donc peut-être en jouant ; ils sont plus facilement repérables et évaluables et ce sont surtout eux qui sont évalués dans les cahiers des évaluations nationales.
La question relative à l'introduction des jeux dans les pratiques usuelles des enseignants n'est pas spécifique des écoles situées en zones sensibles, mais il semble que ce choix soit renforcé dans ces classes-là.

* Le choix des contextes de problèmes

Lors des séances ordinaires, plusieurs enseignantes donnent parfois des "problèmes" à résoudre à leurs élèves. Ces problèmes peuvent être issus de manuels, mais souvent l'enseignante modifie l'énoncé en choisissant un contexte qui lui paraît plus adapté à ses élèves. Ce sont ces modifications que nous avons étudiées. Dans de nombreux cas, le maître a la conviction que, pour les intéresser, le problème doit leur présenter une situation qui leur soit familière. Mais alors, si le contexte est très familier aux élèves, la lecture de l'énoncé peut déclencher un débat qui n'a plus aucun rapport avec la question mathématique et finalement, la ou les réponses proposées par les élèves le sont sur un mode de résolution pragmatique, issu de l'expérience quotidienne[6]. On touche là à la difficulté de trouver des énoncés qui soient à la fois porteurs de sens pour les élèves et suffisamment éloignés de leurs préoccupations habituelles pour leur permettre de rentrer dans le jeu mathématique.
Il est important de souligner que le choix de contextes très proches du vécu des élèves peut conduire à une agitation extrême dans la classe, mais il peut se faire aussi que l'enseignante, constatant le registre sur lequel les enfants se situent, utilise ce moment pour travailler dans le cadre de l'éducation civique. Dans ce cas, elle justifie a posteriori l'utilité de ce moment de débat, qui a peut-être permis aux élèves de mieux s'approprier un certain nombre de notions relatives à la citoyenneté ou de règles de vie en société ou de règlements légaux.

* Le glissement dans les consignes

Dans les cas où les élèves manifestent une certaine difficulté à comprendre ce que le professeur attend d'eux, celui-ci prend souvent sur le vif la décision de simplifier la question. Cette simplification peut s'opérer de deux manières différentes. La première consiste à poser des questions intermédiaires, ce qui en fait conduit à une forme de résolution déguisée du problème par le maître puisque les élèves se voient demander essentiellement des tâches calculatoires. La seconde consiste à modifier les valeurs numériques en jeu dans le problème, ce qui a souvent comme conséquence de permettre aux élèves de résoudre le problème sans se trouver confronter à la notion que le maître cherchait à leur faire travailler[7].

---

[6] Ainsi dans une classe de CM1, pour introduire la division euclidienne, l'enseignante propose le problème suivant : Hier, j'ai eu une panne de voiture, j'ai dû la faire réparer. La facture du garagiste s'élève à 3693F. Je souhaite payer en trois fois, combien devrais-je payer chaque fois ? Ce problème a donné lieu à plus de vingt minutes de discussion sur la nature de la panne, sur le fait que ce garagiste était beaucoup trop cher, certains élèves ont proposé d'autres garagistes qui feraient la réparation pour moins cher et finalement plusieurs élèves ont proposé de verser le moins possible les deux premières fois car au bout de trois mois on ne sait pas ce qui pouvait arriver, peut-être qu'il ne serait pas nécessaire de verser le complément si par exemple le garagiste avait disparu !

[7] Ainsi un problème consistant à partager équitablement 328 objets entre 12 personnes peut se transformer en un problème de partage de 39 objets entre 3 personnes qui peut être résolu sans que soit nécessaire la mise en œuvre de techniques artisanales de division euclidienne et qui élimine la question du reste.

Ces glissements dans les consignes qui ne semblent pas avoir été prévus lors d'une éventuelle analyse a priori de la séance ont donc très fréquemment des conséquences de deux natures, soit une forme de négociation à la baisse, soit un changement d'objectif de l'activité.

* L'absence de phase de synthèse et d'institutionnalisation

Lorsque les enseignantes proposent un travail sur fiche, excessivement individualisé, il leur est très difficile de trouver un moment où les élèves pourraient tirer bénéfice d'une synthèse sur ce qu'ils ont fait, puisque les rythmes des uns et des autres sont très différents et qu'il n'est pas rare qu'ils travaillent sur des notions différentes. Mais même dans le cas où tous les élèves ont travaillé sur le même exercice ou le même problème, il semble que les enseignantes ne veulent pas instaurer un moment de synthèse collective. Elles préfèrent, semble-t-il, circuler auprès des élèves pour leur donner individuellement des indications sur la qualité de leur réponse et inviter les enfants à un autre travail au fur et à mesure qu'elles sont passées auprès d'eux. A la fin d'une séance consacrée à l'acquisition d'une notion nouvelle, il n'est pas rare que seuls deux ou trois enfants aient résolu correctement avec l'aide de l'enseignante le problème proposé. Cette absence de synthèse se double d'une absence de phase d'institutionnalisation au cours de laquelle les points importants à retenir seraient dégagés. Ainsi on trouve très peu d'affichages collectifs ayant un rôle d'aide mémoire et très peu de cahiers de "leçons" sur lesquels figureraient des résumés ou des "traces écrites" des activités effectuées. Il semble que les professeurs rencontrent une grande difficulté à trouver comment mettre en mots ce qui a été fait. De même, nous n'avons pas vu non plus d'enseignante faire référence à des aide-mémoire ou mémentos de manuels scolaires, ce qui pourrait supprimer la difficulté que nous venons de mentionner.

Conclusion

L'étude que nous menons nous a conduit à formuler quelques résultats sur les pratiques effectives relatives à l'enseignement des mathématiques en ZEP, à présenter quelques profils d'enseignants, à cerner des difficultés spécifiques et les réponses apportées par des maîtres à ces difficultés. Ces résultats devront par la suite être testés par des analyses comparées en essayant de fixer certaines variables telles que le type de quartier, le niveau de la classe, le parcours de formation de l'enseignant, son ancienneté, de manière à apporter une dimension réellement scientifique aux premiers résultats obtenus. Il sera alors nécessaire de conduire des observations dans plusieurs classes afin de repérer d'éventuelles régularités.

Par ailleurs, les questions relatives à l'implication du chercheur, celles liées aux effets de la présence d'un observateur, d'un magnétophone ou d'une caméra sur les données recueillies sont inhérentes à toute recherche sur des phénomènes d'enseignement. Mais dans nos recherches, ces questions se doublent d'un certain nombre de difficultés spécifiques. En effet, l'étude de ce qui se passe dans des classes tout à fait ordinaires et a fortiori difficiles nous a conduites à rencontrer de nombreuses difficultés d'ordre méthodologiques pour constituer un corpus réellement pertinent à étudier qui contienne à la fois des observations de séances et des traces écrites des enseignants (préparations, grilles d'analyse, productions corrigées, etc.).

Nous souhaitons pointer aussi les difficultés à utiliser les outils d'analyse usuels de la didactique. L'importance des problèmes rencontrés, que nous venons d'évoquer, pour conduire nos recherches, leur lien avec de nombreux facteurs externes aux mathématiques font que les outils d'analyse habituels de situations de classe de mathématiques sont souvent inopérants. Le cadre théorique présenté doit sans doute pouvoir convenir pour étudier ces questions en articulant différentes approches, mais le peu de travaux, notamment sur l'enseignement des

mathématiques dans des classes difficiles, nous conduit à avancer avec précaution et très lentement. En fait il est nécessaire de laisser de côté toute une série de phénomènes qui ne peuvent être étudiés raisonnablement dans le cadre de la didactique des mathématiques. Cette nécessité de découper la réalité en parcelles et d'en conserver une seule à étudier est inhérente à la recherche, mais dans le cas de nos questions, certains facteurs externes à notre champ nous paraissent extrêmement importants et nous avons du mal tant à les occulter qu'à les prendre en compte.
Ce travail nous semble cependant pouvoir contribuer à l'élaboration d'une typologie des pratiques effectives ordinaires des professeurs d'école enseignant les mathématiques dans des classes difficiles. Il permet en effet de mettre en évidence quelques pôles et de préciser certaines conséquences des choix pédagogiques, faits en réponse aux difficultés rencontrées, sur les apprentissages des élèves.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARBORIO A-M. FOURNIER. P. L'enquête et ses méthodes : l'observation directe. (1999) Nathan université

BLANCHARD-LAVILLE C. (coordonné par). L'analyse des pratiques professionnelles (1996), Editions .Lharmattan

BLANCHARD-LAVILLE C. (coordonné par). Analyser les pratiques professionnelles (1998), Editions LHarmattan

BROUSSEAU G., (1986) *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Thèse d'état, Université Bordeaux 1.

CHEVALLARD Y., (1985) *La transposition didactique*, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

CICCONE A. L'observation clinique (1998), Editions Dunod les topos

DOUADY R., (1984) *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*, Thèse d'état, Université Paris VII.

HOUDEMENT C., (1995), *Projets de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies*, Thèse de Doctorat, Université Paris VII.

KUZNIAK A., (1994) *Etudes des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré*, Thèse de Doctorat, Université Paris VII.

PELTIER M-L., (1995) *La formation initiale en mathématiques des professeurs d'école : entre conjoncture et éternité*, Thèse de Doctorat, Université Paris VII.

ROBERT A., (1995) *Un bilan, des questions sur la formation professionnelle initiale des enseignants de mathématiques à la lumière d'une réflexion sur les pratiques. Vers une didactique professionnelle*, Actes de l'Université d'été de l'IREM de Bourgogne , Août 1995.

ROBERT A., (1996) *Une approche de la formation professionnelle initiale des futurs enseignants de lycée et collège en mathématiques, un essai de didactique professionnelle*, cahier de DIDIREM n°26, IREM de Paris VII, Université de Paris VII.

ROGALSKI J., (1999) *Conférence* XXVIème Colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres, Limoges. IREM de Limoges.

DIFFICULTES DE LA REPRODUCTION ET APPROCHE DE LA GEOMETRIE EN CYCLE 1 ET 2

COMMUNICATION :
Nivôse BOULEAU
IUFM Fort de France

RESUME :
Cette recherche, dans le cadre d'un DEA, tendrait à prouver que, quoique la reproduction apparaisse un peu marginale en géométrie, la réussite de certaines épreuves bien choisies (jouant sur des variations du contraste entre une ébauche fournie et le modèle) révèle, non seulement des compétences techniques, mais aussi un type de structuration de l'espace sensible vraisemblablement bien utile pour la géométrie. Il faut cependant se garder d'entretenir une confusion entre dessin et géométrie. Des exemples de reproductions planes, sur papier uni, avec utilisation de la règle pour tracer (sans nécessité de mesurer) sont analysés.

I. La reproduction comme objet d'étude en didactique ou encore pourquoi s'intéresser à la reproduction ?

La reproduction est une activité qui est montée en puissance dans les instructions officielles, même si elle n'a pas la consécration de l'activité de construction. En effet, avant 1977, la reproduction n'apparaissait pas sous la rubrique géométrie des programmes de l'école mais dans la partie "dessin" alors que dans les documents d'application des programmes de 1995 pour les cycles 1 et 2 (b.o.e.n. n°40 de 1999) on lit : « la progression proposée en géométrie s'attache à faire comprendre pas à pas l'utilité des propriétés que l'on découvre en reproduisant des figures ou en les comparant ».

Risquons-nous à une explication, en adoptant le point de vue anthropologique de Y. Chevallard[1] : « reproduire un dessin » a trouvé une nouvelle « niche écologique » dans les enseignements mathématiques avec de bonnes conditions de survie. En effet, la reproduction n'est pas isolée (liaisons avec la construction, avec les techniques de tracé utilisées en mathématiques), elle est facilement évaluable (voir les évaluations nationales en CE2 et en 6ème) ; enfin elle a aussi une existence en dehors de l'école.

Par contre, au cycle 1, la reproduction n'est pas citée dans la partie des instructions officielles repérant des activités préparant aux mathématiques. Pourtant, elle semble présente en filigrane dans « copie de formes régulières » au paragraphe sur l'activité graphique et elle ne paraît pas plus difficile que la représentation et la description de l'espace, elles, recommandées explicitement.

[1] CHEVALLARD Y. (1992) : Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en didactique des mathématiques 12/1*, La Pensée Sauvage Editions, pp. 73-112.

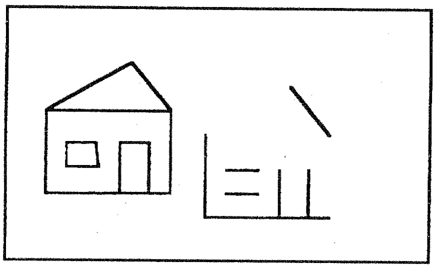
Finalement pas mal de questions peuvent se poser à propos de cette « jeune » activité au programme des mathématiques. Ainsi, la reproduction est-elle une activité « géométrique » ? Ou plus précisément, les difficultés à surmonter pour réussir une reproduction sont-elles de nature géométrique ? Quelles activités de reproduction choisir ? Pour quelles acquisitions en cycle 2, en cycle 3 ? Quelle gestion en classe pour ce type d'activité ? Comment expliquer des différences de réussites importantes ? Qu'est-il possible de faire en cycle 1 dans le domaine de la reproduction ?...
Pour tenter de répondre assez précisément à quelques-unes de ces questions, une série d'épreuves de reproduction a été proposée en maternelle et à l'école élémentaire dans le cadre d'un DEA de didactique des mathématiques.

Nous allons résumer ici la recherche, les méthodes, les résultats et les perpectives ouvertes.

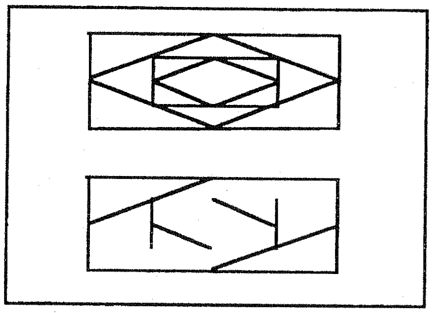
II. Etude des difficultés du couple élève/situation de reproduction

1. Le cadre de l'étude

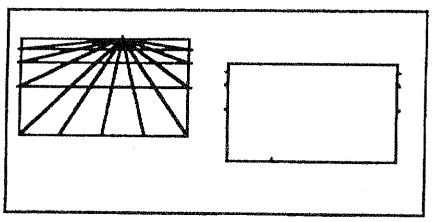
L'étude la plus rigoureuse a concerné une classe de section de grands en fin d'année scolaire, deux classes de CP (un CP en fin d'année et un autre à la rentrée que j'appellerai « CP bis » dans la suite) et enfin un CE1 en fin d'année dans une école de Martinique recrutant dans des milieux variés (total 90 élèves). L'école n'était pas une école d'application.
Voici ci-dessous, une partie des épreuves (à l'échelle 1/3 environ) données à ces élèves. Il s'agissait donc de reproductions sur papier uni, assimilables à des translations dans le plan, avec utilisation de la règle pour tracer sans nécessité de mesurer, comportant une ébauche où figurent les extrémités des segments manquants. L'épreuve 2, fut donnée deux fois à l'évaluation nationale en CE2.
Le temps de passation n'était pas limité a priori. Comme on le voit, les reproductions pouvaient être figuratives ou non, avec des translations parallèles à un côté du modèle ou pas, avec des segments manquants au nombre de 6, 8 ou 14 dont les positions variaient par rapport aux côtés de la figure. La consigne, généralement devinée après présentation du matériel, était du type : « en utilisant la règle, terminez la maison [le dessin] pour qu'elle soit « pareille » que celle déjà dessinée ».



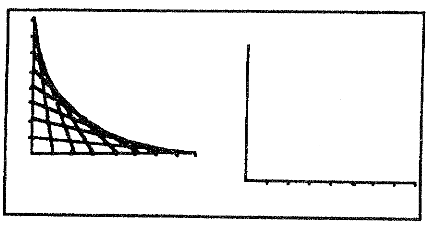
n1 bis



n-2



n-3



n-4

2. Traitement des productions

Pour éviter un émiettement des observations (si nous prenions par exemple des informations segment par segment) et obtenir une typologie qui conserve un bon rapport entre le particulier et le général, nous avons d'abord classé les travaux selon deux critères (non indépendants) :

- les liaisons à faire : toutes correctes, avec des erreurs (liaisons manquantes, imprécises, inopportunes), presque toutes ou toutes mauvaises.
- les tracés : tous droits et précis, avec quelques tracés mauvais, tous ou presque tous mauvais.

En choisissant une production typique dans chaque catégorie on a obtenu pour l'épreuve 1 bis le classement à la page suivante où figurent les productions les plus représentatives de chaque catégorie liaison/tracé.

Remarques :

- la classe indiquée pour chaque production ne signifie pas qu'elle soit majoritaire dans cette classe mais qu'elle y est présente ;
- erreurs fréquentes : absence de la liaison horizontale, tracé partiellement fait avec une ligne faite à main levée qui joint bien les extrémités, jonction entre le toit et la porte. Assez grande stabilité de ce type d'erreurs. La production CP n°4 est atypique et on n'en retrouvera plus du même genre dans la suite (consigne non comprise la première fois ?).

Nous proposons maintenant une organisation rapide et intéressante afin de préciser la situation d'une classe par rapport à la maîtrise d'une tâche :

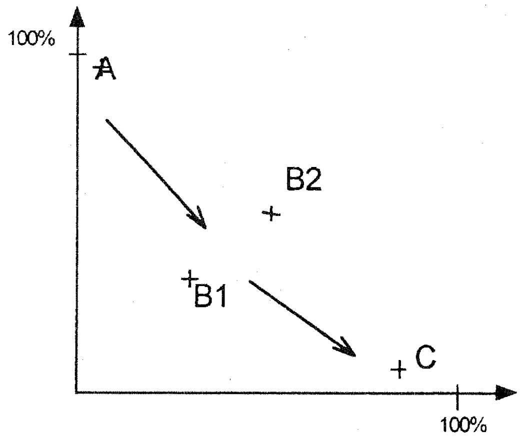
- premièrement : classer grossièrement les productions en quatre groupes au plus : celui où toutes les productions sont réussies, celui où il y a quelques erreurs, celui ou tout presque est erroné et enfin celui qui paraît avoir fourni un travail hors sujet. Dans le cas où le dernier groupe est très minoritaire on peut passer à la phase deux (les productions représentatives des groupes sont délimitées sur les classements des productions). Sinon se demander pourquoi la consigne est si mal perçue (ce qui n'a pas été le cas dans la recherche sauf un cas peut-être à la première épreuve, CP n°4) : problème du maître ou des élèves, tâche trop loin des possibilités des élèves...
- deuxièmement : mettre en évidence l'importance relative des 3 premiers groupes par rapport à la classe afin de tenter d'avoir des informations sur ce qui est peut-être une sorte de « zone proche de développement » de la classe en étendant ici un peu audacieusement le concept de Vygotsky.

Une représentation graphique est commode pour visualiser différents cas de classe, chaque cas étant représenté par un point qui a alors pour abscisse le pourcentage d'élèves ayant bien réussi par rapport à la classe et pour ordonnée le pourcentage d'élèves ayant presque tout non-réussi toujours par rapport à la classe. L'importance du groupe d'élèves ayant partiellement réussi apparaît donc de manière indirecte. Voici quelques exemples de cas de classes fictives représentés par les points A, B1, B2 et C sur le graphique suivant immédiatement le classement.

Epreuve 1 bis :

En ordonnée : pourcentage d'élèves faisant partie du groupe ayant le moins réussi (mais non hors sujet)

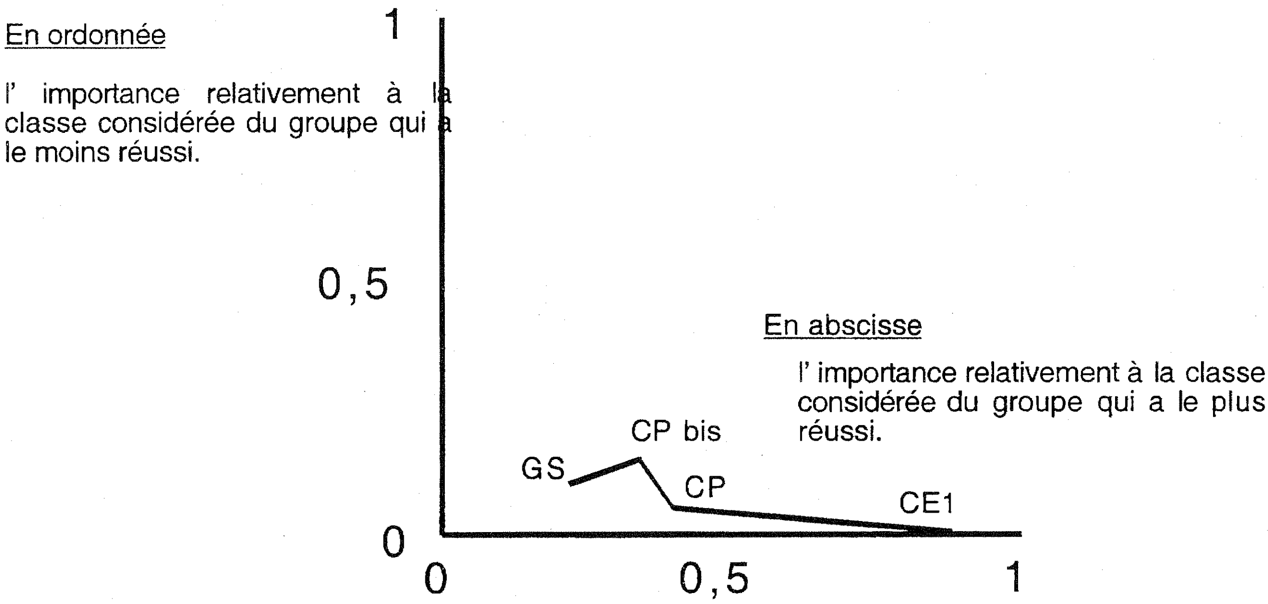
Pour une tâche et une classe données



En abscisse : pourcentage d élèves ayant le mieux réussi

Cas A : échec assez général : la situation n'est-elle pas trop complexe ?
Cas C ; réussite assez générale, remédiation pour certains.
Cas B1 : peut-être « zone proche de développement » de la classe (i.e. peut-être cette tâche est en bonne voie d'être réussie et d'actualité dans la classe avec un travail en groupe semi-hétérogène fructueux ? (hypothèse intéressante mais non explorée dans le cadre du D.E.A))
Cas B2 : hétérogénéité de la réussite, classe « coupée en deux », situation difficile à gérer pour le maître.
Les flèches indiquent l'évolution que devrait connaître la réussite dans la tâche au cours de l'apprentissage.
Ci-après, voici l'évolution globale suivant les classes pour cette épreuve 1bis. Elle est réussie dans l'ensemble, on a donc un tassement sur l'axe des abscisses. On retrouve la hiérarchie des classes (figurée par la ligne qui joint les points).

Evolution globale de la GS au CE1 pour l'épreuve1 bis



Voici maintenant les classements obtenus pour les épreuves 2, 3 et 4 :

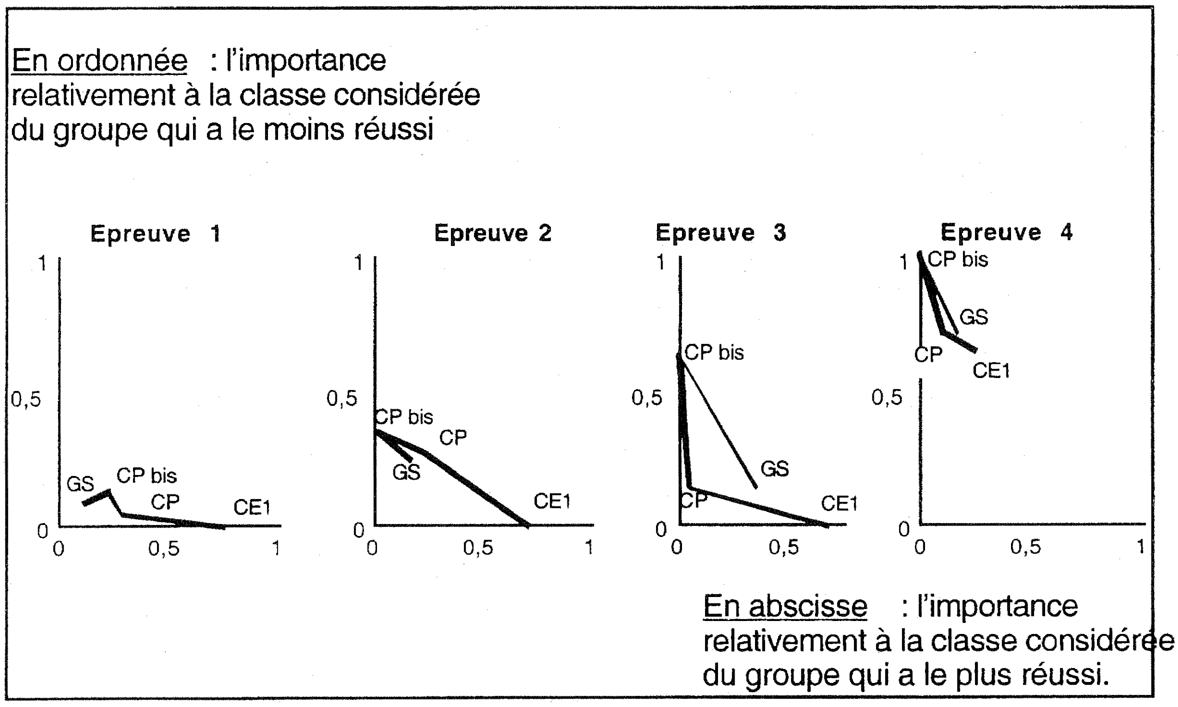
cas de l'épreuve 2 (celle donnée à l'évaluation nationale en CE2) :
Nous remarquons la tendance à la corrélation des erreurs sur les liaisons et les tracés. L'oubli d'une horizontale intérieure et des liaisons erronées du type CP 10 sont assez fréquents. Ceci est assez stable dans les classes et nous retrouvons assez ordinairement les trois groupes principaux (réussis, quelques erreurs, beaucoup d'erreurs) avec les productions typiques telles celles du CE1 n°11, CPbis n°9 et CP n°10.

cas de l'épreuve 3 (le point de fuite)
Nous remarquons une ressemblance globale avec le modèle pour toutes les productions.

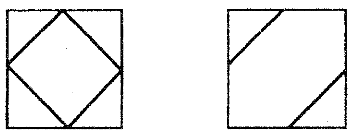
cas de l'épreuve 4 (entrelacement)
Elle est nettement moins réussie avec une tendance à l'émiettement de la figure (pas de clef trouvée pour coordonner la partie au tout).

Voyons maintenant pour chaque épreuve l'évolution en fonction des classes.

Evolution globale de la GS au CE1 pour chaque épreuve.



On obtient bien l'évolution prévue, exception faite pour la section des grands (cf. le travail réussi dans l'épreuve 4). En fait, le CP bis testé en début d'année scolaire est plus représentatif d'une section des grands ordinaire. En effet, la section des grands avait travaillé la reproduction (à main levée et à la règle) depuis la section des moyens (avec des travaux du genre ci-contre) et il semble bien que cet enseignement ait été profitable.



3. Modèle explicatif des productions obtenues, concernant notamment

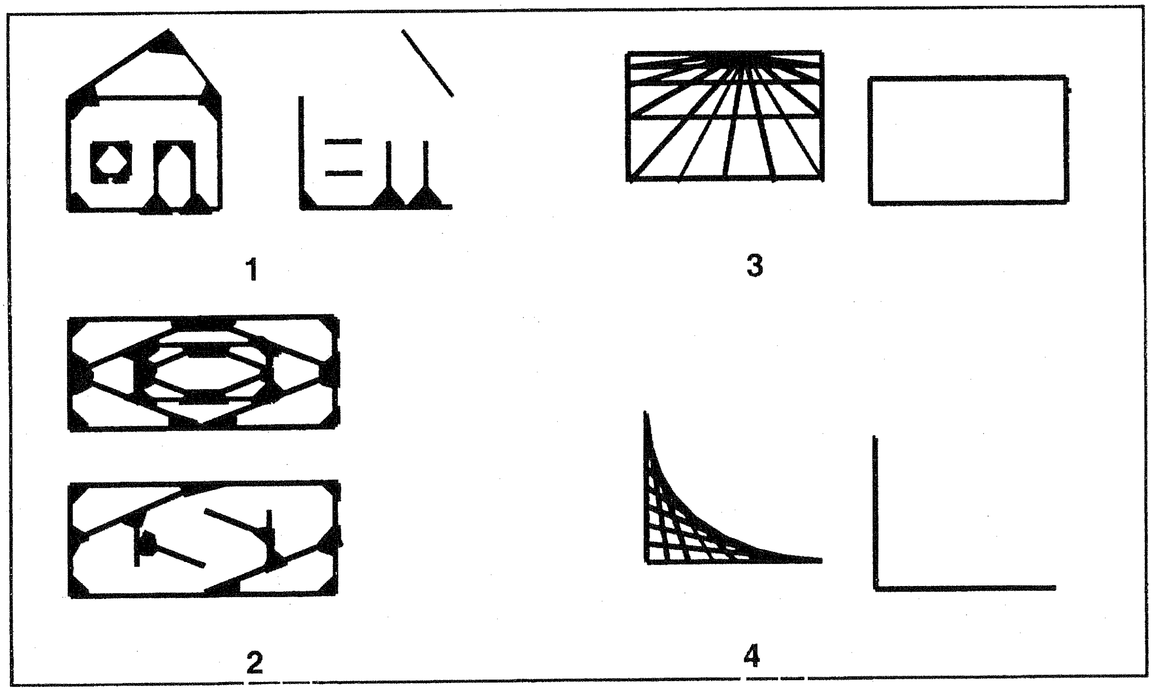
- les erreurs fréquentes que nous avons mentionnées (certains segments oubliés, certaines liaisons inopportunes, émiettement),
- les différences de réussites entre les épreuves.

Appuyons-nous sur quelques données issues d'études sur la perception en psychologie (notamment dans les écrits de Francès 63, Rosenfield 88, Pêcheux 90, Treisman 92). La perception dépend des connaissances acquises et pas nécessairement de manière consciente. Cependant, nous pouvons supposer l'existence de perceptions primaires : la variation de

brillance, la détection de l'orientation des contrastes lumineux, leur localisation dans le champ visuel. L'importance des contours est soulignée quel que soit l'âge.
Nous retrouvons peut-être ces éléments de manière sous-jacente dans des études didactiques. Ainsi, C. Laborde (1982) souligne une hiérarchie entre région, segment et point dans des épreuves de description de figures en vue de la reproduction, et R. Duval (1994) distingue plusieurs appréhensions possibles d'une figure géométrique associées à des problèmes de congruences sémantiques dans des activités classiques en géométrie.

Ceci nous amène à penser que des difficultés essentielles apparaissent dans nos reproductions lorsque les zones contrastées (i.e. où il y a pas mal d'encre par rapport à une partie unie) ne guident pas, voire induisent des mauvaises directions, pour prendre en compte des positions, des formes ou des étapes pour reproduire.

Pour bien percevoir ce phénomène nous avons exagéré le contraste dans nos épreuves.



■ Epreuve 1 bis
Les extrémités à joindre sont soit assez proches (ex. : les côtés de la fenêtre), soit isolées (la pente du toit qui est de plus un contour).
Difficultés éventuelles : la confusion entre le haut de la porte et le mur droit car elle offre une extrémité proche dans la direction du bas ; l'oubli de l'horizontale, car dans le cas où le contour a été fait en premier l'importance de l'intérieur diminue.

■ Epreuve 2
Le contraste est assez réparti à l'intérieur donc difficile de distinguer les couples de points à joindre. Donc plus d'erreurs que pour la maison.

■ Epreuve 3
Le contraste met l'accent sur le point de départ (i.e. sur le point de fuite) d'où un début facile. Mais en cours d'exécution le contraste se répartit et il devient plus difficile de s'y retrouver facilement d'où une ressemblance globale mais avec pas mal d'oublis ou d'imprécisions.

■ Epreuve 4
Le contraste met l'accent sur une courbe ou une mosaïque de quadrilatères, donc donne une mauvaise indication de point de départ ou d'arrivée. Dans l'ébauche, les points sont relativement isolés mais le moindre tracé ajoute un contraste dont il faut faire abstraction pour retrouver les autres tracés à faire. C'est donc difficile de A à Z.

Une autre difficulté importante pour toutes ces épreuves de reproduction est le traçage avec la règle lui-même (placement, ajustement à l'épaisseur du crayon, maintien, contact avec le crayon à assurer, départ et arrivée corrects...).
Ces deux difficultés essentielles se conjuguent et se renforcent l'une et l'autre. La non-automatisation du traçage ou de la lecture des figures rend difficile la mobilisation de l'attention pour superviser la tâche (cf. Hoc 87 sur la planification). Ceci expliquerait la « corrélation » constatée dans les observations à propos des liaisons et du tracé.

4. Mais finalement ces difficultés relèvent-elles de la géométrie ?

Avec Chevallard et Julien (1992), risquons-nous à cerner par quelques grands traits la géométrie[2] (op. cit. p. 52) : "Nous dirons aujourd'hui que la géométrie part du monde sensible pour le constituer en monde géométrique, celui des points, des droites, des cercles, des sphères, des courbes, des surfaces et des volumes, etc., de la même façon que, plus largement, la physique part du monde sensible pour le constituer en monde physique. La relation, épistémologiquement si difficile, entre la réalité sensible et la réalité théorique (géométrie, physique) par laquelle on essaie de rendre raison du sensible (non sans y parvenir fréquemment), est un des points fondamentaux de tout enseignement des sciences". Historiquement, le savoir géométrique (op. cit. p. 59/60) "a joué constamment un double rôle. D'une part, la géométrie s'est constituée comme science de l'espace (...) proposée en modèle à toutes les autres (...). Mais, d'autre part, quelque savante qu'ait été son organisation, la géométrie n'a jamais cessé de jouer le rôle de *technologie de l'espace,* de théorie de la maîtrise pratique de l'espace". Y. Chevallard et Julien observent que le travail géométrique ne diffère pas dans son principe du travail dans le domaine de la physique (p 56/57) : il y a une exploration de phénomènes à l'aide d'expériences "qui mettent en rapport la théorie avec l'espace sensible"[3]. Les expériences dont il s'agit sont les épures, qu'il faut distinguer des schémas approximatifs, à main levée, qui ne sont alors que des représentations de l'expérience graphique.

---

[2] On retrouve une analyse du même ordre avec C. Laborde (1988). Pour sa part, Bkouche (1990) relève trois aspects de la géométrie : la géométrie comme science autonome (la science des situations spatiales), la géométrie dans ses rapports avec les autres domaines de la connaissance et enfin la géométrie comme langage et comme représentation (...) qui constitue le fondement de la géométrisation.
[3] Il faut noter que la "droite sensible" n'est pas contenue dans la géométrie : la "rectitude" est une préoccupation de la physique ou de la métrologie (cf. op. cit. p 57)

Pour notre recherche, il est donc important de constater qu'*un objet sensible comme un tracé (ou un solide) peut avoir plusieurs statuts en géométrie suivant le contexte* :

- celui d'un ***véritable objet de l'espace sensible***[4] dont la forme pourra être modélisée dans la théorie géométrique
- celui d'une ***représentation d'un objet géométrique***
- celui d'une ***représentation d'un objet de l'espace sensible ou plus exactement de la portion d'espace occupée par cet objet***[5]

Dans le cadre de notre étude, le modèle et la copie correspondent, vu le peu d'expérience des élèves (d'où l'intérêt de parler du couple sujet/tâche), plutôt à de véritables objets de l'espace sensible. Par ailleurs, la reproduction stricte ne comporte pas de phase de formulation. On saurait donc la considérer dans cet état comme une situation amenant à elle seule la formation d'un concept (cf. par exemple la définition d'un champ conceptuel par Vergnaud en psychologie ou la théorie des situations fondamentales de G. Brousseau).
Cependant elle paraît rendre accessible des habiletés techniques (traçages aux instruments) et une expérience assez fine sur l'espace (extrémité à repérer, décomposition, recomposition de formes, rectitude par exemple) notamment dans le cas où le jeu des contrastes évoqués plus haut (cf. figure 2 ou 4) rend nécessaire un détour par rapport aux perceptions primaires inopérantes pour reproduire. Ce détour amène à une nouvelle vision de la figure, en terme de trait droit joignant des extrémités bien précises. Cette structuration de l'espace sensible dans des formes que nous retrouvons modélisées dans la géométrie, même s'il apparaît discutable de la qualifier de « début de modélisation géométrique » au sens de Chevallard, comme au sens de Berthelot et Salin[6], semble bien être utile spécifiquement pour maîtriser la géométrie. En effet, d'une part, les travaux sur l'utilisation des figures dans le raisonnement géométrique font état de traitements figuraux[7] de recomposition et décomposition et, d'autre part, la reproduction est une situation de référence pour bâtir des situations d'apprentissage se situant plus explicitement dans le domaine géométrique (cf. « décrire une figure pour la reproduire » proposé par G. Brousseau (1983) p. 203 et suivantes ; « décrire des quadrilatères pour les reproduire» proposé par R. Berthelot et M.H. Salin (1992), partie C chapitre C-7).

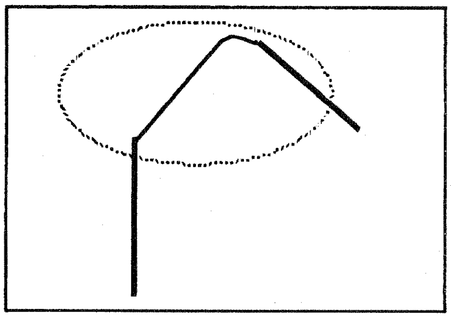
---

[4] L'espace sensible n'est en fait modélisé en géométrie qu'à une homothétie près (op. cit. p 58)
[5] Le mot "figure" désigne lui-même de manière variée, tantôt un objet géométrique (ensemble de points), tantôt la représentation d'un objet géométrique, tantôt la représentation de l'espace occupé par un objet de l'espace sensible, ou tantôt un objet de l'espace sensible.
[6] BERTHELOT R et SALIN M.H. (1992) par exemple pp. 353-363 pour saisir les enjeux de cette question.
[7] Cf. DUVAL R. (1994), MESQUITA A. (1989), PADILLA SANCHEZ V. (1990 et 1992).

III. Perspectives didactiques

Cette partie est prospective et avance plutôt des opinions. Elle n'a pas pu être communiquée in extenso lors du colloque.

Les tests analogues à ceux employés par Piaget ont pu décourager le recours à la reproduction en maternelle. Piaget et Inhelder avaient obtenu des reproductions assez approximatives avec une réussite à l'âge de 4 ans en moyenne, pour un carré aux côtés parallèles aux bords de la feuille (ce qui est facilitant) et une réussite à l'âge de 6 ans 1/2 ou 7 ans pour un losange. Pourtant, les travaux recueillis dans une section de grands semblent ouvrir d'autres possibilités en particulier par *l'utilisation d'une ébauche à compléter à partir du modèle*, qui permet «d'accrocher » la zone proche de développement de l'élève dans le cycle 1. De plus, lorsque nous regardons de près un tracé imparfait typique comme dans le cas de la première épreuve ci-contre, nous pouvons remarquer, malgré les apparences, la grande exigence de précision de l'élève (l'observation des élèves en train de tracer le confirme) : il ne parvient pas à faire un trait droit à la règle mais termine à la main pour bien arriver au point de jonction.



Enfin, notons que les élèves perçoivent assez bien ces inexactitudes quand le maître leur demande de s'exprimer à propos de la qualité de leurs productions.

Ces observations semblent montrer que les élèves de fin de cycle I, sont capables d'effectuer des reproductions assez fines au moins dans le cas où une ébauche de la figure est fournie, et des situations de reproduction semblent utilisables dès la section des petits (avec comme matériel des baguettes par exemple ; le puzzle est aussi une situation très proche de la reproduction). Reste une remarque importante concernant les travaux graphiques demandés aux élèves dans le cadre de la préparation à l'écriture. L'examen de ces tâches montre qu'elles sont souvent du domaine de la reproduction, plutôt difficiles et même avec une contrainte supplémentaire : l'ordre des tracés à effectuer pour reproduire un signe n'est pas arbitraire. Pourquoi ne pas exploiter ces activités explicitement au même titre que la reproduction vers le domaine de la géométrie ?

Faisons maintenant le bilan : la reproduction est-elle une situation d'apprentissage intéressante pour la géométrie ?
A défaut de tenir une situation a-didactique, référons-nous à la notion de situation-problème au sens de G. Arsac, G. Germain et M. Mante[8] reprenant le point de vue de R. Douady.

- *L'élève peut-il comprendre facilement le but de la reproduction ?*

En général oui, éventuellement grâce à un exemple et ceci très tôt en maternelle. C'est donc une activité qui a du sens pour ces élèves.

[8] ARSAC G., GERMAIN G. et MANTES M. (1988) : *Problème ouvert et situation-problème*, Irem de Lyon

- *Un élève peut-il s'engager facilement dans un début de reproduction ?*

Si la figure a des aspects esthétiques et que le matériel utilisé lui est familier sans pour cela avoir perdu son intérêt, alors l'élève pourra désirer facilement reproduire. Cependant la tâche ne doit pas être insurmontable aux yeux de l'élève, certaines parties de la reproduction doivent être suffisamment accessibles au départ, ce qui est souvent possible compte tenu du grand nombre de variables sur lesquelles nous pouvons jouer (voir en annexe).

- *L'élève se rendra-t-il compte facilement que sa reproduction convient ou pas ?*

Ceci est moins sûr, bien que les élèves soient souvent capables de critiquer avant de savoir exécuter. Peut-être faut-il fournir des moyens de comparaison (un calque par exemple) ? Cependant ici se trouve une faiblesse de la reproduction car l'élève peut en rester au stade de la ressemblance et du dessin, vu le statut d'objet sensible accordé aux figures. Une phase d'analyse en groupe paraît intéressante pour tenter de pallier en partie à cet inconvénient majeur et introduire une phase de formulation pour expliciter et nommer les éléments utilisés (voir en annexe un schéma de mise en œuvre possible).

- *La reproduction peut-elle comporter une difficulté faisant problème et correspondant à une connaissance géométrique ?*

Elle amène à un problème dans la mesure où le désir d'obtenir la copie ne parvient pas à être satisfait par des actions immédiates (ce qui sous-entend une possibilité de comparaison par contre assez évidente). Ceci semble réalisable pour des figures planes s'il y a une grande différence de contraste entre modèle et ébauche, et si le contraste ne guide pas. Si cette situation nécessite de situer, de décomposer des formes ayant leur pendant modélisé en géométrie, alors cela paraît utile pour la géométrie, comme nous l'avons souligné. La reproduction permet au moins de changer de regard sur le monde des formes en faisant entrer le jeune élève dans une problématique qui lui était probablement étrangère et en lui permettant de désirer savoir[9] (les élèves demandent souvent des travaux supplémentaires, plus complexes...), même si elle ne débouche pas sur l'institutionnalisation immédiate d'un concept géométrique.
Mais, malgré tout, il est bien sûr nécessaire de compléter les apprentissages par d'autres types de situations.

[9] Voir les propos p. 274 in M. LEGRAND (1996) : La problématique des situations fondamentales, *Recherches en Didactique des Mathématiques vol. 16, n°2*, La Pensée Sauvage Editions, Grenoble, pp. 221-280

Bibliographie.

BERTHELOT R et SALIN M.H. (1992) : L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire, Thèse Université Bordeaux 1
BKOUCHE R. (1990) : Enseigner la géométrie, pourquoi ?, Repère IREM n°1, Topiques Editions, pp. 92-102
BOULEAU N. (1996), Reproductions à la règle en cycle 2 de l'école primaire : difficultés et réussites des élèves, apports pour la géométrie, DEA, Université Paris 7.
BOUVIER A. (1986), dir. : Didactique des mathématiques : le dire et le faire, Cedic/Nathan
BROUSSEAU G. (1983) : Etude de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie, Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, LSD IMAG, Université J. Fourrier, Grenoble (1982-1983)
CHEVALLARD Y. et JULIEN (1991) : Autour de l'enseignement de la géométrie au collège, première partie, Petit x n°27, IREM de Grenoble, pp. 41-76
COURIVAUD J. (1991) : Le traitement graphique des images de géométrie, Repère IREM n°4, Topiques Editions, pp. 5-20
DOUADY R. (1984), Rapport enseignement apprentissage : jeux de cadres et dialectique outil-objet, cahier de didactique des mathématiques n°3, IREM de Paris 7
DUVAL R. (1988) : Approche cognitive des problèmes de géométrie en terme de congruence, Annales de didactiques et de sciences cognitives 1, IREM de Strasbourg, pp. 57-74
DUVAL R. (1994) : Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, Repère IREM n°17, Topiques Editions, pp. 121-138
DUCEL Y. et PELTIER M.L. (1986), Géométrie : une approche par le dessin géométrique, IREM de Rouen
DUSSUC M.P. (1995) Reproduction de figures sur quadrillage, Grand N n°56, IREM de Grenoble, pp. 11 - 31
FAVRAT J.F. (1991) : Tracés aux instruments et raisonnements géométriques, quelques exemples de consignes, Grand N n°49, IREM de Grenoble, pp. 11 - 35
FRANCÈS R. (1963) : La perception, Que sais-je ? PUF
HOC M. (1987) : Psychologie cognitive de la planification, Presses Universitaire de Grenoble
HOUDEMENT C. et KUZNIAK A. (1998/99) : Réflexions sur l'enseignement de la géométrie pour la formation des maîtres, Grand N n°64, IREM de Grenoble, pp. 65 à 78
LABORDE C. (1982) : Langue naturelle et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement des mathématiques, Thèse d'état, Grenoble IMAG
LABORDE C. (1988) : L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques, Recherche en didactique des mathématiques 9/3, La pensée sauvage éditions, pp.337-364
LURCAT L. (1980) : L'activité graphique à l'école maternelle, E.S.F. Paris
MESQUITA A. (1989) : L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie : éléments pour une typologie, Thèse Université L. Pasteur Strasbourg
PADILLA SANCHEZ V. (1990) : Les figures aident-elles à voir en géométrie, Annales de didactique et de sciences cognitives, IREM de Strasbourg
PADILLA SANCHEZ V. (1992) : L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques, Thèse Université de Strasbourg 1

PAPADOPOULOS J. (1993/94) : J'apprends la géométrie en dessinant ; livrets de l'élève (série du CP au CM2) ; CDDP des Pyrénées Orientales

PAPADOPOULOS J. (1995) : J'apprends la géométrie en dessinant ; Livre du maître, CDDP des Pyrénées Orientales (nous n'avons pu le consulter)

PECHEUX M.G. (1990) : Le développement des rapports des enfants à l'espace, Nathan Université

PIAGET J. et INHELDER B. (1947) : La représentation de l'espace chez l'enfant, P.U.F. Paris (éd. 1983)

ROSENFIELD I. (1989) : L'invention de la mémoire, Eshel

SIP J. (1986) : Reproduction et construction de figures géométriques, Bulletin n°20, IREM de Lille

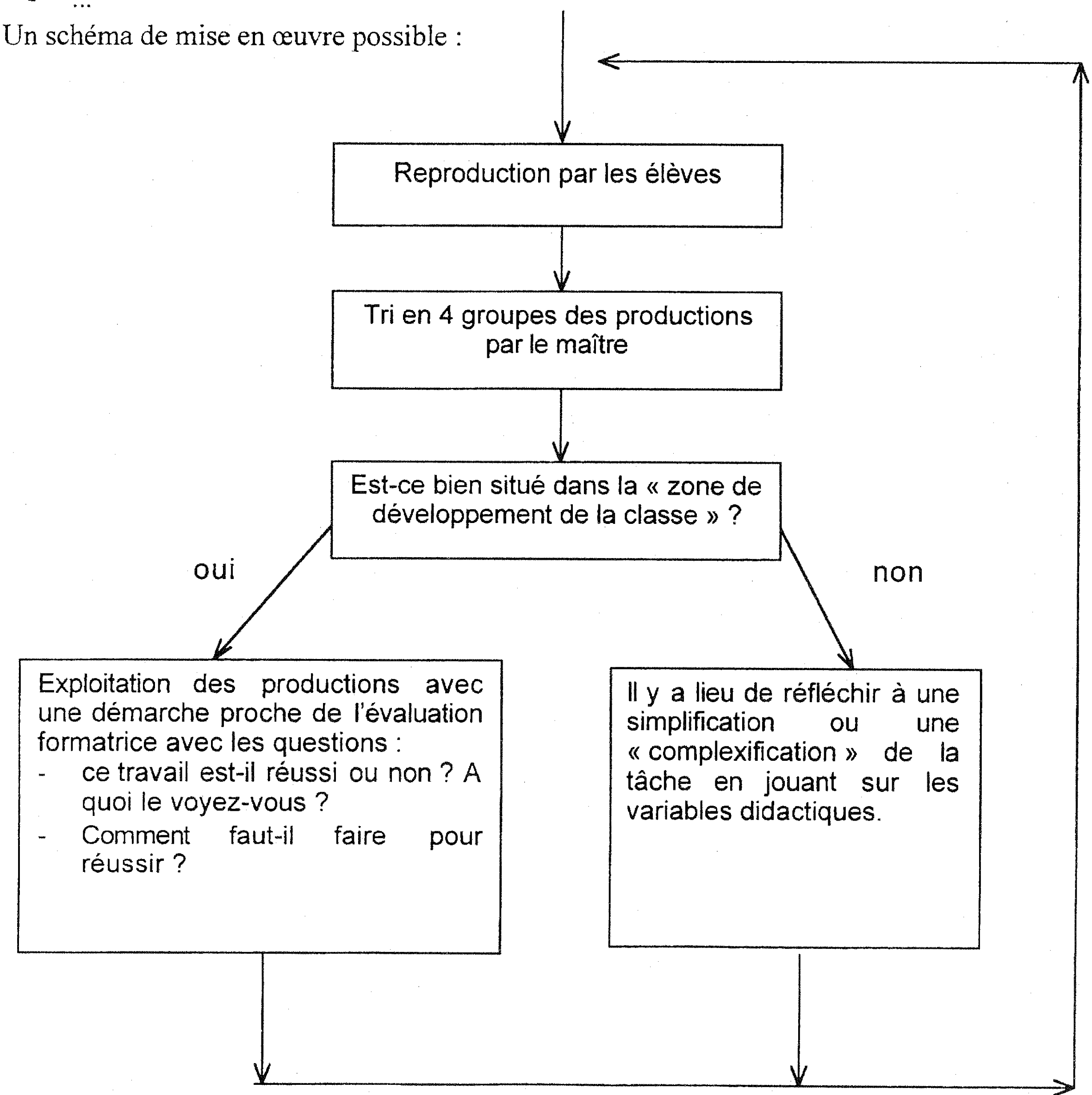
TREISMAN A. (1992) : L'attention, les traits et la perception des objets, Introduction aux sciences cognitives, Folio Essais, pp. 153-191

ANNEXE

Quelques variables didactiques :

- les outils ou instruments (leur choix et s'ils sont imposés, mis à disposition, non précisés...),
- les matériaux (pâte à modeler, baguettes, gabarits, éléments emboîtables...) ou supports (papier uni, quadrillé, pointé, géoplan...),
- le modèle (figuratif ou pas, relevant d'un espace à une, deux, trois dimensions, avec un contraste réparti ou pas, qui guide ou pas, décomposable facilement en éléments simples ou pas, plus ou moins complexe...),
- position du modèle (par rapport à l'élève ou au support),
- la taille du modèle,
- la présence d'une ébauche ou pas (et quand il y a une ébauche : la position relative du modèle et de l'ébauche, les éléments présents dans l'ébauche, la différence entre les zones de contraste par rapport au modèle...),
- l'échelle de la reproduction,
- ...

Un schéma de mise en œuvre possible :



DIFFERENTS TYPES DE SAVOIRS EN JEU DANS L'ACTIVITE PROFESSIONNELLE DES PROFESSEURS ETUDE DU CAS D'UN JEUNE PROFESSEUR DES ECOLES DANS LA TACHE "PREPARATION D'UNE SEANCE"

COMMUNICATION :
Christiane Rolet
IUFM Lyon - UMR GRIC Equipe Coast CNRS Lyon 2

Cette recherche ayant été menée avec Sylvie Coppé, les parties 1 et 2 (cadre théorique et méthodologie) sont communes aux deux articles.

1 - Présentation de la recherche - Cadre théorique

Dans cette communication, nous nous proposons de donner quelques résultats concernant une recherche en cours (Coppé S., Guillot G., Rolet C., Tisseron C. (à paraître)) portant sur les savoirs en jeu dans l'activité professionnelle des professeurs enseignant les mathématiques. Pour le moment, nous avons étudié le cas d'un jeune professeur des écoles que nous avons filmé à plusieurs reprises à deux ans d'intervalle ; nous avons donc pu mettre en évidence des évolutions dans sa pratique.

Nous cherchons à décrire et à analyser les pratiques professionnelles des professeurs afin de repérer et d'étudier les savoirs professionnels mis en jeu dans leur pratique quotidienne. A plus long terme, notre but est de donner quelques fondements à des pratiques de formation améliorant l'intégration et l'articulation de ces différents types de savoirs. Il s'agit d'une étude de type macroscopique visant à dégager des grands traits qui pourront être ensuite développés de façon plus fine.

Ainsi, nous considérons que, quelle que soit la discipline enseignée, le professeur met en jeu différents types de savoir qui sont utilisables (utilisés) à différents moments de son travail comme, par exemple, en classe quand il prend des décisions, quand il règle un problème avec un élève, mais aussi hors de la classe quand il prépare son cours, quand il corrige des copies, etc. Pour le moment, nous prenons le terme savoir dans un sens très large et nous avons identifié a priori :

- des savoirs relevant des disciplines scolaires traditionnelles (français, mathématiques, etc) pour lesquels il existe un savoir savant, dont le processus de transposition a été étudié, et qui donnent lieu, en général, à un programme explicite dans le cadre de la formation et dans le cadre de la pratique,
- des savoirs relevant des didactiques de ces disciplines. Ils concernent l'enseignement et l'apprentissage de savoirs disciplinaires. Ils ont été établis récemment et il en existe des textes de référence, ou bien ils sont issus de recherches en cours. Notons que leur transposition reste un sujet de recherche (S. Johsua (1996), J. Portugais (1995), par exemple) et qu'ils n'ont pas forcément donné lieu à l'écriture d'un programme officiel,
- des savoirs faisant appel à d'autres disciplines telles que la philosophie, la psychologie, la sociologie, etc. Ils permettent de développer un discours et des savoir-faire sur la profession sans être centrés sur une discipline et sur les conditions de son exercice,

- des savoirs ou savoir-faire qui, a priori, ne relèvent d'aucune discipline reconnue comme telle et dont la transmission se fait soit par oral, soit par imitation et pour lesquels il n'existe pas ou peu d'écrits de référence.
Nous choisissons de regrouper ces deux derniers types de savoirs sous le vocable de savoirs pédagogiques, nous conformant en cela à une classification largement adoptée par certains auteurs (M. Durand (1996), C. Gauthier (1997)).
Si ces différents types de savoirs sont mis en œuvre dans la pratique professionnelle des enseignants, nous ne prétendons pas qu'ils sont seuls à piloter l'action de l'enseignant : celui-ci agit aussi avec sa propre philosophie de l'éducation, ses propres représentations et croyances.

Certains de ces savoirs sont explicites, ils ont pu être institutionnalisés, par exemple lors des cours à l'IUFM, d'autres restent implicites, mais ils sont partagés par une certaine communauté (les professeurs confirmés, les maîtres de stage, etc.). On pourrait dire qu'ils "se laissent voir". Certains sont écrits (on peut les trouver dans des ouvrages de référence), d'autres se transmettent par oral. On peut également les distinguer par leur caractère public ou privé (dans ce cas, nous incluons les représentations que se font les professeurs des mathématiques, de l'apprentissage, de l'enseignement, etc).

De plus, si on se place dans une perspective écologique (Y.Chevallard (1994)), nous pouvons voir qu'ils ont différentes origines, qu'ils vivent et se construisent dans différents "lieux". Nous prenons le terme lieu dans un sens très large qui recouvre à la fois des lieux géographiquement différents (IUFM, établissements scolaires, bibliothèques, etc.) mais également des personnes différentes (formateurs d'IUFM, maîtres de stage, autres enseignants, etc.) ou des outils différents (manuels scolaires, ouvrages généraux, logiciels, etc).
Nous faisons l'hypothèse que l'intégration, par les stagiaires ou les professeurs confirmés, de ces différents types de savoirs provenant de lieux différents et relevant pour certains de la formation théorique initiale et/ou continue et pour d'autres de la formation pratique reste à la charge de ceux-ci. Or cette intégration ne va pas de soi. La mise en œuvre de situations de classe avec une ingénierie complexe suppose des savoirs et savoir-faire, qui, s'ils ne sont pas effectifs, font obstacle à la mise en œuvre de la situation ou à sa bonne marche. Si un travail long et complexe n'est pas poursuivi au-delà des années de formation à l'IUFM, il est fort probable que les connaissances acquises ne soient pas mises en œuvre dans la pratique quotidienne de la classe, et que les maîtres reproduisent des attitudes et des gestes des enseignants qu'ils ont connus en tant qu'élèves. Ainsi la mise en place de situations nouvelles risque d'être abandonnée.

En liaison avec cette étude théorique nous cherchons à retrouver l'expression de ces savoirs dans la pratique effective. Pour cela, nous utilisons le modèle théorique développé par Y. Chevallard (1996, 1997, 1998) à propos de "la fonction professorale", dans lequel il introduit les notions de tâches, techniques, technologies et théories. Il indique alors "Je pose alors que *toute pratique se laisse analyser de différents points de vue et de différentes façons, en un système de tâches*, c'est-à-dire d'activités relativement bien circonscrites, qui se découpent dans le flux de la pratique." (souligné par l'auteur).
Ces tâches sont accomplies au moyen d'une certaine manière de faire, ou technique : "ensemble réglé de gestes que l'on accomplit dans un certain dispositif" (Y. Chevallard (1995)). Le couple type de tâches-techniques constitue par définition, un savoir-faire. Mais un tel savoir-faire ne saurait vivre à l'état isolé : il appelle un environnement technologico-théorique ou savoir (au sens restreint), formé d'une technologie, "discours" rationnel censé justifier et rendre intelligible la technique et à son tour justifié et éclairé par une théorie.

Le système de ces quatre composantes, types de tâches /technique /technologie /théorie constitue alors une organisation praxéologique ou praxéologie : "le rôle du professeur, tel que le décrivent les textes, ou tel qu'on peut l'observer sur le terrain, se laisse exprimer en termes de types de tâches, ou plus exactement, de praxéologies" (Chevallard (1997)). Mais le système de tâches correspondant, ou plus précisément la praxéologie au sens ci-dessus n'est pas défini de façon univoque, il diffère suivant qu'on envisage par exemple ce qui est prescrit par l'autorité de tutelle, ou ce qui peut être effectivement observé, voire ce qui pourrait exister sous certaines conditions.
Nous reprenons donc notre question de départ que nous formulons ainsi. En considérant un professeur dans sa pratique professionnelle, on peut identifier un certain nombre de tâches qu'il a à effectuer et/ou qu'il effectue. On peut faire l'hypothèse qu'il emploie pour cela un certain nombre de techniques plus ou moins conscientes et/ou explicites. On peut alors se demander s'il est capable de justifier ses actions, ses prises de décision par un discours technologique voire théorique. Nous cherchons actuellement à répertorier, à décrire et à qualifier ces différentes tâches, à mettre en évidence des techniques qui les spécifient et, éventuellement, des technologies correspondantes. Nous pensons que tous ces éléments sont l'expression des différentes connaissances des enseignants.

Notons que cette définition des tâches et des techniques pose problème puisqu'en considérant une tâche on peut identifier une technique qui à son tour peut être considérée comme une tâche. Par exemple, si la tâche est "ouvrir une porte", on peut envisager la technique suivante : se diriger vers la porte, prendre la poignée, l'actionner, tirer la porte vers soi, sortir, etc". mais on peut également considérer la tâche "prendre la poignée" et étudier les techniques associées. En bref, se pose donc le problème du degré de granularité du découpage. Comme nous visons à étudier et à analyser la pratique professionnelle de professeurs du point de vue de l'intégration de différents savoirs, nous considérons qu'il faut partir de la cohérence de leurs actions et donc partir des tâches explicitées et finalisées par un objectif identifié soit par eux-mêmes (par exemple dans une fiche de préparation ou dans un entretien), soit par nous-mêmes (à partir de la fiche de préparation, ou bien à partir de ruptures repérées dans les activités des élèves).
Chaque objectif ainsi exprimé permet d'interpréter la phase correspondante comme la réalisation d'une tâche, les gestes sont alors interprétés comme des techniques pour réaliser la tâche. Nous voyons ainsi que ce qui nous est donné est le flux des actions de l'enseignant dans lequel nous repérons des gestes et nous identifions et décrivons des tâches. Ce découpage est fait à partir de l'identification d'une phase significative du point de vue du fonctionnement du savoir dans la classe ou du point de vue de la gestion des interrelations entre les acteurs et entre les acteurs et le savoir.
Sur cette question, notre position nous paraît voisine de celle de A. Lerouge (1999) qui reprend la notion d'unité significative élémentaire en référence à C.S. Pierce (1978) et à J. Theureau (1992).

Enfin ce travail de repérage des tâches s'accompagne d'un travail de caractérisation possible. Ainsi, par exemple, on peut distinguer les tâches prescrites et les tâches réalisées (J. Rogalski (2000) parle alors d'activités). Ces tâches peuvent être prescrites par l'institution (par exemple, enseigner la division au cycle 3) ou prescrites par le professeur lui-même de façon plus ou moins explicite (proposer le problème d'introduction de la division de tel manuel). Les tâches réalisées peuvent être analysées comme la mise en œuvre effective des tâches prescrites (avec un certain décalage) ou bien ce sont des tâches imprévues.
On peut aussi distinguer les tâches routinières et les tâches problématiques du point de vue de leur mise en œuvre par l'enseignant. Les tâches routinières sont effectuées par le professeur

sans que celui-ci ait besoin de décrire les techniques associées qui deviennent naturalisées "ces dernières nous semblant dès lors naturelles, non apprises, depuis toujours disponibles." (Y. Chevallard (1995)). Notons que la mise en mots de ces techniques est souvent difficile puisqu'elles sont complètement intégrées et que cela est heureux puisque nous sommes capables de faire bien plus de choses que l'on peut en dire.
Les tâches problématiques peuvent être non prévues mais pas toujours. Prenons par exemple la gestion d'une phase de validation dans une situation mathématique où la responsabilité de la preuve est à la charge des élèves. Cette tâche peut être problématique pour un enseignant inexpérimenté. Elle peut devenir routinière lorsque le problème mathématique sur lequel elle s'appuie a été expérimenté souvent par l'enseignant.
Nous pouvons enfin distinguer des tâches à caractère plus nettement didactique, car propres à la discipline enseignée (donner un travail à faire aux élèves, fournir des aides individualisées, gérer les erreurs, gérer les débats, la validation, le bilan, l'évaluation, etc.), et d'autres, à caractère plus pédagogique, concernant davantage la gestion des interactions (créer et maintenir l'attention des élèves, gérer l'espace de la classe, les relations entre élèves, les incidents critiques, etc).
Notons que ces caractérisations ne sont pas indépendantes. Une tâche prescrite peut être routinière ou bien une tâche réalisée peut être problématique, etc.

2 - Méthodologie

Comme nous l'avons dit, nous étudions la pratique quotidienne des maîtres. Nous n'intervenons donc pas sur les préparations, sur les activités proposées. La méthodologie de recueil de données que nous avons adoptée est la suivante.
Nous filmons une ou plusieurs séances de classe. La caméra est tenue à l'épaule par le chercheur qui se tient quasiment immobile au fond de la classe : les seuls déplacements sont latéraux pour éviter certains contre-jour. L'objectif est fixé sur le professeur ou bien en plan large sur la classe vue de dos. Le but est de troubler le moins possible le déroulement de la classe. L'enregistrement se fait en continu.
Nous demandons au professeur de nous donner ses fiches de préparation (s'il en fait) et tous les documents dont il se sert avec les élèves.
Nous visionnons la bande vidéo une première fois et nous faisons un premier découpage de la séance pour mettre en évidence des tâches, en commençant à décrire les techniques et en émettant des hypothèses sur les technologies associées. Nous prévoyons également un certain nombre de demandes d'explicitations pour le professeur filmé.
Quelques jours après, nous visionnons la bande vidéo avec le professeur filmé et nous avons un entretien enregistré avec lui, dans lequel nous menons un questionnement pour lui faire expliciter ses choix, ses critères de décision. Nous avons le souci de ne pas demander au professeur de se justifier. Nous arrêtons la bande et nous entamons le dialogue chaque fois qu'il veut apporter un complément d'informations ou que nous voulons une explicitation. Cet entretien nous aide à analyser ce qui s'est passé pendant la leçon en termes de tâches, techniques et technologies et à valider certaines des hypothèses faites dans la première analyse.
Tous ces documents sont décryptés. Notre étude portant sur le professeur, nous ne cherchons pas à repérer systématiquement les élèves qui interviennent dans le déroulement. Nous les notons E pour un seul élève et Es quand il y en a plusieurs. Le professeur est noté A. Dans l'entretien, l'interviewer est noté I. Les gestes ne sont décrits que dans la mesure où ils

éclairent notre propos, et restent donc très globaux. Nous numérotons les items et nous les notons S pour ceux de la séance et D pour ceux de l'entretien.
Nous exploitons donc ces films à deux niveaux : par une analyse directe en fonction de notre propre analyse a priori et par l'analyse de l'entretien.
Actuellement nous avons fait et décrypté trois films portant sur une leçon de mathématiques (nous avons également filmé une séance de biologie et une séance de géographie dont nous ne parlerons pas ici).

- A filmée en 97 en CE2
Il s'agit d'une leçon sur la division qui est une seconde "première rencontre" avec la division (elle l'avait déjà fait à la séance précédente en réalisant des distributions de cartes). Les élèves doivent résoudre un problème de division mais sans utiliser la technique opératoire. Le support utilisé est la leçon d'Objectif Calcul CE2 p. 156.

- A filmée en 99 en CE1 dans une première école (notée 99/1)
Cette école est située en ZEP, elle est donc réputée comme étant à public difficile.
Il s'agit d'une leçon sur la multiplication et plus précisément d'une première rencontre avec la multiplication : les élèves travaillent sur des collections et des groupements particuliers d'objets. Le support utilisé est la leçon d'Objectif Calcul CE1 p. 52.

- A filmée en 99 en CE1 dans une seconde école (notée 99/2)
Cette école est située dans une banlieue plutôt résidentielle.
Il s'agit d'une leçon sur la multiplication qui est la suite de la séance de 99/1 : c'est une seconde première rencontre avec la multiplication et le problème vise à faire émerger des écritures multiplicatives. Le support utilisé est le problème des quadrillages : les élèves doivent écrire un message caractéristique d'un quadrillage.

3 - Tâche qui consiste à préparer une séance

Dans cette étude, nous n'avons pas observé les moments de préparation. Nous n'avons accès aux techniques employées pour ces préparations qu'à travers les traces écrites produites par A (les fiches de préparation reproduites) et ce qu'elle en dit dans les interviews. Il nous semble cependant que l'on peut déjà faire un certain nombre d'inférences à partir de ces observables.

a - Préparation de mathématiques en 1997

Il s'agit d'une troisième séance sur l'approche de la division euclidienne. Dans la première, les élèves ont eu pour tâche de réaliser une distribution de cartes à jouer (exercice pris dans Objectif calcul CE2 p. 152). Dans la deuxième, les élèves ont eu à résoudre "des petits problèmes sur le même type" suivant la formulation de A.
Dans celle-ci, les élèves doivent faire, par des moyens empiriques, la division de 2325 par 12. A utilise un texte de problème pris dans le manuel scolaire Objectif Calcul CE2 p. 156, qu'elle a photocopié, qu'elle a coupé en deux et mis sur deux demi-feuilles.

Voici sa fiche de préparation que nous reproduisons à l'identique.

Vers la division

* objectif : résolution d'un problème de division sans utiliser la technique opératoire

* compétences visées :
- approcher le dividende avec des multiples du diviseur
- écrire une division sous sa forme canonique

* dispositif : travail individuel

* matériel : polycop de la découverte extraite du nouvel objectif calcul p 156, brouillon

* déroulement (55 min)

- distribution de la première partie de la découverte. Lecture individuelle du problème puis lecture à haute voix d'un élève. La maîtresse demande aux enfants de se mettre à la place d'Edouard et d'essayer de résoudre le problème au brouillon. Elle passe auprès des élèves "bloqués" pour les mettre sur la voie (10 min).

- distribution de la deuxième partie de la découverte où figurent les premiers calculs d'Edouard. La maîtresse demande aux enfants de comparer leurs calculs avec ceux d'Edouard. Sont-ils d'accord avec lui ? Explications (8 min).

- les enfants répondent aux questions 1 et 2 individuellement pendant que la maîtresse passe dans les rangs (10 min).

- mise en commun et explication au tableau (15 min). Ensemble, on essaie d'écrire la division sous forme canonique comme on l'avait fait pour la distribution de cartes (5 min).

- recherche individuelle du n° 8 p 157.

Sur la forme générale de cette fiche, nous pouvons voir tout d'abord qu'elle est faite avec un traitement de texte. Le découpage en rubriques provient de sources difficiles à identifier mais les titres des rubriques ("objectif", "compétences visées", "dispositif", "matériel", déroulement") nous semblent très courants. Ces termes sont employés de façon fréquente à la fois à l'IUFM et dans les établissements scolaires. Cette technique de découpage peut aussi bien engager une "naturalisation", avec la création d'un moule identique et des titres de rubriques semblables pour toutes les séances de mathématiques (voire toutes les séances dans toutes les disciplines), qu'une possibilité d'adaptation et de changement d'une préparation à une autre.
Les "compétences visées" déclinent l'objectif sur le plan des savoirs précisément visés dans cette séance (procédure de résolution et écriture finale). Elles donnent des prémisses de l'institutionnalisation cherchée. L'expression de la première compétence est très proche de ce qui a pu être formulé dans les cours faits à l'IUFM sur la division euclidienne, ou même elle peut avoir été tirée du chapitre précédent du manuel utilisé. La deuxième compétence est recopiée telle quelle dans le manuel utilisé. Le "dispositif" annoncé (travail individuel) prévoit un type d'organisation pédagogique.

En fait, le déroulement qui suit nous permet de dire que A prévoit également des phases collectives. On peut faire l'inférence que cette forme de travail est là pour signifier que le travail des élèves ne se fera pas en groupe.
La rubrique "matériel" comporte le texte du problème et prévoit l'utilisation du brouillon.
La rubrique "déroulement" est écrite linéairement avec un découpage temporel très strict en différentes phases minutées : 10 minutes pour la prise de connaissance de la première partie du texte, 8 minutes pour une prise de connaissance de la deuxième partie du texte, 10 minutes pour une recherche individuelle du problème, 15 minutes enfin pour la mise en commun et l'institutionnalisation, les minutes restantes seront employées dans un exercice.

Dans cette fiche, nous pouvons identifier un certain nombre de tâches que A se prescrit à elle-même et qui se traduisent d'une part par des techniques et d'autre part par des tâches qui seront données aux élèves.
Nous pouvons repérer tout d'abord dans la rubrique "objectif" et dans la rubrique "compétences visées" la tâche principale : faire résoudre par les élèves un problème de division mais sans utiliser la technique opératoire de la division.
Les sous-tâches t_1 (faire résoudre la première partie du problème) t_2 (faire comparer les calculs d'Edouard avec ceux des enfants) et t_3 (faire répondre aux questions 1 et 2 par les élèves et continuer la résolution) repérées comme différentes phases de l'activité des élèves sont prévues ainsi dans la rubrique "déroulement" dans les trois premiers alinéas.
Pour t_1, la technique de A consiste à prévoir dans la résolution deux moments ou sous-tâches que nous exprimerons simplement par "donner le problème" et "aider individuellement les élèves". Le premier n'est pas énoncé tel quel mais A a des techniques consistant à prévoir des étapes chronologiquement organisées permettant de le réaliser : distribuer le problème, faire lire individuellement, faire lire à voix haute. Le deuxième est exprimé par un geste finalisé : la maîtresse passe auprès des élèves bloqués pour les mettre sur la voie.
Pour t_2, on ne trouve que des actes ou des paroles de la maîtresse (elle prévoit une question à poser aux élèves). Elle indique "explications" sans que l'on connaisse leur auteur et leur nature.
Pour t_3, A prévoit une tâche des élèves (répondre aux questions) et une activité non finalisée de la maîtresse ("passe dans les rangs").
On trouve ensuite dans le dernier alinéa du déroulement l'expression d'une tâche qui consiste à faire écrire la division sous forme canonique ainsi que quelques façons de faire (travail en commun, écriture au tableau, rappel de la séance précédente).
En conclusion, nous voyons dans cette fiche de préparation une anticipation partielle et non toujours distinguée de tâches de la maîtresse et des élèves, des objectifs de la maîtresse et des moyens permettant de les atteindre. On ne trouve notamment pas la résolution du problème posé aux élèves ni de prévisions écrites et précises des difficultés et erreurs des élèves.

Dans l'interview, en ce qui concerne le choix général de la progression, A nous indique qu'elle prend une relative liberté pour rejeter le livre de la classe qui n'adopte pas la même progression, et choisir un autre ordre des séquences. Les savoirs relatifs à cette mise en place générale sont issus de la formation reçue à l'IUFM : A connaît "ce qu'on abordait simplement en CE2" (item 14), l'ordre des séquences à conduire pour un apprentissage de la division et le manuel "Objectif Calcul" qui avait été "épluché" (selon ses termes) lors des cours, et dont la chronologie la satisfaisait. Apparemment, A s'était fait une opinion favorable de ce manuel pendant sa formation. Elle évoque aussi l'ouvrage ERMEL mais sans que l'on sache quel en a été le profit.
Il semble que le choix dans cette séance ait davantage porté sur l'énoncé du problème que sur la situation. A n'a pas regardé le livre du maître. Elle a choisi cet énoncé car, pour elle, il

ressemblait davantage à une situation-problème que ceux proposés dans le manuel habituel de la classe : "oh ben y'avait pas de situation vraiment problème en fait " (item 54).
Nous lui faisons expliciter ce que cela signifie pour elle : "donc ils ont pas de procédure experte pour résoudre le problème et normalement ils peuvent valider leur résultat" (item 60). Elle a une idée des procédures possibles des élèves certainement grâce à sa formation et indique qu'elle a vérifié les valeurs des nombres en jeu afin de discréditer les procédures additives et soustractives. Elle énonce de façon très générale l'intérêt des conflits, des critiques d'autres procédures que la sienne. Mais A n'envisage pas, dans sa préparation, la gestion de la confrontation et de la validation. On peut donc penser qu'elle a des connaissances partielles sur la notion de "situation-problème" mais son discours montre qu'elles sont fondées sur des aspects de surface et non finalisées par une conception globale du dispositif associé. Il se peut que ce discours "résonne" chez elle avec une théorie "socio-constructiviste" à laquelle elle adhère intellectuellement, mais qui n'est pas exprimée ici.
La technique de mise en place de telle situation est déjà relativement "naturalisée" : "c'est ce que je fais en général" (item 38).

Nous relevons, et cela confirme notre analyse de la fiche de préparation, que A a une certaine confiance en elle. Sur le plan mathématique, elle se sent assez sûre d'elle. Pour preuve, le fait qu'elle n'a pas estimé nécessaire de faire l'exercice avant le cours (elle ne connaissait donc pas la réponse c'est-à-dire le nombre de boîtes à commander).
Sur le plan didactique, A retire de sa formation des éléments théoriques qui lui permettent de choisir et de légitimer sa progression et le choix de ses énoncés de problèmes. Notons que A ne détaille pas cette fiche lorsque ses façons de faire sont suffisamment en place pour qu'elle estime inutile de les détailler davantage (pas d'écriture des blocages et des obstacles prévus, pas d'écriture des consignes qui seront données aux élèves).

b - Préparations de mathématiques en 1999

Il s'agit de séances d'introduction de la multiplication dans un CE1. Les séances prennent appui sur le manuel Objectif Calcul de CE1. La séance 1 est faite à D (classe située en ZEP), la séance 2 est faite à T (banlieue résidentielle) à la suite de la séance 1. Dans la première séance, il s'agit de proposer une première rencontre avec la multiplication en faisant travailler les élèves sur des collections et des groupements particuliers d'objets ; dans la deuxième qui y fait suite, il s'agit de présenter les écritures multiplicatives pour des collections de carreaux d'un quadrillage.

Les fiches sont manuscrites, présentées à la suite l'une de l'autre, sur la même feuille. Elles ont été retranscrites ci-dessous en respectant la mise en page de A.

CE1 <u>La multiplication</u>

Séance 1
<u>Objectif</u> : comprendre des énoncés décrivant des situations de groupement ⇒ comprendre des expressions telles que : chaque, chacun, l'un, n collections de x objets

<u>Déroulement</u> :
- Découverte avec la situation d'Obj. Calcul Fiche 5
- Exercices 1-2-3-4 fiche 52 (Obj. Calcul)

Séance 2 :
Objectifs : • introduire la notion de produit de 2 nb et le signe x
• résoudre des pb d'additions réitérées

Déroulement :
- Distribution des 3 quadrillages de 252 carreaux :
14 x 18 9 x 28 21 x 12
- Par groupes de 2 : "Ecrivez des info. permettant à la classe de reconnaître le quadr. q vs avez choisi parmi les 3 que vs possédez"
-> Laisser 5-6 min pr écrire les messages
- Chaque groupe expose son écriture ⇒ critiques
- Ex. d'application ac le jeu des carreaux colorés (Obj. C. fiche 53)

Très courtes, elles ne comportent plus que deux rubriques : objectif et déroulement. Les libellés des objectifs sont, pour une part, personnels, pour l'autre part, repris tels quels dans le manuel utilisé. Ces fiches servent donc surtout comme mémoire des activités menées.

Dans la séance 1 sont présentés des objectifs pour les élèves, que l'on peut transformer en tâche principale pour la maîtresse : faire comprendre [...]
Dans le premier alinéa, s'il est encore possible de déterminer la tâche "faire découvrir", A n'a pas écrit ce qu'elle voulait faire découvrir aux élèves. Aucune étape n'est donnée, aucun moyen de parvenir à cela n'est précisé. (Notons que dans le livre du maître, figurent le but de la découverte et les techniques à employer). Dans le deuxième alinéa nous pouvons inférer la tâche du maître : faire faire les exercices dont les références sont données ; aucune étape aucun moyen didactique ou pédagogique n'est donné.

Dans la séance 2, le premier objectif est celui de la maîtresse, le deuxième celui des élèves. La tâche principale de la maîtresse pourrait s'exprimer en "introduire la notion de produit [...] en faisant résoudre des problèmes d'additions réitérées". Le déroulement est ici un peu plus détaillé dans la mesure où il y a une part personnelle dans le choix des activités proposées aux élèves. Le premier alinéa et la première partie du second correspondent à ce que nous avons appelé précédemment "donner le problème" : figure le texte du problème, deux techniques (distribution, mise en groupes de deux). La phase de recherche individuelle n'est évoquée que par le temps qui lui est alloué. La phase de mise en commun fait apparaître des critiques sans que l'on sache si ce sont uniquement celles des autres élèves et/ou celles de la maîtresse. On ne sait ni ce sur quoi porteront (peuvent porter) les critiques ni comment elles seront faites. Le savoir qui sera institutionnalisé n'est pas non plus écrit. Enfin les élèves feront, et /ou la maîtresse fera faire un exercice, sans autre précision.

Dans l'interview, A indique que pour les élèves de l'école D (en zone sensible), elle a fait le choix du manuel Math Elem qu'elle suit à quelques exceptions près, parce qu'il est "élémentaire" (item 98) et qu'il a des consignes courtes et beaucoup d'exercices (item 6). Elle a exceptionnellement choisi la fiche d'Objectif Calcul ce jour-là car "les enfants qui ne parlent pas très bien le français" ont besoin de ce travail sur le vocabulaire (item 2). Elle a analysé les difficultés du public de D en termes de difficultés de lecture, de numération (item 12). Elle avait anticipé son mode de fonctionnement : "on va décrire les trois situations et puis après on fera les exercices" (item 40) (à remarquer l'emploi du pronom "on"). La technique envisagée pour les exercices est énoncée de façon assez claire : les élèves cherchent individuellement puis la correction est faite et ils font l'exercice suivant. Les erreurs possibles ne sont pas

prévues "je vois en fonction des réponses des enfants" (item 50) ; les réponses à ces mêmes exercices faits par les élèves de T la veille lui servent de référence.
Dans le contexte de D, au vu de la fiche de préparation et après l'interview il semble que le savoir didactique de A relatif à la multiplication ne soit pas premier : il apparaît relégué derrière des savoirs concernant le public. Le discours qui sous-tend et justifie le choix de la situation et les prévisions de gestion de la classe relèvent davantage du pédagogique : ce qui guide A, c'est d'être en adéquation avec les élèves. Elle veut être avec eux tout le temps, les voir en activité guidée et corriger individuellement leurs erreurs. Elle ne peut pas "lâcher des élèves" qu'elle estime en difficulté. Les techniques associées semblent avoir un caractère relativement routinier. Elle se fait confiance, comme nous l'avions noté en 1997, pour réagir en présence des élèves. Du point de vue du fonctionnement des savoirs dans la classe, elle vise à contrôler étroitement le travail des élèves.

Pour les élèves de l'école T, A s'est inspirée d'un travail fait en formation à l'IUFM, elle avait prévu "d'enchaîner" avec la fiche d'Objectif Calcul qui s'appuyait aussi sur des quadrillages. Son objectif était de montrer "qu'une écriture multiplicative est bien plus simple que des additions réitérées" (item 16). Elle avait anticipé les difficultés inhérentes à sa consigne mais n'avait pas pu "trouver mieux" (item 22), elle avait également anticipé la difficulté de lecture de la consigne dans Objectif Calcul, la nécessité d'une aide (là aussi sans chercher à en rédiger une autre ou à expliciter cette aide à l'avance). Elle n'avait pas fait l'exercice. Elle avait prévu sa gestion de façon globale : travail par deux, inventaire et tri des résultats (item 24), exercice du fichier. Le savoir didactique convoqué est celui d'une situation vue en formation, et la ressemblance de contexte entre la première activité et la seconde. Nous ne savons pas si A se fait confiance pour réagir in situ, n'a pas eu un temps suffisant de préparation ou n'a pas su avoir une réflexion didactique approfondie sur les consignes et les variables didactiques choisies. Elle s'est embarquée dans des activités qu'elle savait ne pas dominer : consignes difficiles à faire passer, appréhension vague des difficultés et des réponses des élèves. Avant la séance, A "avait peur" des réponses possibles des élèves. Pourtant elle dit avoir fait une "vraie" préparation alors qu'elle dit ne pas faire des fiches systématiquement mais seulement pour les séances d'introduction. Est-ce un indice du fait que ces séances sont plus délicates à gérer du fait qu'elles représentent une entrée dans l'étude ? Si on considère que les savoirs naturalisés de A ne font plus l'objet d'explicitation, cette interprétation est plausible. Elle peut être renforcée par le fait que comme A souhaite contrôler le fonctionnement du savoir dans la classe, elle désire préparer davantage ces situations dans lesquelles les élèves ont un peu plus de responsabilité par rapport au savoir. Il est à remarquer qu'à la fin de cette séance qui ne s'est pas déroulée selon ses vœux, elle dit qu'elle ne recommencera pas, et qu'en particulier elle ne la fera pas dans le contexte de D. Nous pourrions traduire le discours de A par : "moins les élèves ont de difficulté, et plus ils ont droit à des situations de recherche". Cette attitude est classique, les professeurs estiment que les élèves faibles ne sont pas capables de résoudre des problèmes non routiniers. Ceci rejoint des études faites sur les élèves en difficulté (D. Butlen et M. Pézard (1991), M. J. Perrin (1997)).

On pourrait dire en résumé qu'en 99 la technique employée par A pour faire une fiche de préparation consiste en la recherche d'un bon manuel, d'une bonne préparation testée soit par elle-même soit par autrui. Elle travaille de façon économique, prévoit surtout le contenu abordé (sous la rubrique "objectifs") et prévoit de façon globale la gestion de la classe. Les fiches écrites à la main deviennent des documents stabilisés.
La technologie associée consiste à garder des fiches qui de son point de vue (participation des élèves, facilité de gestion) "ont bien marché". Si de plus, ces fiches s'appuient sur des livres "recommandés" à l'IUFM, cela renforce la valeur de la fiche.

4 - Conclusion

Nous voyons donc une évolution importante dans la réalisation de la tâche qui consiste à préparer une séance.
Le point commun est la confiance que A a relativement à son savoir mathématique : pas plus en 97 qu'en 99 elle ne prépare les séances sur ce plan-là et ne travaille les exercices en eux-mêmes. Par contre, avec l'expertise acquise, les préparations écrites sont moins détaillées en 99, une part de plus en plus grande des techniques naturalisées et devenues routinières n'étant plus explicitées. Ces techniques et cette expertise relèvent davantage, nous semble-t-il, du pédagogique : choix d'activités réalisables sans trop de difficulté par les élèves de chacune des deux classes, conduite générale et découpage temporel des séances, gestion des erreurs attendues. La réflexion préalable sur des questions relevant de la didactique ne s'est pas enrichie : on retrouve la trace de la formation reçue en IUFM en 97 et en 99/2 mais les difficultés de gestion rencontrées en 99/2 vont ramener A (selon ses dires) à des techniques plus faciles à mettre en œuvre.

Plus généralement et en prenant en compte l'analyse du déroulement des séances (non présentée dans cet article), il nous semble que les savoirs disciplinaires et didactiques de ce professeur sont utilisés pour repérer certains aspects à prendre en compte du point de vue pédagogique, mais apparemment peu pour analyser les situations et leurs effets. Sur le plan disciplinaire, ce professeur considère qu'il n'a pas de problème, il "se fait confiance" (même si, de fait, cela a des répercussions non négligeables).
Sur le plan didactique, il lui reste de la formation des savoirs relativement généraux, qui donnent un cadre large de pensée : le savoir le plus ancré concerne le principe du repérage et le traitement de certaines erreurs, ce qui rejoint aussi sa philosophie de l'éducation. Sur le plan pédagogique, il a acquis, grâce à l'expérience et à des conseils de personnes du terrain, des techniques (non explicitées dans la préparation) permettant un bon déroulement de la classe ; la technologie associée est alors souvent relative à l'efficacité dans la conduite de classe. Par là même, nous nous demandons si cette expertise ne fait pas en quelque sorte écran à un réel questionnement sur les savoirs disciplinaires et didactiques, aussi bien dans les moments de planification que dans les moments de bilan.
Enfin, cette étude de cas nous a permis d'approfondir les outils théoriques, de dégager des questions et des pistes de recherche visant à approfondir certains points et à diversifier les regards sur la pratique professionnelle.

Bibliographie

BUTLEN D., PEZARD M, (1991). Situation d'aide aux élèves en difficulté et gestion de classe associée. *Grand N n° 50.*
CHEVALLARD Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques.* Vol. 12/1 p.73-112. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.
CHEVALLARD Y. (1995). La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. *Actes de la VIIIe Ecole d'été de didactique des mathématiques. Saint Sauves en Auvergne*. pp. 83-122 : IREM de Clermont-Ferrand.
CHEVALLARD Y (1997). Familière et problématique, la figure du professeur *Recherches en didactique des mathématiques* Vol 17/3 p. 17-54. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.
CHEVALLARD Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Actes de l'Université d'été.* La Rochelle juillet 1998 : IREM de Clermont Ferrand.
COPPE S. (à paraître). Différents types de savoirs en jeu dans l'activité professionnelle des professeurs. Etude du cas d'un jeune professeur des écoles dans la tâche "présentation du problème aux élèves". *Actes du colloque de la COPIRELEM. Chamonix 2000.*
COPPE S., GUILLOT G., ROLET C.,TISSERON C. (à paraître). Différents types de savoir en jeu dans l'activité professionnelle des professeurs. Une étude de cas. Rapport INRP dans le cadre d'une recherche sur la polyvalence des maîtres.
DURAND M. (1996). *L'enseignement en milieu scolaire*. Paris : P.U.F.
ERMEL (1997) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM1*. Paris : Hatier
GAUTHIER C. (Ed.) (1997). *Pour une Théorie de la pédagogie. Recherches contemporaines sur le savoir des enseignants*. Montréal : De Boeck Université.
JOHSUA S. (1996). Le concept de transposition didactique n'est-il propre qu'aux mathématiques ? In C. Raisky, M. Caillot (Eds.*). Au-delà des didactiques, le didactique. Débats autour des concepts fédérateurs*. De Bœck Université.
LEROUGE A. (1999). Logique didactique et logique d'acteur dans l'analyse d'une séance de mathématiques, *Xème Ecole d'été de didactique des mathématiques, Actes*, IUFM de Caen.
PERRIN M. J. (1997). Que nous apprennent les élèves en difficulté en mathématiques ? *Repères IREM n° 29.*
PORTUGAIS J. (1995). *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*. Peter Lang.
ROGALSKI J. (2000). Approche de psychologie ergonomique des pratiques de l'enseignant. *Actes du colloque de la COPIRELEM. Limoges 1999*. IREM de Limoges.
THEUREAU J. (1992). Le cours d'action : analyse sémio-logique. Essai d'une anthropologie cognitive située. Berne : Peter Lang.

Manuels :
M. L. PELTIER, D. VERGNES, C. CLAVIE (1998). Le Nouvel Objectif Calcul CE1. Hatier.
M. L. PELTIER, D. VERGNES, C. CLAVIE (1995). Le Nouvel Objectif Calcul CE2. Hatier.
D. STOECKLE (1995). Maths Elem. CE1. Belin.

CONCEPTUALISATION GEOMETRIQUE EN FORMATION DE P.E

COMMUNICATION :
Brigitte NICOLAS-LORRAIN
IUFM de Lorraine

L'objectif de cette communication est de faire part de l'état d'avancement de la recherche menée en collaboration entre les IUFM de Lorraine et d'Orléans-Tours.
Après avoir présenté la recherche et fixé le cadre théorique dans lequel nous l'avons située, j'examinerai le questionnaire proposé aux étudiants ainsi que leurs réponses et je conclurai en évoquant les principaux résultats obtenus.

INTRODUCTION

Le projet débute en 1997 à l'IUFM de Lorraine, sous la direction de Bernard PARZYSZ. Après étude des conceptions « initiales » (i.e. avant formation des futurs professeurs d'école (1ère année)) sur les rapports à la nature des objets de la géométrie enseignée [Spatio-Graphique (S-G) vs Géométrie Théorique (G.T)], nous voulons élaborer, mettre en œuvre et évaluer une ingénierie destinée à favoriser le saut conceptuel du premier à la seconde, estimé nécessaire à un enseignant de l'école élémentaire.
Les étudiants de l'IUFM sont dans leur grande majorité d'origine non scientifique. Lorsque, avec leurs formateurs, ils font ensemble de la géométrie, travaillent-ils sur les mêmes objets ?

A partir de ce tableau de synthèse établi par Bernard PARZYSZ, nous nous intéressons plus précisément à l'articulation entre G1 et G2.

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">géométries non axiomatiques</td><td colspan="3">géométries axiomatiques</td></tr>
<tr><td>type de géométrie</td><td>géométrie concrète (G0)</td><td colspan="2">géométrie spatio-graphique (G1)</td><td colspan="2">géométrie proto-axiomatique (G2)</td><td>géométrie axiomatique (G3)</td></tr>
<tr><td>objets</td><td colspan="3">physiques</td><td colspan="3">théoriques</td></tr>
<tr><td>validations</td><td colspan="3">perceptives</td><td colspan="3">déductives</td></tr>
<tr><td>van Hiele</td><td>niveau 0 visualisation</td><td>niveau 1 analyse</td><td colspan="2">niveau 2 déduction formelle</td><td>niveau 3 déduction</td><td>niveau 4 rigueur</td></tr>
</table>

Le questionnaire se compose de 9 items concernant les connaissances de base de la géométrie euclidienne plane enseignées à l'école.

Les étudiants de Lorraine en 1998, rejoints en 1999, par les étudiants d'Orléans-Tours ont répondu à ces questions.
Les résultats portent sur 776 questionnaires dépouillés.

LE CADRE THÉORIQUE

En 1998, à l'IUFM de Lorraine, nous avons travaillé en prenant pour bases les idées correspondant aux différentes citations suivantes.

Pour ce qui concerne :

la géométrie : Colette LABORDE[1]

« une première caractéristique de la géométrie réside dans les liens complexes qu'elle entretient avec l'espace physique qui nous entoure. En effet la géométrie s'est constituée en partie comme modélisation de cet espace physique. Les problèmes soulevés par les liens entre d'une part les objets réels, les données issues de la perception et de l'observation et d'autre part les objets théoriques du domaine du savoir concernent donc la géométrie »

le dessin et la figure : Bernard PARZYSZ[2]

« nous réserverons le terme de FIGURE à l'être géométrique, tandis que nous emploierons le mot DESSIN pour une représentation graphique (plane) de cette figure. »
« la figure géométrique est l'objet géométrique décrit par le texte qui la définit, une idée, une création de l'esprit tandis que le dessin en est une représentation ».
le « pôle du voir » correspond au percept et à l'habitude, tandis que le « pôle du savoir » correspond à l'image mentale, au concept et à la mémoire.

le géométrique et le spatio-graphique : Bernard CAPPONI, Colette LABORDE [3]

« On considère la géométrie comme un corps de connaissances théoriques, même si elle a pu se développer partiellement sous la pression d'exigences de nature physique. On distingue les objets et relations géométriques qui sont de nature théorique, de leurs extériorisations dans des systèmes de signifiants divers. On s'intéresse en particulier aux réalités spatio-graphiques (dessins produits par la trace du plomb sur le papier, d'un bâton sur le sable, d'électrons sur l'écran de l'ordinateur) qui représentent ces objets théoriques. »
« Les réalités spatio-graphiques sont des moyens considérés dans le système didactique comme auxiliaires, pourvoyeurs d'idées mais les éléments de la solution ne peuvent y faire appel en disant en tirer des informations ».

Dans l'analyse qui suit, les questions ont été regroupées par thème de travail ; elles ne sont donc pas traitées selon l'ordre de passation proposé aux étudiants et figurant sur le document en annexe.

---

[1] L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* (9.3) ; (1988) ; pp. 337-364.

[2] Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée, *Thèse de doctorat, Université PARIS VII ;* (1989) ; p14 ; p 106

[3] Modélisation à double sens
Actes de la 8ème École d'Été de didactique des mathématiques, Saint Sauves d'Auvergne, Édition IREM de Clermont-Ferrand, 1996, pp. 265-278

ETUDE DU QUESTIONNAIRE

I. LIAISON GEOMETRIE THEORIQUE → SPATIO-GRAPHIQUE

Dans un premier temps, j'analyse les exercices qui vont nous permettre d'étudier la liaison G.T → S-G ; en effet, le problème est posé dans le cadre théorique, mais les étudiants sont placés dans le cadre de la S-G puisqu'on leur demande de manipuler des instruments pour répondre aux questions 1, 3, 5 et 8.

Dans les quatre questions que je vais analyser, la consigne impose, dans la première partie, de faire un dessin qui devrait être une trace écrite de la figure et dans la seconde de répondre à une question posée à propos de cette figure.

QUESTION 1 : Tracez, en utilisant la règle graduée, un triangle ABC tel que : AB = 5 cm ; BC = 13 cm ; AC = 8 cm. Laissez les traits de construction. Que remarquez-vous ?

1) Analyse de l'exercice

Ce type de situation a déjà été traité par ARSAC (89) et BERTE (92). Mais il nous a semblé intéressant de le reprendre pour savoir si les problèmes rencontrés dans les constructions sont liés à la manipulation des instruments ou aux connaissances.
Un travail sur les difficultés rencontrées pourrait-il aider les étudiants à progresser dans le domaine de la réflexion géométrique ?

Le problème est posé en G.T, la réponse est attendue en G.T ; il est possible d'avoir éventuellement une confrontation avec un aller-retour vers le Spatio-Graphique.

Nous pouvons nous attendre à ce que les étudiants produisent l'un de ces trois types de réponse :
1) <u>le tracé d'un triangle</u> : en utilisant la construction usuelle au compas (S-G)
2) <u>le tracé d'un segment</u> : (ayant certainement pour longueur le plus grand des nombres proposés) ses extrémités représentent deux des sommets du triangle et pour placer le troisième sommet :
tracé direct : les étudiants connaissent le résultat et ils le placent directement
(liaison S-G → G.T → S-G)
tracé indirect : ils le construisent en choisissant le point d'intersection du segment avec deux arcs de cercles tangents dont les centres sont les extrémités du segment et les rayons les valeurs numériques données (S-G)
3) <u>les autres tracés :</u>
soit le tracé inachevé : il y a un segment et des arcs de cercle non sécants (S-G)
soit une absence de tracé :
ou ils n'ont aucune idée pour tracer un triangle avec règle et compas (S-G)
ou ils savent que les mesures données ne permettent pas d'obtenir un « vrai » triangle (G.T)

Notons que le <u>dessin</u> associé à ce triangle est un polygone à trois côtés alors que la <u>figure</u> est un segment.

2) Analyse des réponses (tableaux en annexe 1)

Moins de 10% des étudiants semblent savoir a priori, alors que le quart d'entre eux évoque l'inégalité triangulaire ; tous les autres font un dessin du triangle. Ils utilisent le compas pour 85% d'entre eux ; c'est la façon habituelle de construire un triangle. Leur commentaire est en accord avec leur dessin , d'autant que si la hauteur du triangle est très petite, c'est un triangle « aplati » !
Il y a peut-être un effet de contrat, puisque la consigne est donnée sur le mode impératif : « tracez ».
Ils restent dans le Spatio-Graphique.

QUESTIONS 5 ; 3 ; 8 : construisez la médiatrice du segment [MN] ; précisez quelles propriétés de la médiatrice vous utilisez

Cet énoncé a fait l'objet de trois questions distinctes, non consécutives dans le texte c'est-à-dire que d'autres exercices ont été intercalés entre ces trois parties.

Le problème de G.T sous-jacent concerne la distinction entre la définition usuelle (milieu et angle droit) de la médiatrice d'un segment et la propriété caractéristique (équidistance des points par rapport aux extrémités du segment).

1) Analyse des différentes parties de cet exercice :

Dans la deuxième partie de cet exercice (question 5), le segment a été tracé de manière habituelle, au milieu de la case prévue : c'est le moment de vérifier ses souvenirs en utilisant la construction traditionnellement connue, décrite précédemment. Notre attente porte sur *« la propriété d'équidistance des points de la médiatrice par rapport aux extrémités du segment »* pour justifier ce procédé, c'est-à-dire une caractérisation discursive de l'objet géométrique associé au dessin.
Dans la première partie de cet exercice (question 3), le segment [MN] est tracé très près du cadre. L'hypothèse faite était que cette position devait induire une construction à l'équerre en référence à la définition : « *la médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu* ».
Ou du moins empêcher la construction « classique » de la droite passant par deux intersections d'arcs de cercle de part et d'autre du segment. Cette construction est devenue un automatisme mais en dehors de tout contexte ; c'est-à-dire que les étudiants l'utilisent comme un savoir-faire mais sans être en mesure de la justifier (pas de référence à la G.T).
Dans la troisième partie de cet exercice (question 8), nous avons matérialisé sur le dessin, avec le symbolisme usuel, cette propriété d'équidistance des points liée à l'objet géométrique et nous souhaitons voir si les étudiants vont faire le lien avec la construction précédente en traçant directement la droite (EU).

Dans ces deux dernières parties, notre attente porte donc sur une prise de conscience des connaissances géométriques habituellement utilisées à des fins de démonstration et non de construction : le problème permet plusieurs allers et retours entre G.T et S-G.

2) Analyse des réponses (tableaux en annexe 1)

QUESTION 5 :

Le segment ayant été tracé de façon à ne pas susciter de contraintes de dessin, près des trois quarts des étudiants utilisent la traditionnelle construction avec deux arcs de cercle de même rayon de part et d'autre du segment, mais savent-ils pourquoi ?

Prés de 40% des étudiants fait référence à la première définition donnée, donc ils ne font pas de lien entre savoir-faire (procédural) et savoirs (déclaratifs) géométriques.
Moins de la moitié des étudiants évoquent la propriété d'équidistance des points de la médiatrice par rapport aux extrémités du segment.

Il faut noter un obstacle : habituellement, les extrémités du segment [MN] sont matérialisées par deux petits tirets verticaux ; ce n'est pas le cas ici et cela a perturbé certains étudiants pour lesquels il n'y avait pas de « vrai » segment : certains ont fait la remarque par écrit et ont tracé de façon voyante ces extrémités absentes, d'autres ont fait l'observation oralement en sollicitant la permission de les matérialiser eux-mêmes ; c'est donc bien dans le domaine du Spatio-Graphique qu'ils se situent.

On constate donc que les étudiants se situent (comme prévu) dans la S-G et que l'articulation G.T $\rightarrow$ S-G n'est pas réalisée : en effet, il y a des connaissances concernant un savoir-faire, mais elles sont déconnectées d'un savoir.

QUESTION 3 :

Le segment [MN] ayant (volontairement) été tracé près du cadre, la consigne implicite était de ne pas dépasser ce cadre ; notre attente est réalisée : les étudiants ne sont que 5% à ne pas l'avoir respectée et à tracer deux fois deux arcs de cercle de part et d'autre du segment.

L'équerre est employée par environ un tiers des étudiants, avec une règle graduée ; alors qu'un autre tiers trouvent le milieu du segment grâce à l'intersection de deux arcs de cercle.
Explication possible : la mesure en mm de la longueur du segment [MN] n'étant pas facilement divisible par deux, l'utilisation de la règle graduée n'apportait sans doute pas l'exactitude souhaitée ; à moins que, plus simplement, la construction au compas soit perçue comme plus précise.

Plus des deux tiers des étudiants utilisent d'une façon ou d'une autre « le milieu et l'angle droit » (donc ils connaissent la définition classique de la médiatrice) mais plus du quart trace des arcs de cercle. À peine la moitié d'entre eux citent une propriété qui est en accord avec leur construction, et, pour eux, l'articulation G.T $\rightarrow$ S-G paraît réalisée dans ce cas (c'est peut-être un hasard ?).

Il pourrait être intéressant de chercher quels étudiants utilisent la même construction quel que soit le contexte.

QUESTION 8 :

Moins de la moitié des étudiants tracent directement la médiatrice en joignant les points E et U. Plus du quart des étudiants préfèrent un tracé mixte, c'est-à-dire joignant l'un des points E ou U à un autre point déterminé par l'intersection de deux arcs de cercle. La position de ce second point situé de l'autre côté du segment renvoie encore à l'automatisme de la construction classique.

Près des trois quarts des étudiants ont besoin de matérialiser le segment [MN] qui n'est pas tracé ; la moitié seulement des étudiants considère que la médiatrice d'un segment est une droite.
C'est donc dans le S-G qu'ils se situent.

Certains commentaires font référence à l'équidistance des points, d'autres voient plutôt un triangle isocèle ; ceci d'autant plus qu'ils l'ont matérialisé en traçant « la » base avec le segment [MN]. Il y a donc des connaissances (relation médiatrice/axe de symétrie d'un triangle isocèle).

A peine la moitié des étudiants font la liaison entre G.T et S-G.

En conclusion de l'analyse de ces quatre items, nous pouvons noter que les étudiants travaillent réellement sur le dessin. Il s'agit uniquement de S-G ; la G.T n'est pas approchée.

II. LIAISON SPATIO-GRAPHIQUE → GEOMETRIE THEORIQUE

Dans un second temps, j'étudie les items pour lesquels il n'est pas nécessaire de manipuler des instruments ; il s'agit des questions 2, 4, et 7, pour lesquelles nous avons situé le problème de S-G, alors que, pour la réponse, notre attente porte sur la capacité des étudiants à sortir de ce cadre pour entrer dans celui de la G.T, c'est-à-dire à s'intéresser aux propriétés de la figure.

Examinons maintenant les trois exercices dans lesquels le dessin est imprimé sur la feuille, alors que nous voulons voir si, derrière le dessin, les étudiants « voient » la figure (en faisant référence à la G.T).

QUESTION 2 : L'angle xÔy est-il droit ? Justifiez votre réponse.

1) Analyse de l'exercice

Le dessin sur papier blanc n'est pas présenté de façon prototypique (côtés parallèles aux bords de la feuille) ; la droite est oblique (orientée « nord-ouest / sud-est »), et une demi-droite « semble » lui être perpendiculaire. Dans le domaine où nous nous plaçons, « on ne peut pas savoir » est la réponse escomptée, mais nous pouvons nous attendre à ce que les étudiants proposent l'utilisation d'instruments géométriques dans un but de « vérification » :
soit pour mesurer l'angle, avec le rapporteur ou l'équerre (S-G)
soit pour comparer avec un autre angle droit, tracé à l'équerre ou au compas (connaissances en G.T mais prédominance du Spatio-Graphique)
Le problème est posé en S-G mais la réponse est attendue en G.T.

2) Analyse des réponses (tableaux en annexe 2)

⇒ Domaine du perceptif

* perceptif simple : près d'un quart des étudiants paraphrasent en évoquant des droites perpendiculaires ou un angle de 90°

* perceptif instrumenté : (7 étudiants sur 10)

- soit ils utilisent un instrument, l'équerre (superposer) ou le rapporteur (mesurer)
- soit ils exploitent une figure annexe (construction de la médiatrice d'un segment).

⇒ Domaine du réflexif

* allusion au théorème de Pythagore, ce qui pourrait laisser envisager une ébauche de démarche placée dans la G.T (à peine 2%), mais ils ont, pour la plupart, pris des mesures sur le dessin.

* « on ne peut pas savoir » ils sont très peu nombreux (à peine 4 %) à donner la réponse souhaitée.

Il faut noter l'effet de contrat qui a tendance à orienter les réponses vers « oui » ou « non », plutôt que vers « on ne peut pas savoir ».
Nous constatons une très forte prédominance du S-G pour près des trois quarts des étudiants.

QUESTION 4 : Quelle est la nature du triangle ECO ? Comment le savez-vous ?

1) Analyse de l'exercice

Le problème est posé dans le cadre du S-G et nous attendons une réponse en G.T.

Le dessin représente un triangle ABC posé de façon prototypique sur un côté, traditionnellement appelé « la base », et le symbolisme habituel indique qu'il a un angle droit. Il paraît être aussi isocèle. Les marques fournies sur ce dessin livrent une caractérisation de l'objet géométrique associé au dessin :

* soit les étudiants vont faire une analyse géométrique et répondre que c'est un triangle rectangle (G.T)

* soit ils vont chercher d'autres informations et répondre que c'est un triangle rectangle et isocèle (S-G).

2) Analyse des réponses (tableaux en annexe 2)

Dans le cadre de la G.T, il s'agit d'un triangle rectangle (sans plus). Or, moins de 1 étudiant sur 5 semble se situer dans ce cadre ; les autres seraient plutôt dans celui de la S-G.

En effet, du point de vue perceptif simple, ce triangle <u>paraît</u> de plus isocèle.

Cette réponse est donnée par les trois quarts des étudiants ; certains ont pris soin de mesurer (perceptif instrumenté) les côtés, dont les longueurs sont volontairement très proches, et de rectangle (G.T), ce triangle est « devenu » rectangle et isocèle pour les deux tiers des réponses (S-G).

QUESTION 7 : le quadrilatère ABCD est-il un carré ?

1) Analyse de l'exercice

D'après les propriétés symbolisées sur le dessin, le quadrilatère a :

- 3 angles droits donc c'est un rectangle
- 2 côtés isométriques donc ce rectangle est un carré
- mais les côtés ne sont pas « tout à fait » des segments de droite.

A partir de ces indications, nous attendons que les étudiants se prononcent sur la figure.

Or ce ne sont pas les arguments que les étudiants utilisent habituellement pour déterminer la nature d'un carré. En effet, pour eux, le carré a 4 angles droits et 4 côtés de même longueur.

Analyse des réponses (tableaux en annexe 2)

La moitié des étudiants répond « oui » et l'autre « non » !

Plus du quart soulignent le manque de précision du dessin (mesure des côtés, angles droits et segments de droite) et donc pour plus de la moitié des étudiants, les propriétés visibles sur le dessin ne sont pas suffisantes pour en faire un carré. C'est donc qu'ils se situent dans le S-G.

En conclusion de l'analyse de ces trois items, nous constatons que les étudiants travaillent sur le dessin ; ils se situent uniquement du côté du S-G ; la G.T n'est pas approchée.

<u>QUESTION 6.1</u> : Construisez un losange ABCD en utilisant les instruments que vous voulez. Laissez les traits de construction.

<u>QUESTION 6.2</u>: Qu'est-ce qu'un losange ?

1) Analyse de l'exercice

Il s'agit d'étudier l'articulation S-G → G.T, c'est-à-dire que la tâche de représentation du losange sur le quadrillage doit amener les étudiants à envisager les différentes caractérisations de ce quadrilatère.

Deux types de procédures sont possibles pour construire le losange :
soit utilisation spécifique du support qui est un papier quadrillé par la technique du repérage sur un quadrillage et alors une règle suffit pour tracer le quadrilatère
soit construction comme sur papier blanc, le recours à d'autres instruments de tracé devient indispensable.
D'autre part le dessin peut être commencé par une diagonale ou par un côté.

Notre attente porte sur la mise en relation, ou non, des propriétés géométriques avec la construction effectuée ; c'est pourquoi nous demandons une définition du losange. Nous pensons que, là aussi, la construction risque d'être automatisée et sortie de son contexte géométrique.

2) Analyse des réponses (tableaux en annexe 2)

Le support proposé est un quadrillage de 1 cm de maille ; près des trois quarts des étudiants l'utilisent spécifiquement.

Plus de la moitié des étudiants commence par tracer une diagonale, mais à peine le tiers d'entre eux considèrent le losange comme un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires : ils ne font pas d'articulation G.T → S-G.

Par contre, ils sont très nombreux à écrire le maximum de propriétés du losange qu'ils connaissent. Donc ils ont des connaissances en G.T, mais elles ne sont pas organisées et surtout la notion de définition comme propriété caractéristique n'est pas acquise.

Là encore, nous constatons que les étudiants travaillent sur le dessin ; l'articulation G.T→S-G ne se fait que très partiellement.

CONCLUSION

Pour les différentes conclusions, je proposerai un schéma inspiré de celui proposé par Colette LABORDE et Bernard CAPPONI (1996) puis adapté par Bernard PARZYSZ (1998) : il permet d'étudier les allers et retours, ce que les auteurs appellent un jeu de relais entre G.T et S-G. Les flèches en pointillés représentent le chemin « attendu », les autres le chemin réalisé par les étudiants.

Nous constatons (question 6) que l'articulation G.T → S-G ne se fait que très partiellement, les étudiants sont plus à l'aise pour la représentation de la figure, c'est-à-dire pour tracer le dessin, que pour la justification des propriétés, ce que nous pouvons résumer dans le schéma suivant :

Géométrie Théorique	**problème posé**	·····►	réponse attendue
Spatio-Graphique	représentation		

En conclusion de l'analyse des questions 1, 3, 5, 8, nous pouvons noter que, pour la majorité des étudiants, la figure n'a pas d'existence, même virtuelle ; ils travaillent réellement sur le dessin, pour eux ce n'est pas un outil. Il s'agit uniquement de S-G ; la G.T n'est pas approchée, ce que nous pouvons résumer dans le schéma suivant :

Géométrie Théorique	**problème posé**	·····►	réponse attendue
Spatio-Graphique	représentation	———►	réponse donnée

En conclusion de l'analyse des questions 2, 4 et 7, on s'aperçoit que le dessin est l'objet sur lequel la plupart des étudiants travaillent réellement, il n'est pas un outil. Pour eux, la géométrie se situe uniquement du côté du S-G ; la G.T n'est pas approchée, ce que nous pouvons résumer dans le schéma suivant :

Géométrie Théorique					réponse attendue
Spatio-Graphique	**problème posé**	→	représentation	———►	réponse donnée

Quel que soit le domaine (géométrie théorique ou spatio-graphique) dans lequel le problème est posé, les étudiants ne travaillent que dans le S-G.

Les premiers résultats obtenus montrent des savoir faire en G1 , des connaissances en G2 mais une confusion des deux géométries qu'il sera nécessaire de clarifier dans la formation.

Annexe 1

QUESTION 1 : Tracez, en utilisant la règle graduée, un triangle ABC tel que :

AB = 5 cm ; BC = 13 cm ; AC = 8 cm.

Laissez les traits de construction. Que remarquez-vous ?

Procédures de construction	*Nombre*	*%*
tracés au compas		
cercles sécants : triangle	151	19
cercles tangents : triangle aplati	**464**	**60**
cercles extérieurs : pas de triangle	47	6
tracés à la règle		
ceux qui savent à priori	64	9
ceux qui tâtonnent	16	2
autres	45	6

Commentaires	*Nombre*	*%*
aucun	91	12
en accord avec le dessin	**585**	**75**
en désaccord avec le dessin	34	5
divers	24	3
référence à inégalité triangulaire	199	26

QUESTIONS 3 ; 5 ; 8 : construisez la médiatrice du segment [MN] ; précisez quelles propriétés de la médiatrice vous utilisez.

Procédures de construction	*Item 3*		*Item 5*	
	Nombre	*%*	*Nombre*	*%*
une intersection d'arcs de cercle	15	2	3	0
une intersection d'arcs de cercle + milieu	102	13	11	1
une intersection d'arcs de cercle + angle droit	**295**	**38**	53	7
2 intersections d'arcs de cercle de part et d'autre du segment	36	5	**573**	**74**
2 intersections d'arcs de cercle du même côté du segment	66	8	2	0
milieu et angle droit	241	31	112	15
autres	22	3	22	3

Procédures de tracé	*Item 8*	
	Nombre	*%*
tracé direct (joindre les points E et U)	**357**	**46**
tracé mixte 1 : E ou U + (ou milieu ou perpendiculaire ou 1 intersection d'arcs de cercle)	198	26
tracé mixte 2 : E ou U +1 intersection d'arcs de cercle du côté des points E et U	132	17
deux intersections d'arcs de cercle	35	4
tracé incorrect	54	7

Commentaires	*Item 3*	*Item 5*	*Item 8*
	%	%	%
pas de commentaire	17	15	15
adéquation du commentaire et de la figure	55	46	57
non adéquation du commentaire et de la figure	28	39	28

Annexe 2

QUESTION 2 : L'angle XÔY est-il droit ? Justifiez votre réponse.

	Nombre	*%*
utilisation d'instruments pour vérifier (équerre, rapporteur)	**432**	**56**
utilisation de construction annexe	116	15
paraphrase (droites perpendiculaires, angle de 90°)	223	29
oui ou non , sans justificatif	47	6
utilisation du théorème de Pythagore	12	2
on ne peut pas savoir	31	4

QUESTION 4 : Quelle est la nature du triangle ECO ? Comment le savez-vous ?

Nature	*Nombre*	*%*
rectangle	144	19
rectangle et isocèle	**586**	**75**
autres	37	5

Justification	*Nombre*	*%*
angle droit marqué sur le dessin	**546**	**70**
mesure des côtés	**504**	**65**
autres	110	14

QUESTION 7 : le quadrilatère ABCD est-il un carré ?

Dessin	*Nombre*	*%*
oui	406	51
non	371	49

Justification	*Nombre*	*%*
3 angles droits et 2 côtés isométriques	**377**	**49**
pas assez d'angles droits et / ou de côtés isométriques	218	28
manque de précision	211	27

QUESTION 6.1 : Construisez un losange ABCD en utilisant les instruments que vous voulez. Laissez les traits de construction.

QUESTION 6.2 : Qu'est-ce qu'un losange ?

Instruments	*Nombre*	*%*
règle	710	95
graduation de la règle	134	17
rapporteur	4	0
compas	289	37
angle droit de l'équerre	115	15

Support	*Nombre*	*%*
utilisation spécifique du papier quadrillé	**413**	**53**
utilisation d'une procédure papier uni	137	18

Tracé initial	*Nombre*	*%*
à partir d'une diagonale	**466**	**60**
à partir d'un côté	282	36

Dessin obtenu	*Nombre*	*%*
polygone autre qu'un losange	82	11
carré	27	3

Définition	*Nombre*	*%*
quadrilatère ayant 4 côtés isométriques	67	9
parallélogramme ayant deux côtés consécutifs isométriques	24	3
parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires	171	22
juxtaposition de deux triangles isocèles symétriques	2	0
fourre-tout de propriétés	**378**	**49**
définition fausse	160	21
il est noté des propriétés qui empêchent d'obtenir un carré	41	5

ATELIERS

TRAVAUX DIRIGES POUR LES PE2
LE ROLE DU PROFESSEUR DANS LA GESTION DES SITUATIONS CONSIGNE ET DEVOLUTION, MISES EN COMMUNS, CLOTURE DES SEANCES DU POINT DE VUE COGNITIF
Documents et supports pour l'analyse de pratiques de classe

ATELIER 1
René BERTHELOT et Isabelle BLOCH,
IUFM d'Aquitaine

I. L'organisation de l'année PE2 à l'IUFM d'Aquitaine

I. 1 Stages et formation

Les PE2 bénéficient de 50 h de cours de mathématiques, ce qui est loin d'être énorme (en PE1 ils ont 80 h, mais tous n'ont pas suivi de PE1). Un module optionnel de 6 h s'ajoute à ces 50 h ; les modules optionnels sont unis ou pluridisciplinaires (par exemple maths - physique ou maths - français), et occupent une place à part dans la formation. Nous ne les abordons pas dans cet atelier.

Ces 50 h se décomposent comme suit :
- 6 h en début d'année (deux séances « générales ») ;
- 3 h de préparation à chacun des trois stages PRAC (voir ci-dessous), soit 9 h ;
- 3 h d'exploitation de chacun des trois stages PRAC, soit 9 h ;
- 6 h de préparation spécifique à chacun des stages en responsabilité, soit 12 h ;
- les 14 h restantes font l'objet de séances ciblées sur des thèmes mathématiques (la multiplication, les décimaux, l'espace et la géométrie, la division, analyse de données et fonctions numériques, résolution de problèmes).

L'année PE2 est organisée dès le premier trimestre autour de 3 périodes de stage de pratique accompagnée (en abrégé stages PRAC) avec un PEMF[1], une dans chaque cycle.

Les PE2 reçoivent ainsi 6 h de formation en mathématiques en septembre, puis d'octobre à décembre ils alternent une séance (3 h) de préparation à un stage, puis une semaine et demie de stage, puis une séance d'exploitation du stage. Ceci se renouvelle donc trois fois, jusqu'à ce qu'ils aient vu les trois cycles.

Durant tout le premier trimestre nous devons donc travailler en liaison étroite avec les expériences des stagiaires dans les classes. C'est une contrainte mais c'est aussi un appui.

---

[1] Professeur d'École Maître Formateur

Les PE2 reçoivent par ailleurs une formation aux techniques audiovisuelles et multimédia ; nous leur demandons de mettre en œuvre ces techniques en filmant dans une des classes où ils effectuent leur stage PRAC.
Nous nous appuyons donc sur des vidéos, des observations, des questions ... et essayons d'adapter les apports théoriques aux différents moments introduits par ces supports.
Les stages PRAC donnent lieu à un compte-rendu par stagiaire.
Les PE2 ont également deux périodes de stage en responsabilité, de chacun 4 semaines, en janvier - février et en juin.

I. 2 Organisation des moments de formation

a) Stages PRAC

En accord avec les PEMF, nous avons convenu de découper les préparations aux stages suivant les trois périodes :

— en stage 1 on travaille l'accueil des élèves, les consignes, le repérage des différentes situations d'apprentissage (travail commencé aussi en première phase avant les stages, cf. annexes) ;

— en stage 2 on travaille la gestion de séances d'atelier, les séances de travail en groupes, et l'examen des productions des groupes avec l'ensemble de la classe (mises en commun) ;

— en stage 3 on travaille la clôture des activités : les stagiaires doivent arriver à mener une activité de bout en bout jusqu'à la phase de conclusion, et prévoir la séance suivante adaptée aux résultats des élèves.

La phase « stages PRAC » est donc une phase où l'on travaille essentiellement sur les anticipations et les retours de présence dans les classes. Nous avons donc éprouvé le besoin de disposer de supports pour travailler également les principales notions mathématiques enseignées à l'école élémentaire. Jean-Luc Millet, enseignant à l'IUFM de Limoges, nous a transmis l'idée de faire réaliser aux stagiaires des **dossiers thématiques** de mathématiques.

b) Stages en responsabilité

Les stages en responsabilité sont préparés en formation (Une ou mieux deux séances de préparation par stage). Ces séances sont l'occasion de mise en œuvre de la mutualisation des ressources, voir ci-dessous III.1.

II. Les dossiers thématiques

II. 1 Les thèmes

Les dossiers thématiques portent sur des notions mathématiques enseignées à l'école élémentaire. A priori il y a deux entrées possibles :

— soit des thèmes découpés par cycles ;

— soit des thèmes mathématiques transversaux aux cycles.

Les deux premières années, nous avons choisi de faire réaliser des dossiers découpés par cycles, sur les thèmes suivants (thèmes abrégés) :

1. Maternelle 1 : numérique	7. Numération décimale
2. Maternelle 2 : espace	8. Mesure des grandeurs au cycle 3
3. Apprentissages numériques au CP	9. Espace et Géométrie au cycle 3
4. Addition et soustraction	10. Rationnels et décimaux
5. Multiplication	11. Opérations sur les décimaux
6. Division	12. Proportionnalité

II. 2 Le contenu

Chaque dossier comprend :

— un bilan des connaissances didactiques de base enseignées en PE1, associant les propriétés mathématiques et les situations de référence de la ou des notions dont l'enseignement est visé.

— les éléments essentiels des textes officiels concernés.

— des progressions comparées et une répartition globale et par niveau. Une progression sera basée sur un découpage traditionnel considéré comme intéressant (en référence à un ouvrage du commerce) et s'il en existe, une autre progression sera basée sur une articulation de situations fondamentales.

— des exemples des types de problèmes associés.

— des exercices d'entraînement, écrit et mental.

— des indications précises sur les moyens d'évaluation et de remédiation.

— des exemples de fiches de séances d'enseignement.

— un compte-rendu d'une séance réalisée en stage et analysée (accompagné ou non d'un enregistrement vidéo).

— une réalisation de matériel spécifique à une séquence de séances, c'est-à-dire, par exemple pour le dossier espace en cycle 1, le matériel nécessaire à la rubrique « reconnaissance de formes ».

— un exemple d'évaluation.

— une bibliographie.

II. 3 Le format

Les dossiers sont réalisés sous forme informatique, et entrés sur le site interne de l'IUFM où les formateurs peuvent les consulter, y apposer des remarques, des commentaires. Les fichiers textes sont au format RTF (Rich Text Format), avec niveaux de titres imposés, afin de pouvoir facilement être convertis au format html et mis sur un CD-ROM qui acquiert ainsi une certaine uniformité de présentation. Les fichiers image (travaux d'élèves scannés, photos...) sont en JPEG. Le produit final est un CD-ROM que tout stagiaire reçoit gravé à la fin de l'année, en échange d'un CD-ROM vierge. Ainsi tout PE2 part à la fin de son année de formation avec une banque de données sur les principales notions mathématiques enseignées à l'école, base qu'il pourra bien sûr consulter afin de trouver, lors de sa nomination dans une classe, des exemples de progressions, de séances, des références, des avis personnels sur telle ou telle séquence ou séance réalisée.

Le CD-ROM est une motivation importante pour les PE2, c'est le travail de toute l'année qu'ils reçoivent ainsi et qui est une aide pour débuter dans le métier.

III. Articulation stages / dossiers / formation

Cette articulation se réalise sous trois modalités :
- par les productions des PE2 et échanges de documents issus des stages ;
- par la participation et l'aide des PEMF présents en formation et qui aident à la constitution des dossiers ;
- par des documents de synthèse fournis par le formateur spécialisé, en l'occurrence le PIUFM.

III. 1 Le lien théorie / pratique : la mutualisation, l'articulation des stages aux dossiers

Les dossiers sont réalisés par un binôme de PE2, mais le sujet choisi à l'avance ne sera pas forcément objet d'expérimentation pour les PE2 concernés. Nous organisons donc, en préalable et à l'issue des périodes de stages (stages PRAC comme stages en responsabilité) des moments de **mutualisation des ressources**, c'est-à-dire que les PE échangent les documents dont ils disposent et dont d'autres ont besoin : progressions, séances en classe, éléments théoriques ... , et ces échanges peuvent aller d'un dossier à un stage, ou d'un stage à un dossier.
Ainsi un PE2 qui a fait en stage, PRAC ou en responsabilité, des séances sur un thème qui ne figure pas dans son dossier, transmet au groupe chargé du dossier correspondant les fiches de ces séances. Lui-même récupèrera des séances issues d'un dossier qui n'est pas le sien, s'il en a besoin pour son prochain stage.
Ou bien sûr les séances peuvent être transmises d'un stage (par exemple PRAC) à un autre stage (par exemple en responsabilité). Cette mutualisation des ressources fonctionne de façon convenable, les PE s'échangent disquettes et documents papier : chacun sait qu'il sera donateur mais aussi bénéficiaire.
Le formateur peut organiser des petits exposés sur les productions disponibles, par le groupe de stagiaires qui les a conçues.

III. 2 Les apports des formateurs

Dans ce système de formation, les apports des formateurs ne peuvent être standardisés et reconduits d'année en année, puisqu'il leur faut s'adapter au rythme du questionnement des stagiaires. Cependant une base commune à ces questions existe bien sûr, et les réponses reprennent d'année en année des points communs, même si ce n'est pas tout à fait aux mêmes temps de la formation ; ceci est particulièrement vrai pour les questions sensibles qui sont un nœud de difficulté du métier d'enseignant, et que nous évoquons ci-dessous.
Les apports des formateurs en documents écrits (voir annexes 1 à 4) s'articulent suivant quatre axes :

a) Les documents préliminaires aux stages

Il s'agit de documents généraux, sur :

- le rôle du professeur et la gestion d'une activité de classe (consigne, gestion des groupes d'élèves, **recueil des procédures et erreurs** (voir également ci-dessous IV), mises en commun, synthèses) ;
- les différentes situations rencontrées en classe ;
- l'évaluation.

b) Les documents préparatoires à chaque stage

Ce sont des documents sur le programme du cycle du stage, les thèmes mathématiques traités par les professeurs à ce moment de l'année dans la classe du stage ; ainsi que des documents reprenant des connaissances abordées en PE1 (par exemple la classification des problèmes additifs et multiplicatifs d'après la théorie des champs conceptuels, avant un stage en cycle 3[2]).
Chaque stage est précédé d'une séance où les PE2 ont à analyser une vidéo réalisée au niveau concerné ; ainsi « Repérage dans l'espace » en cycle 1, vidéo réalisée par Claude Maurin[3], « Les fourmillions », en cycle 2, vidéo réalisée à l'école Jules Michelet de Talence (ex COREM[4]) , « Remédiation sur le sens des opérations », pour le cycle 3, vidéo réalisée par une PE2 de Pau en stage en cycle 3 à l'école Victor Hugo de Lescar.

c) Les documents d'exploitation

Il s'agit essentiellement de documents de synthèse réalisés en réponse aux questions (variables suivant l'année) des PE2. Il y a néanmoins des questions incontournables, pour lesquelles nous avons réalisé des documents (voir annexes 1 à 4) :

- comment gérer l'activité des élèves dans une phase de recherche (le professeur doit-il s'abstenir d'intervenir, ou s'il intervient, à quels moments, avec quels élèves, et comment ?)
- quel est le rôle du professeur dans une phase de mise en commun ou de synthèse ;
- comment mener une mise en commun dans une classe de cycle 1 ;
- comment corriger, en cycle 2 ou 3, une séance de problèmes où tous les élèves n'ont pas atteint le même niveau ...

d) Les documents relatifs à des thèmes mathématiques

Tous les PE2 n'ont pas suivi une PE1, et même pour ceux qui l'ont fait, des compléments s'imposent. Nous avons donc choisi de reprendre des situations fondamentales de notions du programme de l'école élémentaire ; mais de les reprendre du point de vue de l'insertion dans une progression , alors qu'en PE1 on travaille essentiellement les premières séances (le sujet type du concours CRPE étant le premier contact des élèves avec la notion de division, ou de nombre rationnel ...).
Les documents que nous présentons sont donc des tableaux synoptiques, qui déclinent un ensemble de séances sur un même sujet (voir la division en annexe 5) ou sur un niveau (par exemple les connaissances mathématiques travaillées en CE1) ; ces tableaux sont conçus pour pouvoir être utilisés complets (avec synthèses) ou incomplets, pour pouvoir faire travailler les PE2 sur les synthèses et les difficultés des élèves. Cela dit, le nombre limité d'heures de formation

---

[2] Cf. « Le moniteur de mathématiques », Problèmes, cycle 3, éditions Nathan.

[3] Et que nous remercions vivement pour nous l'avoir communiquée.

[4] Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

au regard du travail important requis en mathématiques, fait que ce type de travail ne peut avoir lieu très souvent.
Les documents dont nous disposons actuellement sont les suivants :

- connaissances mathématiques en CP ;
- connaissances mathématiques en CE1 ;
- la division au CM, d'après la progression de l'IREM de Bordeaux ;
- rationnels et décimaux, d'après la progression d'ERMEL CM1 ;
- la proportionnalité, d'après la progression d'ERMEL CM1.
- la soustraction, d'après l'IREM de Bordeaux.

Des documents sur l'espace du cycle 1 au cycle 3, et la géométrie au cycle 3 sont également donnés aux PE2, mais la forme tableau / progression est moins adaptée.

IV. Quelques questions cruciales

En conclusion, nous voudrions revenir sur quelques questions sensibles que nous retrouvons dans la formation :

IV. 1 Travail sur la durée

Comment travailler, avec les PE2, l'organisation de l'apprentissage des élèves dans la durée, c'est-à-dire travailler la cohérence ? D'autant que plusieurs facteurs, dans la formation, jouent contre la prise en compte par les PE2 de cette durée :

- le découpage PE1 / PE2 qui incitent les PE2 à « mettre à la poubelle » les documents reçus en PE1, c'est-à-dire à ne pas capitaliser les connaissances acquises en PE1 sur les situations d'apprentissage ;
- une année PE2 découpée en stages courts ;
- le découpage de certains manuels : un jour les élèves font du numérique, le lendemain de la géométrie, le surlendemain des problèmes ... au mépris de la continuité des apprentissages et des possibilités de mémorisation. Or les titulaires des classes où les PE2 effectuent leur stage en responsabilité suivent souvent un manuel, et en utilisent les fiches ; et ces titulaires ont souvent, vis-à-vis du PE2 qui les remplace, des exigences de continuité contre lesquelles l'IUFM est obligé de lutter.

IV. 2 Mise en œuvre effective d'un apprentissage pour les élèves

Une difficulté avérée pour les PE2 est la gestion, dans une situation, du couple dévolution / synthèse, **et de ce qu'il y a entre les deux**. Pour certains PE2, une conception assez mécaniste des situations d'apprentissage prévaut : une fois la dévolution faite, la situation « doit » fonctionner toute seule, l'élève travaille seul ou avec ses pairs, et les PE2 ont une idée très floue du rôle du professeur pendant cette phase.
De la même façon, pour certains PE2, un essai d'élève dans une situation se traduit par échec ou réussite, mais il leur est difficile d'aller au delà : comment transformer échec / réussite en erreur / procédure ? Quels sont les moments et les formes des interventions du professeur ?

Certains PE2 ont également une forte réticence à communiquer à l'élève son échec dans une tentative, particulièrement en cycle 1 : peur de « traumatiser » l'élève, et ceci d'autant plus que le PE2 a du mal à voir la suite de l'apprentissage (deuxième « jeu », suite des essais, modification éventuelle des variables, réussite à terme).
Nous pourrions analyser ces difficultés en disant que l'épistémologie de certains professeurs en formation les incite à valoriser un modèle spontanéiste des apprentissages (effacement du professeur, tout « doit venir » de l'élève) et un modèle gratifiant du professeur : celui-ci ne doit jamais être celui qui sanctionne l'échec ou même seulement le pointe. Cette épistémologie doit indéniablement beaucoup à la diffusion par les médias de certaines « modes » pédagogiques.

IV. 3 Incertitude didactique

Une difficulté sérieuse est la gestion de **l'incertitude didactique** chez un professeur débutant, qui doit, lui, gérer **l'incertitude cognitive** des élèves.
Ainsi une PE2, vue en visite en CM1 au bout de trois jours de stage, nous déclare paniquée : « Heureusement que vous venez, je ne sais pas quoi faire, j'ai commencé la division, mais ça ne marche pas ». Et aux questions du formateur : « Comment ça, ça ne marche pas ? » elle répond : « Et bien oui, ils n'y arrivent toujours pas ».
On assiste ainsi à des effets cumulés, qui peuvent s'ils ne sont pas pris en charge par les formateurs, inciter le professeur débutant à abandonner la gestion de situations complexes et à se rabattre sur des fiches de manuels ...
Pour essayer de répondre à ces difficultés, nous avons mis en place un service « SOS maths » qui fonctionne pendant les stages en responsabilité, sur appel téléphonique ou par e-mail.

IV. 4 Difficultés institutionnelles

Enfin, les PE2 se trouvent en butte à des tensions entre les contraintes institutionnelles : attitude du titulaire (avec des cas caricaturaux, comme cette titulaire qui avait mis un mot aux parents les priant de bien vouloir excuser par avance toutes les bêtises que le PE2 ne manquerait pas de faire), pressions des parents surtout en cycle 3, pressions des collègues de l'école du stage pour adopter le même manuel et la même progression.
Ces contraintes externes, ajoutées aux contraintes internes, font qu'il est parfois difficile pour le PE2 de trouver un espace de liberté dans sa classe.
D'autre part ces contraintes institutionnelles ne trouvent pas, dans notre IUFM, de lieu pour être traitées ; l'instauration récente d'équipes ressources pour un groupe restreint de PE2 (un formateur et deux PEMF pour un groupe de 5 à 6 PE2) pourrait être une aide.

V. Conclusion

En conclusion, nous voudrions souligner que ce travail, susceptible encore d'améliorations significatives, nous en sommes convaincus, a du moins instauré dans les groupes de PE2 dont nous avons la charge, une atmosphère de coopération entre PE2, et entre les PE2 et le formateur, ce dernier étant vu comme aide et ressource et non comme juge.

De plus, un indice que nous jugeons important, de la qualité du travail effectué en formation, est la capacité des PE2 à essayer de gérer, dans leurs classes en responsabilité, des situations d'apprentissage complexes. De ce point de vue, nous pouvons attester que parmi les PE2 en stage, la plupart ont effectivement tenté, et réussi à des degrés divers, mais non négligeables, de faire vivre dans leurs classes des situations d'ERMEL ou de l'IREM de Bordeaux, avec phase d'action des élèves, gestion du travail des groupes, mises en commun et synthèse.

Par ailleurs le travail sur les dossiers nous a permis d'améliorer déjà un peu l'articulation entre les situations vécues en stage d'observation et la formation en didactique.

Enfin, d'une année sur l'autre il n'est pas nécessairement souhaitable de redémarrer les dossiers à zéro ; l'exploitation d'une sélection des meilleurs productions semble réalisable, ou la reprise critique de dossiers moins bien élaborés. D'autre part, toutes les rubriques n'étant pas couvertes pour tous les cycles, ni toutes les composantes de la notion, dans les dossiers déjà réalisés, il y a du champ libre pour continuer le travail, avec une organisation par thèmes par exemple.

ANNEXES

Annexe 1

Les moyens professionnels de l'enseignement des mathématiques

Les exigences de l'institution : pédagogie centrée sur les apprentissages des élèves, tenant compte de leurs différences tout en visant une culture commune.
cf. Textes officiels

Les rôles du professeur :
* permettre l'insertion de l'élève dans la progression au niveau de sa problématique personnelle (privée), et de son évolution : place des situations fondamentales et de la notion de résolution de problèmes
* expliciter le répertoire (public) **d'ostensifs** de l'enseignement du niveau considéré (termes oraux, représentations graphiques, symboles écrits, résultats (relations, méthodes et techniques)
* organiser le temps et les situations pour permettre aux élèves de réaliser une acquisition et une structuration pertinente des savoirs : identification et enrichissement de notions mathématiques au travers des relations fondamentales supportées par des situations pertinentes.

Exigences nouvelles du côté du professeur :
Savoir relier un objet d'enseignement à ses fonctions sociales et scientifiques.
Développer une grande rigueur conceptuelle pour différencier et relier ce qui relève des connaissances personnelles (et privées), ce qui relève du savoir (nécessairement public), ce qui relève de son emploi dans des **situations**.

Comment parler des mathématiques en classe
Le professeur doit, à chaque niveau d'enseignement, adapter son langage aux élèves ; de plus l'activité mathématique doit donner naissance à des OUTILS dont les élèves pourront se saisir pour devenir plus autonomes et faire des mathématiques. Or ces outils sont des « signes », matériels ou écrits, oraux … référés aux **objets mathématiques**.
<u>Les objets mathématiques sont imaginaires</u>
On peut dire, comme le peintre Magritte écrivait « Ceci n'est pas une pipe » en légende d'un tableau représentant une pipe,
« 3 » « trois » « ♣♣♣ » : **Ceci n'est pas le nombre « trois ».**
Les objets mathématiques, étant imaginaires, sont régis par des règles de cohérence et non par des règles pragmatiques ; ceci n'empêche pas bien sûr l'importance de la mise en relation :
action (sur un milieu) – **règles** (sur les signes et les objets dont on parle, qu'on représente).

Définition des ostensifs : "Les outils sémiotiques du travail mathématique "

Les ostensifs sont les signes avec lesquels on désigne – on représente - les objets mathématiques, mais ces signes sont aussi utilisables pour poursuivre le travail, ainsi ils servent à désigner les objets mais aussi à opérer sur eux. En ce sens ils ont une double fonction ;
- Une fonction sémiotique ;
- Une fonction d'outil (cf. Chevallard, « Les outils sémiotiques du travail mathématique », Revue Petit x n° 50)

Un ostensif ne prend du « sens » que s'il opère quelque part, en référence au concept qu'il est supposé représenter.

Exemple de la complexité d'un ostensif : "comparer"

Relier ce terme à une (famille de) situation(s), c'est à dire à un(e) (famille de) défi(s), une (famille d') interrogation(s) portée(s) sur un(e) (famille de) milieu(x).

Comparer renvoie à un résultat dans une situation insérée dans un certain milieu.

Si le milieu concerné est celui d'objets physiques, on imagine facilement trois concepts mathématiques différents :
- c'est le même ou ce n'est pas le même objet, ce qui suppose que l'un des objets soit absent au moment de la question. Relation d'égalité.
- deux objets relèvent ou non d'une propriété commune, ils sont au moins partiellement "pareils" d'un certain point de vue, ils ont une propriété commune, matériellement liée à une technique, structurée par une relation d'équivalence.
- deux objets peuvent être ordonnés, placés selon une hiérarchie du point de vue d'une grandeur, fixée par une technique identifiée, l'un est plus ... que l'autre, structuré par une relation d'ordre.

Autre exemple : nombres et chiffres, dénominations orales et signes opératoires ...
ex : champ sémantique de l'addition et des problèmes additifs.

Les moyens du professeur

La définition d'étapes de l'enseignement.

Matériellement, cela se traduit par le découpage de l'année en périodes au cours desquelles l'enseignement sera dirigé vers une partie des connaissances et compétences visées. Cela se traduit par l'organisation d'évaluations sommatives, et de décisions appropriées.

La notion d'étape d'enseignement diffère selon que l'on se situe dans une conception **béhavioriste** ou **cognitiviste** de l'apprentissage, dans une conception basée sur la **communication des ostensifs** ou basée sur l'élaboration des notions de base par la mise en place des **situations** fondamentales.

Une grande rigueur est nécessaire pour permettre aux élèves de se repérer et de prendre en charge la part nécessaire à leur apprentissage.

L'organisation, le choix et la conduite de situations d'enseignement (leur dévolution et leur régulation).

Les situations d'élaboration	Type : Situation a-didactique, défi personnel (connaissances privées et publiques), savoir bien identifié. Attitude : recherche, responsabilité personnelle. La question posée est claire, elle ne nécessite pas la connaissance visée, le milieu évalue la réponse donnée sans la connaissance. Trois niveaux, action, formulation, preuve, dont chacun nécessite les précédents et qui s'articulent. Évaluation formative, sur la base des indications fournies par la situation et interprétées par l'élève.
Les situations d'apport d'ostensifs (questions, symboles, résultats, techniques)	Type de situation : communication, connaissances publiques. Attitude nécessaire de l'élève : Écoute, explicitation des incompréhensions. Toujours réalisées en référence à un milieu (rendu) familier . Ostension assumée ou déguisée. Les produits sont identifiables clairement, les modes utilisés sont ceux de la communication professeur - élève. Évaluation : capacité à reproduire, jugée par le professeur ou son substitut.
Les situations d'exercices	Attitude nécessaire de l'élève : prise en charge d'augmentation de performances (collectives ou spécifiques à l'élève) convenues avec le professeur. L'objet de l'exercice est connu préalablement de l'élève : il s'agit de l'utilisation d'ostensifs, en rapport ou non avec des situations, que l'élève est invité à prendre en charge. Évaluation action par action, sous la responsabilité directe du professeur, qui vise à informer d'abord l'élève pour qu'il en améliore son efficacité.
Les situations d'exploitation souvent nommées "situations problèmes".	Attitude nécessaire de l'élève : prise en charge personnelle du pouvoir qu'il a sur "le monde". L'élève est invité à explorer les possibilités que lui confèrent ses connaissances et ses savoirs (les questions mathématiques qu'il sait poser, les réponses qu'il sait apporter) en les articulant pour poser ou résoudre de nouveaux problèmes (proposés par le professeur, proposés par lui-même). Critères : - les ostensifs nécessaires à la résolution ne sont pas nouveaux ; ils sont communicables. - l'élève a la responsabilité effective du choix des ostensifs et/ou des situations. - l'élève a la responsabilité de la décomposition d'un problème en problèmes connus et plus simples. Évaluation sous la responsabilité directe du professeur : résolution correcte des problèmes posés, questions pertinentes posées et résolues sur des milieux proposés par l'élève.
Les situations d'évaluation de l'étape (*)	L'objet est de renvoyer une information à l'élève, au professeur, aux parents sur une étape de l'apprentissage du niveau concerné. Cette information doit être claire et permettre des décisions concernant le temps didactique collectif ou individuel (continuer, faire une pause, dégager des moyens spécifiques).

(*) La notion d'évaluation est actuellement obscurcie par des vocabulaires dont la pertinence scientifique et professionnelle n'est pas bien avérée.
Je propose de se référer à l'ouvrage : **"Pédagogie, dictionnaire des concepts clés", ESF**.
C'est la décision effective prise (par le professeur ou l'élève) qui confère à une activité son statut d'évaluation.
Le sens utilisé dans situation d'évaluation est à rapprocher du terme d'évaluation **sommative**. Il s'agit, pour le professeur de se donner les moyens de prendre une décision concernant l'avancement du temps didactique d'une étape à l'autre. Il s'agit donc de faire le point pour chaque élève sur un apprentissage, que le professeur a pour responsabilité de prévoir, de proposer et de faciliter.
La définition du contenu d'une étape diffère selon les théories psychologiques sous-jacentes : béhavioristes ou cognitiviste.
Certains enseignants utilisent de fait une conception béhavioriste en exigeant la réussite de tous à chaque activité avant de poursuivre.
L'enseignement le mieux adapté à une telle pratique est celui d'une ostension assumée.

Évaluation **formative**
Ce terme va pouvoir qualifier des modes très différents de recueil de l'information selon qu'il s'agit de situations d'élaboration, de situations d'exercice ou d'exploitation, notamment en ce qui concerne l'autonomie des élèves, et le rôle du professeur.

Évaluation **diagnostique**
Ce terme se trouve de plus en plus employé sans que ses caractéristiques soient identifiées. Il s'agit pour un enseignant de recueillir le plus économiquement des informations fiables lui permettant d'organiser le temps didactique. La réalité révèle souvent des évaluations sommatives dévoyées, qui ne portent que sur des ostensifs, qui n'ont pas toujours été enseignés. Les évaluations ainsi nommées et improvisées par un enseignant nouvellement arrivé dans la classe donnent au professeur une information où il ne peut séparer les composantes de l'enseignement pris en charge par la famille et celles prises en charge par l'École. Elles ne donnent pas en général au professeur les indications qui lui sont nécessaires pour organiser un apprentissage sur une base cognitiviste.
Il faudrait pour cela recueillir des informations sur la capacité ou l'incapacité des élèves :
- à relier ces ostensifs à leurs connaissances personnelles (privées) : rôle des situations fondamentales,
- à organiser les ostensifs nouvellement appris par rapport aux anciens.

La meilleure source d'indication permettant une prise de décision prévisionnelle sur l'enseignement à réaliser est constituée par une situation issue de la situation fondamentale du savoir visé, avec des variables didactiques qui en permettent la résolution avec les différents niveaux de savoir que l'on veut tester. Les élèves ont le choix des outils, et doivent être conscients qu'ils vont montrer leur degré de maîtrise de ce qu'ils ont appris.

Annexe 2

La consigne

1. La consigne

C'est l'ensemble des moyens professionnels qui permettent au professeur de réussir la *dévolution* du travail qu'il a choisi de proposer. Une bonne passation de consigne se constate (après) par le fait que l'ensemble des élèves prennent à cœur de réaliser le travail proposé par le professeur.

2. Conditions didactiques générales d'une bonne consigne en mathématiques

Les élèves doivent pouvoir se représenter ou garder en mémoire :

les **conditions d'arrêt** (le but à atteindre, l'état terminal)

les **conditions d'évaluation** (par le professeur ; ou par les élèves, et dans ce cas par quels moyens précis)

Si c'est communiqué en premier, cela permet une première présentation structurée du matériel.

- l'enjeu :

s'exercer sur une habileté qui doit être *précisée par le professeur avec la participation des élèves* (technique)
se débrouiller tout seul pour réussir avec ce que l'on *sait déjà*, et sinon, *inventer*.

- quelles sont les décisions à prendre ? : le matériel, l'état initial, les états autorisés et interdits (un à un, ou par une règle illustrée d'exemples, ou par référence à des activités passées).

- qui va décider ? De quoi ?

soit chacun décide seul, de tout, ou de la partie qui lui est attribuée (cas du travail type « relais ») ; mais dans ce dernier cas (relais), si la réussite consacre celle de tous, les causes de la non-réussite devront être élucidées ensemble, et cette élucidation devra être prise en compte au moins dans les décisions futures de chacun (partage des connaissances sur les causes d'échec et de réussite),
soit chacun devra coopérer à égalité avec d'autres, et les décisions seront communes.
Elles seront donc l'objet d'une recherche d'accord. Le mode de traitement attendu des opinions divergentes devra être explicité (sur quelles règles de savoir validera-t-on l'action des élèves ?) afin que la validation demeure rationnelle et ne se règle pas sur un mode affectif ou de pouvoir.

3. Conditions pédagogiques de la réalisation d'une bonne consigne

choix par le professeur

- de ce qui est dit et de ce qui reste implicite dans un premier temps (et peut être ensuite demandé aux élèves pour s'assurer qu'ils en ont conscience) *pour permettre une représentation du but à atteindre et des décisions à prendre.*
- de l'ordre de la présentation des éléments didactiques de la consigne.
- du mode de présentation de chaque aspect (oral, écrit, gestuel, manipulation de matériel).
- de ce qui peut être proposé par les élèves, de ce qui reste à la charge du professeur.
- de ce qui reste matérialisé sous les yeux des élèves pour permettre le maintien en mémoire de la consigne.

réalisation par le professeur

- mise en place et régulation des conditions d'écoute des élèves.
- expression claire, utilisation convenable de l'ostension pour tout ce qui est ostensif nouveau (signes désignant des objets mathématiques, signes opératoires, « règles »).
- contrôle de la compréhension :

— de chaque partie de la consigne ;

— de l'ensemble de la consigne (ce qui, en cas de **jeu nouveau**, nécessite de *faire faire au moins une partie* sous le contrôle du professeur).

Annexe 3

Séances de problèmes

Corrections collectives / Mises en commun

Une des questions auxquelles ces séances ont voulu répondre est celle des choix du professeur lors de ces séances : choix des élèves à solliciter, et choix des questions développées (et des questions auxquelles l'enseignant donne seulement la réponse juste).

La fonction d'un travail collectif est

- d'homogénéiser les connaissances de la classe sur un domaine (savoir, langage, représentation, propriété ou technique de calcul), à l'occasion d'un débat ou d'un apport d'information (assumé ou déguisé) ;
- d'augmenter les capacités d'autonomie de chacun.

Un travail de correction est censé donner une indication sur le juste et le faux, les bonnes méthodes, renvoyer chacun aux savoirs institués et à l'utilisation autonome des moyens associés à ce savoir.
La correction collective d'un travail sert à fournir à chacun les moyens d'augmenter son autonomie dans la réalisation du travail institué, à identifier et à conclure sur une difficulté rencontrée par beaucoup par exemple.

1) Les exercices

Exemple de la correction collective des exercices de technique de calcul écrit, *une fois que celle-ci a été instituée* (*élaborée ou enseignée*).
Les élèves ont été invités à exercer préalablement en travail individuel (par exemple) une compétence particulière et bien identifiée.
Questions travaillées sur des suites « d'opérations à calculer » :
Réalisation de calculs écrits.
Réalisation d'une « preuve » pour chaque calcul.
En cas de désaccord, recherche des erreurs.
Justesse de la procédure et du résultat :

- Disposition des nombres de départ.
- Ordre des calculs à réaliser.
- Tables.
- Calcul et écriture de chaque chiffre intermédiaire écrit.
- Calcul et écriture de chaque chiffre du résultat obtenu.

Fiabilité (nombre de résultats justes sur dix opérations par exemple).
Rapidité d'exécution.
Domaines de complexité (nombre de chiffres, difficultés particulières liées aux valeurs des chiffres).

Régulation de l'autonomie des élèves
Le professeur peut mettre à la disposition des élèves au moins un modèle commenté (disposition, ordre des calculs, énonciation standard) pour la technique d'opération et la preuve.
Il a ensuite utilisé les premières séances d'exercice pour mettre au point en correction collective avec les élèves les recours à ce modèle pour la recherche des erreurs, et les moyens de correction.
Il peut ensuite proposer d'ajouter au modèle des exemples de situations typiques de difficultés spécifiques rencontrées par de nombreux enfants.

L'enseignant se doit donc :
- de prendre acte des réussites et des échecs ;
- de fournir à chacun les moyens de détecter si son résultat est juste ou faux, en recourant aux outils déjà disponibles, et de partir à la recherche de son erreur ;
- d'enrichir ou d'ajuster les moyens disponibles pour guider l'exécution, si nécessaire.

Remarque : il est souhaitable de s'interroger sur l'obligation qui serait faite à un élève de suivre une correction d'un travail qu'il n'a pas été convié à réaliser dans des conditions adaptées à son niveau, a fortiori dans une classe à plusieurs cours si ce travail ne relève pas de savoirs qui lui ont déjà été enseignés : cas de MS avec des GS en C1 ou des CE2 avec des CM en C3 ou des GS ou CP avec des CE1 en C2.

2) les énoncés de problèmes

Il y a des problèmes qui constituent de véritables enjeux d'évaluation scolaire (l'avenir scolaire, notamment au collège, dépendra des capacités à savoir les résoudre), et des problèmes dont l'enjeu est l'exploitation des savoirs anciens dans des situations complexes, ou de stimuler les capacités imaginatives et créatrices des élèves sur la base de situations problèmes pour développer l'élaboration d'un nouveau savoir ou pour s'amuser.
Selon le cas, je parlerai de phase de correction collective ou de phase de mise en commun et le contenu de ces phases dépendra des enjeux et de l'avancement des savoirs.

a) les problèmes « traditionnels », enjeux d'évaluation scolaire

La fonction principale pour les élèves de ces problèmes est de travailler le choix des opérations adaptées au traitement de la question posée dans le contexte évoqué.
Un enjeu fondamental des corrections est donc :
- de faire identifier le type de réponse associé à la question ;
- de faire analyser les questions, c'est-à-dire identifier les types de connaissances associées à la réponse à ce type de question dans le contexte ;
- de se rapporter pour cela aux situations fondamentales (selon le domaine de mesure), associées aux différentes <u>opérations mathématiques dans leur rôle de dénombrement ou de calcul</u> ;
- Et éventuellement de mettre au point un type de présentation de la « solution ».

b) les problèmes insérés dans l'élaboration d'une notion

Il s'agit là d'une mise en commun plutôt que d'une correction.

La fonction de ces problèmes est d'amener les élèves à établir propriétés ou techniques comme un « théorème », c'est-à-dire établies vraies par les élèves, à l'aide des propriétés mathématiques associées au contexte.

La mise en commun a donc pour principale fonction d'identifier et/ou d'assurer la validité d'une méthode (ou sa fiabilité, ou son domaine d'efficacité privilégiée) ou d'une propriété dans la mesure où ces savoirs sont valides sur un champ de problèmes liés à une notion.

c) les problèmes complexes d'application

Ces problèmes ont pour fonction principale de demander aux élèves d'articuler plusieurs savoirs mathématiques au sein d'une même situation, de manière autonome. Il s'agit donc pour les élèves d'un triple défi :

- la reconnaissance de ces différents savoirs par référence à plusieurs situations fondamentales associées à une même situation ;
- l'articulation logique convenable de ces savoirs ;
- la mise en œuvre de plusieurs techniques d'opérations.

La correction privilégie l'un ou l'autre de ces aspects.

Annexe 4

SITUATIONS D'APPRENTISSAGE EN MATHÉMATIQUES

Questions

- Organisation de l'enseignement dans une classe hétérogène : comment prévoir les étapes de l'apprentissage ; jusqu'où faut-il reprendre l'apprentissage des connaissances de base sur un concept (une opération, exemple pris dans les deux groupes) pour les élèves en difficulté, et comment ;
- Comment organiser les mises en commun et les synthèses dans une classe où les élèves n'ont pas travaillé sur les mêmes énoncés par exemple ;
- Quelle est la différence entre une situation où l'on prétend faire accéder les élèves à une connaissance nouvelle par un apport d'ostensifs et une situation d'apprentissage où la connaissance fonctionne d'abord en action avant d'être formulée, puis où un apport d'ostensifs et une institutionnalisation ont lieu (sur deux exemples précis au cycle 2 : les situations additives au CP, la multiplication au CE1 ; et sur l'exemple repris de la multiplication, au cycle 3 en évoquant le travail à faire avec les élèves qui sont en difficulté).
- Selon quels critères organiser la classe (classe entière, petits groupes, deux groupes ...) et quand ; quelles en sont les conséquences sur les mises en commun et les synthèses ;
- Quels sont les outils pédagogiques et didactiques pour gérer le travail en petits groupes (règles de vie*, production prévue du groupe) ;
- Comment organiser le recueil d'informations sur le travail des élèves, en particulier lorsqu'ils ne travaillent pas individuellement à l'intérieur du groupe-classe : prévoir les feuilles de réponses et les brouillons, prévoir des grilles de réussite sur les tâches demandées, que l'élève remplit lui-même ou que le professeur remplit (avec procédures si possible), prévoir les affiches demandées aux groupes ...
- Que signifie « aménager la situation » pour un élève ou un groupe d'élèves.

* L'élaboration avec les élèves d'un contrat de vie de classe est souvent nécessaire ; un tel contrat stipule les droits et les devoirs des différents partenaires de la classe (y compris le professeur, qui a par exemple le devoir d'aider les élèves à réussir ce qu'il leur donne à faire). Il **n'est pas** rédigé en termes *négatifs* (Fais pas ci, fais pas ça ...). Parmi les droits de l'élève, il y a **le droit de se tromper**.

Gestion des situations

Différenciation

La différenciation du travail des élèves est souvent nécessaire. Cependant différencier ne veut pas dire donner à chaque élève, ou à chaque groupe d'élèves, un travail sur un concept différent ou une situation différente. Il y a quatre (au moins) façons de différencier :

- par les variables didactiques ;

- par les procédures acceptées suivant le niveau de l'élève (ses connaissances du moment), par exemple manipulation matérielle prévue si l'élève en a besoin ;
- par l'aide qu'on lui apporte (au niveau du calcul par exemple, apport d'un répertoire de calcul ou utilisation de la calculette —> variables didactiques) ;
- en dernier lieu seulement, par les situations (exemple d'une classe à plusieurs niveaux où l'on ne souhaite pas — on ne peut pas — traiter une même notion pour tous les niveaux).

Question au sujet des procédures : combien de temps peut-on laisser un élève utiliser des procédures moins efficaces, alors qu'une procédure plus experte a été introduite dans la classe ?
Réponse : *aussi longtemps que l'élève en a besoin (c'est-à-dire, qu'il réussit avec la procédure ancienne et échoue — ou n'arrive pas à faire le travail — avec la procédure experte).* Mais, ne pas oublier de mettre en évidence les avantages de la procédure experte, qui est utilisée par d'autres élèves, chaque fois que l'occasion s'en présente ; et mettre en perspective le travail de l'élève : un jour, lorsqu'il sera prêt, il pourra lui aussi utiliser cette procédure.
Trois mots clés **PATIENCE, TOLÉRANCE, BIENVEILLANCE.**

Mise en commun

Une mise en commun peut avoir lieu si des élèves ont travaillé sur le même savoir, même si le travail fait comportait des variantes. La mise en commun porte sur :

- les questions que l'on s'est posées
- les difficultés rencontrées et les différentes solutions apportées par les élèves ou les groupes (par exemple pour une séance de résolution de problèmes où les élèves ont rencontré des difficultés de lecture d'énoncés et d'identification de la bonne opération, la mise en commun explicite ces difficultés et les solutions qui y ont été apportées) ;
- les procédures.

Synthèse

Une synthèse comporte quatre dimensions :

- un jugement sur les meilleures procédures, les plus rapides, les plus efficaces ;
- les connaissances nouvelles que la situation a permis de dégager, et qui deviennent les connaissances communes de la classe ;
- l'apport d'ostensifs nouveaux, soit des symboles, soit des mots désignant les objets travaillés ;
- la mise en perspective du travail de la classe : « on rejouera à ce jeu », ou « on refera des problèmes », avec un positionnement du professeur sur ses attentes en termes de travail des élèves (connaissances à réinvestir, procédures) lors de la suite prévue.

Annexe 5

Progression sur la DIVISION au CM1

Module 1 *Problèmes du calcul du "nombre de parts"*	Situation	Synthèse prévue	Difficultés prévues ou rencontrées
1. *Dévolution du problème de l'optimisation du calcul du quotient d'après le sens, lorsque ce quotient est grand (sans calculatrice).*	Un éleveur de volailles expédie chaque semaine des œufs à un supermarché. Il dispose de 439 œufs ; il veut les expédier par boîtes de 24. Combien peut-il remplir de boîtes ? (**Validation matérielle** prévue : boîtes dessinées + jetons par ex)	*Identification de stratégies raisonnées de calcul.* *Dévolution du problème de la recherche de stratégies permettant la réussite dans les cas où le nombre à trouver est "grand".* *Ex : encadrer par des multiples (mais recherche « à tâtons ») ou bien soustractions successives (mais par multiples de 24 commodes), d'où la nécessité de disposer du répertoire 24×2 , 24×3, etc. mais aussi :* *24×10 , 24×20, etc. et 24×100 , 24×200, 24×300 ...*	*Ne pas croire que c'est évident pour les élèves! Certains mettent longtemps avant de se rendre compte de l'utilité de ce répertoire : ne pas l'imposer trop tôt.*
2. *Recherche de méthodes de calcul sous contrôle du sens*	2045 chocolats à expédier en boîtes de 26. Pas de validation matérielle.	*Méthode* de *contrôle* du *résultat* par *calcul* : 2045 = 26 x ☐ + ☐ avec les nombres trouvés par les élèves. *Identification claire au moins des 2 méthodes : d'encadrement par des multiples et de soustractions successives.*	
3. *Optimisation de deux méthodes*	2661 chocolats en boîtes de 37 Vérification par le calcul.	*Avantages et inconvénients des deux méthodes.* *Avantages de la soustraction qui permet* • *de minimiser les multiplications en utilisant les multiplications par les multiples de 10, 100, 1000 (cf. ci-dessus)* • *de simplifier à chaque étape la difficulté du calcul.* *Inconvénients : nombre de soustractions.* *Décision : exploration d'une optimisation de la méthode de soustraction en donnant un répertoire de produits du dividende par les nombres d'un chiffre* *Premier comptage du nombre de soustractions* (**coups**).	

4. Minimiser le nombre de *soustractions.*	3475 bouteilles en casiers de 12 Répertoire disponible.	Solution minimale ici en trois coups. Comparaison avec les solutions trouvées par les élèves.	
5. *Amélioration des méthodes individuelles.*	10661 carreaux à poser par rangées de 23. Répertoire fourni.	Utilisation du nombre de coups au mieux (il apparaît des restes supérieurs à 23).	
6 - 7. Situation de communication pour reprendre le travail sur le nombre de coups et le répertoire le plus intéressant, sans calcul pour les élèves.	Les émetteurs ont une division déjà effectuée, du type : 3398 diviseur 14 -<u>1400</u> → 100 0598 <u>- 140</u> → 10 458 - <u>280</u> → 20 178 - <u>140</u> → 10 038 - <u>28</u> → 2 10 Les récepteurs n'ont que la donnée des deux nombres. Les émetteurs doivent envoyer aux récepteurs les résultats du répertoire *nécessaires pour trouver les résultats*.	A gagné l'équipe qui a envoyé le nombre minimal de résultats, qui permettent de réaliser la division (le produit) en le moins de coups possible. Synthèse sur le nombre minimal de coups.	
8 - 9. Contrôle individuel. Correction et soutien aux élèves qui ont des difficultés.			

10. Problèmes	Reconnaître des problèmes de division, mélangés à des problèmes de multiplication.	Introduction d'une représentation : 25 25 25 ....→ 8825 timbres ------⌣--------- ? 25 25 25 .... → ? timbres ------⌣--------- 51	
11. Décontextualisation	29800 : 12 Prévoir le nombre de coups, faire la preuve, fabrication individuelle des résultats.	Comment prévoir le nombre de chiffres du quotient ? On essaie x10, x100, x1000, etc.	
12 - 13. Mise au point d'une technique de la division	Entraînement sur plusieurs exemples : 2593 : 74 ; 523 458 : 971 etc. Exigés : nombre de coups minimum et preuve.		
14. Suppression de l'écriture des zéros dans les soustractions et les multiplications		Utilisation du nombre de c, d, u Nouvelle disposition de la division.	

Module 2 *Extension à d'autres types de problèmes*	Situation	Synthèse prévue	Difficultés prévues ou rencontrées
15. Division et partage	Recherche d'un problème avec la valeur d'une part inconnue : 4 amis dépensent 2675 F, combien chacun doit-il payer ? Deux stratégies apparaissent : distribution régulière et division.	Rapport entre les deux procédures.	
16. Division et partage (suite)	Comparaison des deux types de problèmes posés dans un même contexte. Après résolution de l'un, création de l'autre.		
17. Autres grandeurs avec les deux types de problèmes	1) Un colis pèse 2930 g. Il contient 5 boîtes de conserve identiques. 2) Un coureur a fait 23 tours de piste en une heure. S'il avait couru régulièrement, combien aurait-il mis de temps pour faire chaque tour de piste ? 3) Un menuisier pose des baguettes bout à bout. Chaque baguette mesure 12 cm et la longueur des murs est 240 cm.		
18. Problèmes de prix			

APPRENTISSAGE GEOMETRIQUE AU CYCLE 3 ET ARGUMENTATION EN GEOMETRIE

ATELIER 2
Michel MANTE (IUFM de Lyon) et
Robert NEYRET (IUFM de Grenoble),
membres de l'équipe INRP
"Apprentissage géométrique au cycle 3 et argumentation en géométrie"

Cet atelier a eu pour objectif à partir de l'état de réflexion de notre groupe de recherche d'engager un échange entre les participants sur les problèmes posés par l'enseignement de la géométrie au cycle 3 de l'école primaire, en particulier ceux concernant les phases de validation.
Dans un premier temps, nous présenterons le travail de notre groupe et nos principales hypothèses puis à partir d'une situation nous analyserons, dans un deuxième temps, un certain nombre de difficultés auxquelles nous nous heurtons.

1 • Présentation de notre groupe de recherche et de nos principaux choix

Des travaux[1] ont renouvelé les perspectives sur l'enseignement de la géométrie : ils ont mis en évidence la nécessité d'articuler les compétences spatiales[2] (et leur enseignement) et l'enseignement des connaissances géométriques[3]. Ils ont posé la question de l'introduction des concepts fondamentaux de la géométrie comme outils pour résoudre des problèmes spatiaux. Notre groupe s'est donc fixé un certain nombre d'objectifs.

1 • 1 Les objectifs de ce groupe de recherche sont les suivants

1 - Préciser pour l'école primaire les enjeux, les contenus et les objectifs d'un enseignement visant au développement des compétences spatiales et géométriques.
2 - Elaborer, expérimenter, analyser des dispositifs complets d'enseignement (situations, modalités de mise en œuvre, analyse didactique), cohérents pour l'ensemble du Cycle 3, utilisant différents types d'espace (feuille de papier, espace environnant, écran géré par un logiciel de géométrie...).
3 - Conduire des investigations précises sur l'utilisation de phases argumentatives pour la construction et le développement des connaissances spatiales et géométriques.

Nous[4] avons commencé le travail il y a deux ans, nous expérimentons pour la deuxième année un ensemble de situations pour le CE 2 et terminons notre première année d'expérimentation pour le CM 1.

---

[1] Pécheux (1990), Berthelot et Salin (1992), Weill-Fassima et Rachedi (1992).

[2] Connaissances qui permettent à un sujet un contrôle convenable de ses relations à l'espace sensible (Berthelot et Salin).

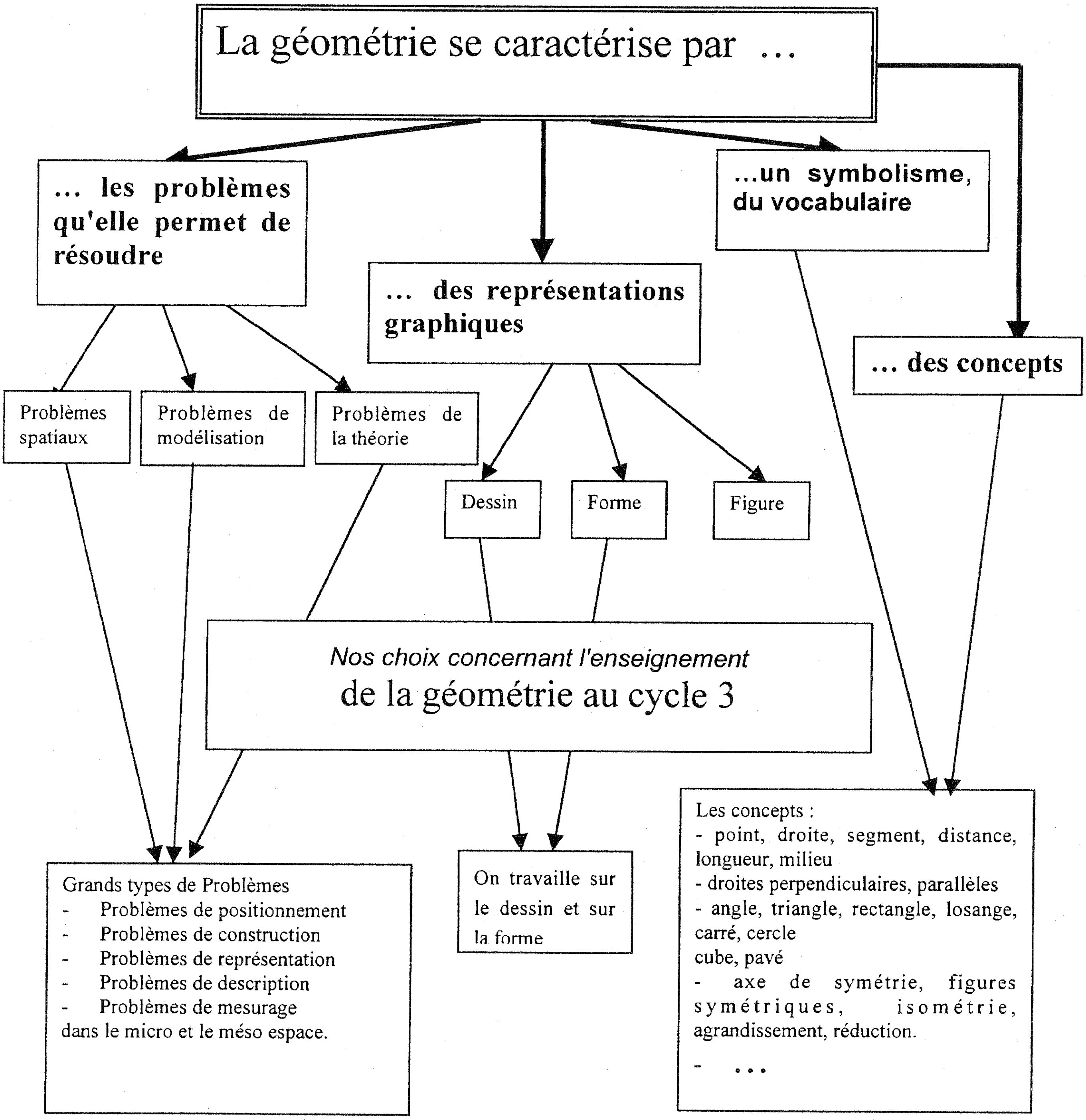
[3] Connaissances qui se réfèrent à un corpus de savoirs mathématiques bien identifiés.

[4] Actuellement le groupe est constitué de dix équipes animés par des formateurs IUFM, académies de Grenoble (Grenoble et Valence), de Lyon (Lyon et Bourg-en-Bresse), d'Aix-Marseille (Avignon), de Toulouse (Toulouse), de Paris, de Reims (Châlons sur Marne), de Clermont-ferrand (Clermont-ferrand), de Versailles

Travailler sur l'enseignement de la géométrie à l'école suppose de faire un certain nombre de choix, en particulier, en ce qui concerne l'apprentissage, l'acquisition d'un concept et ce qu'est la géométrie

1 • 2 Qu'est – ce que la géométrie pour nous ?

Le schéma ci–dessous permet de préciser ce qui caractérise pour nous cette partie des mathématiques :



(Antony) et de Créteil (Le Bourget et Livry-Gargan). Chaque équipe comprend des enseignants en IUFM (PIUMF et IMF), des conseillers pédagogiques et des instituteurs ou professeurs d'école.

1 • 3 Cadre théorique

Nous nous proposons d'étudier les conditions d'apprentissage des savoirs figurant au programme du cycle 3 des écoles, et en particulier
- la façon dont il peut s'effectuer en prenant en compte les connaissances des élèves, tant les connaissances spatiales que leurs conceptions initiales éventuelles sur ces savoirs ;
- la façon dont l'élève peut dépasser ses connaissances en acte et accéder à des connaissances formulées, voire institutionnalisées, donc identifiables.

Pour cela, la résolution de problèmes constitue le cadre de référence pour les apprentissages : c'est "la source et le critère du savoir" (Vergnaud, RDM 1993). La théorie des champs conceptuels (Vergnaud, RDM 1990) sert de cadre à l'analyse des "concepts et théorèmes" figurant au programme en ce qu'elle permet d'étudier les liens entre les concepts (repère du plan, alignement, parallélisme, perpendicularité...), et d'être utile pour l'analyse des types de problèmes.
Par ailleurs, nous nous référerons à la théorie des situations (Brousseau, RDM 1989) qui constitue un cadre plus restreint mais plus précis pour la conception de situations en retenant :
- les situations a-didactiques pour un apprentissage véritable par la résolution de problèmes ;
- les situations d'action, de formulation, voire de validation, en vue de l'apprentissage des concepts et théorèmes par les élèves.

Nous faisons l'hypothèse que les élèves "débutants" disposent de connaissances en acte, du fait de leur connaissance de l'espace, acquises par fréquentation de celui-ci. Par ailleurs, nous pensons que celles-ci peuvent évoluer vers des connaissances géométriques moyennant des situations construites dans le cadre précédent : elles sont ainsi destinées à permettre à l'élève de mobiliser ses connaissances en acte, d'en percevoir les limites, et de construire alors des connaissances formulées, décontextualisées et dépersonnalisées, en voie donc de devenir "géométriques".

Ces connaissances initiales à propos de chaque concept ou théorème doivent donc être d'abord sollicitées dans les premières situations, pour être identifiées. Ensuite la mise en place de situations a-didactiques d'action et de formulation notamment doit permettre :
- de faire mobiliser d'autres connaissances en acte utiles (des conceptions de la perpendicularité par exemple différentes des conceptions initiales) ;
- de les faire formuler par les élèves en réponse à des problèmes (et non à des sollicitations ou des injonctions du maître), mais peut-être seulement dans le "langage élève", avant l'introduction de la terminologie habituelle ;
- de les faire réutiliser dans des problèmes plus complexes.

Cela nécessite que dans les situations proposées, il y ait pour les élèves un milieu pour la validation (Brousseau) : nous reviendrons sur ce point important

Comme lors de notre travail sur l'apprentissage numérique (cf. ERMEL GS à CM2 – Ed HATIER) nous nous appuyons donc sur une approche socio/constructiviste de l'apprentissage.

Ce point de vue s'oppose à l'enseignement par ostention qui se caractérise[5] par le fait que l'enseignant présente directement les connaissances en s'appuyant sur l'observation dirigée

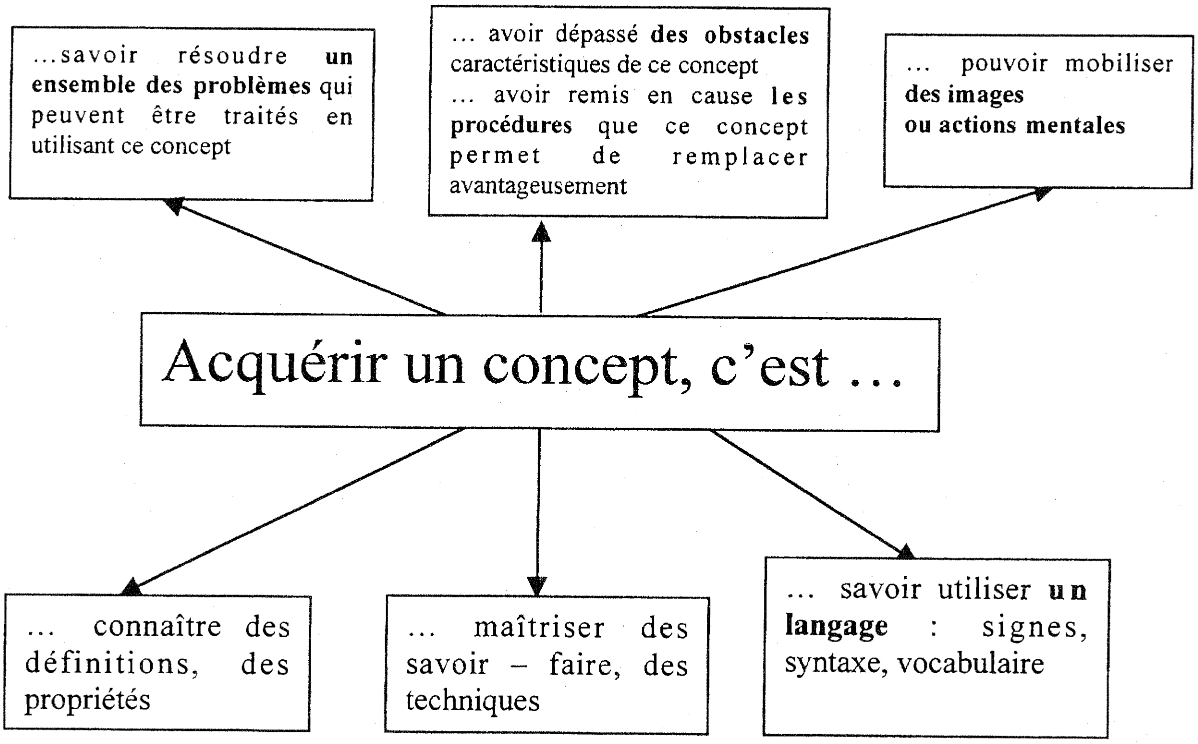
[5] Nous reprenons ici les travaux de R. BERTHELOT et M.H. SALIN.

d'une réalité sensible ou d'une de ses représentations, et suppose les élèves capables de se les approprier et d'en étendre l'emploi à d'autres situations.

Dans les pratiques de classe et celles induites par de nombreux manuels l'ostension a tendance à être remplacée par ce que R. BERTHELOT et M.H. SALIN appelle "l'ostension déguisée" qui se caractérise par le fait que :
- dans un premier temps l'élève doit "découvrir" (reconnaître et expliciter) la nouvelle connaissance (définition, propriété) à partir de l'observation "dirigée" d'un dessin présenté à l'élève. Ce dessin aura été conçu par le maître (parfois via l'élève) de façon à ce que cette connaissance soit très visible. Si elle ne l'est pas suffisamment, le maître intervient pour faciliter cette découverte avec des effets de contrat ;
- dans un deuxième temps il est demandé aux élèves de les réutiliser pour différents types d'exercices dont la proximité conceptuelle avec la situation d'introduction n'est pas toujours contrôlée.

1 • 4 : Qu'est – ce que s'approprier un concept ?

On peut caractériser l'acquisition d'un concept par le schéma suivant :



2 • Analyse d'un exemple de situation sur les droites perpendiculaires : "Pli sur pli"

2 • 1 Le concept de droites perpendiculaires

En reprenant la grille d'appropriation d'un concept, nous obtenons le schéma suivant qui nous permet d'élaborer des situations visant l'appropriation de ce concept.

Problèmes
- Repérage et description des positions
- Description, reproduction, construction d'une figure "contenant " des droites perpendiculaires.

Obstacles
- Seules les droites verticales et horizontales sont perpendiculaires.
- Une droite verticale est toujours perpendiculaire à une autre.
- Deux droites qui se coupent au milieu de leur représentation sont perpendiculaire

Images mentales
- Figures prototypiques : verticales, horizontales
- Figures telles que si on plie la feuille suivant une des deux droites cela amène la superposition d'une partie de l'autre droite sur elle–même.
- Droite support du plus court chemin d'un point à une droite.
- Angle droit : passage de l'angle aigu à obtus

Droites perpendiculaires

Définition / propriétés :
- Deux droites perpendiculaires à la même troisième sont parallèles.
- Si deux droites sont perpendiculaires alors elles définissent quatre angles droits.
- Si deux droites définissent quatre angles droits alors elles sont perpendiculaires.
- L'angle droit est la moitié d'un angle plat.
- Si (d) est perpendiculaire à (d') alors (d') est perpendiculaire à (d)

Savoir - faire
- Savoir reconnaître des droites perpendiculaires, des angles droits dans des figures simples et complexes avec ou sans instrument.
- Savoir reconnaître des angles droits.
- Savoir tracer des droites perpendiculaires avec une équerre, une Réquerre* et une Téquerre*.

Vocabulaire :
Savoir utiliser les expressions :
- Les deux droites sont perpendiculaires
- La droite … est perpendiculaire à la droite …
- La droite perpendiculaire à … qui passe par le point …
- Savoir coder des droites perpendiculaires avec le symbole
- Savoir utiliser le symbole $\perp$

* La réquerre est un instrument diffusé par l'IREM de Lyon, plaque de plastique transparent sur laquelle figurent des droites perpendiculaires. La téquerre est un instrument conçu par notre équipe, morceau de plastique transparent ayant un bord droit et une droite perpendiculaire à ce bord.

2 • 2 Description de la situation « Pli sur pli »

Présentation

Compte-tenu de l'analyse précédente nous donnons quelques éléments d'une situation, qui, à travers un problème de construction, vise à commencer à faire dépasser l'obstacle « seules les droites verticales et horizontales sont perpendiculaires » en développant notamment l'image mentale des droites perpendiculaires sont des « figures telles que si on plie la feuille suivant une des deux droites, cela amène la superposition d'une partie de l'autre droite sur elle-même »

Pour résoudre le problème posé, les élèves vont devoir tracer une « droite perpendiculaire » à une droite donnée. En effet, ils doivent rechercher l'axe permettant d'anticiper le pliage d'une droite sur elle-même. Après un temps de familiarisation avec le pliage amenant un trait sur un trait (ou un pli sur un pli), les élèves doivent anticiper la position du pli passant par un point permettant d'amener un pli sur un pli. La connaissance implicite « droite perpendiculaire » est l'outil qui permet de résoudre le problème proposé.

La position du pli initial « de travers » dans une feuille de type A4 (figure 1) est un réel obstacle (cf. analyse du concept) pour l'anticipation du trait de pliage amenant pli sur pli chez la plupart des enfants. Par contre quand le pli est parallèle aux bords de la feuille, les élèves résolvent le problème sans difficultés. Nous jouons donc sur les valeurs de la variable « orientation de la droite dans le domaine sur lequel elle est dessinée ». Dans cette séquence (niveau CE2), le domaine proposé est quelconque, n'ayant pas de symétrie apparente (figure 2). Dans une séquence ultérieure (niveau CM1), l'orientation et le domaine correspondront à la figure 1.

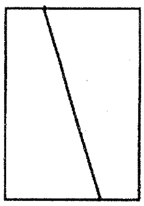


figure 1

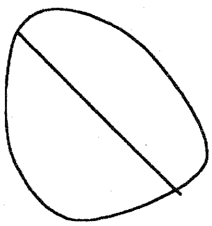
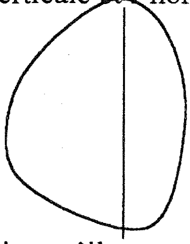


figure 2

Les élèves, pour résoudre le problème proposé peuvent se servir

- de leurs connaissances spatiales concernant la verticale et l'horizontale, en positionnant le domaine de la manière suivante :



- de l'image mentale du pliage autour d'une droite qu'ils ont pu se forger au cours de la phase d'appropriation ;
- de l'utilisation d'un outil qu'ils se sont fabriqué avec le calque dans la même phase d'appropriation ;
- de l'utilisation d'un instrument présent dans la boîte[5].

[5] La boîte à outil est fournie en début d'année et comprend **tous** les instruments dont auront besoin les élèves (règles, ficelle, compas, équerre, réquerre, téquerre ...) boîte qui s'enrichit avec des outils fabriqués par les élèves. Au cours de certaines séances, une des contraintes introduites consiste à interdire l'usage de certains instruments.

Objectifs pour le maître

- utiliser la perpendicularité comme outil de résolution de problème.
- identifier les droites de pliage amenant pli sur pli comme droite perpendiculaire à ce pli ;
- constater la symétrie de la relation de perpendicularité : "si d est perpendiculaire à d' alors d' est perpendiculaire à d ".

Phase 1 : Appropriation : pliages effectifs (résumé)

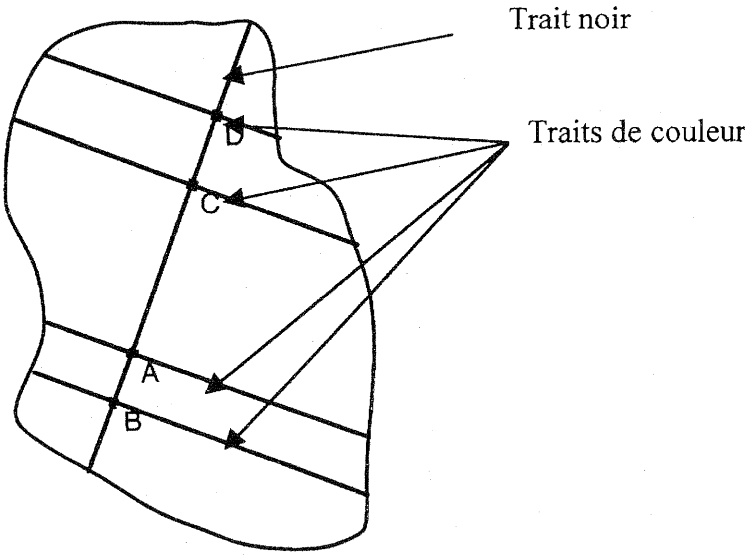
Objectif

- familiariser l'élève avec le pliage selon un trait ;
- donner du sens à l'expression "pliage pli sur pli".

Matériel

- la boîte de géométrie complète ;
- une feuille de papier calque A4 découpée de manière irrégulière ; sur cette feuille, une droite est dessinée et quatre points désignés par les lettres A, B, C et D sont marqués sur cette droite.

Les élèves réalisent avec leur feuille de papier calque une « feuille des plis » du type suivant en pliant la feuille puis en traçant une droite sur chaque pli.



Cette feuille pourra donc servir éventuellement d'outil dans les phases suivantes.

Phase 2 : anticipation du trait de pliage passant par un point

Objectifs

- percevoir que les droites de pliage amenant pli sur pli ont une direction particulière ;
- abandonner le tracé au jugé pour un tracé instrumenté (outils conventionnels ou fabriqués) de la droite recherchée.

Matériel

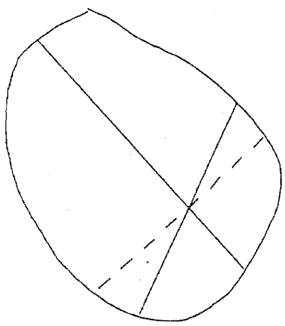
boîte à outils complète

- la « feuille des plis » obtenue précédemment
- un « domaine » qui n'a pas « une allure symétrique », découpé dans une feuille A4.

Procédures possibles

P1 : trait tracé au jugé, très éloigné de la position perpendiculaire au trait initial ;
P2 : trait « à peu près » perpendiculaire basé, soit sur une perception de la perpendicularité issue des tracés antérieurs, soit sur une simulation du mouvement (avec la main ou la feuille non complètement pliée) ;
P3 : trait obtenu en utilisant la « feuille des plis » par calque ;
P4 : trait obtenu en utilisant la "feuille des plis" pliée (fabrication d'une téquerre) ;
P5 : trait obtenu en utilisant la "feuille des plis" pliée deux fois (fabrication d'une équerre) ;
P6 : trait obtenu en utilisant un coin de feuille rectangulaire ;
P7 : trait tracé à l'aide d'un instrument type équerre, téquerre, réquerre, règle utilisée comme une réquerre...)

Déroulement (résumé)
Les élèves doivent anticiper la position de l'axe de pliage.
Les procédures attendues sont P1, P2, P4 et P5. C'est P4 et P5 qui sont visées ici.
Une fois le tracé réalisé, les élèves valident :
soit en pliant le long du trait de crayon
soit en amenant le pli sur le pli et en regardant si l'axe de pliage obtenu correspond à leur prévision.



Ils peuvent recommencer plusieurs fois.
On attend un abandon progressif des tracés non instrumentés (P1, P2) au profit des procédures P3, P4, P5, P6, et P7.

Phase 3 : anticipation d'un seul trait de pliage

Objectifs
- identifier les droites de pliage amenant pli sur pli comme droite perpendiculaire à ce pli pour anticiper une droite de pliage par tracé ;
- identifier les droites de pliage amenant pli sur pli comme droite perpendiculaire à ce pli pour
- valider ou invalider une droite de pliage dont le tracé est fourni par un autre élève ;
- utiliser les instruments conventionnels.

Matériel
- boîte à outil complète (la feuille des plis est retirée)
- un « domaine » découpé dans une feuille A4

Déroulement (résumé)
Chaque élève reçoit une nouvelle feuille et doit faire une nouvelle prévision sans qu'il y ait immédiatement une validation pratique effective.
Quelques productions « significatives sont affichées au tableau et l'enseignant demande aux élèves s'ils pensent que les productions sont correctes ou pas.
Il s'agit d'un travail oral d'argumentation dont l'objectif est :

d'une part, de travailler au niveau des images mentales pour voir que l'axe de pliage a une position particulière qui correspond à « l'horizontale » si on place le pli initial « verticalement »,
d'autre part de voir que la perception peut suffire pour invalider certaines positions. Mais dans certains cas, pour être sûr qu'une position est la bonne, les instruments sont nécessaires.

Phase 4 : droites perpendiculaires
Objectifs
- reconnaître des relations de perpendicularité ;
- constater la symétrie de la relation de perpendicularité : « si d est perpendiculaire à d' alors d' est perpendiculaire à d »
Cette phase vise à expliciter certaines connaissances ; le déroulement n'est pas décrit ici.

En prenant appui sur cette situation nous allons présenter un certain nombre de difficultés auxquelles nous nous heurtons.

3 • Les difficultés rencontrées et leur analyse

3 • 1 Les difficultés liés à la précision des productions

Dans cette situation, comme dans toutes les situations que nous expérimentons, il y a une validation pratique. Dans "pli sur pli" elle consiste à plier la feuille suivant le trait tracé pour constater la superposition des deux parties du trait. Bien que cette validation ne mobilise que très peu de connaissances, on se heurte à une difficulté liée au degré de précision : les élèves ne constatent pas toujours cette imprécision et s'ils la constatent ils ne jugent pas pour autant leur production fausse. Cette difficulté est due au fait que la précision de la production n'apparaît pas aux yeux des élèves comme indispensable dans la situation.

3 • 2 Les difficultés liées aux liens entre la validation de la production et la validation des procédures

• Nous avons rencontré des cas où la production est correcte alors que la procédure n'est pas celle que nous attendions. C'est le cas par exemple des élèves qui tracent leur trait en utilisant la graduation du zéro d'une règle. Cette procédure donne un résultat correct si la représentation de la perpendiculaire n'a pas besoin d'être très longue, il faut reconnaître que c'est généralement le cas dans le micro–espace[6].

• Inversement nous avons observé des élèves qui utilisaient un instrument convenable pour construire leur trait (l'équerre par exemple) mais qui arrivaient à une production fausse à cause du peu de pratique qu'ils ont de cet instrument. Ce qui évidemment a pour conséquence l'invalidation de la procédure qui est pourtant correcte.

3 • 3 Les difficultés liés à la communication des procédures

Au moment de la mise en commun les élèves doivent décrire leur procédure. Une difficulté apparaît alors au niveau de l'appropriation, par l'ensemble de la classe, des procédures trouvées par des élèves. Cette difficulté à une triple origine :
- les descriptions de procédures géométriques même élémentaires sont objectivement complexes, pensons à ce qu'il faut dire pour expliquer comment on trace une perpendiculaire à une droite donnée,
- ces procédures ne laissent pas de trace, autre que le produit fini,

---

[6] Il est à noter que maintenant nous considérons cette procédure comme valable !

- ces procédures sont très éloignées de ce que certains élèves peuvent trouver : par exemple quel rapport entre l'équerre et le trait de pliage cherché dans "Plis sur pli" ?

3 • 4 Les difficultés au niveau des phases de rectification

Lorsque, au cours de la phase de recherche, des élèves reconnaissent que leur production est erronée, ils rentrent dans une phase de rectification[7]. Notre objectif est évidemment que ces élèves, au cours de cette phase, remettent en cause leur procédure. Mais nous constatons que très souvent ils ne remettent en cause que l'exécution de la procédure et non la procédure elle-même. Par exemple un élève qui a tracé approximativement sa droite sans utiliser d'instrument autre que sa règle, en constatant après pliage que le résultat ne convient pas, pense que c'est parce qu'il n'a pas été suffisamment précis et ne remet pas forcément en cause sa procédure.

Le fait que les élèves puissent valider leur production immédiatement après la réalisation de leur tracé peut entraîner la mise en place d'une stratégie qui consiste à faire des essais successifs de tracé à la règle. Dans ce cas également les élèves ne s'acheminent pas vers la construction d'une procédure correcte. C'est par exemple ce qui se passe au cours de la phase 2 de la situation "Pli sur pli".

Pour pallier cette difficulté nous différons la validation pratique. Par exemple dans "Pli sur pli" nous mettons en place une mise en commun des productions en interdisant aux élèves de plier pendant la phase de recherche (cf. phase 3). Dans ce cas le débat peut porter soit sur les productions soit sur les procédures :

• Si le débat porte sur les productions (c'est par exemple le cas lorsqu'on affiche les productions et qu'on demande aux élèves de repérer les productions fausses) et si les élèves n'ont pas accès aux instruments les arguments avancés s'appuient sur des expériences mentales : "*C'est pas faux parce que si on plie on voit bien que les traits ne vont pas se retrouver l'un sur l'autre*". Ces arguments mobilisent des connaissances (en particulier ici la mobilisation d'actions mentales) que tous les élèves n'ont pas. Le débat ne permettra donc pas de produire des preuves au niveau de la classe.

• Si le débat porte sur les procédures, on se heurte à une double difficulté :
- une difficulté au niveau de l'explicitation de la procédure (cf. 3 • 3)
- une difficulté au niveau des connaissances mobilisées par les élèves derrière les arguments que les élèves peuvent avancer. Par exemple dans la situation "Pli sur pli" lorsque des élèves expliquent qu'ils ont utilisé l'équerre pour tracer une droite perpendiculaire, certains de leurs camarades ne comprennent pas ce que vient faire ce tracé dans cette situation. Ici encore le débat ne débouchera pas sur des preuves au niveau de la classe, puisque les arguments avancés s'appuient sur des connaissances qui ne sont pas partagées par tous.

3 • 5 Les difficultés au niveau de l'élaboration et de l'appropriation de procédures

Comment les élèves construisent-ils une procédure pour résoudre le problème ? Qu'est-ce qui les aide ?

Nous faisons l'hypothèse que les actions et images mentales jouent un rôle essentiel. On ne peut tracer convenablement une perpendiculaire à une droite avec une équerre que si on a

---

[7] Cf. C. MARGOLINAS "De l'importance du vrai et du faux" Ed La Pensée sauvage 1993.

anticipé mentalement la position de cette perpendiculaire. Ces images mentales jouent aussi un rôle essentiel au niveau de l'utilisation pour la première fois d'un instrument. C'est parce que l'élève fait le lien entre une image mentale du pli et la Téquerre qu'il décide d'utiliser ce nouvel instrument. On constate que le lien entre l'instrument et le tracé n'est pas toujours "direct". C'est par exemple le cas du lien entre le tracé de deux droites perpendiculaires et de l'équerre.

Nous constatons que certains élèves n'ont pas de difficulté pour mobiliser des images mentales, par contre d'autres n'arrivent pas à anticiper certains tracés. Qu'est-ce qui favorise la construction d'images mentales ?

4 • Conclusion

Nous nous sommes appuyés sur la situation "Pli sur pli" pour mettre en évidence un certain nombre de difficultés que nous rencontrons dans le cadre de notre travail sur l'apprentissage de la géométrie au cycle 3. Nous pouvons classer ces difficultés en deux catégories :

• Les difficultés directement rencontrées par les élèves

Difficultés au niveau de l'élaboration d'une procédure et de l'exécution de cette procédure : dans ces phases on a vu le rôle essentiel des images et actions mentales, par contre de nombreuses questions restent en suspens concernant le développement de ces images et actions mentales chez les élèves. On a vu également que le lien entre le produit fini et l'instrument à utiliser n'était pas toujours facile à établir.

Difficultés au niveau de l'explicitation des procédures par les élèves : les procédures sont souvent très complexes à décrire, en particulier parce que le vocabulaire est en cours d'acquisition et que beaucoup de ces procédures ne laissent pas de traces intermédiaires.

• Difficultés d'ingéniérie

Difficultés au niveau de la phase de validation : nous avons constaté qu'au cours de cette phase on rencontre deux types de difficultés :
- Les unes sont liées au degré de précision souhaité qu'on a de la peine à expliciter et à rendre nécessaire.
- Les autres sont liées à l'absence de lien direct entre la validation (l'invalidation) des productions et la validation (l'invalidation) des procédures.

Difficultés au niveau des phases de rectification : beaucoup d'élèves dans ces phases pensent que c'est l'exécution de la procédure qui est en cause et non la procédure elle-même.

Beaucoup de ces difficultés sont spécifiques aux situations de géométrie, c'est le cas :
- des difficultés liées aux instruments et au lien qu'ils entretiennent avec le produit qu'ils permettent d'élaborer. Il est bien évident que dans les problèmes numériques cette difficulté n'existe pas.
- des difficultés liés à l'explicitation des procédures. Dans les problèmes numériques les procédures sont beaucoup plus simples à communiquer, entre autres parce qu'elles laissent une trace.
- des difficultés liées à la précision des productions. A l'exception des problèmes de mesure cette difficulté n'existe pas dans les problèmes numériques.
- des difficultés liées à l'articulation entre la validation des productions et la validation des procédures. Dans le domaine numérique lorsque les élèves constatent que leur production n'est pas valide, généralement pendant un instant ils vérifient l'exécution de la procédure mais

ensuite ils remettent en cause la procédure elle-même. Cela est, semble-t-il, dû au fait qu'au niveau du calcul numérique les élèves maîtrisent mieux les différentes opérations à effectuer ; de plus, si on pense qu'ils risquent de rencontrer des difficultés au niveau de l'exécution de la procédure on met à leur disposition des outils par exemple une calculatrice ou une table de multiplication, ...

• Les points positifs

Si l'étude qui précède montre bien la complexité de la gestion des situations de type géométrique, soulignons les points positifs de la gestion que nous avons envisagée dans la situation « pli sur pli ». La phase 1, mais surtout la phase 2 permettent la mobilisation d'images mentales (action de pliage et connaissance perceptive (spatiale) de la perpendicularité) qui est un de nos objectifs d'apprentissage. La répétition de l'activité, avec rétroaction par le milieu matériel permet à tous les (la plupart des) élèves d'avoir une procédure conduisant à une réussite « estimée » comme telle par les élèves. Par là même, elle tend à élargir le champ des connaissances des élèves.
La fabrication d'outils intermédiaires (feuille de plis) est destinée à faciliter l'articulation entre la mobilisation d'images mentales et l'utilisation d'instruments conventionnels tels que la téquerre ou la réquerre ou même l'équerre.
La phase 3, où l'on diffère la validation pratique, avec tous les problèmes qui ont été soulignés, est cependant importante. Comme nous le soulignions dans un article [8] « *les interactions entre les élèves sont alors essentielles : le fait que les élèves aient des connaissances différentes, souvent encore instables ou même erronées, qu'ils développent dans leur argumentation ou qu'ils opposent à celles des autres, qu'ils soumettent donc implicitement à une validation collective en les explicitant dans les phases de débat est un élément important qui intervient dans le processus de validation* ». Ces interactions participent ainsi de manière souvent déterminante à la construction des concepts.
Pour une partie importante d'élèves, les arguments échangés prennent le statut de preuves partagées par une mini-communauté. Pour les autres, les justifications avancées au cours du débat et qui ne sont que des affirmations pourront être utilisées éventuellement dans d'autres situations proposées, notamment celles d'accompagnement. Elles pourront alors changer de statut, dans la mesure où le champ de connaissances de ces élèves se sera élargi.

Les activités papier crayon rendent difficiles comme nous l'avons vu les débats sur les procédures. Actuellement, nous pensons que l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique comme Cabri géomètre, dans la mesure où il garde notamment la trace de la suite des constructions effectuées, centre les élèves sur la façon dont ils ont obtenu un résultat et par la même incite à débattre plus sur les procédures que sur les productions. Comme d'autre part, les contraintes inhérentes au logiciel font que les élèves sont obligés d'utiliser des objets de manière explicite, cela facilite la gestion des phases de formulation. C'est une voix que nous explorons actuellement et qui nous paraît participer à la construction des divers concepts de la géométrie, notamment celui de perpendicularité.

---

[8] La divisibilité (D. Valentin, M. Guillerault, M.H. Lallement, R. Neyret), in ERMEL, 1999, Vrai, Faux ?...on en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle III, INRP.

CABRI-GEOMETRE CONSTITUANT D'UN MILIEU POUR DES SITUATIONS D'ACTION DEVANT ETRE A-DIDACTIQUES

ATELIER 3
Henri-Claude Argaud et Gérard Gerdil-Margueron
IUFM de Grenoble

La résolution de problèmes doit avoir une place importante dans les apprentissages en géométrie à l'école élémentaire et les concepts nouveaux prennent particulièrement du sens s'ils apparaissent comme des outils de solution des problèmes. Les situations a-didactiques ont la fonction de donner à l'élève la « charge » de la résolution du problème et favorisent donc la « construction » de savoirs nouveaux.
En géométrie plane, les maîtres ont en général recours à des problèmes reposant sur des activités de production d'objets matériels (par reproduction ou construction) dans les premières phases des apprentissages. Les élèves agissent alors sur un environnement matériel qui est le plus souvent l'environnement papier-crayon. D'autres environnements, les environnements informatiques, sont désormais disponibles.
Pour de tels problèmes, la production étant dans tous les cas un dessin, un certain nombre d'éléments pernettent de comparer les environnements utilisables pour savoir s'ils peuvent faciliter la mise en place de situations a-didactiques.

1. Caractéristiques d'environnements pour la constitution de milieux a-didactiques en géométrie

La phase de conclusion est une phase importante voire critique pour attester du caractère a-didactique d'une situation. Nous allons en examiner les caractéristiques liées aux environnements papier-crayon et Cabri-géomètre pour les problèmes de production d'objets.

1.1. L'objet de la validation

Dans l'environnement papier-crayon, la détermination du vrai et du faux porte « naturellement » sur la production de l'élève et non sur le procédé de construction (qui dévoile la procédure) : c'est la trace matérielle qui reste à l'élève de son travail. L'élève est ainsi porté à examiner l'objet qu'il a réalisé. Le risque est alors grand de le voir se focaliser sur des détails matériels et faire passer au second plan le procédé utilisé qui lui s'énonce oralement en termes de savoirs (difficilement communicable à d'autres donc), et dont il ne retient que quelques éléments en général et souvent dans le désordre.
En revanche, dans l'environnement Cabri-géomètre, la réalisation d'une production à l'écran amène tout naturellement l'élève à examiner le procédé de réalisation. D'une part, celui-ci apparaît à travers les primitives nécessairement employées et il peut être explicité facilement par une nouvelle exécution, peu coûteuse, des primitives utilisées. D'autre part, le logiciel de géométrie dynamique travaillant au niveau de la figure (classe de dessins modulo l'énoncé), la production de l'élève peut subir des déformations tout en restant conforme à l'énoncé.

Il apparaît donc que les savoirs mobilisés dans la résolution d'un problème de reproduction ou de construction sont peu mis en cause par la validation dans l'environnement papier-crayon alors qu'en revanche, dans l'environnement Cabri-géomètre, ils le sont constamment puisque c'est sur le procédé de construction et non sur la production que va éventuellement porter le doute...

1.2. La décision du vrai et du faux

Dans l'environnement papier-crayon, une fois la production réalisée, les rétro-actions pertinentes du milieu permettant de confirmer ou d'infirmer la validité de ce que l'élève a produit sont peu nombreuses : le procédé de construction n'est pas apparent, et l'élève ne peut examiner qu'un objet matériel. Dans l'environnement Cabri-géomètre, le déplacement des objets de base est au contraire une source très importante d'informations pour la validité, puisque l'élève obtient dans l'instant, une infinité d'objets matériels différents (des dessins) qui vont garder ou non les relations prescrites dans l'énoncé et présentes dans la première instanciation élaborée par l'élève.
En général, pour décider collectivement de la validité d'une production en papier-crayon, les élèves parviennent difficilement à un avis unanime car certains estiment la production correcte et d'autres non, du fait de petites différences graphiques. Celles-ci ne résultent pas nécessairement des savoirs utilisés. En effet, l'élève peut avoir employé des connaissances tout à fait adéquates et avoir fait un dessin approximatif... ou au contraire avoir mobilisé des connaissances minimales tout en réalisant un dessin parfait. La validité d'une production est ainsi souvent très discutable.

Dans l'environnement Cabri-géomètre en revanche, les caractéristiques graphiques qui peuvent attester de la non-validité sont susceptibles d'être amplifiées lors de déplacements ; ces derniers limitent ainsi grandement la possibilité d'erreur dans la détermination de la validité. Les élèves, explorant beaucoup par le moyen du déplacement, trouvent en général des instanciations de la figure suffisamment significatives pour prendre position. De plus, du fait de la déformation de la production, c'est une classe de dessins et non un seul dessin qui est en jeu ; la production graphique passe après le procédé de réalisation qui peut facilement et « naturellement » devenir public du fait qu'il repose sur la liste des primitives employées.
L'accord des élèves est ainsi plus facile à obtenir parce que, du fait des déformations dues aux déplacements, les erreurs ont des conséquences très apparentes sur la production et les critères attestant la validité sont communs à un ensemble infini de productions graphiques.

1.3. Le rapport « qualité / prix » du milieu

Dans l'environnement papier-crayon, la production d'un objet graphique est « coûteuse » à l'élève tout en ne lui apportant qu'assez peu d'informations en général. Il passe souvent un temps important à en réaliser une. S'il fait une erreur et qu'il en a conscience, il doit effacer et refaire. Lorsqu'il développe une procédure par essais, il ne peut alors en faire beaucoup, ce qui constitue un obstacle au développement de la procédure.... Comme il est difficile d'obtenir beaucoup de réalisations graphiques, les informations intéressantes sont réduites. Elles sont aussi souvent discutables du fait de leurs imprécisions. Les milieux qu'il est possible de constituer en papier-crayon ne sont donc souvent pas très riches.

Dans l'environnement Cabri-géomètre en revanche l'élève produit à coût réduit une très grande quantité de productions graphiques, soit en déplaçant des éléments de la production réalisée, soit en refaisant une nouvelle production. Il obtient de ce fait une grande quantité d'informations et, au fur et à mesure de la recherche, le milieu s'enrichit considérablement à moindre coût.

2. Spécificités mathématiques, informatiques, didactiques et pédagogiques de Cabri-géomètre

Dans la première partie de l'atelier, une initiation à Cabri-géomètre a été proposée aux participants. Suite à un rapide échange, la moitié d'entre eux ont déclaré connaître suffisamment le logiciel et souhaité ne pas assister à cette phase pour échanger leurs expériences.
Deux groupes de travail ont été ainsi constitués, l'un consacré à l'initiation, l'autre à la communication de pratiques et à des pistes de travail possibles pour l'utilisation du logiciel en classe.
Dans ce second groupe, nous avons ainsi échangé :
- des expériences réalisées soit en classe, soit en formation ;
- des points de vue que les participants se sont forgés sur l'emploi du logiciel dans les classes (école, collège, lycée).

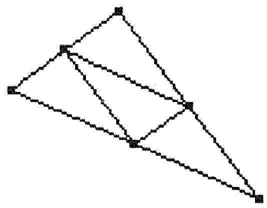
Il s'avère que l'exploitation du logiciel pour les apprentissages en géométrie est encore réduite : quelques participants seulement déclarent l'utiliser en classe ou en formation. De plus, l'exploitation faite ne semble pas se démarquer nettement de celle qui consiste à utiliser Cabri comme un « super » environnement papier-crayon, outil de réalisation performant d'objets graphiques sans s'appuyer sur les caractéristiques spécifiques de la géométrie dynamique. Par ailleurs, les problèmes donnés aux élèves semblent complexes, au-dessus de leurs capacités supposées, et donc difficiles à résoudre par un élève seul.

2.1 Quelques aspects informatiques et mathématiques

Dans le cadre de l'initiation prévue, un certain nombre d'informations concernant les caractéristiques informatiques ont été communiquées. L'appropriation du fonctionnement du logiciel en général s'est faite par le moyen de problèmes posés aux participants mettant en évidence :
- l'aspect mathématique, par les familles de primitives et leurs caractéristiques propres à la géométrie dynamique,
- l'aspect informatique (utilisation du logiciel), dans l'exécution des primitives.

Cette première phase de l'atelier avait aussi pour but de placer les participants devant des problèmes analogues à ceux que les élèves auraient à résoudre dans les activités à l'école élémentaire, activités que l'on proposait d'examiner dans la deuxième phase de l'atelier.
Cela permettait à chacun de se constituer une première connaissance de la géométrie dynamique et de percevoir :
- la spécificité de problèmes susceptibles d'être proposés dans cet environnement ;
- certaines caractéristiques de leur résolution en vue de leur utilisation pour les apprentissages, leur intérêt pour les savoirs en particulier ;
- des caractéristiques de l'environnement pour la constitution de milieux pour l'élaboration de situations de résolution de problèmes ;
- diverses difficultés possibles sur le plan mathématique ou sur celui de la mise en œuvre.

Voici par exemple un problème : *Reproduire ce Cabridessin*



Il s'agit donc d'une « reproduction » de Cabridessin : la production doit être un Cabridessin ayant les mêmes caractéristiques que l'original à savoir :
- les mêmes types de points (points de base, points sur objet ou points construits),
- les mêmes relations liant des objets homologues (milieu, parallélisme, égalité de longueurs).

Plusieurs reproductions sont à produire suivant les points de base choisis.
Dans le premier problème, sont donnés comme points de base les trois points extérieurs ; c'est le concept de milieu qui est en jeu comme outil de solution. Dans le second, sont donnés comme points de base les sommets du "petit triangle du haut" ; il faut utiliser le prolongement de même longueur (alignement et report de distance) ou la symétrie centrale. Dans le troisième, sont donnés comme points de base les trois milieux ; le parallélisme est outil principal de solution.
Les savoirs outils de solution sont donc très différents suivant les problèmes.

2.2. Quelques aspects didactiques et pédagogiques

Cabri différencie les points par leurs degrés de liberté :
- deux degrés de liberté, « points de base » c'est-à-dire libres dans le plan,
- un degré de liberté, « point sur objet », c'est-à-dire se déplaçant sur une ligne (cercle, segment, droite),
- aucun degré de liberté, « points construits », c'est-à-dire ne pouvant se déplacer sans déplacement des objets de base.

L'élève peut s'approprier cette caractéristique distinctive des points par des actions, des essais de déplacements.
Dans le problème de reproduction précédent, on comprend immédiatement que le « jeu » sur les valeurs de la variable didactique « les points donnés » est extrêmement facile à mettre en place et que les contraintes qui en découlent pour l'élève sont difficiles à éviter. Si l'élève ne les respecte pas, cela se verra immédiatement et nettement sur la production, suite au déplacement des points de base. Cela est particulièrement intéressant pour la constitution du milieu dans la mesure où l'élève aura des rétroactions fortes de celui-ci lui indiquant qu'il se trompe.
De plus, une telle situation est peu coûteuse à mettre en place : il suffit de construire les trois Cabridessins et de les installer sur les postes individuels.
En papier-crayon, les points de base, les points sur objet ou les points construits apparaissent identiques, et il semble difficile de trouver des actions donnant à l'élève des moyens perceptifs signifiants pour les différencier suivant leur nombre de degrés de liberté.
Ce constat a pu être effectué dans plusieurs des situations proposées.

3. Cabri-géomètre, environnement pour la constitution de "milieux" a-didactiques

La résolution de problèmes comme moyen d'apprendre, de « construire » des savoirs nouveaux outils de résolution des problèmes, doit être développée. Dans ce cadre, les enseignants peuvent élaborer des situations, parvenir à donner aux élèves des problèmes mettant en jeu ces savoirs nouveaux comme outils de résolution puis les laisser chercher seuls la solution sans intervenir.
Or de telles situations d'apprentissage doivent présenter des contraintes fortes et être suffisamment riches pour rendre inefficaces certains savoirs anciens d'une part, nécessiter et permettre l'élaboration par l'élève de savoirs nouveaux d'autre part. Deux difficultés principales en rapport avec les situations apparaissent :
- le milieu est-il suffisamment riche ? L'élaboration des nouveaux savoirs ne peut se faire que si l'élève reçoit des informations pertinentes dans son interaction avec le milieu.
- comment la conclusion est-elle établie ? l'élève donne-t-il la réponse et en garantit-il l'exactitude seul ? avec les autres ? avec le maître ? ou est-ce le maître qui s'en charge? C'est très souvent à ce moment-là qu'il est difficile au maître de ne pas intervenir en rapport avec les savoirs en jeu :
- ou la situation « résiste », mais n'est pas assez riche ; alors l'élève cherche de l'aide, et comme le maître voit le temps défiler, il donne cette aide...
- ou la situation ne « résiste » pas ; l'élève ne voit pas la nécessité d'élaborer un nouveau savoir et le maître « l'apporte ». L'élève ne comprend alors pas la finalité de ce savoir.
Une autre difficulté, en dehors de la situation elle-même, peut amener un dysfonctionnement de celle-ci ; c'est celle de mettre en place un contrat didactique dans lequel l'élève sait qu'il a la résolution complète du problème à sa charge.

C'est à l'examen de situations élaborées dans un travail de recherche associant l'INRP et le Laboratoire Leibniz à Grenoble qu'a été consacrée la deuxième partie de l'atelier. Le but était de montrer comment Cabri-géomètre peut être un environnement favorable à la constitution de situations visant à être a-didactiques.

3.1. La validité d'une reproduction ou d'une construction dans Cabri-géomètre dans l'interaction de l'élève avec le milieu

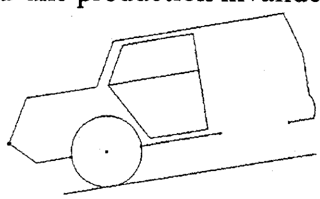
Compte tenu de ce qui a été dit sur l'importance de la phase de conclusion pour le caractère a-didactique de la situation, examinons les conditions de validité d'une reproduction ou d'une construction dans Cabri-géomètre.
Une reproduction consiste à fournir à l'élève un Cabri-dessin à l'écran de son ordinateur, à charge pour lui de réaliser un Cabridessin identique. Une construction consiste à fournir à l'élève un énoncé lui indiquant les caractéristiques d'un Cabridessin à réaliser.

Quand de telles productions sont-elles valides ?
Une reproduction est valide si le Cabridessin produit est « le même » que le Cabridessin initial, c'est-à-dire qu'il est composé des mêmes objets (points, segments ...), que ces objets sont de même type (points de base, sur objet ou construits) et qu'ils vérifient les mêmes relations (appartenance, alignement, perpendicularité, parallélisme...) indépendamment d'un déplacement quelconque de tous les objets qu'il est possible de déplacer.

Une construction est valide si le Cabridessin produit présente les propriétés conformes à celles attendues dans l'énoncé et si elles restent vraies dans tout déplacement possible des objets.

Pratiquement, dans l'interaction de l'élève avec le logiciel, la validité d'une production de ce type résulte ainsi du fait qu'il n'a pas été possible de trouver, parmi les instanciations contrôlées du Cabri-dessin, une instanciation qui soit erronée... Cette validité provient d'un « balayage » de cas qui n'est pas exhaustif évidemment, mais qui suffit souvent compte tenu de la complexité très modérée des figures employées et des savoirs nécessaires. Ce n'est bien sûr pas une validité au plan mathématique, et elle est discutable en cela.
En revanche, il est en général facile de trouver une instanciation du Cabri-dessin qui invalide une production incorrecte car les déplacements des objets de base permettent de faire apparaître graphiquement une erreur de construction. Le logiciel amplifiant les caractéristiques graphiques de la production, Cabri-géomètre facilite l'invalidation d'une production erronée.

Nous avons présenté un problème visant à faire intégrer par les élèves le critère pour discriminer une production valide d'une production invalide. L'élève doit construire la roue



manquante du véhicule, prenant en compte le fait qu'il se déplace sur la « route » par le moyen du point situé à l'avant. Un tel déplacement disqualifie de nombreuses procédures de construction de cercles (développées spontanément par les élèves) comme :
- celle consistant à construire un cercle dont le centre n'est pas le milieu du diamètre suggéré,
- ou celle consistant à construire un cercle qui ne passe pas par l'une des extrémités de ce diamètre.

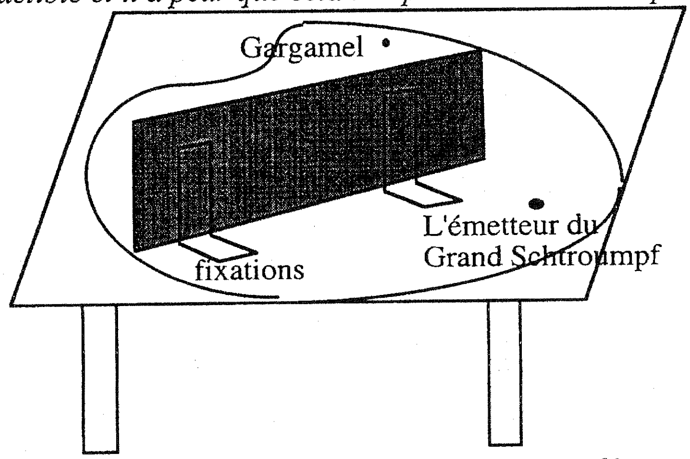
Les rétroactions du milieu, c'est-à-dire les déformations engendrées par le déplacement pour de telles constructions incorrectes, sont frappantes et très porteuses d'informations pour les élèves :
- les procédures erronées s'invalident de façon évidente ;
- l'élève comprend par les images qu'il reçoit les raisons du dysfonctionnement de sa construction et y trouve les moyens de rectifier.

Ce problème peut être utilisé dans le cadre d'activités avec le logiciel pour des élèves de cycle3 ou de début de collège.

3.2. Alignement de points matériels avec des « outils » conceptualisés

Le point suivant a consisté à examiner dans quelles conditions des élèves d'école élémentaire débutants peuvent tout à la fois « entrer » dans la connaissance du logiciel et effectuer des apprentissages (sur l'alignement) : il est en effet nécessaire de permettre des apprentissages dans ces deux domaines de façon simultanée. Un film a été visionné pour cela ; il retrace le déroulement en classe de CE2 de la partie informatique (la deuxième partie) de la situation présentée ci-dessous :

Le Grand Schtroumpf a un immense domaine qu'il a aménagé pour dissimuler son trésor. Il veut le surveiller avec un rayon-laser pour détecter ses adversaires. Il y a été construit un grand mur indestructible et il a peur que cela l'empêche de surveiller partout.

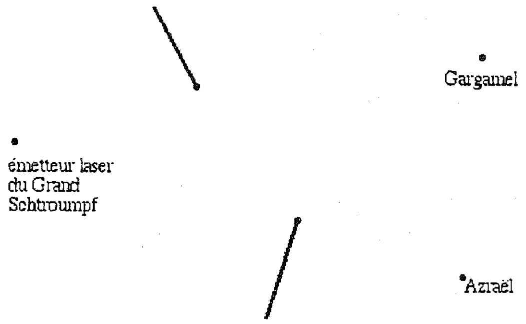


Gargamel et Azraël veulent s'introduire dans le domaine pour découvrir le trésor... mais ils ne doivent pas se faire repérer par le rayon laser!
Problème 1 : Vont-ils être repérés par le rayon laser?
Problème 2 : Y a-t-il des endroits où ils peuvent se placer pour ne pas être détectés par le rayon laser?

La première partie de la situation se déroule comme l'évoque le dessin ci-dessus, sur une table, avec :
- une feuille A3 dont le bord a été découpé pour ne pas être régulier, et les positions de l'émetteur laser et de Gargamel matérialisées par une épingle ;
- un rectangle en carton fixé faisant office de « mur ».

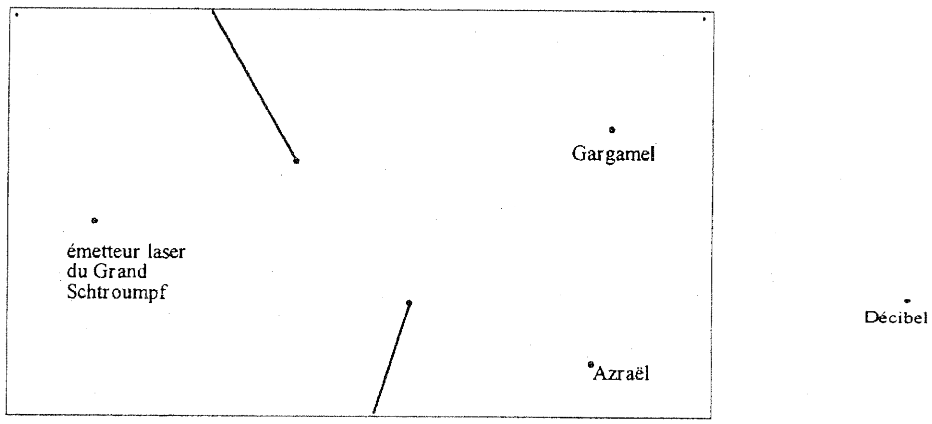
Dans une première étape, le premier problème est proposé aux élèves. L'élève répond soit en faisant une visée, soit aussi en utilisant une ficelle ou une règle.
Dans une seconde étape, l'élève ne dispose que de la feuille sur laquelle est positionné l'émetteur laser et la trace du mur. Les élèves résolvent le problème 2 par des biais différents… On obtient même le tracé de la droite limite de la zone.

La seconde partie se déroule avec le logiciel. Une modélisation de la situation apparaît à l'écran (tous les points sont fixes) :



Les élèves résolvent le problème 1 ; majoritairement, ils le font par le tracé d'un segment joignant l'émetteur laser à chacun des envahisseurs... Ils sont amenés à expliciter l'outil de résolution (la primitive segment ou droite ou demi droite), et à apprendre à le caractériser (par ses extrémités). Cabri-géomètre fait utiliser le concept de droite ou de segment à travers des actions dans un espace matériel ; on peut y voir une phase intermédiaire entre la phase de contrôle au jugé, à la visée, ou avec un instrument (où le savoir reste implicite) et une phase de formulation (où le savoir apparaîtrait de façon plus explicite).

Plusieurs autres étapes sont ensuite conduites avec le logiciel ; dans l'une d'entre elles l'élève doit étendre la procédure de construction de segment ou de droite à un problème où l'on ne peut voir simultanément les objets dans le contrôle de l'alignement (« Décibel » est hors écran).



Dans une autre étape, la modification de la « valeur » de la variable « nombre d'objets à contrôler » devrait amener l'élève à utiliser la droite ou la demi-droite de préférence au segment.

Conclusion : des milieux pour la validation sollicitant et le spatial et le théorique

Ainsi donc, des situations organisées avec Cabri-géomètre doivent permettre à l'élève :
- de percevoir les limites des contrôles perceptifs,
- de conclure relativement au problème posé et de dire, sans l'aide du maître, le vrai ou le faux sur la production, même si l'invalidation prend le pas sur la validation,
- d'acquérir des connaissances à caractère plus géométrique soit pour produire ou interpréter des dessins, soit pour en contrôler le procédé d'obtention.

Les traitements du dessin que l'élève peut faire facilitent les liens entre le dessin et la théorie : par le moyen du déplacement des objets de base, Cabri-géomètre amène l'élève à considérer non plus seulement un seul dessin, mais une infinité de dessins ayant des propriétés communes (vers la figure). Les élèves montrent de réelles aptitudes à entrer dans ce « jeu » de la géométrie dynamique. Un certain nombre de participants à l'atelier qui avaient souhaité éviter la phase d'initiation construite autour de cette problématique de géométrie dynamique, se sont rendu compte a posteriori (lors de la deuxième partie de l'atelier) qu'elle leur aurait été utile pour mieux comprendre la problématique en rapport avec des activités élèves.

Pour les situations d'apprentissage, des problèmes « élémentaires » suffisent en général ; les problèmes que nous nommons « élémentaires » sont des problèmes pour lesquels le nombre d'objets et de relations en jeu n'est pas très important. Les concepts outils sont alors mieux identifiables que dans la résolution de problèmes complexes où l'élève prend facilement l'un pour l'autre. Les milieux qu'il est possible de constituer dans l'environnement sont porteurs d'informations riches que l'élève peut traiter pour renforcer ses connaissances ou en acquérir de nouvelles, « moins spatiales » et tendant vers le géométrique.

LES RATIONNELS, LES DECIMAUX ET LES PE2.

ATELIER 4
Jean-François FAVRAT, Vincent BOISSARD et Michel BOURGUET

La formation mathématique et didactique des professeurs des écoles dans l'académie de Montpellier présente la particularité d'être très inégalement répartie entre les deux années :
- 110 heures en première année (/3 en cours magistraux, 2/3 en travaux dirigés) permettent de travailler sur tous les contenus enseignés à l'école élémentaire,
- 40 heures en seconde année servent à compléter la première année sur deux thèmes principaux : les mathématiques en maternelle (15 heures), le rôle et la gestion des problèmes dans l'enseignement des mathématiques (15 heures).
Il reste peu de temps pour retravailler des thèmes souhaités par les PE2, préparer et exploiter les stages sur le terrain, établir des passerelles entre la formation didactique et la formation professionnelle plus générale.

L'hypothèse de ce plan de formation est que les PE2 doivent, peuvent réinvestir le travail fait en première année, que la plupart ont suivie, pour construire, conduire, analyser des séquences pendant leurs stages durant lesquels ils reçoivent peu de visites de professeurs de l'IUFM (deux au plus, toutes disciplines confondues, sur 8 semaines en responsabilité).

L'expérience nous a montré (journaux ou comptes-rendus de stages, mémoires, rapports de visites...) que la mise en œuvre des aspects même les plus professionnels de la première année (éléments de progression, analyse a priori des tâches, prise en compte des travaux d'élèves) posait un certain nombre de problèmes aux PE2 pour des contenus comme la soustraction au cycle II, la division, la proportionnalité, les décimaux au cycle III.

Un nouveau travail en PE2 nous semble donc maintenant nécessaire. Nous sommes en train de réfléchir aux formes qu'il peut prendre pour les nombres décimaux et les rationnels. Il est forcément limité en temps. Nous pensons aussi réexaminer la formation en première année, non pas pour en modifier les contenus, il s'agit toujours de préparer au concours, mais pour qu'elle permette de mieux affronter les problèmes de la seconde année.

L'atelier s'est inscrit dans cette réflexion. Il a permis
- d'échanger brièvement sur ce que chacun des participants faisait avec les PE2 de son centre à propos des décimaux et des rationnels, pour cela un questionnaire a été proposé,
- de travailler sur trois supports apportés par l'équipe de Nîmes et utilisés en formation avec les PE2,
- de présenter succinctement un aspect du travail fait en première année que nous voudrions développer.
Ainsi dans le compte rendu de cet atelier, nous allons présenter :
- une synthèse des réponses fournies par les collègues au questionnaire préparé,
- des propositions d'actions courtes avec les PE2, prenant appui sur les trois documents apportés,
- une suggestion de travail avec les PE1 sur leurs connaissances à propos des rationnels et des décimaux.

Première partie. Synthèse des réponses des participants au questionnaire sur le thème de l'atelier

Ce questionnaire visait à cerner comment était réparti le travail sur les décimaux et les rationnels entre les deux années de formation, à lister les besoins ressentis par les formateurs et les demandes formulées par les PE2 ayant déjà effectué une première année de formation.

Voici ce que le dépouillement a fait apparaître : nous sommes restés très proches des réponses fournies par les collègues.

- Une formation sur les rationnels et les décimaux est en général organisée pendant la première année, préparant au moins au volet disciplinaire (aspects mathématiques, analyse de travaux d'élèves) et souvent au volet didactique (comparaison de progressions surtout).
- Le thème est revisité en deuxième année, le plus souvent en fonction de la demande et d'une manière plus professionnelle. Le travail sur les progressions est affiné (répartition entre CM1, CM2, 6ème). L'analyse de travaux d'élèves existe encore mais elle est le plus souvent complétée voire remplacée par des analyses de séances de maîtres formateurs enregistrées à la vidéo ou présentées par des PE2 (exposés, ateliers professionnels à faible effectif...)
- Les besoins des PE2 relèvent de la gestion à court terme des séances – la construction de situations qui donnent du sens aux rationnels ou aux décimaux en réaction contre un certain excès de formalisme souvent constaté, la mise en œuvre dans une classe d'activités où les manipulations (par exemple les graduations de bandes) sont importantes – mais aussi de la planification à long terme (répartition des étapes sur l'année ou un cycle, maintien d'une cohérence, gestion des passages entre les divers sens des rationnels ou des décimaux).
- Les demandes des PE2 sont formulées soit en termes de séances, séquences, progressions « clé en main », soit en termes d'interrogations sur la lourdeur ou la durée d'une progression basée d'abord sur les rationnels, nombres dont les usages leur paraissent limités.

Deuxième partie. Propositions d'actions avec les PE2

Nous avons apporté trois documents A, B, C (cf en fin de compte rendu), parmi ceux que nous avons utilisés à Nîmes (C puis A en 98/99, B puis A en 99/00).Chacun des trois sous-groupes de collègues de l'atelier a reçu un document et a dû réaliser la tâche suivante :
« Vous devez bâtir le scénario d'un moment (séance ou séquence) de formation utilisant le document dont vous disposez. Vous indiquerez vos objectifs de formation, les tâches proposées aux PE2, les autres supports que vous utiliseriez.
NB : Nous ne pensons pas qu'avec un seul document nous pouvons construire toute la formation des PE2, mais un moment, c'est raisonnable. »

Nous avons choisi ces documents parce qu'ils présentent des pratiques de PE2. Ce sont des comptes rendus détaillés de visites (documents A et B) ou un extrait de journal de stage (document C). Ils se situent à divers moments du travail en cycle III sur les rationnels ou les décimaux, le passage des écritures fractionnaires aux écritures à virgule (doc A, niveau CM1), la comparaison de deux nombres décimaux (doc B, cours double CM1 et CM2), l'introduction des écritures fractionnaires (doc C, cours double CM1 et CM2).

Pour préserver la diversité des exploitations possibles, nous listons pour chacun des documents, celles proposées par les collègues dans l'atelier et celles mises en œuvre par l'équipe nîmoise.

A partir du document A	
Pistes de travail	
imaginées lors de l'atelier	explorées à Nîmes
a)- Sur la première partie - Ne donner que l'énoncé du travail écrit de la veille, demander aux PE2 de faire une analyse a priori de cet exercice et de préparer la gestion de la correction. *Buts : que les PE2 listent bien les connaissances sur les fractions utiles pour l'exercice et qu'ils réfléchissent et débattent sur un moment fréquent de classe, à savoir celui des corrections.* - Diffuser le compte rendu de la correction et les erreurs relevées, demander comment gérer ces erreurs. *But : que les PE2 se rendent compte que le tableau s'est avéré inefficace et qu'une reprise est nécessaire.* b)- Sur la deuxième partie - Ne pas donner le compte rendu mais que les consignes, demander les liens que les PE2 voient entre la première et la deuxième partie et comment ils s'organiseraient pour la validation des réponses des élèves. *But : que les PE2 s'appuient sur les diverses écritures des nombres décimaux et sur les graduations, ce que n'a guère fait la maîtresse.* - Donner le compte rendu de la deuxième partie et demander d'analyser le rôle de la droite graduée ainsi que les tâches élèves. *But : que les PE2 relèvent bien l'absence de liaison entre les diverses connaissances en jeu et le manque d'activité de la part des élèves.*	a)-1ère séance. Diffusion de l'intégralité du document. Par groupes, les PE2 doivent après avoir analysé ce qui s'est passé, élaborer la préparation de la séance suivante. Remarque : ce sont à peu de choses près les tâches à réaliser par la maîtresse stagiaire après la visite. *Buts : que les PE2 prennent eux-mêmes en charge l'analyse a posteriori, qu'ils en tirent des conclusions pédagogiques et pratiques, en particulier qu'ils donnent aux graduations une place plus conséquente.* b)- 2ème séance. Restitution des préparations annotées. - Synthèse des remarques faites sur les préparations. - Apports d'informations complémentaires sur le passage des écritures fractionnaires aux écritures à virgule. L'accent y est mis sur : ▪ la nécessité d'étaler davantage et très progressivement un tel travail, ▪ l'intérêt à ne pas se limiter à la droite graduée pour représenter les nombres, ▪ l'articulation entre les divers moments de travail (manipulations effectives plus ou moins dirigées, exercices d'entraînement, lecture et dictées de nombres sous diverses formes...) ▪ la nécessaire prudence dans l'introduction du tableau de numération.

A partir du document B	
Pistes de travail	
imaginées lors de l'atelier	explorées à Nîmes
a)- Ne diffuser aux PE2 que la situation de départ. <u>Tâches des PE2</u> : - Dire ce qu'ils pensent du choix des nombres. - Lister les procédures possibles de la part des élèves. - Décrire diverses modalités de validation possibles. *<u>Buts</u> : que les PE2 se centrent sur deux aspects importants de toute préparation, à savoir l'analyse a priori des tâches prévues et l'anticipation de la validation des réponses.* b)- Diffuser le document en entier et demander en quoi la calculatrice et le mètre du tableau, sans les bandes, auraient pu être des outils de validation. *<u>Remarque</u> : le mètre est l'exemple même de droite graduée jusqu'au centième, qui oblige donc à tronquer des écritures comme 0,223 ; 1,270 ; 1,107.*	Sur une séance. a)- Diffusion du début du document, jusqu'à l'étape « Mise en commun », donc sans l'étape « Validation pratique » ni « Les exemple d'arguments ». <u>Tâches des PE2</u> : - Expliciter une procédure au moins permettant aux élèves de CM1 de réaliser l'exercice. - Lister les connaissances sur lesquelles elles reposent. - Anticiper les erreurs probables et les arguments invoqués par les élèves pour justifier des réponses fausses. *<u>Buts</u> : que les PE2 se rappellent des éléments de la formation de première année, à propos des travaux d'élèves* *- qu'ils se rendent compte que la liaison entre les écritures à virgule et les mesures de longueur doit déjà être bien instaurée et que de bonnes habitudes sont nécessaires en matière de conversions.* b)- Diffusion de la fin du document avec les exemples d'arguments. <u>Tâches des PE2</u> : - Prendre connaissance des erreurs et des arguments. - Faire des propositions pratiques pour gérer la phase de validation. *<u>Buts</u> : que les PE2 tiennent compte des difficultés manifestes des élèves en matière de conversions de mesures.* c)- Témoignage de la PE2 stagiaire sur la suite qu'elle a donnée à cette séance. Remarque : on pourrait faire imaginer cette suite par les PE2. *<u>Les buts alors seraient</u> : que les PE2 anticipent bien la manière et le moment de l'explicitation d'un algorithme de comparaison,* *- qu'ils gèrent cette suite de manière différenciée, c'est-à-dire en tenant compte des différences de performances des élèves sur les mesures.*

A partir du document C	
Pistes de travail	
imaginées lors de l'atelier	explorées à Nîmes
Donner tout le document accompagné des questions ci-après. ▪ Quelles autres activités sur les fractions feriez – vous avant cette séance ? ▪ Que pensez-vous du choix fait pour les fractions introduites ? ▪ Fallait-il utiliser le guide-âne ? ▪ Comment faire pour valider les segments et les écritures de chaque élève ? *Buts : faire réfléchir les PE2 sur cette adaptation très accélérée du manuel Objectif Calcul CM1 (Hatier) et de son livre du maître.*	a)- Pas d'exploitation collective de ce document. Restitution au PE2 stagiaire de son dossier de stage annoté et demande d'un travail complémentaire personnel : ▪ trouver d'autres tâches à propos de la mesure de segments et d'autres grandeurs pour donner du sens aux écritures du type n + a/b (référence fournie : Aides pédagogiques pour le cycle moyen : les nombres décimaux ; brochure APMEP, n°61, pp 73 sq.) ▪ délimiter un noyau minimal raisonnable de compétences à viser en matière de calcul sur les écritures fractionnaires pour un début de progression. *Buts : qu'il s'informe des possibilités de mise en situation de communication entre élèves, en effet sa séance est très statique,* *- qu'il réduise ses ambitions à propos des décompositions multiplicatives et des simplifications.* b)- Mais organisation d'un travail pratique, avec tous les PE2, à partir d'extraits des manuels suivants. Il s'agit des premières pages consacrées à l'introduction des rationnels au CM1. J'apprends les maths, pp 88-89, Retz Pour comprendre les maths, pp 35-36, Hachette Quadrillage, pp 84-85, Istra. Tâche : comparer les trois activités de découverte. Nb : à l'issue de cette tâche, le PE2 stagiaire a pu exposer son point de départ personnel. *Buts : que les PE2 revoient des sens très différents pour les écritures n + a/b et analysent les connaissances requises pour chaque introduction.*

Après avoir explicité les diverses propositions, nous avons fait le constat que plusieurs visaient à
- faire approfondir l'analyse a priori des tâches données aux élèves par les PE2 pour améliorer l'anticipation du déroulement d'une séance, l'alléger, en prévoir des variantes,
- s'intéresser davantage aux modalités de validation de ces tâches (qui, quand, comment, ce qui pourra en résulter...)

Nous n'avons pas pu aller plus loin dans l'analyse ou la comparaison de ces propositions, ni dans l'élaboration d'un module de formation plus complet. Nous n'avions en effet qu'un petit nombre de documents témoignant des pratiques de PE2 et nous ne disposions pas de beaucoup de temps. Le travail reste à faire et nous espérons vos remarques et suggestions par courrier écrit ou électronique.

Il nous a semblé que l'enseignement des décimaux à l'école élémentaire était en évolution voire en question et que cela pouvait contribuer à déstabiliser encore plus les PE2. Nous avons listé quelques uns des signes du trouble actuel :

- La mise en œuvre d'une progression laissant une place importante au travail sur les fractions est certes tentée, pratiquée dans beaucoup de classes (la plupart des manuels démarrent par les fractions) mais pose des problèmes aux maîtres même non débutants, provoque de la lassitude, du scepticisme ou parfois le retour aux introductions par le codage des mesures dans le système métrique, toujours non réhabilitées dans les ouvrages de formation.
- Les Instructions Officielles, surtout l'avant-projet donné à analyser par le ministère pendant le premier trimestre 1999-2000, restreignent le travail sur les fractions de telle manière que les progressions des manuels ou des ouvrages de formation paraissent « hors programmes ».
- La gestion des divers sens associés à l'écriture a/b entre le cycle III et la 6ème est bousculée. Le sens « quotient de deux nombres», classiquement travaillé au collège, apparaît plus tôt dans certains manuels de CM ou se trouve subrepticement introduit par le biais de la calculatrice quand celle-ci est utilisée pour présenter pour les fractions décimales le passage des écritures fractionnaires aux écritures à virgule.

Devant ces télescopages, il nous est apparu encore plus urgent de travailler avec les PE1, sur la mise en cohérence, l'articulation des divers usages des écritures fractionnaires. Le point de départ d'un tel travail est exposé ci-après.

Troisième partie. Suggestion pour travailler avec les PE1 sur les divers sens de l'écriture a/b.

Avant de démarrer le module de formation sur les rationnels et les décimaux, nous proposons aux PE1 un questionnaire pour les amener à s'interroger sur leurs connaissances (souvenirs, conceptions...) à propos des divers types de nombres. Parmi les huit items que contient ce questionnaire, nous en avons retenu trois pour l'atelier.

[Item 3] *A l'Assemblée Nationale parmi les 584 députés il y a 60 femmes. Quel est le taux de féminisation de l'Assemblée ?*

[Item 4] *Ecrivez l'énoncé d'un court problème (éventuellement avec un schéma ou un dessin si besoin) dont la solution est 2/3.*

[Item 5] *Ecrivez l'énoncé d'un court problème (éventuellement avec un schéma ou un dessin si besoin) dont la solution est 7/4.*

Nous voulons en effet retravailler avec eux la définition d'un taux et utiliser leurs énoncés pour catégoriser les divers sens attribués à l'écriture a/b. Il est apparu que les réponses différaient selon la licence d'origine. Voici quelques éléments d'analyse qui tiennent compte de la licence obtenue.

a)- Répartition des étudiants selon leur licence

LET	Lettres, philosophie	17 réponses	*soit 12 %*
HG	Histoire, géographie	17 réponses	*soit 12 %*
LV	Langues vivantes	23 réponses	*soit 16,5 %*

LET + HG + LV = 40,5 %

EdPsySoc	Sces de l'éducation, psychologie, sociologie, éducation physique	23 réponses	*soit 16,5 %*
DrEcoAES	Droit, Sciences économiques, AES	11 réponses	*soit 8 %*

EdPsySoc + DrEcoAES = 24,5 %

SVT	Sciences de la vie et de la terre	24 réponses	*soit 17 %*
MphyChi	Maths, physique, Chimie	25 réponses	*soit 18 %*

SVT + MphyChi = 35 %

Ensemble		140 réponses	

b)- Réponses pour l'item n°3, classées par types

Réponse du type « pourcentage »	Toute réponse juste ou fausse donnée sous la forme d'un pourcentage ou d'une règle de trois non achevée : (60x100) / 584
Réponse du type « fraction »	Toute réponse du type 60 / 584 ou une fraction équivalente
Réponse du type « proportion »	Toute réponse mise sous la forme « 1 femme pour … hommes »

Types Licences	« pourcentage »	« fraction »	« proportion »	absence de réponse
LET	88 %	0 %	0 %	12 %
HG	90 %	10 %	0 %	0 %
LV	88 %	0 %	0 %	12 %
EdPsySoc	84 %	0 %	0 %	16 %
DrEcoAES	82 %	0 %	9 %	9 %
SVT	84 %	12 %	4 %	0 %
MphyChi	84 %	16 %	0 %	0 %
Ensemble	86 %	6 %	2 %	6 %

La plupart des PE1 savent exprimer un taux sous la forme d'un pourcentage mais très peu, seuls quelques licenciés en histoire-géographie ou en sciences, utilisent le fait que le taux de « a » par rapport à « b » est le quotient a/b. Nous voyons derrière cette habitude deux risques au moins :

- la confusion entre le taux demandé, nombre inférieur à 1, et le nombre de femmes que contiendrait une assemblée de 100 députés, nombre nécessairement arrondi à un entier supérieur à 1,
- l'absence de liaison avec les autres utilisations des taux, par exemple le taux de variations pour une fonction.

c)- Types d'énoncés produits [items n°4 et 5]

Pour illustrer dans ce compte rendu le classement des énoncés produits nous en utilisons quelques-uns parmi ceux que nous avons retenus pour travailler avec les PE1 (cf la fiche de travaux dirigés, document D).

Le tableau ci-après présente la description des divers types et leur répartition globale.

Types	Description	Exemples (cf le document D)	Taux d'énoncés de chaque type :	
			pour 2/3	pour 7/4
Parts de quelque chose	Toute réponse où apparaît une tarte (ou gâteau, plaque de chocolat....) et dont on considère certains morceaux	N°1 ; n°6 ; n°11 ; n°18 ; etc.	40 %	18 %
Rapport, proportion, taux	Toute réponse où l'on compare une grandeur (autre que celles évoquées ci-dessus) à une autre grandeur de même nature	N°3 ; n°4 ; n°5 ; n°9 ; etc.	28 %	5 %
Division	Toute réponse où il y a partage équitable d'une quantité et où l'on cherche la valeur d'une part	N°2 ; n°10 ; n°24 ; n°27 ; etc.	3 %	8 %
Ecriture mathématique	Toute réponse où apparaît un calcul hors contexte	N°12 ; n°19 ;etc.	1 %	1 %
Enoncé non pertinent		N°8 ; n°15	8 %	6 %
Non réponse			20 %	62 %

Que constatons-nous ?
Il n'y a que très peu d'énoncés de division, ce qui est à la fois étonnant, eu égard aux usages de la notation a/b dans les calculs, et intéressant.
Les partages de gâteaux, pizzas, sont prépondérants mais la formulation de la question montre la possibilité de malentendus.
Les énoncés dépendent de la position du rationnel par rapport à 1. En effet le passage de 2/3 à 7/4 fait tripler les non réponses, chuter de moitié les énoncés du type « parts de », divise par 5 le nombre d'énoncés du type « rapport, proportion ».
La répartition des réponses et la déstabilisation créée par 7/4 dépendent de la licence obtenue, comme en témoigne le tableau ci-après.

Types Licences	Parts de quelque chose	Rapport, proportion, taux	Division	Ecriture mathématique	Enoncé non pertinent	Non réponse
LET	**29 %** *0 %*	**29 %** *0 %*	**7 %** *12 %*	**0 %** *0 %*	**6 %** *6 %*	**29 %** *82 %*
HG	**18 %** *0 %*	**41 %** *0 %*	**0 %** *0 %*	**0 %** *0 %*	**12 %** *0 %*	**29 %** *100 %*
LV	**48 %** *22 %*	**18 %** *0 %*	**4 %** *4 %*	**0 %** *0 %*	**4%** *4%*	**26%** *70 %*
EdPsySoc	**33 %** *17 %*	**33 %** *8 %*	**0 %** *12 %*	**4 %** *4 %*	**0 %** *4 %*	**30%** *54 %*
DrEcoAES	**45 %** *18 %*	**37 %** *0 %*	**0 %** *9 %*	**0 %** *0 %*	**18 %** *27 %*	**0%** *46 %*
SVT	**33 %** *33 %*	**37 %** *13 %*	**0 %** *8 %*	**0 %** *8 %*	**13 %** *8 %*	**17** *30 %*
MphyChi	**64 %** *28 %*	**12 %** *12 %*	**12 %** *12 %*	**4 %** *0 %*	**8 %** *4 %*	**0%** *44 %*

Répartition des types d'énoncés produits, selon la licence des étudiants (en gras pour 2/3, en italique pour 7/4).

Les tendances dégagées globalement s'observent pour chaque groupe de licences – donc même chez les scientifiques – mais avec d'assez forts contrastes. La plupart des licenciés en lettres, langues vivantes, histoire-géographie échouent dans la recherche d'un énoncé pour 7/4. Nous faisons plusieurs hypothèses :
- ils n'ont pas mobilisé la connaissance « 7/4 = 1,75 »,
- ils conçoivent mal des taux supérieurs à 1,
- le modèle des parts de tartes est mal adapté aux fractions supérieures à 1.

Ces constats nous confortent dans l'option que nous avons choisie de faire expliciter de tels énoncés par les PE1 et de chercher à les exploiter.

d)- Ce que nous avons fait de ces énoncés

Vingt-neuf énoncés ont été retenus pour une séance de travaux dirigés (cf le document D). Les divers types y sont représentés.

La tâche demandée fut de les classer selon la signification donnée à la fraction.
Les PE1 ont décelé des catégories assez proches de celles utilisées pour le dépouillement décrit ci-dessus. Les commentaires avec eux ont porté
- sur la pertinence de plusieurs énoncés : certains ne font intervenir ni 2/3 ni 7/4 , (cf les n°15 ou 8), d'autres relèvent plus de la division euclidienne (cf les n°25 ou 27),
- sur la formulation parfois ambiguë des questions dans les énoncés du type « parts de tarte » (cf les n°1, 11 ou 18),
- sur la parenté entre les énoncés du type « parts de tarte » avec ceux qui conduisent à comparer deux aires (cf les n°13 ou 16).

Ainsi donc cette sélection d'énoncés rédigés par les PE1 a permis de rappeler deux sens associés à l'écriture fractionnaire a/b, à savoir a : b et a b$^{\text{ièmes}}$, de poser le problème de leur articulation, et de resituer les expressions familières décrivant des partages dans le cadre des mesures de grandeurs commensurables.

Nous n'avons pas eu le temps dans l'atelier d'échanger beaucoup sur cette exploitation. D'ores et déjà nous réfléchissons à la possibilité de faire analyser plus finement la grande catégorie des problèmes du type « rapport, proportion, taux ».

Conclusion

Dans cet atelier nous avons présenté deux étapes de la formation des professeurs des écoles :
- le tout début avec les réponses à un questionnaire qui cherche à cerner quelles significations ils donnent à l'écriture a/b,
- les premiers essais de conduite dans les classes, hélas souvent situés vers la fin de leur formation ou sans grandes possibilités de reprise.

Il nous semble qu'au départ les connaissances des étudiants sont cloisonnées, qu'elles méritent donc d'être reconstruites et surtout mises en réseau avec d'autres contenus mathématiques au niveau où ils sont enseignés à l'école élémentaire, particulièrement avec les mesures de diverses grandeurs (longueurs, aires, capacités, etc.) et avec la division. C'est bien le moins s'ils veulent pouvoir se diriger dans les outils didactiques mis à leur disposition (manuels, ouvrages pour les maîtres, logiciels, etc.), se les approprier à l'occasion de leurs stages et les adapter à leurs élèves.

De l'avis des collègues participants à l'atelier, les interventions des formateurs en deuxième année sont délicates à conduire quand elles s'adressent à tout un groupe de PE2, parce qu'elles doivent souvent être brèves, parce que leurs demandes sont diverses, parce qu'il faut prendre en compte les aspects relatifs à la gestion de la classe, à cause aussi du flottement institutionnel à propos des rationnels. Nous avons cherché des solutions du côté des pratiques mêmes des PE2, en nous appuyant sur certaines de leurs séances retranscrites le plus fidèlement et le plus succinctement possible. Nous allons continuer dans ce sens pour pouvoir répondre à davantage de besoins.
Nous espérons que notre témoignage va conduire des collègues à nous faire part de leurs remarques, suggestions, à nous communiquer les supports de formation qu'ils utilisent. D'avance nous les en remercions.

Document A: Leçon sur les décimaux, dans une classe de CM1.

1ère partie: correction d'un travail écrit de la veille

Il fallait décomposer des fractions décimales (de la forme $A/10^n$) en sommes de fractions simples ($a + b/10 + c/100 + d/1000$) et grâce à un tableau de numération, trouver l'écriture à virgule de ces fractions décimales. La consigne était :

> *Décompose les fractions suivantes:*
>
> $\frac{13}{10}$
>
> $\frac{125}{100}$
>
> $\frac{4635}{1000}$
>
> *A l'aide du tableau*, trouve l'écriture à virgule de ces nombres.*

centaines	*dizaines*	*unités*		*dixièmes*	*centièmes*	*millièmes*

* Le tableau tenait bien toute la largeur d'une page de cahier de brouillons et la virgule avait une colonne réservée.

La consigne fut rappelée oralement par la maîtresse : il fallait faire apparaître «la partie entière» et mettre «le reste» sous la forme de "plusieurs fractions". Quelques élèves qui avaient déjà bien fait le travail ont rappelé la règle à d'autres qui sont venus corriger au tableau; il fallait suivre deux étapes: la décomposition en fractions de même dénominateur puis la simplification ("on barre les zéros" est l'expression utilisée)

$$\frac{13}{10} = \frac{10}{10} + \frac{3}{10} = 1 + \frac{3}{10}$$

$$\frac{125}{100} = \frac{100}{100} + \frac{20}{100} + \frac{5}{100} = 1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$$

$$\frac{4635}{1000} = \frac{4000}{1000} + \frac{600}{1000} + \frac{30}{1000} + \frac{5}{1000} = 4 + \frac{6}{10} + \frac{3}{100} + \frac{5}{1000}$$

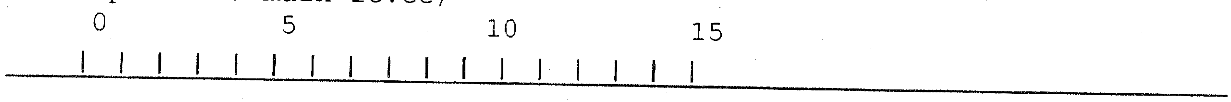
Pour mettre ces décompositions dans le tableau, un élève qui avait fait juste a rappelé le procédé conduisant à

centaines	dizaines	unités		dixièmes	centièmes	millièmes
		1	,	3		
		1	,	2	5	
		4	,	6	3	5

Or il y avait en général beaucoup d'erreurs dans les cahiers de brouillon, elles n'ont pas été examinées (cf le relevé de quelques unes à la fin de ce document).

2de partie: comparaison de deux nombres décimaux

> **1ère étape:** la maîtresse dessine une droite au tableau (l'unité est reportée à main levée)



et demande à une élève de venir placer le nombre 4,5. Celle-ci hésite et marque un point en 3,5. Elle est contestée par un élève qui explique que le point doit être entre 4 et 5.

De même des élèves sont sollicités ou sont volontaires pour placer les nombres 2,3; 11,2; 10,8; 0,5; 7,5.
Les emplacements sont acceptés parce que situés entre les bonnes graduations. Un élève (François) en trouve toutefois quelques uns approximatifs.

> **2de étape:** la maîtresse écrit au tableau les deux nombres 0,5 et 2,3 sur une même ligne et séparés par un espace. Les élèves doivent compléter l'inégalité avec le bon symbole (>, < ou =). De même les élèves auront 11,2 et 10,8 puis 4,5 et 7,5 à comparer. Les réponses sont en général justes. La maîtresse s'étonne que les élèves ne se servent pas de la graduation pour comparer les nombres ou contrôler leurs inégalités.

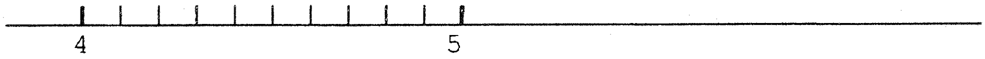
> **3ème étape:** la maîtresse propose de comparer 2,3 et 2,30. Beaucoup d'élèves écrivent 2,3 < 2,30. Or un élève (Salim) qui a fait juste, affirme que le zéro ne compte pas. La maîtresse confirme et explique à l'aide du tableau

unités	dixièmes	centièmes
2 ,	3	0
2 ,	3	

" 2,30 peut se lire 2 unités et 30 centièmes ou bien 2 unités 3 dixièmes et 0 centième
et 2,3 peut se lire 2 unités 3 dixièmes et rien
que je mette 0 ou rien, c'est pareil".

La maîtresse propose ensuite de comparer 10,8 et 10,80; tout le monde apparemment a fait juste.

> **4ème étape**: la maîtresse dessine au tableau une droite graduée, toujours à main levée.



Elle demande de placer 4,25. Les élèves ne savent pas. Elle place alors 4,1. Un élève (François) place 4,25 au bon endroit : il explique qu'il y a 10 millimètres entre 4 et 4,1 et que 10+10+5 = 25 (auparavant il a essayé d'expliquer que 25 est la moitié de 5). La maîtresse confirme et explique: elle rappelle que 4,1 = 4,10   4,2 = 4,20   4,3 = 4,30 etc donc que 4,25 est entre 4,20 et 4,30. D'autres élèves viennent placer 4,52 et 4,85 correctement.

La maîtresse demande alors de placer 4,05. L'élève qui est au tableau le place en 4,5.

> **5ème étape**: un élève (Salim) argumente en disant: "on peut enlever le zéro". La maîtresse s'étonne et réprouve. Salim: "Pourquoi certains zéros sont sans valeur ?". Beaucoup d'élèves croient que 4,05 > 4,5 car "5 centièmes, c'est plus que 5 dixièmes". Un élève dit "Ca va jusqu'aux centièmes et là jusqu'aux dixièmes." Un autre : "Là il y a trois chiffres et là deux seulement".

La maîtresse va donner une explication (elle s'adresse surtout à Salim). Elle reprend le tableau de numération

unités	dixièmes	centièmes
4 ,	0	5
4 ,	5	

"si je regarde les deux nombres, j'ai 4 unités = 4 unités,
puis 0 dixième , c'est moins que 5 dixièmes,
donc 4,05 < 4,5".

Y a-t-il plus d'élèves convaincus ? Difficile à dire. Les élèves n'interviennent pas car Salim continue à ne pas vouloir changer d'avis. François, son voisin, essaie de lui faire entendre que "5 centièmes c'est moins puissant que 5 dixièmes" mais Salim semble attendre ses arguments de la maîtresse qui reprend exactement la même explication, en essayant de rendre la règle naturelle, comme allant de soi: "quand on lit les nombres, c'est de gauche à droite; je regarde colonne après colonne; 4 = 4; 5 > 0; donc 4,5 > 4,0; je ne regarde pas ensuite".
Salim n'est toujours pas convaincu. Mais c'est l'heure de la récréation.

Exemples d'erreurs relevées dans les cahiers de brouillon

centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes
	1	3	, 1	0	
1	2	5	, 1	0	0
46	3	5 ,	1	0	0

centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes
	1	3	, 1		
1	2	5	, 1		
1	6	3 ,	5		

centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes
		1	, 3		
		2	, 5		
		3 ,	5		

centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes
		1	, 3		
	1	2	, 5		
4		6	3 , 5		

centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes
		3	, 1		
		5	, 1	0	0
	1	0 ,	0	0	

centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes
		1	, 3		
	1	2	, 5		
	4	6 ,	35		

Document B: Leçon sur les décimaux, dans une classe de CM1/CM2

Niveau: Il s'agit d'une classe à deux cours mais les CM2 y sont très minoritaires et ce ne sont pas eux qui ont les meilleurs résultats en mathématiques.

Objectif: comparer deux nombres décimaux.

Matériel préparé: la fiche de travail ci-dessous et des bandes de papier assez longues.

Prénom:

Pour le carnaval de l'école, des enfants travaillent par deux pour fabriquer un costume. Ils ont deux morceaux de tissu de même largeur mais doivent choisir le plus long. Pour chaque groupe, écris *la* longueur du morceau qu'il faudra choisir.

Groupe 1	
1,12 m	*0,75 m*

Groupe 2	
1,31 m	*1,36 m*

Groupe 3	
0,31 m	*0,223 m*

Groupe 4	
1,270 m	*1,3 m*

Groupe 5	
0,08 m	*0,8 m*

Groupe 6	
1,17 m	*1,107 m*

Déroulement

> *Mise en route*: distribution de la fiche, reformulation de la manière d'indiquer la réponse.

> *Travail individuel*. La maîtresse veille au bon déroulement de la tâche, donne peu d'aide, invite, à voix haute, à ne pas confondre la longueur du tissu et la longueur de l'écriture des nombres. Au vu des productions des élèves, elle décide de ne pas séparer dans le déroulement ultérieur, les CM1 et les CM2, contrairement à ce qu'elle avait prévu. Elle avait pensé ne pas faire intervenir les CM2 pendant la mise en commun et leur donner d'autres exercices sur l'ordre des décimaux.

> Mise en commun.

- Chaque item de l'exercice est repris au tableau ; la maîtresse note les réponses fournies. La classe est unanime pour l'item n°2 ; réponse 1,36 m. Il y a désaccord pour tous les autres items : la réponse juste et la réponse fausse se retrouvent à chaque fois dans la classe.
- La maîtresse sollicite à chaque fois des arguments pour chacune des réponses, tout en restant plutôt neutre. Le débat n'implique pas tous les élèves mais plusieurs y participent, l'enjeu est clair. Quelques uns des arguments ont été reproduits à la fin du document.

> Validation pratique.

- La maîtresse demande de trouver un moyen pour trancher dans les cas de désaccord. La première proposition est d'utiliser une calculette ; elle l'écarte car les élèves qui y ont songé ne peuvent dire ce qui pourrait être calculé.
- Elle rappelle qu'il s'agit de longueurs de tissu. L'idée est exprimée de se servir de la grande règle du tableau pour mesurer. La maîtresse retient l'idée mais il n'y a qu'une grande règle dans la classe et elle souhaite que tous les élèves participent. Elle distribue alors les bandes préparées et répartit les tâches : il faudra produire des bandes de 1,12 m ; 0,75 m ; 0,31 m ; 0,223 m ; 1,270 m ; 1,3 m ; 0,08 m ; 0,8 m ; 1,17 m ; 1,107 m, à l'aide des doubles décimètres.
- Les élèves travaillent par deux ; la maîtresse aide très peu les élèves.
- Une fois toutes les mesures achevées, les bandes sont affichées au tableau deux par deux. Ainsi le constat de l'inégalité des longueurs permet de trouver l'inégalité entre les deux nombres correspondants (un élève conseille d'écrire les nombres sur les bandes pour que tout le monde puisse suivre).
- Un problème apparaît avec les bandes de 0,08 m et 0,8 m ; les deux bandes ont la même longueur: 8 cm ! La maîtresse fait recommencer les mesures.

La récréation met fin à l'observation et à la séance qui s'est un peu poursuivie après.

Exemples d'arguments invoqués pendant la mise en commun

Item n°1 [1,12 m et 0,75 m]
Réponse 0,75 m. "Quand on met un zéro, ça fait plus grand".
Réponse 1,12 m. "0,75 m = 75 cm alors que 1,12 m, ça fait 112 cm."

Item n°3 [0,31 m et 0,223 m]
Réponse 0,223 m. "Parce que 223 est plus grand que 31."
Réponse 0,31 m.
Un élève explique qu'on peut enlever le chiffre 3 à 0,223 (il met la main dessus) et qu'alors on voit bien lequel est le plus grand. Certains élèves pensent qu'on ne peut pas enlever un chiffre, "ça change le nombre".
Un autre élève propose "d'ajouter un zéro à 0,31".
Un troisième élève revient aux mesures, pour lui "0,223 m c'est 22 cm et 3 mm et 0,31 m, c'est 31 cm".
Pour cet item, la maîtresse éprouve le besoin de reprendre, de reformuler les trois types d'arguments.

Item n°4 [1,270 m et 1,3 m]
Réponse 1,3 m. "On peut enlever le 7 et le 0".
Réponse 1,270 m. "270 est plus grand que 3".
La maîtresse fait constater le désaccord.

Item n°5 [0,08 m et 0,8 m]
Les deux réponses sont proposées et le débat tourne autour des unités de mesure : "0,8 m, c'est 8 cm et dans 0,08 m, il n'y a pas 8 cm , il y a 8 mm". Cet argument, contenant une erreur, est proposé pour la bonne réponse. Dans le feu de l'action, la maîtresse ne relève pas l'erreur de conversion.

Item n°6 [1,17 m et 1,107 m]
Réponse 1,107 m. "17 est plus petit que 107".
Réponse 1,17 m. Une élève explique que dans 1,17 m il y a 7 cm alors que dans 1,107 m il y a 0 cm. La discussion est engagée pour savoir si le chiffre 7 dans 1,17 m représente des cm ou des mm. La maîtresse demande à la classe de lui rappeler le tableau des unités de mesure de longueurs plus petites que le mètre. Les élèves mettent du temps à trouver que l'unité en dessous de mètre est le décimètre (centimètre, hectomètre, décamètre, micron furent proposés). La maîtresse demande à un élève de placer les deux mesures dans le tableau de conversion.
Cette discussion n'empêche pas un élève de proposer d'ôter le chiffre 7 dans 1,107, un autre de vouloir "ajouter un 0 à 1,17" (deux arguments en faveur de la bonne réponse), un autre d'enlever le 0 dans 1,107 pour prouver (mais perplexe) que "c'est pareil".

Document C: Séquence sur les fractions, dans une classe de CM1/CM2

Première partie: préparation du maître

Objectif : introduire de nouvelles écritures fractionnaires en partageant équitablement le segment unité en 3; 5; 10 parties égales, à l'aide du guide-âne.

Matériel :
- 100 bandelettes de papier calque:
- 25 guide-âne.
- 3 grandes bandelettes pour le tableau.
- un grand guide-âne pour le tableau.
- une fiche de travail : « La machine à partager ».

La machine à partager

Voici le segment dont la longueur a été prise comme unité.

U

1°) A l'aide de la "machine à partager", partage une des bandes en 3 parties superposables, une autre en 5, et une autre en 10.

2°) Utilise ces bandes pour construire les segments dont les mesures sont données dans le tableau ci-dessous, puis trouve d'autres écritures pour exprimer ces mesures (La règle ne doit pas être utilisée).

Segments	*Mesure de longueur en unité*	*Autres écritures*
[AB]	5/3	
[CD]	1 + 7/10	
[EF]	2 + 4/5	
[GH]	5/10	

Déroulement

a) Activité préparatoire : découverte de la "machine à partager".

1)* Distribution d'une bande de calque et du guide-âne à chaque élève.

* Présentation du guide-âne.

* Consigne n°1 (à l'oral) "Essayez de trouver comment utiliser la machine à partager" pour partager le segment unité en 5 parties égales".

2)* Travail individuel puis à deux.

* Demander la vérification du partage avec le compas ou par pliage.

3)* Mise en commun : faire venir un élève au tableau ; si personne ne trouve, aider un des élèves à cette réalisation, au tableau.
Consigne n°2 (oralement) "On a partagé le segment unité en 5, quelle fraction de la bande unité représente chaque partie ? Quelles égalités peut-on écrire ?
1 = ... ?"
4) Conclusion : * Quand on partage en 5 parties superposables, chaque partie a pour longueur 1/5 d'unité. On peut écrire
1 = 1/5 + 1/5 + 1/5 + 1/5 + 1/5 = 5 x 1/5 = 5/5

<u>b) Activité de découverte</u> (cf la fiche « La machine à partager », ci-dessus)
1) Lecture de la consigne n°1 et explication si nécessaire.
2) * Travail individuel
* Vérification de toutes les bandes (car la réussite à la question n°2 en dépend).
3) * Lecture de la consigne n°2.
* Travail individuel; passer dans les rangs pour vérifier s'il n'y a pas de grosses erreurs.
4) Correction : * Mise en commun
* Faire tracer les segments au tableau
* Ecrire les différentes écritures fractionnaires.

Deuxième partie: montage d'extraits de l'analyse rédigée par le maître

[NB: les commentaires en italiques ont été ajoutés par l'auteur du montage.]

<u>Introduction</u>

La séance a été menée dans une classe composée de 13 CM1 et 12 CM2. Dès lors il était nécessaire de différencier cet apprentissage compte tenu qu'il s'agissait d'une notion nouvelle pour les CM1.

C'est ainsi qu'une première séance a dû être menée avec les CM1 pour permettre une première approche de cette notion. Cette séance s'est organisée autour de deux objectifs, d'une part il s'agissait de faire prendre conscience aux élèves, de l'insuffisance des entiers pour coder des longueurs et d'autre part d'introduire le codage fractionnaire sur le partage de l'unité. Pendant ce temps les CM2 ont eu une série d'exercices à effectuer en autonomie pour vérifier leurs connaissances sur le sujet.

[A la suite de quoi le maître a réalisé la séance dont la préparation est reproduite dans la première partie de ce document].

<u>Analyse du déroulement de la séance</u> (cf la préparation, Ière partie du document)

a) *- Activité préparatoire (55 min)*

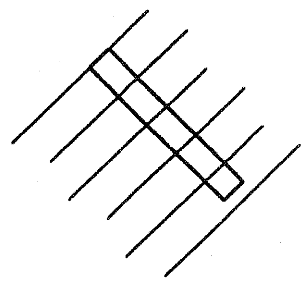
Il s'agit de découvrir le guide-âne. Le matériel se compose d'un guide-âne et d'une bandelette de papier calque de 6 cm de long, représentant le segment unité à partager.

Après une brève explication sur la construction du guide-âne (droites parallèles équidistantes), j'ai proposé la consigne n°1 (cf la préparation)

-->1ère étape

Le travail s'est effectué, dans un premier temps individuellement, pour favoriser l'appropriation puis par groupe de deux pour favoriser les confrontations. Au bout de 20 minutes, une seule élève avait réussi cette tâche, je l'ai donc sollicitée pour qu'elle explique sa démarche au tableau. Un problème est apparu à cette occasion : j'avais prévu un guide-âne grand-format pour le tableau ainsi qu'une bande de papier appropriée, mais ce matériel s'est avéré peu visible du fond de la classe.

J'ai donc tracé un guide-âne de plus grande taille sur le tableau mais en gardant la même bande de papier qui s'est, alors avérée trop petite pour être partagée en 5 parties égales. L'élève s'est trouvée quelque peu déstabilisée face à ce problème mais après avoir tâtonné, elle s'est aperçue qu'il était impossible de faire ce partage et que le maximum que l'on pouvait atteindre était en 4 parties. (cf le 1er schéma). Ceci témoigne d'une bonne compréhension du phénomène.



Je lui ai donc donné une autre bande. Voici la transcription de son explication: "Il faut que 5 bandes (celles de la machine à partager) coupent la bandelette. On bouge la bandelette pour que ça corresponde. Il faut mettre les bouts sur les traits, comme ça."

<u>--> 2de étape</u>

Après la vérification de tous les travaux, je suis passé à un questionnement plus mathématique sur ce que représente ce partage (cf la consigne n°2). Par souci de temps, j'ai pris en charge cette explication, au tableau. A l'aide de schémas et d'explications (par moi et par des élèves), il n'y a pas eu apparemment, de problèmes de compréhension sur ce que représente chaque partie de la bande (1/5 de l'unité) ou de plusieurs parties (2/5 par exemple). En ce qui concerne les différentes façons d'écrire les fractions aucune difficulté ne s'est présentée.

Quelques critiques sur cette étape.

Par souci, de temps, j'ai décidé de mener cette étape de façon quelque peu "ex cathedra", alors qu'il aurait peut-être été préférable de faire prendre une part active aux élèves. Concrétiser l'activité : découper la bande en 5 morceaux et demander ce qu'il faut pour avoir 1/5, ce que représentent 2/5 de l'unité (2 morceaux).

Pour les différentes écritures envisageables, les décompositions additives (1 = 1/5 + 1/5 + 1/5 + 1/5 + 1/5 = 2/5 + 3/5= ...) n'ont pas posé de problème. Par contre, la décomposition multiplicative (1 = 5x1/5) aurait nécessité, certainement, une attention plus particulière. J'ai affirmé que 5x(1/5) = 5/5. Un des élèves s'est alors demandé pourquoi on ne multipliait pas aussi le dénominateur. Pris au dépourvu par cette question, j'ai simplement dit que l'on ne devait multiplier que le numérateur. Mais après coup , il me semble qu'il aurait été judicieux de montrer que $5 \times (1/5) \neq 5/25$ car $1 \neq (5/25)$, là aussi par des manipulations (en partageant la bande en 25 et en prenant 5 parties, on s'aperçoit que ce n'est pas égal à une unité).

b)- L'activité de découverte (60 min)

Après cette première partie sur le fonctionnement du guide-âne et sur une sensibilisation aux écritures fractionnaires, j'ai proposé une activité à la fois complémentaire et de réinvestissement (cf la fiche "La machine à partager").

Il s'agit d'abord d'effectuer le partage de bandes en 3, en 5 (à refaire proprement) et en 10 parties égales, puis à l'aide de ces bandes de tracer des segments dont les mesures sont données sous la forme de fractions.

--> <u>1ère étape</u>

Après la lecture de la première consigne et l'explication que le segment unité (U) est identique aux trois bandes de calque (elles mêmes identiques à celle de l'activité préparatoire), les élèves passent à un travail individuel.

Dans l'ensemble les élèves ont su utiliser le guide-âne sans aide de ma part.

Après j'ai demandé à chaque élève de m'apporter ses bandes afin de vérifier leur justesse, déterminante pour la suite de l'exercice. J'ai pu constater la difficulté des élèves à obtenir des tracés d'une certaine précision. Ces relatives imprécisions sont certainement dues à la complexité de la tâche pratique (tenir la bandelette fixe, tracer les traits) d'autant que la bandelette ne mesure que 6 cm de long et 0,7 cm de large, donc difficile à manipuler.

--> <u>2de étape (cf la consigne n°2).</u>

Après m'être assuré que tous les élèves avaient compris la tâche demandée, ils sont passés à une phase de travail individuel.

Le premier constat que je peux en tirer, c'est le taux de réussite extraordinaire. Si l'on excepte les erreurs, que l'on peut imputer à l'inattention, comme celle commise par Paula pour le tracé du segment [EF], l'exercice a été réussi par tous sauf deux élèves (le titulaire de la classe m'a confirmé qu'il s'agit d'une bonne classe). En les interrogeant, il s'est avéré que les deux erreurs étaient identiques et concernaient la fraction supérieure à un (5/3). Ces élèves (Maurane en est une) avaient en fait tracé le segment 3/5. N'ayant vu, jusqu'à présent, que les fractions inférieures ou égales à un, elles se sont trouvées bloquées devant cet obstacle. Elles n'ont pas su interpréter la fraction comme cinq fois un tiers, elles n' ont pas encore bien conscience des rôles que jouent le numérateur et le dénominateur.

En ce qui concerne les autres écritures possibles, on retrouve surtout des décompositions additives et quelques multiplicatives. En aucun cas, on ne trouve de simplification du type $5/10 = 1/2$. Est-ce parce que les élèves ont effectué plus ou moins mécaniquement cette tâche (sans savoir ce que représentent 5/10 d'unité), en s'inspirant de ce qui a été vu au cours de la deuxième étape de l'activité préparatoire (je n'avais pas introduit le principe de la simplification) ou alors n'ont-ils pas conscience que 5/10 = 1/2 (peu probable pour la majorité des élèves) ?

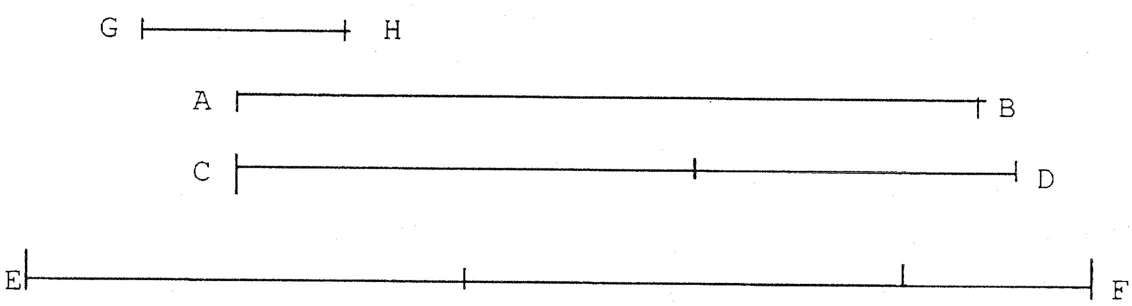
Compte tenu de la longueur de la séance, la correction fut reportée.

Troisième partie : exemples de travaux d'élèves

[NB : ce sont deux travaux joints par le PE stagiaire pour illustrer son compte rendu.]

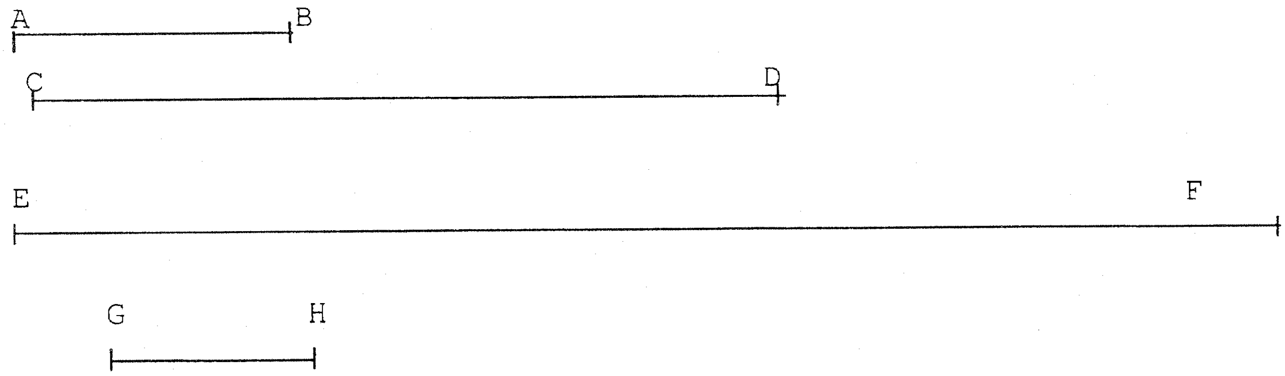
Travail de Paula

Segments	**Mesure de longueur en unité U**	*Autres écritures*
[AB]	$\frac{5}{3}$	$= \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$
[CD]	$1 + \frac{7}{10}$	$= 1 + \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = 1 + \frac{7}{10}$
[EF]	$2 + \frac{4}{5}$	$= 2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = 2 + \frac{4}{5}$
[GH]	$\frac{5}{10}$	$= \frac{2}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10}$



Travail de Maurane

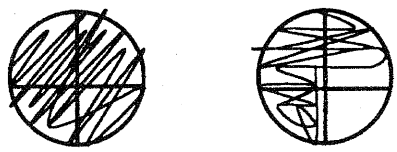
Segments	Mesure de longueur en unité U	Autres écritures
[AB]	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$
[CD]	$1 + \frac{7}{10}$	$1 + \frac{5}{10} + \frac{2}{10}$
[EF]	$2 + \frac{4}{5}$	$2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}$
[GH]	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{10} + \frac{2}{10}$



Document D : Fiche de travaux dirigés (PE1). Classement de problèmes sur les fractions.

Cette fiche est faite à partir de vos réponses au questionnaire. Classez les problèmes selon la signification des fractions sur laquelle ils reposent.

1- Ecris la fraction correspondant à la partie hachurée.



2- Quatre enfants veulent se partager 7 F trouvés dans la rue. Exprimer à l'aide d'une fraction la part de chacun.

3- Dans un groupe de 3 enfants, un porte des lunettes. Quel est le taux d'enfants ne portant pas de lunettes ?

4- Paul a 390 francs. Il dépense 1/6 de cette somme pour acheter un livre, puis il achète un casque à 65 F. Quel taux d'argent lui reste-t-il ?

5- Un jardinier plante des rosiers à fleurs rouges et des rosiers à fleurs jaunes. Sachant qu'il y a en tout 9 rosiers dont 3 à fleurs jaunes, calculer la proportion de rosiers à fleurs rouges.

6- Un garçon a mangé 1/3 de son gâteau d'anniversaire. Combien devra-t-il en manger pour finir ce gâteau sans en laisser aux autres ?

7- Je veux partager 2 F entre Pierre, Paul et Jacques. Combien je donne à chacun ?

8- Monsieur Dupont veut planter un arbre tous les 4 m sur un côté de son jardin qui mesure 7 m. A quelle distance doit-il planter l'arbre à partir d'un côté de son jardin ?

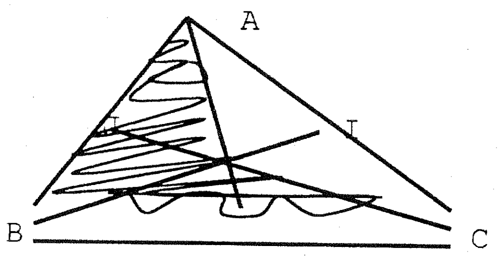
9- Dans une classe de 30 élèves, 10 ont choisi l'option anglais et les autres ont choisi espagnol. Trouver sous forme de fraction, la proportion d'hispanisants dans la classe.

10- Un cake est prédécoupé en 7 tranches. Combien il y aura de tranches par personne si 4 personnes veulent en manger ?

11- Je coupe un gâteau en trois parts. J'en donne une à Noémie et une autre à Marcel. Combien ai-je donné de parts de mon gâteau ?

12- Exprimer 1,75 à l'aide d'une fraction irréductible.

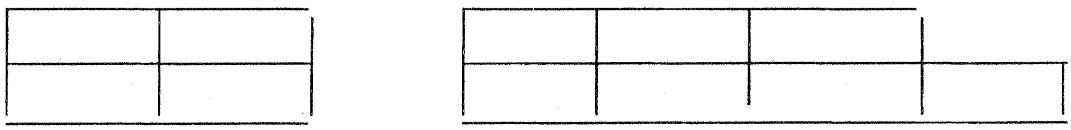
13- Soit ABC un triangle, I J et K les milieux de [AC], [AB] et [BC].
Quelle part de l'aire totale représente la portion hachurée ?



14- 4 bonbons valent 1 F. Combien coûtent 7 bonbons ?

15- Pierre a 100 F dans son porte-monnaie. Jean lui rend 40 F qu'il lui devait. De combien la fortune de Pierre a-t-elle été augmentée ?

16- Exprimer l'aire de B par rapport à celle de A :



A B

17- Il y a 30 personnes dans mon immeuble. Un incendie se déclare. Seulement 10 personnes sont sauvées par les pompiers. Quelle est la proportion de personnes décédées ?

18- Maïté pendant la cuisine des mousquetaires a fait deux grosses tourtes à la graisse de porc et de canard. Elle les partage en quatre. Moi, au bout d'un moment, j'en peux plus, j'ai plus faim.. Maïté, elle, mange tout le reste. Combien Maïté a-t-elle mangé de quarts ?

19- Continue de graduer cette droite

0 1/4 2/4 3/4 5/4 ? 9/4

20- J'ai une somme x. J'en retire 1/4. Je rajoute x. Combien ai-je à la fin ?

21- On verse un litre de liquide dans une bouteille de 1,5 l. La bouteille est pleine au ....

22- Cécile achète 12 pommes pour en faire une tarte. Or la recette indique qu'il suffit de 8 pommes. Quelle est la part de pommes employées ?

23- Sur six filles, quatre ont les cheveux longs. Les traduire sous forme fractionnaire.

24- Je décide de partager un segment de 7 cm en quatre. Combien chaque morceau mesure-t-il ?

25- Au restaurant 4 personnes ont une assiette de cacahuètes. Il y a 7 cacahuètes. Combien chaque personne pourra manger de cacahuètes ?

26- 6/3 - 4/3 = ?

27- Dans une cour de récréation, il y a 45 enfants. Le maître veut distribuer équitablement 30 ballons. Calculer le nombre de ballons qu'aura chaque enfant (en réduisant la fraction).
Est-ce possible , pourquoi ?

28- Trois enfants se partagent deux gâteaux de manière équitable. Quelle quantité de gâteau chacun mangera-t-il ?

29- 7/4 x 8/21 = ?

ALBUMS, CONTES ET MATHEMATIQUES

ATELIER 5
Pierre Eysseric
IUFM d'Aix-Marseille

Résumé
L'atelier s'est déroulé en deux temps. Dans une première partie j'ai présenté diverses pistes d'utilisation des albums dans le cadre des apprentissages mathématiques à l'école, ainsi que des travaux réalisés en formation initiale et/ou continue des professeurs d'école ; une discussion a pu s'engager entre les participants sur l'intérêt de cette approche. Au cours de la deuxième partie un travail en petits groupes a été effectué autour de quatre albums : il s'agissait de les étudier du point de vue de leurs possibilités d'intégration dans le cadre d'apprentissages mathématiques à l'école.

Introduction

L'album n'est pas incontournable dans les apprentissages mathématiques ; ce que l'on fait avec des albums peut en général être proposé à partir d'un autre support.
Mais pourquoi pas des albums ?
Une première condition est que ceux-ci plaisent aux enfants et que l'enseignant aime lire ce type de livre.
En évitant de raccrocher de façon complètement artificielle un exercice de mathématiques à un album et en excluant tout systématisme abusif, les albums permettront surtout de proposer aux élèves des situations dans lesquelles ils pourront faire fonctionner des savoirs mathématiques déjà rencontrés (autour du nombre, en géométrie, dans le domaine de la logique). Il s'agit d'un support plus motivant pour certaines activités d'entraînement (dénombrement en particulier) et pour construire certains apprentissages (classement, rangement, tableaux, ...).

I. Présentation des albums

Nous pouvons distinguer deux sortes d'albums.

Les albums "mathématiques".

Ceux qui ont été réalisés avec des ingrédients mathématiques : il s'agit en général d'albums conçus autour des nombres ou des figures géométriques. On trouvera là les classiques albums à compter qui invite l'enfant à dénombrer des collections diverses et lui présente les nombres de la comptine numérique les uns à la suite des autres. Parmi les albums dont le thème central est le nombre nous accorderons une place particulière à tous ceux qui tentent de mettre en évidence des relations existant entre différents nombres ; pour cette raison nous les appellerons des albums à calculer. Les ouvrages autour des formes géométriques sont essentiellement représentés par les albums de la collection "Pong à ..." dont les personnages sont dessinés à l'aide des pièces du tangram.

Nous avons peu abordé ce type d'albums dans le cadre de l'atelier bien qu'ils puissent être l'objet d'un travail intéressant dans le cadre des apprentissages mathématiques à l'école. Pour les albums à compter nous renvoyons à divers travaux qui fournissent des pistes d'analyse et d'utilisation (Annexe 2 de "Apprentissages numériques en Grande Section de Maternelle," ERMEL, Hatier, 1990 ; "Livres à compter", article de Dominique Valentin dans Grand N, numéro spécial maternelle, tome 1; "Des enfants, des mains, des doigts..., et des livres à compter", article de Dominique Valentin, Myriam Besançon, Nadine Hamon, Gisèle Maire et Nathalie Persyn dans Grand N, numéro 58).
D'autre part en annexe 1, figurent quelques pistes pour choisir les albums à compter ; nous renvoyons aux références ci-dessus pour des bibliographies détaillées.

Les albums "ordinaires"

Ceux dans lesquels l'auteur n'a placé aucun contenu mathématique explicite : les albums et contes "ordinaires" et que nous pouvons pourtant aussi utiliser pour le travail en mathématiques. En effet, lorsqu'on examine ces albums, on y découvre souvent dans le texte ou dans les illustrations des éléments liés aux mathématiques. Et notre première tâche sera de les repérer et d'en faire un inventaire. Nous trouverons des ouvrages dont les illustrations et le texte peuvent conduire le lecteur à des activités de dénombrements, certains dans lesquels des motifs géométriques sont utilisés pour l'illustration, d'autres encore dont le texte utilise un vocabulaire lié à l'orientation, à la topologie ou à la géométrie et enfin des albums qui, à travers l'histoire racontée, peuvent être à l'origine d'activités de classement ou de rangement.
C'est autour de cette deuxième catégorie que s'est organisé l'essentiel du travail de l'atelier.

II. Comment utiliser les albums "ordinaires" en classe ?

Une fois effectué le travail de repérage des "éléments mathématiques" contenus dans le texte et/ou dans les illustrations des albums, que peut-on en faire dans une classe ? Quel intérêt y a-t-il à faire cette analyse mathématique d'albums qui, d'une part ont été écrits a priori pour un usage familial et non scolaire, et d'autre part n'ont pas été pensés pour être reliés à des mathématiques ?

Approche culturelle

On peut se contenter de cet inventaire des contenus mathématiques implicites des albums et s'en servir pour choisir ceux que l'on met à la disposition des enfants dans la classe. Il s'agit de permettre à ceux qui n'en ont peut-être pas l'occasion ailleurs d'être, dans un environnement "riche en mathématiques".
On pourrait parler ici d'une simple approche culturelle des albums dans laquelle on essaye de donner une place aux mathématiques. Remarquons à ce sujet que les choix d'albums effectués par un professeur de français ou par un professeur de mathématiques sont souvent assez convergents. Les albums de qualité sont souvent riches de tous les points de vue et permettent alors, comme nous le verrons, de fréquentes exploitations croisées.

Intégration dans des séquences de mathématiques

Certains albums, à partir des éléments de mathématiques que l'on y a repérés, serviront de point de départ à des séquences de mathématiques : dénombrements, correspondances terme à terme, classements, rangements, comparaisons, tracés géométriques, utilisation de vocabulaire lié aux mathématiques, activité d'orientation ou de repérage sur un parcours par la mise en relation logique de la structure géométrique de celui-ci avec la structure temporelle d'une histoire, etc... Mais on veillera bien sûr à ne pas limiter l'album aux apprentissages mathématiques ; il ne faut pas oublier que si leur utilisation dans ce cadre peut s'avérer très féconde, il ne s'agit pas de la vocation première de ces albums "ordinaires".

Approche "structuraliste"

Une troisième piste d'utilisation des albums est liée à la structure d'un grand nombre d'entre eux qui est basée sur l'utilisation de séries ; par exemple, dans l'album "Musique" de C. Boujon, on assiste au fil des pages à la répétition presque à l'identique du même événement "une souris joue d'un instrument et sa voisine vient se plaindre et la chasse parce qu'elle est trop bruyante", et ce sont les éléments de plusieurs séries qui vont introduire la différence : ici la série des instruments de musique, la série des couleurs des chambres de chaque souris, la série des couleurs des souris, la série des bruits produits par les instruments,....Souvent c'est la rupture de l'une ou plusieurs de ces séries qui est à l'origine du dénouement de l'histoire. La structure peut être plus ou moins complexe et les séries parfois très nombreuses porteront parfois non seulement sur des éléments de l'histoire comme dans l'exemple donné ci-dessus, mais aussi sur le vocabulaire utilisé ; par exemple le même élément de l'histoire sera au fil des pages désigné par divers synonymes ("les parages - le secteur - le coin - les environs" dans "Les Trois Petits Loups et le Grand Méchant Cochon" de E.Trivizas) ou par rajout d'un élément à l'expression précédemment utilisée ("Petits loups! - Petits loups poltrons! - Petits loups poltrons, tremblotants du menton! - Petits loups poltrons, tremblotants du menton et roussis de la queue!" dans ce même album) ; on rencontre aussi des séries que l'on pourrait qualifier de rythmiques dans la mesure où on a affaire au même élément ou à la même phrase qui revient régulièrement dans l'histoire comme un refrain. L'analyse de la structure de ces albums et contes ainsi que son utilisation dans des réécritures "à la manière de ..." peut être à la source d'intéressantes activités français-mathématiques.
Ici les mathématiques apparaissent comme un outil au service de la lecture et de la compréhension de l'album. En annexe 2, on trouvera l'analyse complète de la structure du texte de l'album "Les trois petits loups et le grand méchant cochon", qui pourrait être exploitée avec des élèves de cycle 3.

Codage et décodage d'albums

Enfin la dernière piste proposée est celle du codage et du décodage d'albums que je mettrai en perspective à très long terme avec la résolution de problèmes. L'enfant va devoir inventer ses propres symboles pour raconter une histoire en images (codage) ou être capable de décrypter les symboles d'un autre pour lire une histoire (décodage, par exemple avec les albums de W.Lavater qui sont des codages de contes classiques) ; il s'agit donc de travailler sur des représentations, ce qui est à la base de toutes les mathématiques.

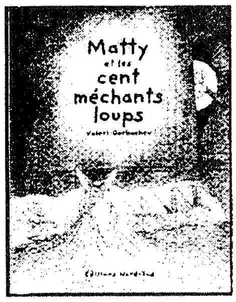
En effet si les mots "conte" et "compte", malgré leur origine commune, n'ont aujourd'hui plus grand chose à voir l'un avec l'autre, il leur reste cela en commun de faire passer de la réalité aux représentations...
Dans l'atelier nous avons pu présenter :
Quelques albums codés du commerce sur lesquels des élèves de l'école maternelle ont pu travailler : les contes classiques illustrés (codés) par Warja Lavater chez Maeght Editeur ("Le petit chaperon rouge", "Le petit Poucet", ...) ; "Petit-Bleu et Petit-Jaune" de Léo Lionni, Edition L'école des loisirs ; ...
Des albums qui ont pu être codés par des enfants dans le cadre d'un travail interdisciplinaire de fabrication d'un album : "Le magicien des couleurs" de A. Lobel, Edition L'école des loisirs ; "Toc, toc, toc" de T. et Y. Koide, Edition L'école des loisirs ; "La chaise bleue" de C. Boujon, Edition L'école des loisirs.
Des exemples d'albums codés réalisés en formation initiale et/ou continue afin de faire vivre à des PE un type d'activité qu'ils pourront ensuite reproduire avec leurs élèves.
En annexe 3, on trouvera le codage d'un album réalisé en 99/00 par des élèves d'une école primaire et un album codé réalisé en formation continue par des professeurs d'école.

III. Eléments de la discussion au cours de l'atelier

La discussion a permis de reprendre et de préciser divers points.
Quelle exploitation de ce thème dans la formation des PE ?
Avec les PE2, il est possible de consacrer deux heures à la présentation de quelques albums et de pistes pour l'utilisation en classe.
Si on dispose d'une douzaine d'heures (dans un complément optionnel de formation par exemple), on peut leur proposer d'analyser des albums et de construire des séquences pour la classe autour de ceux-ci. Ce travail peut être complété par une activité de fabrication d'album (album à compter ou album codé) du type de celui qu'un PE peut proposer à ses élèves ; il est encore plus riche s'il peut être fait en co-intervention avec des professeurs d'arts plastiques, de technologie et de français.
Ce travail dans la durée est plus facile à mettre en œuvre dans le cadre d'un stage de formation continue pluridisciplinaire autour des albums de littérature enfantine.
La question de l'identification par l'enfant des mathématiques dans les albums : faut-il identifier spécifiquement ces albums dans la BCD par exemple ?
Cela ne me semble ni nécessaire ni souhaitable. Il est important que des PE soient capables d'identifier les éléments mathématiques dans les albums afin d'une part, d'orienter les choix d'achats d'albums réalisés par les écoles et/ou les BCD et d'autre part, de les utiliser éventuellement dans des situations d'apprentissage. Mais pour les enfants ils doivent rester des albums et il faut éviter toute utilisation excessive (en mathématiques ou dans une autre discipline) qui transformerait l'album en un simple objet scolaire.
Faire un travail en formation avec les PE devrait aussi leur permettre de faire un tri et d'éliminer certains produits très vendus, mais contenant de nombreuses erreurs mathématiques.

IV. Etude mathématique de quatre albums

Les participants répartis en quatre groupes ont tenté d'analyser d'un point de vue mathématiques les albums ci-dessous :



Vous trouverez ci-après pour trois d'entre eux les principales pistes d'activités mathématiques envisageables avec les élèves telles qu'elles ont été dégagées au cours de l'atelier. L'annexe 4 présente une analyse détaillée de l'album "Matty et les cent méchants loups" rédigée par A.Duval à partir du travail réalisé par son sous-groupe dans l'atelier.

Le pique-nique de la famille souris

Cet album fait partie d'une série d'une dizaine de titres avec les mêmes personnages : 14 souris : Grand-Père, Grand-Mère, Papa, Maman et les 10 enfants. Les pistes de travail en mathématiques autour de ces albums sont :
Les nombres :
Comptage des souris
Décomposition de 10 : 4 enfants sont ici et 6 autres sont là, …
Sur cette image, combien de souris sont absentes (au total il y a 14 souris) ?
…
Repérage d'un même individu dans les différentes illustrations.
Vocabulaire lié aux positions :
Devant – derrière ; en haut - en bas ; en dessous ; …
Les différents plans dans les illustrations : loin - près.
Le repérage des positions au cours des déplacements des souris et les ordinaux …

Le chat orange

Repérage dans l'espace et dans le temps.
Schématisation du chemin parcouru par le chat.
Oppositions et contraires.

Le roi, les souris et le fromage

Ce sous-groupe travaillait avec un professeur de français et leur travail s'est essentiellement organisé autour de la question :
Comment les activités mathématiques permettent au lecteur d'aller vers une compréhension plus fine de l'album ?

Les éléments suivants ont été repérés :
Les structures répétitives :
- Dans les épisodes ;
- Dans le texte ;
- Dans les illustrations.

L'organisation de l'espace :
- Traduire les entrées/sorties des animaux ;
- Traduire l'équilibre et le déséquilibre.

Les grandeurs :
- Comparaison des tailles des animaux ;
- Taille des représentations : loin/prés.

Un scénario de travail avec des PE2 a été ébauché :
Identification des notions mathématiques et culturelles nécessaires avant la découverte de l'album ;
Des séances en maternelle autour du découpage de l'histoire en séquences, des oppositions de taille ou du contraste loin/prés.

ANNEXE 1

Album à compter, albums à calculer (quelques pistes pour choisir...)

Certains de ces albums ne sont que des prétextes à présenter des nombres et sont très pauvres ; d'autres au contraire proposent une véritable histoire ; un autre critère à ne pas négliger pour apprécier ces albums est la qualité des illustrations.

Des collections sans lien les unes avec les autres :
Ces albums présentent en général la suite numérique croissante par le biais de collections de cardinal 1, puis 2 et ... La comptine est en général explorée jusqu'à 10, mais certains s'arrêtent avant (5) ou vont bien au-delà (22 pour "Vingt-deux ours" de C.Huchet et K. Wiese par exemple).
Selon les albums :
les nombres peuvent être écrits en chiffres ou en lettres ;
chaque nombre est présenté avec une seule collection de cardinal correspondant ou avec de nombreuses collections de cardinal correspondant, ce qui permet plusieurs niveaux de lecture ;
les nombres présentés apparaissent le plus souvent comme des cardinaux, mais quelquefois aussi comme ordinaux.

Une collection unique dont le cardinal augmente de 1 à chaque étape :
Ils mettent en évidence le passage d'un nombre au suivant.

Une collection unique dont le cardinal diminue de 1 à chaque étape :
Ils mettent en évidence le passage d'un nombre au précédent.

d) Des collections qui mettent en évidence des décompositions plus ou moins nombreuses des nombres.
En référence à l'album à calculer de R. Brissiaud (Retz Nathan), je les qualifierais volontiers d'albums à calculer : la mise en page des collections favorise la découverte de relations entre les nombres autres que celle du type "suivant de" ou "prédécesseur de".

e) Une collection unique dont le cardinal augmente, mais pas toujours de 1.
Ici aussi, les relations qui apparaissent entre les nombres sont plus riches.
Beaucoup de ces albums sont des albums "ordinaires", dont le nombre n'est qu'une des facettes, et pas toujours la plus importante.

Des albums avec des nombres, qui ne sont pas vraiment des albums à compter.
Ils s'adressent souvent à des enfants plus grands (cycle 3 ou au-delà pour certains). Ils abordent souvent de grandes collections (100 et plus) et renvoient quelquefois à des savoirs mathématiques élaborés comme l'idée de factorielle avec "Le pot magique" de M. Anno.

On peut regretter la confusion chiffre-nombre qui revient malheureusement dans un grand nombre de titres.

ANNEXE 2

Analyse de la structure de l'album

Le prologue :
Il était une fois trois petits loups tout doux et câlins comme tout. Ils avaient la fourrure soyeuse, la queue duveteuse, et vivaient avec leur maman. Le premier était noir, le deuxième gris et le troisième blanc.
Un jour, la maman appela ses trois petits loups et leur dit :
Mes petits loups, vous êtes grands, il faut partir découvrir le vaste monde. Il faut vous construire une maison bien à vous. Mais surtout, méfiez-vous du Grand Méchant Cochon.
Ne t'inquiète pas, maman, nous allons faire très attention, répondirent les trois petits loups.
Et ils partirent.

Les quatre "couplets" de l'histoire, articulés autour de séries de 4 termes :
Remarques : c'est la rupture (X) de certaines de ces séries qui marque le dénouement dans le quatrième "couplet"; quelques rares séries sont incomplètes et la syntaxe a introduit deux ou trois interversions .

En chemin	**ils**	rencontrèrent bientôt	une maman kangourou
Au même moment		virent	un castor
C'est alors que		passa dans la rue	un rhinocéros
A cet instant précis		aperçurent	un flamant rose

qui	poussait	une brouette	remplie
	préparait	dans une bétonnière	
	conduisait	un camion	chargé
	marchait vers eux en poussant	une brouette	pleine

de briques rouges et jaunes.
Du béton.
De fil barbelé, de barres de fer, de plaques de tôle et de lourds cadenas d'acier.
de fleurs.

S'il vous plaît, vous voulez bien nous donner	quelques-unes de	vos briques?	**lui demandèrent les (trois) petits loups.**
	Un peu de	béton?	
	Un peu de…, des… et quelques	fil barbelé, …?	
	Des	fleurs?	

Mais bien sûr,	répon**dit**	la maman kangourou	**et il leur donna**	un tas de
Bien sûr,		le castor		des seaux et des seaux pleins à ras bord de
Sans problème,		le rhinocéros		tout plein de
Avec plaisir,	**dit**	le flamant rose		des brassées de

briques rouges et jaunes.
beau béton , bien gris et bien épais
fil barbelé, de barres de fer, de plaques de tôle et de lourds cadenas d'acier. Mais aussi du plexiglass blindé et …
fleurs

C'est ainsi que les trois petits loups se construisirent une maison	en briques.
	en béton.
	d'une extrême solidité …
	en fleurs. (…)

Le lendemain,	**Le Grand Méchant Cochon vint rôder dans**	les parages	et découvrit la maison
A peine avaient-ils fini que		le secteur	et espionna
Le lendemain, comme d'habitude,		le coin	
Le lendemain,		les environs	et il vit la maison

en briques	**que les petits loups venaient de construire.**	**Les trois petits loups jouaient gentiment**	au croquet	dans le jardin.
			au volant	dans la cour de …
			à la marelle	dans le jardin.
en fleurs		X	X	X

Quand ils	aperçurent	**Le Grand Méchant Cochon ils coururent … dans la maison**	s'enfermer.
	virent		et fermèrent solidement la porte.
	virent approcher		se réfugier, barricadèrent la porte et verrouillèrent les soixante-sept cadenas.
X	X	X	X

Le cochon	frappa à la porte	**et grogna:**
	sonna	
	appuya sur le bouton du vidéo-interphone	**et dit:**
	fit tinter la violette-sonnette	

Petits loups, petits loups,	**laissez-moi entrer, (voyons) (à la fin)!**
Petits loups poltrons,	
Petits loups poltrons, tremblotants du menton,	
Petits loups poltrons, tremblotants du menton et roussis de la queue,	

Les autres séries sont obtenues par substitution et celle ci-dessus par juxtaposition.

REFRAIN	**- Non, non et non, dirent les trois petits loups. Par les poils de notre barbiche-barbichette-et-barbichou, tu n'entreras pas chez nous, pas pour toutes les feuilles de thé de notre plus belle théière de Chine!** **- Puisque c'est ça, je vais souffler, pouffer, pousser mille bouffées, et je démolirai votre maison! Dit le cochon.** **(Et il souffla, pouffa, poussa mille bouffées, et même plus que ça, mais la maison ne bougea pas).**

La partie ( ) du refrain disparaît à la quatrième occurrence et est remplacée par le dénouement de l'histoire (voir Conclusion).

Hélas, le cochon ne s'appelait pas Grand Méchant Cochon pour des prunes.	il alla	**chercher**	sa massue
	il courut		son marteau-piqueur
	il alla		de la dynamite
	X	X	X

et cogna sur la maison jusqu'à ce qu'elle tombe par terre.
et détruisit la maison.
la plaça le long de la maison, alluma la mèche et… la maison explosa.
X

Les trois petits loups réussirent	à s'enfuir	avant que les briques ne leur dégringolent dessus,
	à s'échapper	à temps,
Par miracle, les petits loups parvinrent	à s'échapper	à temps.
	X	X

mais ils eurent vraiment très peur.
mais les poils de leur barbiche-barbichette-et-barbichou tremblaient, tremblaient de terribles tremblements.
Ils s'y brûlèrent simplement le bout de la queue
X

Il va falloir qu'on construise	**une maison**	bien plus	**solide,**	dirent-ils.
Eh bien, nous allons construire		encore plus		décidèrent-ils, car ils étaient très déterminés.

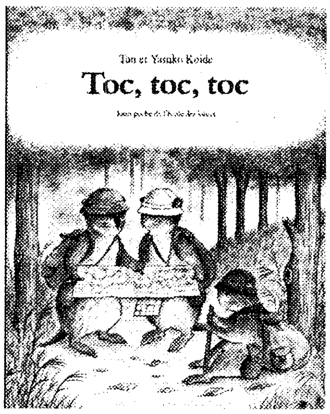
Il doit y avoir un truc qui cloche avec nos matériaux de construction, dirent-ils. Il faut qu'on essaie autre chose. Mais quoi ?
X

La conclusion :
Mais tandis qu'il prenait une grande inspiration, prêt à souffler et à pouffer, il sentit le délicieux parfum des fleurs. Et comme cette odeur lui coupa le souffle, il dut inspirer encore une fois, puis encore une fois.
Au lieu de souffler et de pouffer, il inspira, il inspira... Il inspira si profondément, que la délicieuse odeur finit par l'emplir entièrement. Son cœur déborda de tendresse et il comprit à quel point il avait été horrible jusque-là. Autrement dit, il se transforma en Grand *Gentil* Cochon. D'ailleurs, il se mit à chanter une chanson et à danser la tarentelle.
(...)

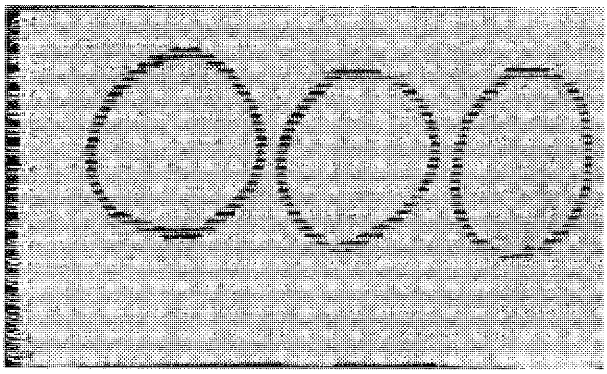
ANNEXE 3

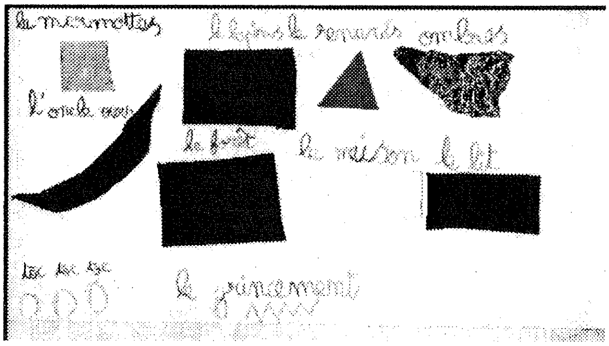
Deux albums cod s

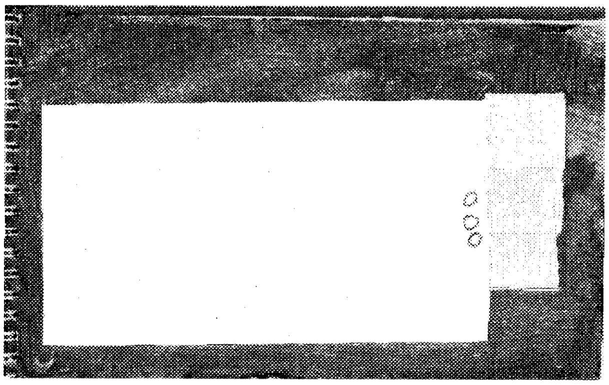
"Toc, toc, toc" de T. et Y. Koide

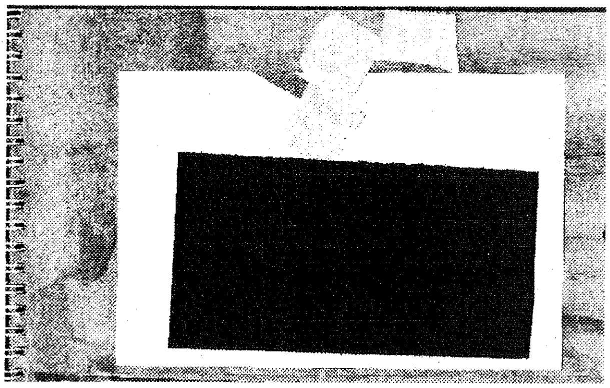


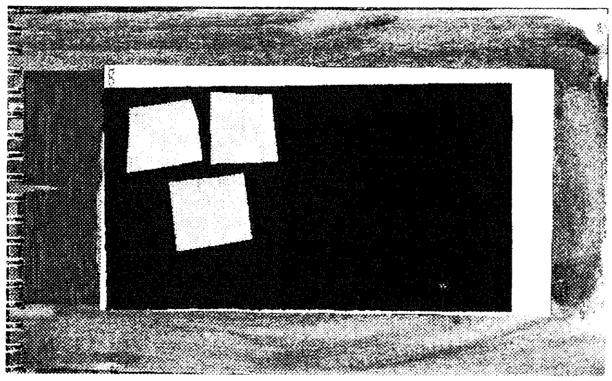
codé par des élèves de CP.

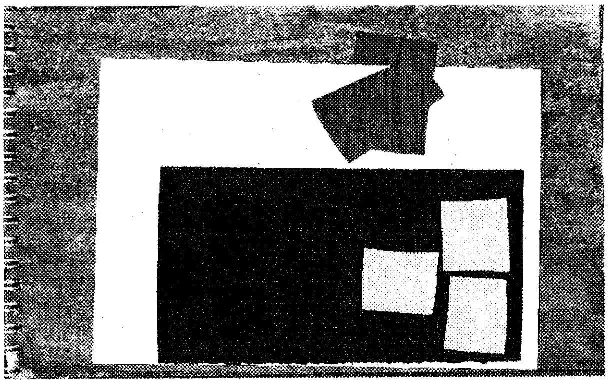


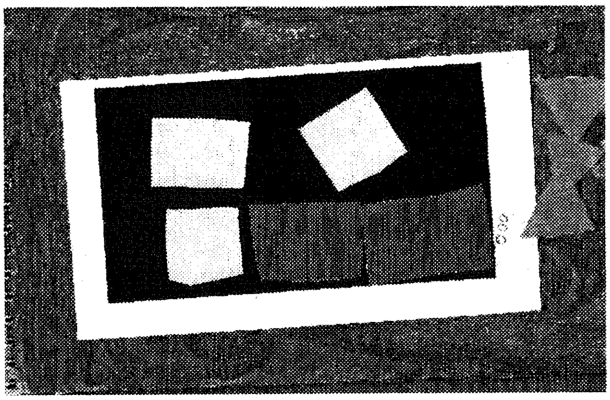


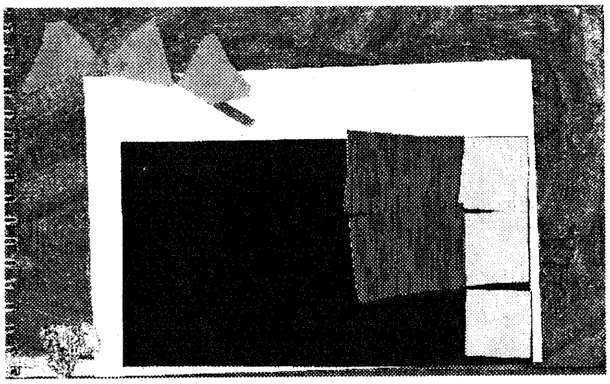


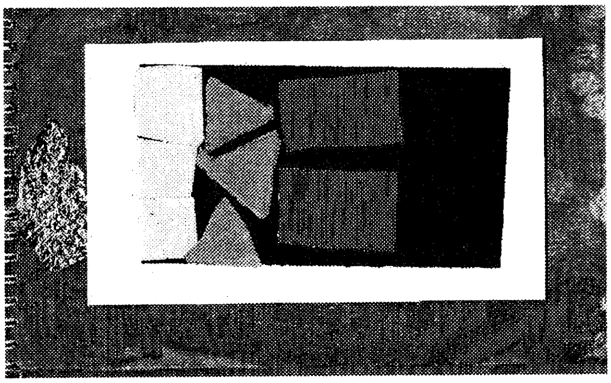


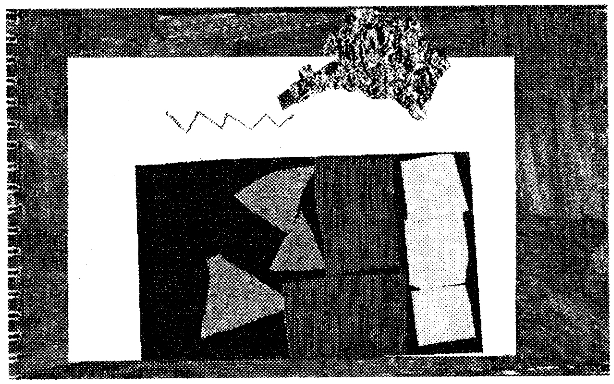


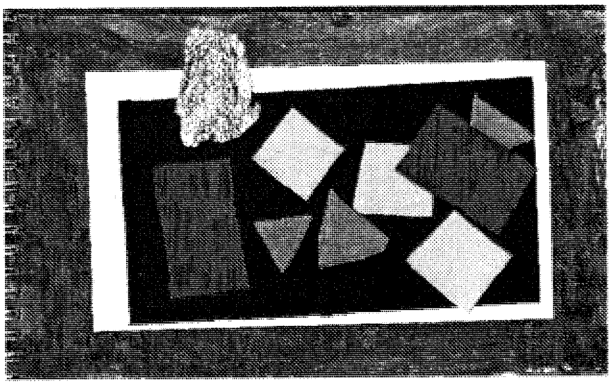


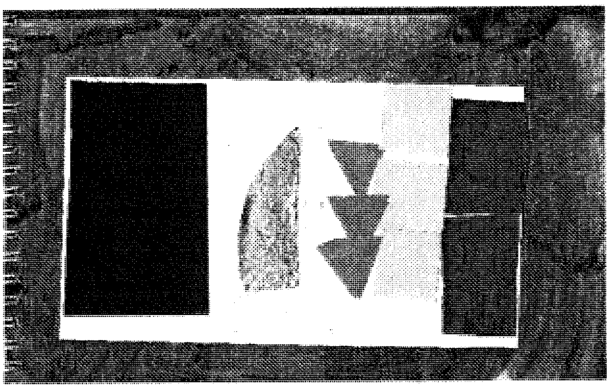


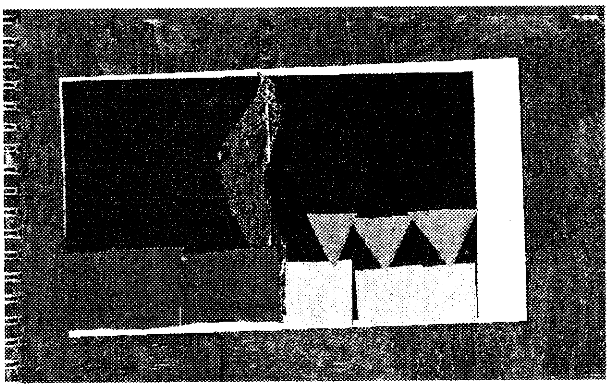






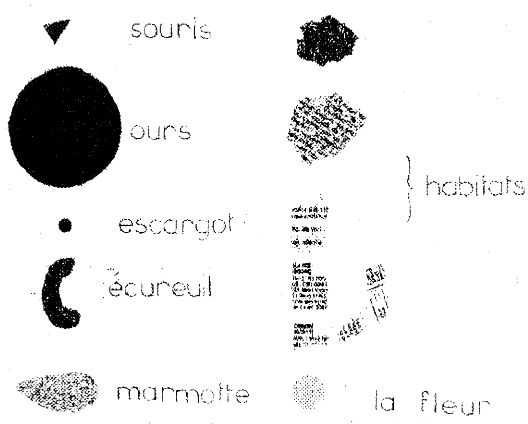


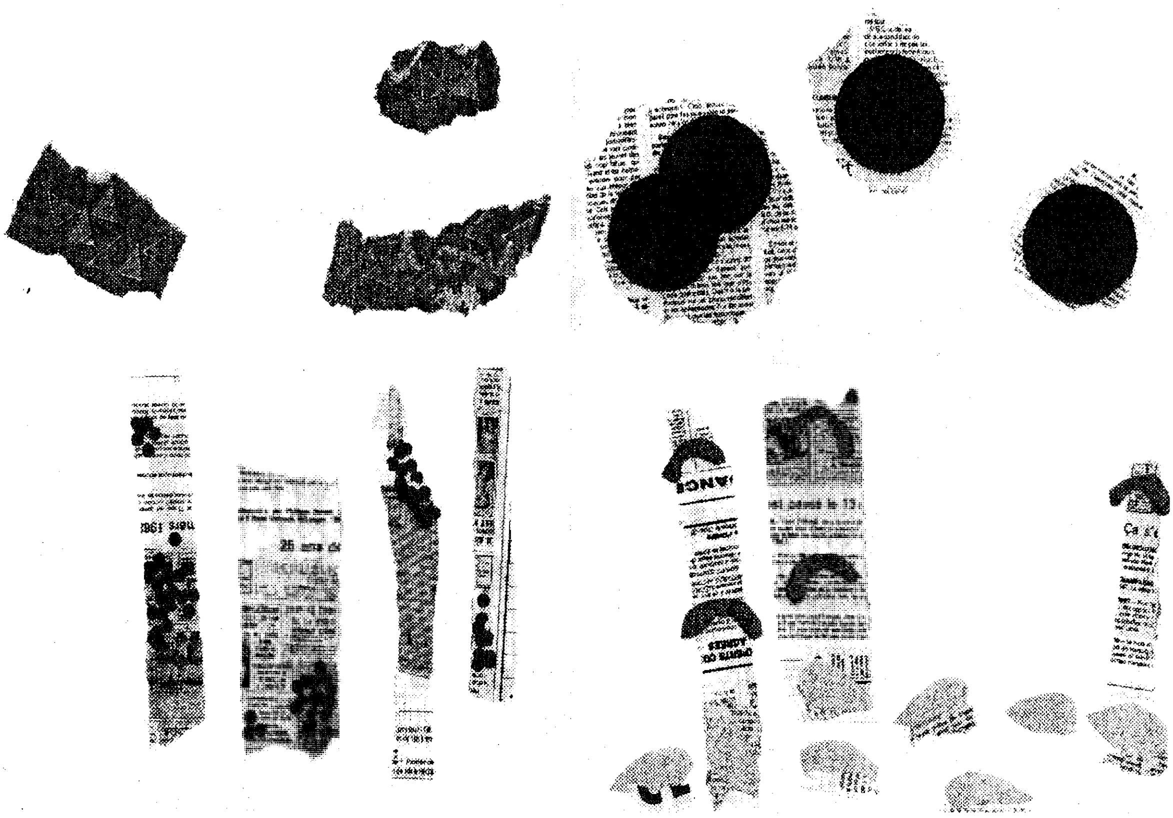


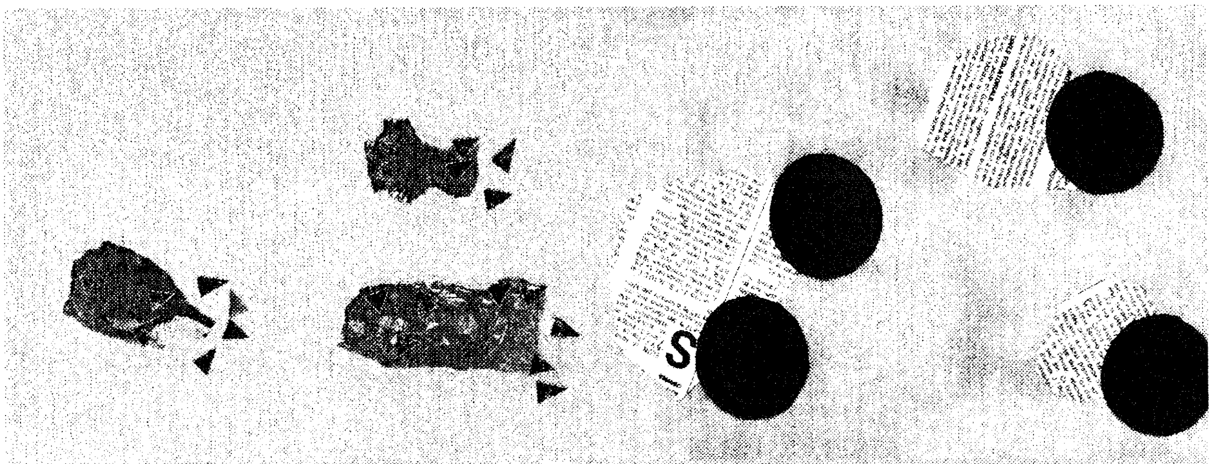


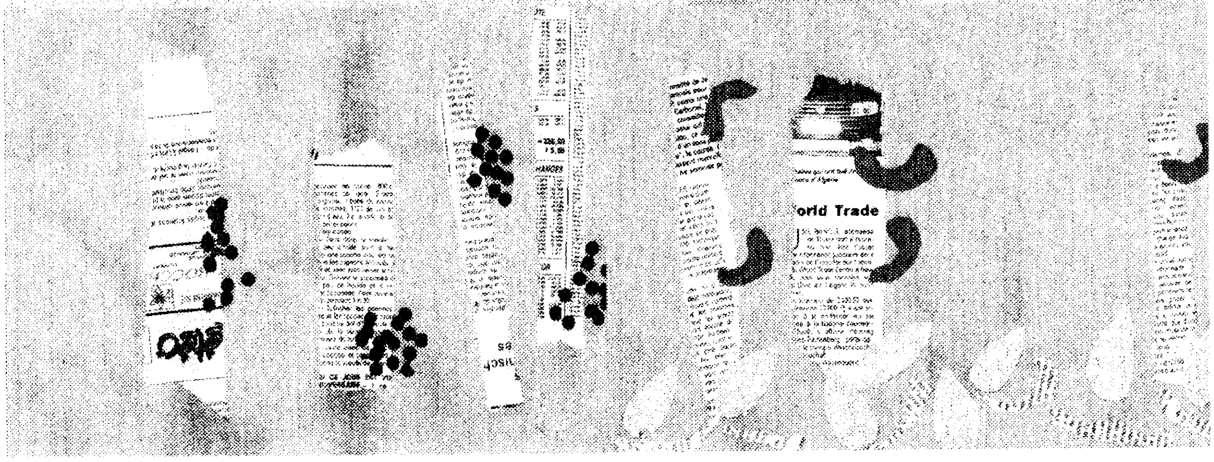
"Par une journée d'hiver" de R. Krauss et M. Simont

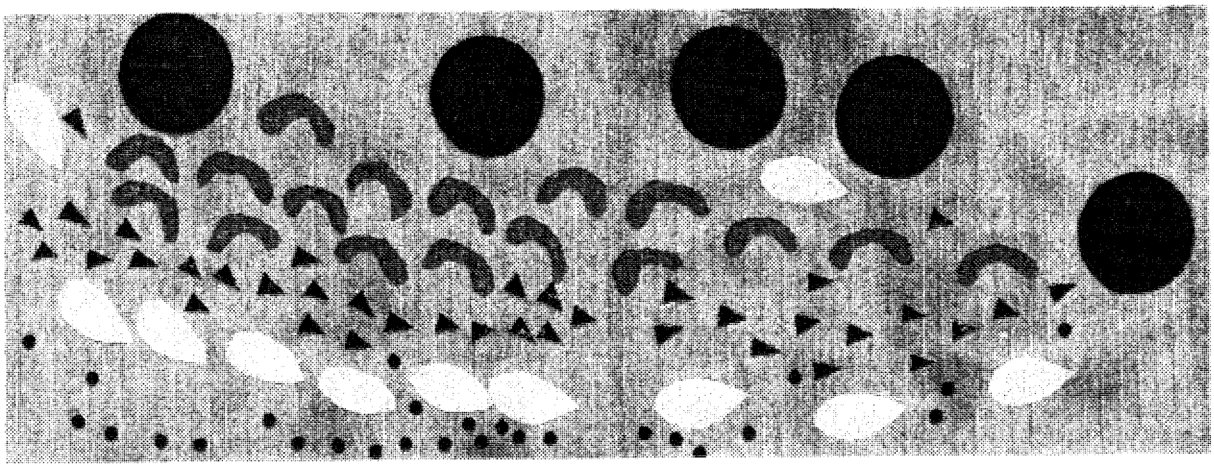
codé par des PE en formation continue.

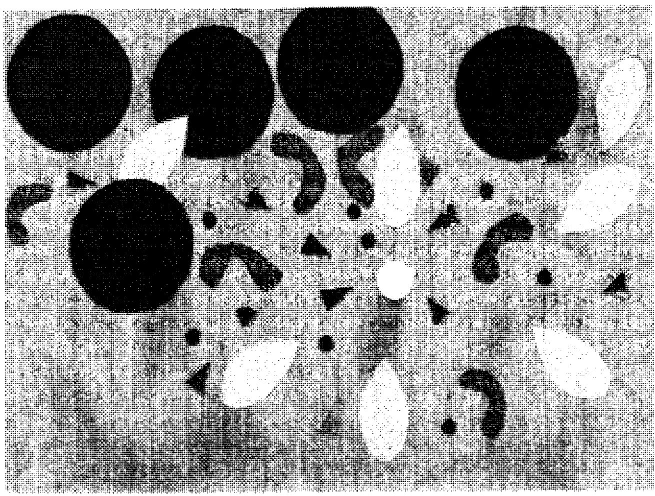












ANNEXE 4

Compte-rendu rédigé par A. Duval: travail en atelier sur l'album MATTY ET LES 100 MECHANTS LOUPS de Valeri Gorbachev; Editions Nord-Sud

L'histoire peut se découper en trois parties : un préambule permettant de situer l'action, neuf scènes constituant l'action, et une scène finale achevant l'histoire en forme de « happy end ». Les images où figurent les loups servent à décrire les rêves du personnage principal. Leur nombre va évoluer au fur et à mesure du déroulement de l'histoire, passant de 100 à 50, puis à 11 et finalement se réduire à 5. Les scènes d'action concernent cinq petits lapins et leur Maman. Matty est le personnage principal, le « héros ». On peut le reconnaître à son pyjama vert.

Préambule : « *Par une nuit de grand vent, Matty se réveille brusquement.* »

Scénario :

	action : scène 1 Matty crie : « Au secours ! »	action : scène 2	action : scène 3 Cent méchants loups ? ? ?	action : scène 4 50 méchants loups ? ? ?
lieu	**dans** la chambre	**dans** la chambre	**dans** la chambre	**dans** la chambre
6 acteurs : 5 petits lapins, dont Matty, et Maman Lapin	5 petits lapins	Maman Lapin **entre dans** la chambre.	5 petits lapins et Maman Lapin.	Maman Lapin s'assoit **sur** la chaise.
Situation des cinq petits lapins par rapport au lit	les 5 petits lapins sont **dans** le lit	les 5 petits lapins sont **dans** le lit	Matty est **hors** du lit (**en bas** du lit) enveloppé **dans** la couverture, **sur** le tapis. Les 4 autres lapins sont grimpés **sur** le lit.	Les 5 petits lapins sont **hors** du lit, **sur** le tapis.
Accessoires	2 jouets , **sur** le sol.	3 jouets, **sur** la commode ou sur le sol, **sous** le lit.	idem	Les jouets ont changé de place (dans les bras, sous la chaise...)
Connaissances numériques :	On voit 1 petit lapin à gauche de Matty , et 3 à droite : Matty est le $2^{ème}$ à partir de la gauche.	Idem, 5 = 1+1+3 (les lapins sont rangés) Le nombre de loups serait **100.**	5 = 1 + 4 (groupements) Les loups seraient au nombre de **50**.	5 = 1 + 4 Le nombre de loups serait **11.**

	action : scène 5 Onze méchants loups ? ? ?	action : scène 6	action : scène 7 « Au secours ! ! »	action : scène 8
lieu	**dans** la chambre	**dans** la chambre	**dans** la chambre	**dans** la chambre.
6 acteurs : 5 petits lapins, dont Matty, et Maman Lapin	5 petits lapins et Maman Lapin	Maman Lapin **sort de** la chambre.	5 petits lapins	Maman Lapin **entre dans** la chambre.
Situation des lapins par rapport au lit	2 petits lapins sont **sur** le lit, les 3 autres sont restés sur le tapis	Les 5 petits lapins sont **dans** le lit.	Les 5 petits lapins sont **dans** le lit. **On ne voit plus lequel est Matty.**	Les 5 petits lapins sont **sur** le lit, cachés **sous** la couverture.
Accessoires	Les jouets ont encore changé de place (dans les bras, sous la chaise...)	1 jouet, **sur** la commode.	aucun	Des jouets sont **sur** le sol.
connaissances numériques :	5 = 2 + 3 ou 5 = 2 + 1 + 2. Le nombre de loups serait **5.**	5 = 1+1+3 (les lapins sont rangés, Matty est le 2ème.)	5 petits lapins en ligne.	Un paquet de 5

	action : scène 9 « Tenez, méchants loups... Allez ouste ! »	Scène finale
lieu	**dehors / dedans**	**dans** la chambre
6 acteurs : 5 petits lapins, dont Matty, et Maman Lapin	5 petits lapins (**dans** la maison, **derrière** la fenêtre), et Maman Lapin, qui est sortie. Elle est **dehors**.	Les 5 petits lapins et Maman Lapin
situation par rapport au lit	les 5 petits lapins sont **hors du** lit, à la fenêtre. (A déduire car on ne voit pas le lit !)	les 5 petits lapins sont **dans** le lit, Maman Lapin aussi, **au milieu**.
Accessoires	Un balai, une poubelle.	Le balai est posé **sur** le lit.
connaissances numériques :	5 = 4 + 1	5 = 3+2 ; 6 = 3 + 1 + 2 (les lapins sont rangés)

Les activités que nous avons envisagées sont principalement attachées au langage spatial et aux connaissances numériques. Nous avons également discerné la possibilité de faire des déductions logiques :
langage spatial : (dans, hors de, sur, sous, dessous, en haut, en bas, à côté de...) On peut envisager une activité facile de représentation des positions relatives du lit et des différents acteurs.
connaissances numériques : cardinal (décompositions de 5), ordinal (le deuxième dans une rangée), notions de grands nombres, avec des collections de loups non dénombrables à ce niveau (100, 50, et peut-être 11 ?) et de nombres, par contre, « que l'on peut compter » (contrôle visuel, global, ou dénombrement effectif).
jeu des listes : les jouets, visibles ou non, peuvent permettre une activité du genre « jeu du trésor ».
déductions logiques : Retrouver où est Matty ?

QUELLES ACTIVITES A CARACTERE MATHEMATIQUE EN MATERNELLE ?

ATELIER 6
Yves GIRMENS,
Formateur à l'IUFM de PERPIGNAN, Animateur à l'IREM de MONTPELLIER
Françoise ANDRE,
Maître-Formateur et membre d'un Groupe d'étude et de recherche à l'IUFM de Perpignan.

CONTENU DE L'ATELIER :

Des recherches récentes concernant les travaux à caractère mathématique en maternelle ont permis d'identifier des savoirs en mettant en évidence la nécessité de proposer aux enfants de maternelle des situations d'apprentissage autour de ces savoirs, à côté des activités rituelles ou fonctionnelles.

L'atelier a permis de mieux cerner ces hypothèses et d'étudier les conditions pour une transposition de ces travaux de recherche dans la pratique des enseignants.
Une recherche-action a été menée, pendant deux années, par des personnes enseignant en maternelle et des formateurs en IUFM, en vue de favoriser cette transposition.
Des exemples de travaux issus de cette recherche ont été présentés et ont fait l'objet d'un débat.

Pourquoi cet atelier ?

Pour faire partager une expérience de recherche de « didactique appliquée » en maternelle, menée conjointement par des maîtres et des formateurs.
Pour soumettre les travaux issus de cette expérience au regard des autres et recueillir critiques et suggestions éventuelles.

PLAN DE L'ATELIER

PRESENTATION DU CONTEXTE DE L'ACTION
DEFINITION DU CADRE THEORIQUE
CHOIX ET MISE EN OEUVRE
PRESENTATION DE QUELQUES TRAVAUX
ELEMENTS DE CONCLUSION ET PERSPECTIVES

I. Présentation du contexte de l'action

Origine de la réflexion : Un questionnement sur les activités à caractère mathématique en maternelle

La réflexion a été initialisée par un certain nombre de besoins ou de questions formulés par des enseignants de maternelle, à l'occasion de rencontres organisées dans le cadre de l'AGIEM, auxquelles ont accepté de participer certains formateurs de l'IUFM de Perpignan :

- Le besoin de réfléchir sur les activités à caractère mathématique en maternelle doublé du besoin de mieux identifier des enjeux pour l'apprentissage des nombres.
- L'impression de ne pas proposer suffisamment d'activités pré-numériques en maternelle et en même temps, une panne d'idées pour renouveler les activités à caractère mathématique.
- Le sentiment qu'en parallèle des activités rituelles et fonctionnelles, des activités dirigées qu'ils proposent aux enfants, il y a certainement d'autres formes de travail qu'ils ignorent et qui peuvent favoriser davantage l'initiative et la réflexion des enfants.
- Le constat de difficultés et de ratés dans l'apprentissage du nombre, relevés chez certains enfants, dont ils perçoivent mal les origines.
- Le besoin de mieux prendre en compte les différences d'aptitudes et de développement des enfants.
- Le besoin de mieux cerner les savoirs qui sont en jeu dans l'apprentissage du nombre pour mieux aider les enfants.

Objectifs du projet d'action

Les formateurs, en réponse à cette demande, ont proposé de constituer un groupe de recherche-action avec les objectifs suivants :

- Faire connaître certains savoirs logiques qui entrent dans l'apprentissage du nombre, qui, s'ils ne font pas l'objet d'un enseignement, peuvent entraîner des manques ou des ratés dans les connaissances des enfants.
- Favoriser un renouvellement des pratiques d'enseignement : faire découvrir qu'à côté des activités rituelles, fonctionnelles, d'activités guidées (où l'enfant apprend par frayage), il est possible de proposer des activités problématiques aux jeunes enfants, où ceux-ci pourront faire preuve d'initiative, mobiliseront des connaissances par nécessité et imagineront des solutions.
- Provoquer une réflexion sur le rôle du maître dans les apprentissages.
- Aider les enseignants à mieux cerner les notions de tâche (en liaison avec un savoir en jeu), de but à atteindre (critère de réussite), de dévolution de la situation à l'enfant, avec en particulier une réflexion autour de la consigne donnée par le maître, qui doit permettre à l'enfant d'assumer le problème et le pousser à agir.
- Etudier avec les enseignants de terrain comment et à quelles conditions, des travaux issus d'une recherche peuvent être transposés dans l'enseignement.

La démarche choisie

Après les apports théoriques nécessaires et l'identification d'un savoir, il est convenu avec les enseignants qu'ils inventeront eux-mêmes une situation visant l'apprentissage de ce savoir, qu'ils l'expérimenteront dans leur classe et qu'ils en feront ensuite un compte-rendu devant le groupe de recherche.
Dans un deuxième temps, à partir d'un questionnement collectif sur les situations présentées, est proposée l'étude d'une situation-témoin, à l'aide d'un document vidéo. Cela permet de mettre en évidence le modèle (la situation générique) et les variables didactiques sur lesquelles on peut jouer.
Dans un troisième temps, les enseignants peuvent choisir d'expérimenter à leur tour la situation présentée ou d'en fabriquer une sur le même modèle.

Ce choix repose sur l'hypothèse, faite par les formateurs, qu'en construisant eux-mêmes les situations, les enseignants identifieront mieux les enjeux (les savoirs visés), mobiliseront leur capacité d'invention (elle est grande chez des maîtres de maternelle), feront preuve de créativité, tireront le plus grand parti du matériel dont ils disposent et maîtriseront les modalités de réalisation.

Cette hypothèse a été confirmée par la richesse et la variété des situations imaginées par les enseignants.

II. Définition du cadre théorique

Identification de savoirs

La prise en compte des travaux menés par le groupe COREM, de Bordeaux, et en particulier, des recherches de Marie-Hélène Salin et Joël Briand, a permis d'identifier des savoirs pré-numériques et logiques constitutifs de l'apprentissage du nombre, qui ne font pas l'objet d'un enseignement spécifique.

Le concept de nombre (aspect cardinal) s'appuie sur ***le concept de collection*** (nombre : mémoire d'une quantité d'objets d'une collection) et sur ***le concept de désignation*** d'une quantité.
Par ailleurs, le dénombrement d'une collection fait intervenir le comptage des objets de la collection qui fait appel à une connaissance spécifique : ***l'énumération.***
Enfin, ces connaissances font intervenir de différentes manières la notion ***d'ordre*** : dans une collection, l'ordre n'intervient pas ; l'énumération fait appel à un ordre.

Il a été nécessaire de définir ces savoirs puisqu'ils seront choisis comme objets de travail.

- ***La collection***

Une collection est un regroupement d'objets provoqué par un critère de fonctionnalité, un critère défini par un caractère commun, un critère généré par une circonstance.
Concevoir une collection, c'est accepter de voir un rassemblement d'objets comme un tout (un seul objet).
Une collection est invariante quel que soit l'ordre (la position) des objets (on ne tient pas compte de l'ordre).
Le concept de collection est un concept préalable (constitutif) du concept de nombre comme mémoire d'une quantité. La collection n'est pas quelque chose de donné ou d'inné, c'est quelque chose qui se construit.

- **L'énumération**

Le comptage (qui entre dans le dénombrement), exige l'exploration exhaustive d'une collection en passant en revue tous les objets de la collection et chacun d'eux une seule fois.
Cette connaissance relative à la collection est appelée : l'énumération (définie et étudiée par Joël Briand dans sa thèse).

- **La désignation**

La désignation est une connaissance que l'on met en œuvre lorsqu'on veut remplacer un objet ou une collection d'objets par un symbole pour conserver une mémoire de cet objet : la désignation doit permettre de conserver une connaissance de l'objet.

Ex : le dessin d'un objet est une désignation de cet objet,
un représentant d'une classe d'objets est une désignation de cette classe.
une liste formée d'une suite de symboles représentant des objets est le mode de désignation le plus simple d'une collection d'objets.

- **L'ordre**

L'ordre intervient lorsqu'on se donne des informations qui permettent de repérer la position des objets d'une collection organisée selon une direction donnée et pour laquelle a été défini un sens.
Pour une direction donnée, le sens peut être défini par :

un aspect physique : mouvement réel ou virtuel, le temps (la chronologie).
un aspect arbitraire : on décide d'un début et d'une fin.

La situation par adaptation

Le modèle de situation d'apprentissage choisi est la situation par adaptation (en référence à la théorie des situations de Guy Brousseau), où l'enfant confronté à un milieu constitué par l'enseignant, qui lui pose un problème, va devoir réagir à ce milieu avec ce qu'il sait faire et éprouver le besoin d'un savoir nouveau, comme moyen de résoudre le problème.

Chaque situation, autour d'un savoir déterminé, sera élaborée selon la démarche suivante :

1. Identifier un obstacle
Un savoir nouveau
Une conception (connaissance mal faite ou incomplète) que l'on veut faire remettre en cause.

2. Constituer un milieu
Milieu matériel (matériaux, supports de travail, outils utiles)
Tâche qui confronte à un problème (consigne)
Ce milieu doit mettre l'enfant en action (utilisation de ses connaissances) et doit lui permettre une validation de ses choix et de ses décisions (rétroactions).
Le milieu est entièrement organisé par l'enseignant pour que l'enfant y rencontre le savoir visé comme réponse à un problème.

3. Assurer la dévolution du problème
Prise en charge de la situation par l'enfant.

4. Mettre sur pied un scénario
Phase d'entrée dans le problème : l'enfant doit réussir la tâche avec les connaissances qu'il a.

Phase de recherche (action) : L'enfant est placée devant la même tache qui maintenant, par un jeu sur des variables, pose problème (obstacle).
Il faut en fixer : les modalités – la durée – les aides éventuelles.

Phase de mise en commun : Examen des productions – Validation – Formulation des stratégies utilisées – Repérage et formulation des raisons de non – réussite.

Nouvelle phase d'action : prise en compte des éléments dégagés et nouvelle tentative.

Phase d'institutionnalisation : mise en évidence du savoir nouveau (formulation).

III. Les choix

Les savoirs pris comme objectifs de travail sont la collection, l'énumération (moyens de contrôle d'une collection), la désignation (d'un objet, d'une collection), l'ordre.
Les situations sont bâties autour d'un enjeu correspondant à l'un des savoirs mais font intervenir les autres savoirs de manière non problématique.
Mettre en place des situations d'apprentissage par adaptation où l'enfant, confronté à un milieu constitué par l'enseignant, qui lui pose un problème, va devoir réagir à ce milieu avec ses connaissances et être placé devant le besoin d'un savoir nouveau (d'un outil) (théorie des situations).

Pour l'un des savoirs repérés (la collection, l'énumération, la désignation, l'ordre), fabriquer un modèle de situation, pour laquelle le savoir est l'outil de résolution le mieux adapté (enjeu).

Par exemple, il s'agira de proposer une situation dans laquelle il sera nécessaire de concevoir et de fabriquer une collection pour résoudre le problème proposé (la fabrication d'une collection sera la solution au problème posé).
Exemples donnés : le tri de graines (proposé par l'équipe de recherche du COREM, école Michelet de Bordeaux) ; les cartes à jouer.

Adapter cette situation, l'habiller pour la rendre attrayante, en fonction de l'âge et des connaissances des enfants : chaque situation sera ainsi présentée sous la forme d'un jeu où il faut gagner, et où gagner se fera par la mise en œuvre du savoir visé.
Les situations proposées n'excluent pas le recours au nombre mais ne le nécessitent pas, dans les premières étapes du moins, car le problème peut se résoudre par des procédures non-numériques, mobilisant l'un des savoirs identifiés.

Les savoirs identifiés étant imbriqués, il n'est pas question de chercher à isoler l'un d'entre eux, mais pour chaque situation, l'un des savoirs sera choisi comme enjeu (les autres pouvant intervenir de manière non problématique).

IV. Présentation de quelques travaux

Sur la collection : les cartes à jouer

Niveau concerné : moyenne section.

Préalable à la situation :manipulation des cartes (cartes à jouer de casino, c'est-à-dire sans écriture des nombres sur le côté)
les nommer
classements divers : on obtient de manière générale : les 4 familles (carreau, pique…), les 1 avec les 1…., les personnages et les autres, les rouges avec les rouges et les noirs ensemble...
après toutes ces manipulations, on retient un critère : celui des 4 familles (cœurs avec cœurs…).

NB : Attention aux as, ils posent problèmes car les enfants peuvent ne pas les associer à la même famille (on peut décider, selon le contexte, de ne pas les mettre).

Objectif : à partir d'un jeu de cartes hétérogènes, réunir des collections de cartes d'une même famille.

But à atteindre : l'enfant doit placer les cartes dans les boîtes. Il aura réussi si, dans la boîte, il n'y a que des cartes appartenant à la même famille (ex : les cœurs avec les cœurs).

Matériel par groupe de deux enfants des boîtes identiques vides où une fente permet juste le passage de la carte (4 boîtes) ; un paquet de 28 cartes (les as, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

Dispositif :4 groupes de 2 enfants travaillent en même temps ; dans chaque groupe, un enfant agit, un autre regarde ; l'enseignant, après chaque partie, fait valider par l'observateur et fait formuler les stratégies.

Définition de la tâche l'enfant doit trouver une stratégie pour constituer dans chaque boîte la collection de cartes appartenant à la même famille.

Déroulement

- *Phase 1* : appropriation de la tâche, description du matériel.
  Les cartes sont à disposition et les 4 boîtes sont ouvertes.

  La consigne est : "Mets les cartes de la même famille dans la boîte".

- *Phase 2* : chaque binôme dispose maintenant de 4 boîtes fermées.

  La consigne est : « Mets les cartes dans les boîtes. Dans chaque boite, il ne doit y avoir que des cartes de la même famille ».

  Quand l'activité est finie, verbalisation par l'enfant des stratégies utilisées ; l'observateur dit s'il pense que l'enfant a réussi ou pas.

  Validation : on ouvre les boîtes et on vérifie si les familles sont bien faites.

- *Phase 3* : inversion des rôles.

Stratégies attendues

L'enfant constitue la collection devant chaque boîte avant de glisser le tout dans la boîte.
L'enfant met un représentant de chaque collection devant chaque boîte : cette carte constituant une désignation de la collection.
L'enfant glisse d'abord toutes les cartes qui concernent une famille puis passe à la 2ème.

Stratégies observées

L'enfant met carte par carte en essayant de se souvenir de la place de la boîte et de la famille de cartes qui est à l'intérieur : quelques enfants de moyenne section réussissent avec cette stratégie-là. C'est d'ailleurs la non-réussite de cette stratégie-là qui permet aux enfants d'aller plus loin.
L'enfant commence à faire une collection dans une boîte puis change de stratégie et finalement mélange les collections.
L'enfant fait les collections les unes après les autres en rassemblant les cartes sur table ou dans sa main.

Variables de la situation
le nombre de cartes données.
le nombre de familles.

Prolongements
jeu des 7 familles.
même situation avec des objets divers différenciés par un seul critère (jetons de couleurs différentes...).

Remarques : la solution au problème est bien ici la constitution d'une collection dans chaque boite : l'enfant, pour réussir, doit concevoir la collection en l'anticipant pour ensuite trouver un moyen de l'obtenir en en contrôlant la réalisation.

Sur l'énumération : les polydrons

Niveau concerné : la grande section.

Objectif : mettre en œuvre une stratégie d'énumération d'une collection donnée en vue de constituer une collection identique.

But à atteindre : l'enfant a réussi s'il a constitué une collection formée de faces identiques à toutes celles d'un solide donné.

Matériel
LOKON : matériel que l'on trouve dans le commerce (Celda)
des barquettes pour rassembler les faces choisies.
des solides construits avec les pièces du LOKON (solides complexes, difficulté pour compter les pièces)
Ex : solides formés de pièces de même couleur.
solides constitués avec pièces d'une seule forme.

Dispositif : demi-classe : travail en binôme ou individuel.

La tâche : rassembler les pièces qui permettront de fabriquer un objet identique à celui qui est donné.

Déroulement

Phase 1 : Présentation et description du matériel

Phase 2 : Action
Consigne : « tu dois préparer dans la barquette les pièces qui vont permettre à l'autre groupe de fabriquer le même objet que celui-ci ».
Les enfants n'ont pas le droit de défaire le solide.
Chaque élève ou chaque binôme détermine et constitue la collection.

Phase 3 : Formulation - Mise en mots des procédures utilisées
« Comment es-tu sûr qu'il y a toutes les pièces ? Tu n'as pas le droit de refaire le solide ».
Verbalisation :
des stratégies.
des obstacles rencontrés.
des idées de nouvelles stratégies.

Phase 4 : Validation du but à atteindre
Le solide référent et la barquette contenant les pièces préparées sont données aux autres élèves pour qu'ils construisent le solide.

Stratégies attendues
Comptage du nombre de pièces de chaque sorte en s'appuyant sur un :
marquage de chaque pièce par une trace indiquant qu'on l'a comptée.
marquage à l'aide de gommettes des pièces qui ont été comptées.

Stratégies observées
comptage des différentes pièces, avec un ordre défini mais oubli du point de départ (pas de marquage des pièces).
comptage des pièces, les doigts servant de marqueurs : difficultés liées au nombre de doigts et à la manipulation.
marquage de chaque pièce par un signe mais pas de comptage.
numérotage de chaque pièce.
repérage de chaque pièce par une gommette, les gommettes étant collées au fur et à mesure de la comptine récitée.
repérage de chaque pièce par une gommette collée et numérotation de chacune des pièces.

Remarque : La situation a bien comme enjeu l'exploration exhaustive d'une collection d'objets (les faces du solide), par la mise en œuvre de stratégies d'énumération.

Sur l'ordre : les empilements

Niveau concerné : la grande section.
Atelier proposé au moment de l'accueil
appropriation du matériel : manipulation libre.
montage à partir de la consigne : « Avec quatre, cinq, six ou sept pièces, fais une construction. Les pièces doivent être les unes sur les autres. Aucune ne doit être cachée entièrement ».

Prolongement
Photocopie des montages réalisés. Coloriage des pièces sur la copie à partir du modèle (le montage).
Verbalisation : forme - couleur - taille ; Vocabulaire de l'ordre : sur-sous-entre.

PREMIERE SITUATION
Objectif : le concept de collection.
Dispositif : une demi-classe.
Matériel : des pièces géométriques de formes, de tailles et de couleurs différentes.

Déroulement
Phase 1 : montages (empilements) à réaliser. Rappel consigne. 5, 6, 7 éléments.
Verbalisation, problèmes rencontrés. Photocopie (voir Annexe 1).

Phase 2 : présentation des montages dessinés.
Consigne : « Prépare les pièces qui vont permettre à l'autre groupe de réaliser les montages ».
Selon les montages produits dans les ateliers, propositions de montages plus ou moins complexes (5, 6, ou 7 pièces).

Phase 3 : validation des réponses ; échange du matériel. Montage d'après le dessin et la collection.

Selon le montage, certaines formes sont difficiles à reconnaître.

Le dessin a été agrandi pour une meilleure lisibilité : certains enfants ont été gênés par ce changement d'échelle (les petites pièces agrandies ont presque la même taille que les grandes pièces réelles).

Une fois que toute la classe a fait l'activité, le matériel constitué par les pièces et le montage dessiné, est proposé dans un atelier.
Même travail sur de nouveaux montages, entraînement.

DEUXIEME SITUATION

Objectif : le concept d'ordre.
Dispositif : une demi - classe.
Matériel : montages dessinés, collection des pièces préparées pour chaque montage (dans une barquette).
Feuille de papier, crayon, crayons de couleur, boîte de pièces.
Déroulement
Phase 1 : chaque élève dispose d'un montage dessiné et de la barquette contenant la collection de pièces correspondante (voir annexe 2 qui présente des dessins de montages).
Vérification : avec la consigne : « La collection dans la boîte permet-elle de faire le montage ? ».

Phase 2 : la consigne est : « Certains enfants, malgré le montage dessiné et la collection des pièces, ne savent pas refaire le montage. Il faut expliquer comment faire le montage ».

Les stratégies relevées

- Les pièces servent de gabarit

1. *Elles sont coloriées et numérotées, éparpillées sur la feuille.*
2. *Les pièces sont alignées dans l'ordre de montage ; au bout de la feuille, virage signalé par des flèches.*

- *Les pièces sont dessinées à la main et coloriées (problème de forme et surtout de taille)*

1. *Elles sont numérotées.*
2. *Elles sont dessinées dans l'ordre (sens de lecture gauche - droite).*

Phase 3 : Validation des messages explicatifs : refaire le montage à partir de la fiche et vérifier avec le modèle dessiné. Certaines fiches posent problème. Analyse collective.

Remarques : Dans cette situation, la solution au problème est bien la prise en compte de l'ordre d'empilement des pièces : pour réussir, il s'agit donc, pour l'enfant de trouver une manière d'indiquer l'ordre d'empilement.
Il est relevé que la situation nécessite un moyen de désignation des différentes pièces à empiler et fait intervenir, de manière incidente, des connaissances liées à l'espace (les enfants doivent en effet interpréter une image plane (la vue de haut) de l'empilement pour concevoir l'empilement des pièces).

Activité de l'atelier : A la suite de la présentation de ces travaux, les animateurs suscitent un débat sur : les choix et l'adéquation entre ces choix et la situation, sur la réalité des savoirs construits, sur l'articulation des connaissances visées avec les compétences numériques.

Conclusions et perspectives

a) La démarche menée

La démarche utilisée pour mettre en place et mener les expérimentations s'est déroulée en plusieurs temps : initialisation collective, élaboration et mise en œuvre individuelles, comptes-rendus devant le groupe, régulation par le groupe.
Cette démarche s'est avérée productive, car elle a permis conjointement une action de formation et une incidence sur les pratiques.

L'action menée a provoqué chez les enseignants qui s'y sont engagés : investissement, créativité, appropriation de nouvelles pratiques.

L'objectif de mettre sur pied des situations réellement utilisables en classe a conduit à sortir des conditions idéales utilisées dans les recherches théoriques.

Il a fallu parfois négocier sur certains points, en prenant en compte les contingences de l'enseignement en classe : gestion du temps, de l'effectif, de la programmation des travaux.

Par exemple, dans certaines situations, pour faire face aux contraintes d'effectif, des élèves ont été placés dans le rôle d'observateurs, alors que *la présence d'observateurs ne s'imposait pas toujours dans la logique de la situation.*

Les difficultés rencontrées

Les enseignants expérimentés ont une pratique « naturalisée » ; il leur est difficile de « penser » la situation, en anticipant la formulation de la consigne précise, la gestion qu'ils envisagent, leurs paroles et leurs actions aux différents moments de la situation.

En particulier, la recherche d'une consigne précise qui poussera les enfants à agir, c'est-à-dire qui définira clairement le but à atteindre sans induire de stratégie, ne leur est pas naturelle.
Les enseignants supportent mal que les enfants ne réussissent pas d'emblée et qu'ils pataugent : ils sont portés à leur « souffler » des aides directes. De même, quand les enfants sont amenés à valider des productions, ils sont enclins à formuler, à la place des enfants, des raisons de non-réussite (image en négatif du savoir visé).
Ils acceptent mal de se mettre en retrait et de laisser les enfants « se débrouiller » dans la situation.
Ils ont eu du mal à distinguer le but à atteindre, qui définit la « tâche », en référence à un savoir identifié, de l'action concrète qui sera décidée et menée par l'enfant pour réaliser ce but.
Les enseignants ont eu du mal à parler de leur action lors de la mise en œuvre d'une situation.
Ils ont tendance, à ne voir, dans les paroles des enfants, que « du langage », ce qui ne leur permet pas d'identifier l'émergence d'un savoir.

L'impact espéré sur les pratiques

Ce travail de recherche-action a permis à beaucoup d'enseignants, d'expérimenter de nouvelles formes de travail (situation par adaptation) et de mieux cerner les savoirs en jeu dans l'apprentissage du nombre.

Il apparaît acquis que plusieurs d'entre eux, confortés par la réflexion en groupes, ont intégré dans leur pratique, de manière durable, ces travaux.

Cependant, la réticence affichée par plusieurs enseignants à travailler dans la durée, en faisant vivre une même situation en plusieurs étapes par un jeu sur les variables didactiques, atténue un peu l'espoir de retombées dans les pratiques ; ils estiment que conserver une même situation en classe, en faisant jouer les variables, risque de provoquer une lassitude des enfants (d'eux-mêmes peut-être ?)

Il serait aussi nécessaire, pour favoriser l'intégration de ces travaux, d'aider les enseignants à construire une programmation des situations que l'on peut proposer aux différents niveaux de maternelle.

La question du transfert en formation initiale

Est-il opportun d'aborder les contenus décrits ci-dessus, en formation initiale des Professeurs des Ecoles de deuxième année ?
Si l'on pense que oui, quelle est la place à donner à ces contenus par rapport aux priorités de formation sur l'enseignement en maternelle ?

Ces questions font actuellement l'objet d'une réflexion des formateurs ayant participé à cette action ; s'il ne peuvent pas pour l'instant donner leur point de vue définitif, ils sont en mesure d'avancer quelques idées en faveur de l'introduction de ces contenus en formation initiale :

Il est nécessaire que les professeurs des écoles connaissent les savoirs constitutifs du nombre décrits ci-dessus.

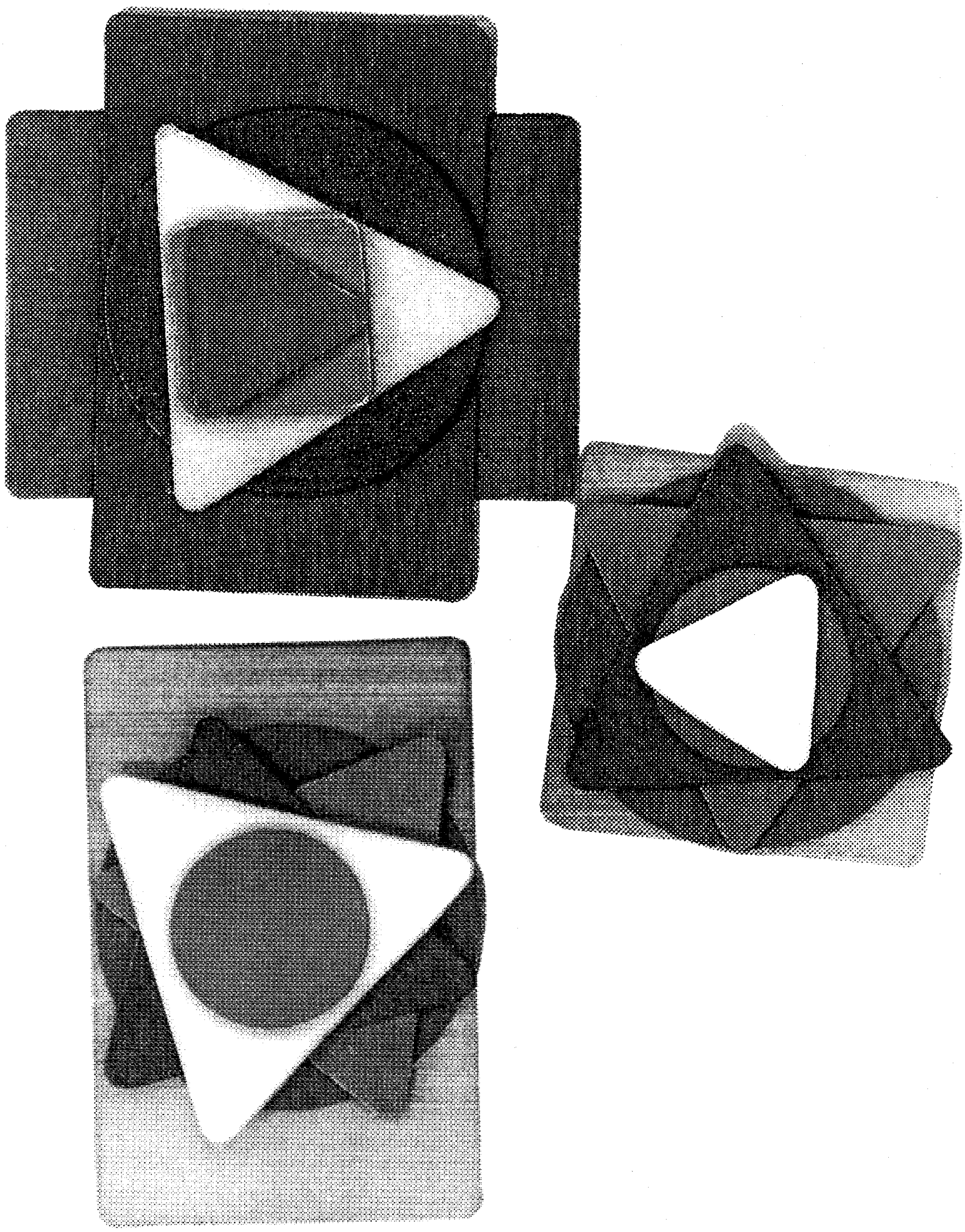
Il est indispensable qu'ils découvrent qu'il est possible de présenter très tôt aux enfants des travaux (sur la collection, la quantité, ...) qui mobilisent des connaissances pré-numériques et qui participent, sur un plan conceptuel, de l'apprentissage du nombre.

Il est important pour eux de saisir que l'articulation entre connaissances rituelles autour du nombre et connaissances conceptuelles se fait grâce à des situations où l'enfant, placé devant un problème, va tenter de le résoudre en mobilisant les connaissances qu'il fréquente et rencontre par ailleurs.

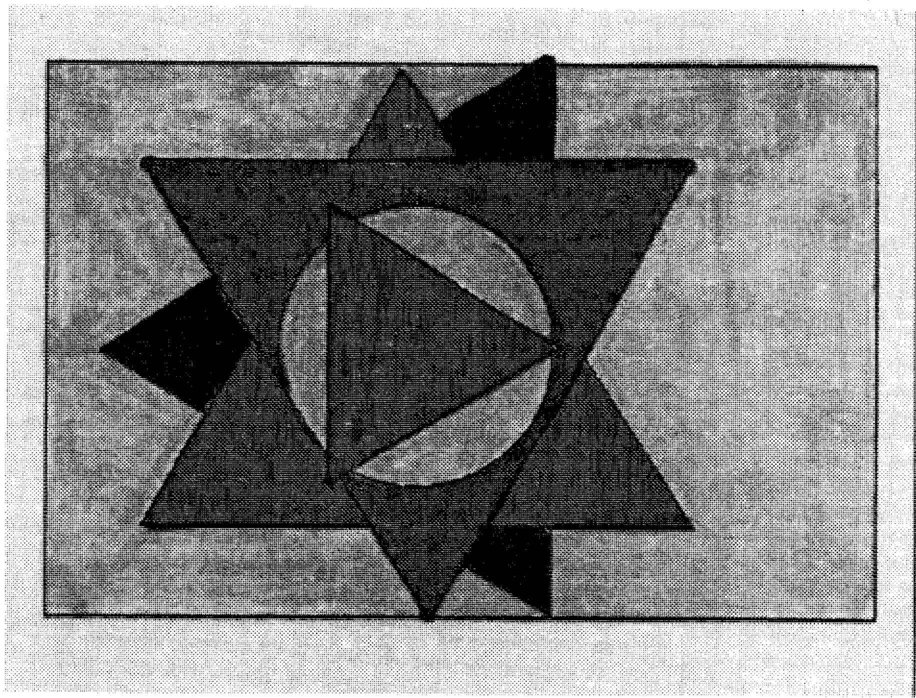
Il est essentiel qu'ils réfléchissent aux contenus de maternelle et qu'en particulier, ils comprennent l'intérêt de proposer de vraies situations à caractère mathématique et logique aux différents niveaux de l'école maternelle.

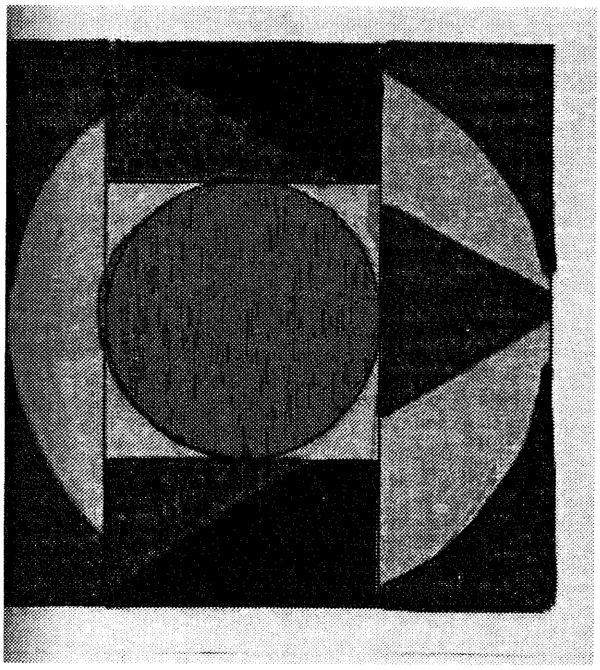
Enfin le fait d'envisager et d'expérimenter des « situations par adaptation » avec de jeunes enfants, qui ne disposent pas encore de connaissances étiquetées et formalisées, permet aux professeurs - stagiaires de mieux comprendre le fonctionnement du processus « par adaptation à un milieu » (voir théorie des situations de Guy Brousseau).

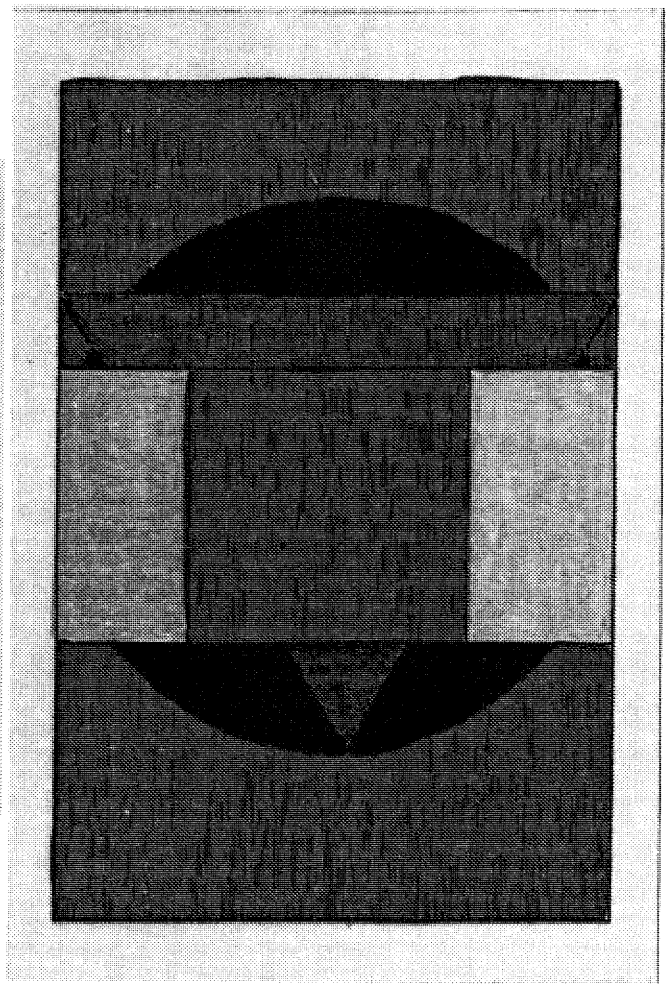
ANNEXE 1



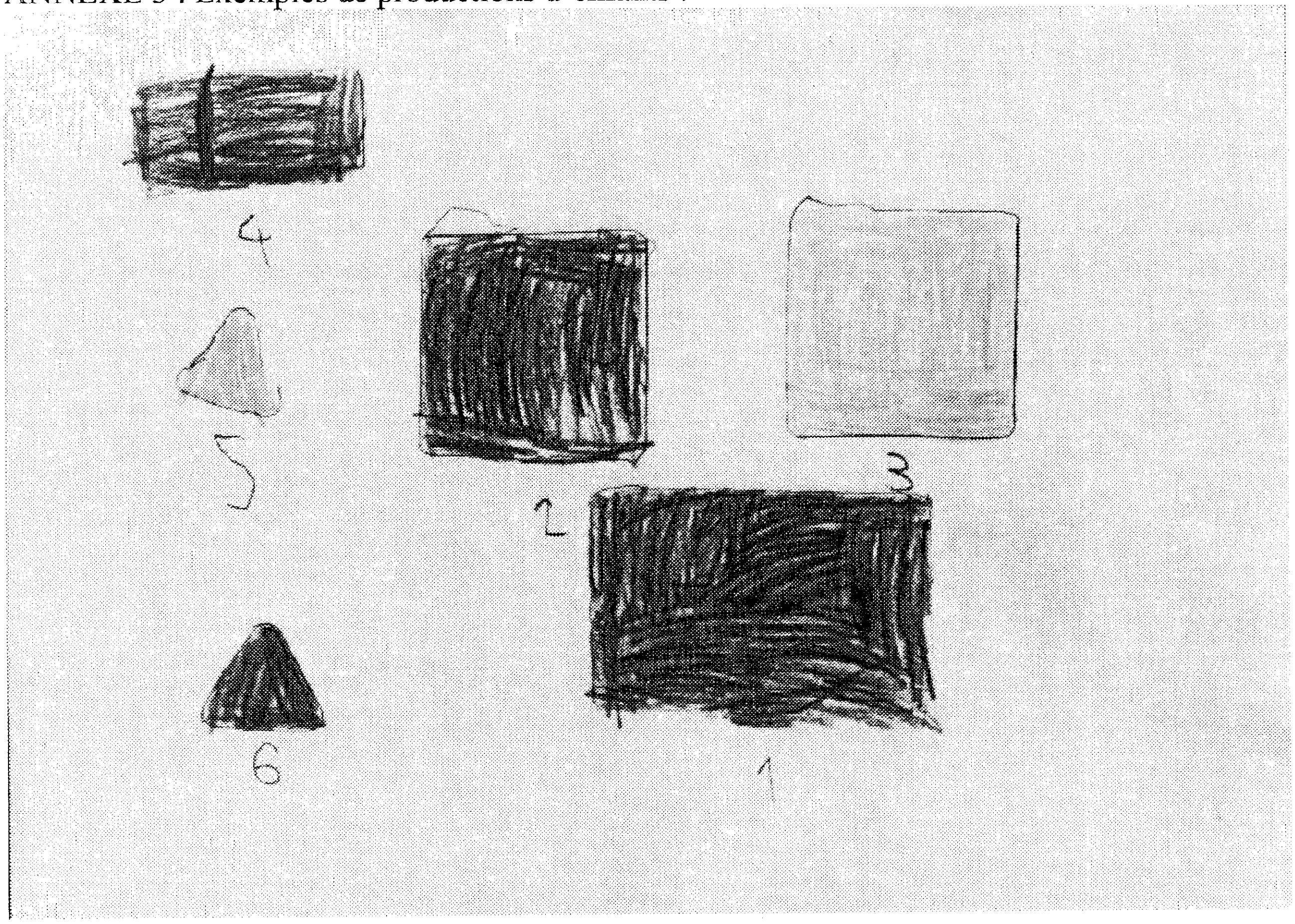
ANNEXE 2

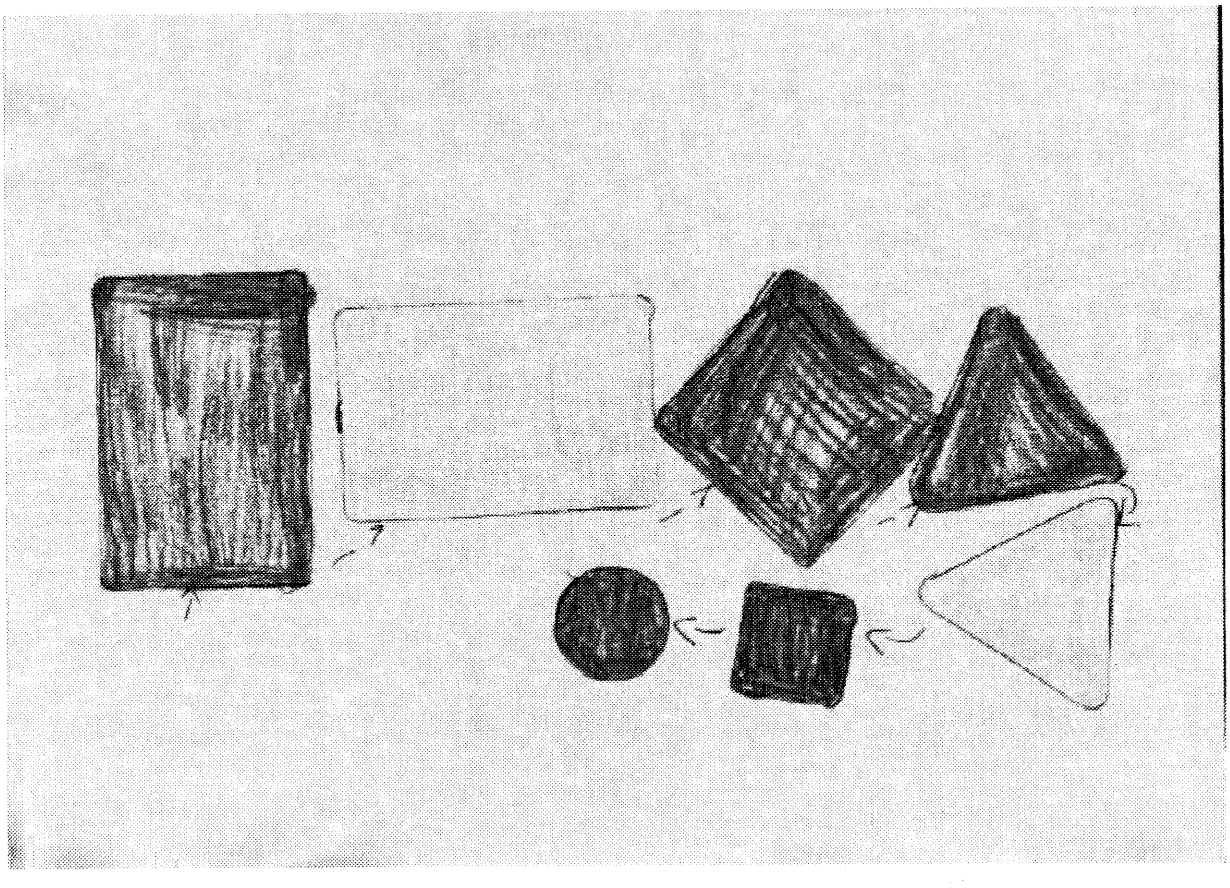






ANNEXE 3 : Exemples de productions d'enfants :





ATELIER A.I.S.

ATELIER 7
François BOULE
C.N.E.F.E.I.

Le groupe de travail s'est principalement intéressé à la mise en place de l'option F dans les centres régionaux A.I.S. des IUFM et a progressé dans quelques-unes des directions évoquées l'an dernier à Limoges. Elles procèdent des constats suivants :
L'enseignement des mathématiques en SEGPA est soumis à de fortes contraintes :
• Les textes de 96 et 98 définissent les élèves de SEGPA comme élèves du collège, et à ce titre ils sont soumis (au moins en 6° et 5°) aux programmes du collège ; un problème évident consiste à savoir comment il est possible de conserver la lettre des programmes et d'adapter la pédagogie et, probablement, les objectifs.
• Les élèves de SEGPA sont pour la plupart en grande difficulté scolaire et la probabilité est forte qu'ils soient orientés assez rapidement vers une formation professionnelle ; il importe en outre de ne pas les confronter à des situations pédagogiques devant lesquelles ils se sont trouvés en échec.
• A l'issue de la SEGPA, les enfants vont rencontrer une évaluation fondée sur les référentiels de compétence de type CAP, et cette exigence a des effets en retour évidents dès la SEGPA (CFG...).La pression de l'évaluation en 4°-3° est telle que l'on passe beaucoup de temps à préparer des contrôles, ou bien à les passer. L'organisation du travail est souvent établie à partir des référentiels, qui pourtant ne disent rien quant au pédagogique.

Référentiels et évaluation

Ces référentiels [BO 24.05.90] ont été élaborés au sein de groupes de travail mis en place par la D.L.C. et s'appuient notamment sur les travaux expérimentaux pour la préparation aux CAP par contrôle continu. Ils se présentent comme une liste de ce que doit être capable de réaliser un candidat pour satisfaire à un CAP (ou un BEP). Pour une étude critique détaillée de la forme, voir l'étude de D.Barataud (Cahiers de Beaumont, juin 93). En résumé :

1. Quelques-unes de ces exigences paraissent sans rapport avec les capacités des élèves de SEGPA (exemple : système de deux équations à deux inconnues, trigonométrie...). De plus elles sont strictement instrumentales, et associent des notions à des savoir-faire procéduraux ; ainsi, rien n'est dit sur la résolution de problème qui est pourtant reconnue, depuis plus de quinze ans, comme le moteur de l'enseignement des mathématiques de la maternelle à l'université.

2. Il s'expriment en terme d'évaluation terminale. Il est sans doute facile d'en tirer en amont une épreuve fractionnée qui tiendra lieu d'évaluation en 6°, ou en 5°, ou en 4° ; et les exemples de telles évaluations ne manquent pas, quelquefois élaborées au niveau académique. *Il doit être clair qu'une évaluation ne tient lieu ni de programme, ni de stratégie pédagogique.* Ce qui n'est pas une façon d'en nier l'intérêt ou même la nécessité. Concernant la seule évaluation, la première question qui devrait se poser concerne sa forme. Le fait qu'une évaluation terminale à grande échelle ait pour nécessité de se présenter sous forme papier/crayon, ou QCM, ou réponse codable... n'implique aucune forme obligée sur les évaluations en amont. Il n'est pas utile de reprendre ici le commentaire sur les évaluations de Sixième.

3. Enfin, et surtout, les référentiels ne disent rien de pédagogique, sur la manière d'aborder les questions mentionnées. Ainsi dès la première ligne évoquent-ils "le sens des opérations sur les entiers et les décimaux, [...] l'ordre de grandeur, l'utilisation de la calculatrice". C'est probablement pointer une réelle difficulté, mais escamoter la façon de s'y prendre, qui est bien la difficulté majeure. D'ailleurs comment évaluer cela : par un énoncé de problème écrit ? une situation rencontrée en atelier ou dans la vie courante ? la récitation de procédures apprises ?

Champs pour une intervention didactique adaptée

Les didacticiens ne se sont pas montrés très productifs jusqu'à présent sur ce sujet, en dehors de quelques généralités de haute altitude, et l'on ne peut attendre l'aboutissement improbable de quelques recherches savantes pour enseigner. Il y a deux exceptions notables : les travaux sur le Retard Mental (Klauer, Paour, Büchel...), qui ouvrent quelques horizons et surtout ceux, déjà anciens de J. Houdebine et J. Julo (1988).
Houdebine et Julo distinguent trois champs sur lesquels devrait s'exercer une intervention didactique différenciée :

1. Les règles d'action

Les élèves en difficulté montrent, plus que les autres, une préférence pour l'emploi de règles (à l'exclusion de représentations de la situation), c'est-à-dire traduisent pour eux-mêmes et mémorisent une procédure. Exemples : pour une proportionnalité, faire un tableau. Pour chercher le COD, poser la question "quoi ?". Certaines règles s'intériorisent "spontanément" (sans renforcement ni contrôle du maître), ou bien sans distinction précise du champ ("dans une équation, on fait passer d'un membre à l'autre en changeant de signe", ou "même chose en haut et en bas, on simplifie"), ce qui conduit fréquemment à des règles erronées et utilisées hors de leur limites.
Le calcul mental offre des exemples spectaculaires, comme celui-ci : en CE2 à la question «31–18 = ?» environ 40% des erreurs, c'est-à-dire plus du quart des réponses annoncent 17 ou 27 en le justifiant ainsi «1–8, on ne peut pas, alors on fait 8–1, etc». Il va de soi que ceci n'est une procédure enseignée, mais fabriquée par l'élève.
La « procéduralisation » ne manque cependant pas d'intérêt ; on sait bien que si une procédure est plus longue à installer qu'une connaissance déclarative, elle est aussi plus stable. Mais en revanche, si elle est inexacte, elle est d'autant plus difficile à "déconstruire" et à rétablir ; d'autre part elle évacue temporairement le sens de l'action, ce qui est à la fois une commodité et un danger ; c'est pourquoi elle doit être explicitement assortie des conditions de sa validité.

2. La représentation des situations

Cette capacité de représentation est tout à fait distincte de la capacité de lire, c'est-à-dire repérer des éléments pertinents dans un texte. Je préfère quant à moi distinguer d'une part l'**évocation**, et d'autre part la **schématisation**. Ce sont certainement les phases les plus délicates de la résolution de problème.
L'**évocation** consiste à se demander de quoi parle le problème ? que met-il en scène ? qu'est-ce qui est donné ? qu'est-ce que l'on cherche ? Il arrive fréquemment que ce niveau soit court-circuité par une prise d'indices qui conduit directement à une procédure calculatoire. Le ***sens*** du problème échappe alors complètement. L'étude devenue classique L'AGE DU CAPITAINE en témoigne fort bien. Pour s'assurer que cette évocation a bien lieu, on peut demander de *raconter* le problème à quelqu'un qui n'a pas lu

l'énoncé, de *faire un dessin*, avant de tenter de résoudre, bref, de ralentir la démarche de résolution, pour éviter d'en brûler les étapes.
La **schématisation** est sans doute la difficulté majeure ; il s'agit d'associer ce problème à d'autres déjà traités, non pas en fonction des éléments de surface, de l'habillage (problème de prix, de billes...) mais d'une classification. A-t-on rencontré un problème comme celui-ci ? Ressemble-t-il à tel autre ? Ici un répertoire (tableau) de problèmes bien connus peut-être utile (exemple : les situations classiques de division, ou de multiplication).
Les représentations construites par les élèves semblent souvent instables et peu opératoires (imprécise, peu explicitable, peu validable). L'explication verbale donnée par un tiers se montre peu efficace.

3. La maîtrise des contenus

L'hypothèse d'une incapacité à la pensée abstraite est en elle-même trop forte pour être émise à la légère. L'expérience montre que la capacité d'acquérir les mêmes notions, sous la même forme dépend fortement des activités préparatoires. Une démarche "préparatoire" donne une meilleure assise aux représentations qui seront ensuite sollicitées. De plus, il ne s'agit pas d'un rattrapage ou un soutien (a posteriori), elle sera donc vécue d'une façon plus positive. A cet égard, il convient d'indiquer qu'on inverse trop souvent l'enchaînement motivation —> réussite. La prise de confiance, la motivation engagent moins un progrès dans la maîtrise des tâches, qu'elles n'en **résultent**. Bien entendu cette maîtrise doit d'abord porter sur des tâches relativement simples, mais non pas des situations pauvres.

On pourrait ajouter (ou reformuler ?) les éléments suivants :

4. La *mémorisation*

Il s'agit de la *déperdition (érosion)* relativement rapide des informations enregistrées ; cela peut être dû à un ancrage insuffisant de ces informations dans le réseau sémantique (maillage trop lâche ou trop peu sollicité, "moteur" de recherche peu actif...). C'est-à-dire en fin de compte a un déficit de **sens** ; cela peut-être dû aussi à la nature de ces informations, comme on le verra à propos du calcul.

5. *Planification des actions*

Difficulté à envisager une séquence structurée d'actions (algorithme, stratégie...). Ce qui peut mettre en cause, en arrière-plan l'organisation logique des informations, c'est-à-dire encore la mémorisation.

6. Insuffisance des *procédures de contrôle*

Les élèves en difficulté, plus que les autres, se réfugient dans l'usage de règles d'action et s'en tiennent au résultat obtenu, sans s'interroger sur la vraisemblance du résultat ou la pertinence de la règle utilisée. On voit que c'est encore d'un aspect stratégique qu'il s'agit : la multiplicité des représentations ou des points de vue conforte la plausibilité ou la validation d'un résultat.

Vous voyez que ces six énoncés par eux-mêmes n'annoncent rien qui renvoie strictement au champ mathématique — même si celui-ci semble assez clairement évoqué — et qu'en conséquence il serait néfaste de restreindre l'analyse à un seul champ disciplinaire, ni même au seul terrain des apprentissages scolaires. Cette analyse est transversale et doit concerner tous les partenaires éducatifs à l'intérieur et à l'extérieur de l'école. Il ne s'agit aucunement de prétendre à une caractérisation des élèves de SEGPA et encore moins de conjecturer les causes, mais seulement de pointer les difficultés les plus fréquemment rencontrées.

Trois illustrations : Il ne s'agit dans une durée aussi brève que de faire allusion aux champs du calcul, de la géométrie, des problèmes et de n'apporter, pour chacun d'eux qu'une indication en guise de boussole.

Nombres

J'ai évoqué tout à l'heure une procédure erronée répondant à l'opération 31–18. En fait, il s'agit d'une procédure de *calcul écrit* transposée dans le champ du calcul mental. Cet exemple signale non seulement l'usage de procédures erronées, mais aussi un déficit de représentation des nombres que l'usage calcul mental pourrait combler. On connaît la difficulté d'apprentissage de l'algorithme de la division, son faible rendement, et la probabilité de son érosion rapide. Cela est dû en grande partie à la faible disponibilité des représentations mentales des nombres, à l'insuffisante automatisation des calculs simples, et la difficulté consécutive de hiérarchisation des procédures. L'algorithme de la division, tel qu'il est pratiqué traditionnellement en France, réclame une bonne capacité de calcul mental ; si cette capacité est peu disponible, il en résulte un ralentissement ou une surcharge qui conduisent à l'échec. C'est pourquoi l'entraînement au calcul mental (par un exercice bref, mais quotidien), tendant vers l'automatisation des procédures les plus simples est un moyen, à la fois de donner du sens au calcul, et d'améliorer le calcul écrit.

Il ne s'agit pas de (re)construire la numération, selon des méthodes qui n'ont clairement pas fait la preuve de leur efficacité, ni de rabâcher les "tables", ce qui ne constituerait qu'un traitement de surface bien provisoire, mais de repérer les représentations numériques qui paraissent robustes, et à reconstruire à partir de là, à l'aide de supports, d'abord matérialisés, puis progressivement "mentalisés" [ex. "Jonchets" chinois].

Géométrie

La question que je vais évoquer très rapidement est celle de la définition d'objectifs adaptés, *à programmes constants* (ceux du collège). Les élèves du collège s'inscrivent dans la perspective d'un passage au lycée, et de ce fait dans une interprétation plus "spéculative" de la géométrie (conception déductive), alors que les élèves de SEGPA seront rapidement confrontés à une évaluation, puis une pratique pré-professionnelle qui s'expriment en termes de savoir-faire (cf Référentiels).
L'interprétation pédagogique que l'on peut proposer consiste à développer un usage réglé des instruments de la géométrie (qui ne se limitent pas seulement à la règle et au compas). Les instruments *condensent* de la géométrie ; on pourrait dire qu'il s'agit de "géométrie procéduralisée", c'est-à-dire de la construction de savoir-faire. Non seulement ceux-ci seront utiles professionnellement, mais ils ont de meilleures chances de subsister, et ils contiennent tout autant de connaissances géométriques, que des énoncés de propriétés ou de théorèmes.

On peut distinguer en première approximation trois champs à l'intérieur des activités géométriques : les configurations, les constructions, les mesures.
L'observation précède la construction, les constructions sans intervention de mesure précèdent l'usage des instruments de mesure. On peut imaginer un parcours qui fasse alterner les types d'activités, tout en ménageant une progression. Il existe également des travaux de synthèse, qui font intervenir plusieurs champs simultanément.
Parmi les configurations, il convient de distinguer encore deux aspects :

- L'identification perceptive des formes "simples" : reconnaître un carré, un rectangle, un triangle équilatéral selon des dispositions différentes ou à l'intérieur de configurations moins simples.
- Ces figures "simples" donnent lieu à des observations plus précises et des manipulations (pliages, comparaison d'angle ou de côtés...). C'est l'occasion de définir des termes géométriques (angle

droit, parallèle, diagonale, milieu...) et d'associer des propriétés géométriques à ces figures simples. On constitue ainsi un vocabulaire de base, et un répertoire de propriétés possibles ; il en résulte un classement des figures (selon un ou plusieurs critères).
Les constructions permettent d'explorer progressivement l'utilisation d'instruments de tracé et de construction, ainsi que différents supports. Les constructions sont l'occasion de réinvestir les propriétés explorées, selon des points de vue différents, imposés par les contraintes instrumentales. C'est aussi l'occasion indispensable d'exercer l'habileté manuelle qu'exige un dessin soigné.
Mais un programme de construction est un énoncé. On retrouve ainsi la géométrie argumentée, mais par un cheminement instrumental.

Problèmes

L'apparente dissociation qui semble opérée ici est purement rhétorique, comme l'est d'ailleurs aussi le point de vue "fusionnel" plus en vogue depuis vingt ans ("tout est problème"). Il s'agit seulement d'aborder plus systématiquement en certaines occasions les difficultés liées à l'évocation ou à la schématisation, et plus généralement le rapport du langage (et de sa logique) à la réalité, alors que les deux paragraphes ci-dessus concernaient plutôt l'instrumental.
On peut signaler ici plusieurs travaux sur l'énoncé (Perpignan, Duvert & Zakhartchouk) qui pour n'être pas tout à fait spécifiques à l'AIS n'en sont pas moins riches d'application. C'est maintenant un champ ouvert - c'est-à-dire un appel à coopération ! - qui consistera à mettre en communication les tentatives d'application dans le cadre des options A.I.S. régionales. Notamment par un archivage et une diffusion des mémoires les plus intéressants produits dans le cadre de l'U.S.2. Dans cette perspective le Centre de Suresnes pourrait se présenter comme un lieu d'accueil et d'échange.

REFERENCES EVOQUEES

BARATAUD, D. (1993) *Enseigner les mathématiques en SES et EREA*, Cahiers de Beaumont, Juin 93.

BOISNARD, HOUDEBINE, JULO, KERBŒUF, MERRI (1994) *La Proportionnalité et ses problèmes*, Hachette Education.

BOULE, F. (1998) *Etapes du calcul mental*, IREM de Bourgogne.

BOULE, F. (1999) *Supports de calcul et jeux numériques à construire*, CNEFEI, 1999.

DE VARDO, J. (1997) *Réussir en mathématiques* (lecture d'énoncés de problèmes), CRDP de Picardie.

DUVERT, R. et ZAKHARTCHOUK, J-M.,(1999) *52 outils pour un travail commun au collège* (mathématiques, français), CRDP d'Amiens.

HOUDEBINE J. et JULO J. (1988) *Les élèves en difficulté dans le 1° cycle de l'enseignement secondaire*, Revue Française de Pédagogie n°84, pp.5-12.

JULO, J. (1995) *Représentation de problèmes et réussite en math*, Presses Universitaires de Rennes.

KLAUER, K-J. (1998) *Entraîner le raisonnement inductif chez les enfants en difficulté d'apprentissage et ayant un retard mental léger,* in [Büchel, Paour, Courbois, Scharnhorst] Attention, mémoire, apprentissage ; études sur le retard mental, Ed SZH, Lucerne.

Lecture et mathématiques (CE et CM) CDDP Pyrénées orientales, 1991.

Liste supplémentaire :

CLAROU, Ph. et CAPPONI, B. (1993) *Activités mathématiques pour le collège*, Petit x, IREM de Grenoble.

LOARER, E. (1998) *L'éducation cognitive : modèles et méthodes pour apprendre à penser*, in Revue Française de pédagogie, n°122.

PAPADOPOULOS, J. (1995) *J'apprends la géométrie en dessinant*, CDDP Pyrénées orientales.

PIERRE, J-P. (1997) *Fichier de remédiation en mathématiques*, niveau 1, CRDP d'Amiens.

CIRCUIT OU LES REGLES DU DEBAT MATHEMATIQUE

ATELIER 8
Marc LEGRAND,
Enseignant Chercheur à l'Université de Grenoble,
Président de l'ADIREM.

CONTENU : Au cours de cet atelier, nous avons essayé de mettre en pratique ce que nous avons préconisé dans la conférence introductive, i.e. nous avons essayé de faire fonctionner en vraie grandeur une application du socio-constructivisme et de la théorie des situations : le débat scientifique en cours de mathématiques, en alternant les parties monstratives et constructivistes.
Nous avons pratiqué cette situation de "débat scientifique" à propos du difficile problème de la ressemblance et de la différence entre la logique exploitée en mathématiques et les logiques exploitées dans d'autres domaines, notamment dans la vie quotidienne.

Première partie

L'activité a commencé par la question :
En quelques mots...
Quelles sont les idées qui vous viennent immédiatement à l'esprit quand vous pensez aux mathématiques ? aux mathématiciens ?

Après cinq minutes de réflexion personnelle, chacun a exprimé son point de vue qui a été brièvement résumé au tableau ; comme nous n'étions qu'une dizaine, tout le monde a pu s'exprimer (dans une classe ou un amphi, ceci est impossible et la consigne est alors que toutes les opinions soient exprimées ; lorsqu'un élève pense la même chose que ce qui a déjà été dit par un autre, il ne demande pas la parole, par contre il peut renforcer, contredire, nuancer, etc...)

Ce "premier débat " s'est conclu par l'institutionnalisation[1] suivante :

Epistémologie vient du grec épistémé (science), logos (discours, étude ...).

Etre épistémologue à propos d'une activité : c'est porter un regard critique sur les principes de base, les méthodes d'investigation et les résultats de cette activité.
C'est aussi se poser la question : qui suis-je quand je pratique cette activité ?

Nos épistémologies propres sont les réponses que nous avons apportées au fil des années aux questions suivantes :
- *pourquoi... j'aime faire ceci ?... je déteste cela ?*
- *qu'est-ce qui est important ? "utile" ?*
- *qu'est-ce qui est valide, légitime ? quel rapport avec "la réalité" ?*
- *qu'est-ce que je comprends réellement ? qu'est-ce qui reste obscur,... douteux ?*

---

[1] *Cette institutionnalisation est initialement conçue pour un amphi d'étudiants de première année scientifique et qui doit en principe faire écho à ce qui vient de se dire, ce qui n'a pas toujours été le cas dans l'atelier ; par exemple, la position "utilitariste" habituellement largement défendue dans un amphi de DEUG a été peu exprimée par les professeurs de mathématiques.*

Deux épistémologies extrêmes s'opposent autour des mathématiques :

- ***une vision utilitariste*** **:** les maths ne seraient que des "trucs", des outils pour faire d'autres sciences. « En math il n'y a rien à comprendre, il suffit d'appliquer "bêtement" »!

- ***une vision idéaliste*** : les maths, langage universel, sont un pur jeu de l'esprit, c'est "la" Rigueur absolue!

Les maths ne s'appuient pas sur la réalité! Elles n'ont pas besoin des autres sciences !
Hors des maths, ... point de rigueur !

Une question aux "idéalistes":
A trop séparer math et réalité, ne risque-t-on pas :
- *de perdre sens et inspiration ?*
- *de passer à côté d'autres formes de rigueur?*

Une question aux "utilitaristes" :
Peut-on se servir *réellement des maths* ***qu'on ne comprend pas suffisamment*** *pour pouvoir les interpréter, les adapter, les modifier ?*

Un pari fondamental

Si nous acceptons de "pratiquer un certain jeu", nous pouvons malgré nos différences établir un rapport commun vrai aux mathématiques.

Des propositions de base :

a) Faisons des mathématiques ensemble !

Et ... pour pouvoir "faire des mathématiques" ensemble plutôt que de regarder le professeur en faire,
Apprenons à émettre et à résoudre des conjectures.

Emettre une conjecture,
c'est résumer dans un énoncé précis une idée que l'on pense être universellement vraie.

Par exemple la conjecture C1 : *"L'aire d'un polygone varie dans le même sens que son périmètre".*

Résoudre cette conjecture,
c'est se persuader avec des raisons acceptées par tous :

- qu'elle est vraie
(elle devient alors une propriété, un lemme, un théorème, etc.)
- ou qu'elle est fausse.

La conjecture C1 est-elle :

Vraie	Fausse	Autre

Découvrir qu'une conjecture est fausse est aussi important que de découvrir qu'une autre est vraie, puisque dans les deux cas, c'est se donner un moyen pour savoir si notre façon de penser la situation est adaptée ou non.

Ici, par exemple, on pense que la conjecture C1 est vraie tant qu'on a une conception très étroite des polygones et de la façon de les déformer (agrandissement - réduction type photocopie).

Montrer qu'elle est fausse nous oblige à élargir notre conception des polygones (non nécessairement convexes) et notre façon de les déformer (par exemple aplatissement d'un parallélogramme).

Pour cela, lorsqu'une conjecture sera mise à l'étude, vous aurez, après réflexion à prendre position en la déclarant :

Vraie ou Fausse ou Autre

(*vous expliquerez ultérieurement le sens de votre "Autre*").

b) Mise en place d'un contrat didactique

1. Définition

Je vous propose de "faire cours" sous forme de "débat scientifique".

Le but de cette didactique n'est pas de faire croire qu'on peut rapidement tout redécouvrir seul (mystification !) *mais de vous donner la possibilité :*

- de faire vôtres les idées d'autrui,

- de "tutoyer" le théorique et l'abstrait au point qu'ils deviennent pour chacun du familier, du "quasi concret"!

La pratique de l'activité scientifique montre quotidiennement qu'il faut *oser se tromper beaucoup pour ... comprendre un peu !*

En référence à l'évidence, deux usages de la logique :

- celui que nous en faisons dans la vie quotidienne et qui correspond à certaines exigences,

- celui qui est en vigueur dans la communauté mathématique et qui répond à d'autres exigences.

Notre travail immédiat : donner un sens précis aux jugements
"c'est vrai!, "c'est faux !" en mathématiques.
En quoi est-ce "la même chose", en quoi cela diffère-t-il des usages quotidiens ?

2. Validité de ce contrat didactique

Je garantis qu'il y a, derrière cette activité d'apparence "simpliste", des connaissances fondamentales, mais pour vous les transmettre (dans un vrai bonheur ...), j'ai besoin de votre spontanéité et de votre sincérité.
Vous pouvez, bien entendu, jouer un autre jeu, mais alors, je ne peux plus garantir d'apprentissage !

Deuxième partie

L'activité "Circuit" proprement dite qui a suivi est basée sur une succession de conjectures proposées par le "professeur" à propos d'un circuit électrique, conjectures sur lesquelles chacun doit prendre partie en adoptant l'une des trois positions : Vrai, Fausse ou Autre, puis en expliquant à ses pairs son point de vue, de façon à les convaincre d'adopter la même position (tout au moins tant qu'on pense de bonne foi avoir raison).
Dans ce débat, le "professeur" donne la parole et résume au tableau, mais en principe (s'il respecte le contrat) il ne prend pas partie et ne laisse pas transparaître son opinion.

Le débat parfois assez vif sur certaines conjectures montre, d'une part, qu'avec les mêmes arguments, on peut adopter des positions très différentes ou, inversement, qu'avec des raisons opposées, on peut adopter la même position vis-à-vis de la vérité ou de la fausseté d'une assertion générale. **Les conflits tendent à prouver que les consensus larges ne sont pas du ressort de la seule évidence mais sont à construire**, c'est-à-dire qu'il faut adopter des conventions, construire des modèles pour pouvoir se mettre "universellement" d'accord.

Les institutionnalisations successives qui ponctuent les débats sur chaque conjecture montrent alors que les conventions des mathématiciens sont, dans certains cas en accord et dans d'autres, totalement opposées à celles qu'on adopte tacitement dans la vie courante.

Nous étions ici un petit groupe de gens assez homogène, ce qui a eu pour inconvénient de diminuer la diversité des points de vue et la force des conflits d'idées, mais qui a eu, par contre, l'avantage de permettre à chacun de mieux expliciter la finesse de son point de vue et d'indiquer comment évoluait son système de convictions.

Pour une étude plus approfondie de cette situation, on peut consulter "Enseigner autrement en DEUG A - 1ère année"- 1990 (Publications inter - I.R.E.M)
Une activité semblable (Circuit automobile) a été conçue et réalisée en sixième-cinquième, mais son institutionnalisation n'est pas rédigée.

QUELQUES MOYENS POUR PLACER L'ESPACE AU CENTRE DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE A L'ECOLE PRIMAIRE, ET POUR PREPARER TANT L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE DE L'ESPACE QUE L'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE DU PREMIER CYCLE

ATELIER 9
René BERTHELOT
IUFM d'Aquitaine

L'atelier a été l'occasion de présenter une nouvelle phase de notre projet de recherches. L'atelier s'est déroulé en trois temps :
- rappel des résultats obtenus lors des recherches précédentes (différentes problématiques, obstacle du rapport pratique et du choix de l'espace de la feuille comme milieu de référence), l'approfondissement rendu nécessaire de la notion de modélisation et du choix d'un milieu méso-spatial ;
- présentation des nouvelles familles de situations d'apprentissage liées à l'option méso-spatiale ;
- et d'échanges de questions et de réponses au cours de l'exposé.

Je résumerai ces trois volets de notre travail dans cet ordre pour la clarté de la lecture.

Les lecteurs trouveront des informations plus détaillées dans l'article de Berthelot-Salin du colloque « théorie des situations » et dans les articles à paraître des mêmes auteurs dans la revue Petit x.
Pour illustrer l'intérêt de notre approche, tant théorique que pratique, j'adjoins en annexe un compte rendu de séance effectuée en mai, séance d'introduction à la deuxième famille de situations, séance dont un projet de fiche a été remis et discuté dans l'atelier. De nouvelles recherches dans la même direction sont entreprises par Sophie Cassan de l'IUFM d'Aix-Marseille dont le travail mérite votre attention.
Je pars cette année en pré-retraite (congé de fin d'activité). Il est donc temps pour moi de passer le relais et de laisser la place aux plus jeunes[1].
Je demeure néanmoins intéressé par les résultats des essais de mise en œuvre de ces idées par des collègues qui en auront l'occasion, comme par les discussions qui peuvent s'en suivre. Je poursuivrai les échanges et des collaborations avec eux tant qu'ils en trouveront l'intérêt.

Quelques résultats de recherches

Trois modes culturels de rapport à l'espace

Nous avons été amenés à distinguer trois types de rapports à l'espace, caractéristiques de trois grandes familles de problèmes culturels attachés selon nous à la scolarité obligatoire et aux moyens d'enseignement. Le rapport à l'espace est surtout caractérisé par les règles du jeu (au sens de la théorie des jeux) qui différencient selon nous ces familles de problèmes :

La problématique pratique

C'est celle caractéristique du rapport d'une famille de problèmes spatiaux non scolaires, essentiellement des situations d'action, particulièrement importants dans la vie de tous les jours, dans lesquels l'individu contrôle ses rapports à l'espace de manière immédiate, empirique, contingente. Les solutions retenues sont efficaces, empruntées pour la plupart à la culture, confortées par l'expérience, dans une logique que Bourdieu a nommée « le sens

[1] Une équipe est projetée à l'IUFM d'Aix Marseille autour de Claude Maurin

pratique ». Les solutions des situations nouvelles sont obtenues par ajustement du résultat à la solution attendue dans une suite de corrections immédiates. Les communications s'effectuent sur la base du même mode, résolues par les moyens les plus économiques en conceptualisation. La vérification du résultat obtenu se fait sous le mode de l'évidence immédiate.
Les décisions sont prises sans se soucier de porter un regard réflexif sur la méthode utilisée pour l'obtenir.
Dans toute société, la capacité d'une partie de ses membres à maîtriser un tel rapport d'efficacité immédiate à l'espace est une condition première de survie et de développement. Les moyens diffèrent selon les conditions géographiques et sociales de cette société. Le professeur se sert lui aussi de ce type de « jeu » dans son enseignement en classe, et plus souvent qu'il ne le croit.

La problématique de la géométrie (scolaire) du secondaire

C'est celle qui promeut le type de rapport à l'espace qui fait appel à la nécessité, à la consistance théorique du discours utilisé. C'est celui qui est visé, à partir du collège, dans l'apprentissage des démonstrations.

La problématique de la modélisation

C'est celle qui finalise le travail vers la production de moyens de formulation, d'explication et de prévision de solutions dépassant le problème immédiat, valides sur un certain champ de problèmes.
C'est celle du monde scientifique et technique. La modélisation spatio-géométrique est celle qui utilise les connaissances de la géométrie (l'histoire des techniques montre que ce n'est pas la seule solution).
Ce type de rapport à l'espace est le plus difficile à cerner, d'abord parce qu'il est pratiquement exclu de notre culture mathématique, mais aussi parce qu'il implique, outre des connaissances de géométrie, des pratiques de représentations spatiales, des connaissances sur les moyens de prouver empiriquement non la validité d'une modélisation (elle ne peut qu'être confortée) mais sa fausseté !
La modélisation spatio-géométrique suppose par ailleurs dans nos classes un traitement effectif, en partie implicite, en partie explicite et contractuel, d'écarts traduisant des approximations admissibles ou non[2], permettant d'attester l'adéquation entre le projet et la réalité. Ce traitement aboutit à des résultats variables selon les situations, et qui dépendent fortement du matériel, des capacités d'utilisation, des procédures...
Elle suppose une distinction claire entre l'espace modélisé, et le modèle dont le fonctionnement met en œuvre des espaces auxiliaires, servant à la communication comme à l'exploration expérimentale[3] dont la feuille de papier est le support le plus commode.

Résultats anciens

Le rapport pratique est un obstacle aux deux autres (rapport inégalable coût/efficacité pratique) ; l'entrée des élèves dans la problématique de la géométrie dans une dynamique d'élaboration de leurs connaissances ne peut se faire que sur la base d'une problématique de la modélisation ; l'enseignement actuel de la géométrie au collège, qui fait l'économie de la

---

[2] L'approche de ces questions souffre aujourd'hui d'un problème de culture : la culture mathématique et scientifique du collège, ou plus généralement de la scolarité obligatoire, commune aux enseignants du primaire, a quasiment éliminé ces questions de « l' à peu près »de son champ d'exploration. Le calcul d'erreurs constitue le moyen théorique attestant de la cohérence de l'ensemble. Il est évident qu'il n'est pas question d'enseigner les connaissances correspondantes. Mais il est tout aussi évident que la pratique de ces modélisations fournit aux élèves une connaissance pragmatique des approximations sur laquelle pourra plus tard s'exercer un regard réflexif et modélisant.

[3] C'est un axiome fondamental de la géométrie euclidienne qui assure cette possibilité, axiome de Wallis, équivalent au 5ème postulat.

modélisation, subit de plein front l'obstacle du rapport pratique, et cela conduit à la dévalorisation effective des rapports à l'espace, ce qui ne peut que désorienter encore plus les élèves.

Résultats récents

Nous avons mis en œuvre un curriculum long, sur l'ensemble du CM1 et du CM2, basé sur des situations de modélisations. Les obstacles qui se sont élevés dans la durée de cet enseignement nous ont convaincu que l'apprentissage de la modélisation spatio-géométrique ne peut se faire de manière satisfaisante lorsque l'espace modélisé est quasi exclusivement le *milieu micro-spatial des tracés sur des feuilles de papier.*
Un tel espace ne permet pas aux élèves de distinguer l'espace modélisé des espaces de représentation ; minore ou ignore les notions fondamentales de géométrie (cf programmes) ; bloque l'émergence ou la survie d'un rapport de modélisation, et donc, s'installe en obstacle aux enseignements ultérieurs.
Nous avons donc décidé d'explorer les possibilités apportées par le choix de la modélisation d'un un milieu méso-spatial.

Apports et contraintes liées à un milieu méso-spatial

Un milieu méso-spatial va imposer des déplacements et des recollements d'informations spatiales ; il va permettre, voire nécessiter de mobiliser de manière plus articulée un ensemble de notions géométriques plus vastes que les notions véhiculées par les programmes actuels :
la nécessité de l'analyse géométrique introduit d'emblée pour la saisie d'informations l'intervention de plans, et au moins de deux types de plans différents les plus simples à identifier, les plans horizontaux et les plans verticaux ;
la nécessité des recollements introduit, dès que les informations saisies sont suffisamment complexes ou nombreuses, la nécessité de la représentation de la structure implicite des informations saisies ; ceci permet d'attribuer naturellement à la feuille de papier un statut de moyen de représentation, de connaissance et de communication ;
les représentations vont introduire la conservation ou non de certaines propriétés géométriques ;
les « objets » de base seront modélisées par des surfaces découpées par des lignes fermées dans ces plans ;
la notion de droite pourra être associée à plusieurs réalités modélisables : droites de visée, trajectoires, fils tendus etc… ;
quelques dispositifs technologiques simples permettent d'introduire dans l'apprentissage des usages de figures associées à des propriétés géométriques fondamentales que les élèves ne rencontrent jamais dans le cadre de leur utilité spatiale, mais souvent douloureusement, au collège, et dans le cadre de la problématiques de la démonstration (théodolite, dispositif de Thalès, et bâton de Gerbert).

La question du curriculum se pose donc de manière nouvelle :
il y a une potentialité très forte, voire une nécessité de prendre en charge une certaine pluridisciplinarité (physique, technologie) ; cette caractéristique est cependant une nécessité selon nous pour un enseignement de scolarité obligatoire ;
il faut redessiner un ensemble de connaissances suffisamment limitées en nombre, mais riches en potentialité de modélisation et bien structurées entre elles dans les situations pour que l'apprentissage bénéficie des possibilités des situations qui seront nécessairement plus complexes que les situations actuelles ;
il faut un milieu physique qui assure la commande facile de variables didactiques fondamentales.
Nous avons donc tenté d'optimiser ces possibilités et ces contraintes par un ensemble de trois familles de situations, associées à un ensemble de connaissances.

Trois familles de situations méso-spatiales

Horizontalité et verticalité, et visées

Ces situations visent à réaliser une exploration de notions géométriques, physiques et technologiques élémentaires associées aux notions de visée, d'horizontalité et de verticalité, de rectitude de ligne et de planéité de surface.
Ce travail a fait l'objet d'une exploration préliminaire dans quatre classes de cycle 3 (chacune comprenant les trois niveaux) en cours d'année.

Il s'appuie sur un matériel technique : - le niveau de liquides dans des bouteilles transparentes (type eau minérale) - l'utilisation de niveaux à bulles de divers types : linéaires ronds - l'utilisation d'équerres - l'utilisation de fil à plomb - tasseaux « droits » et règles - décamètres	L'exploration du méso-espace proposée aux élèves concerne - les alignements et les visées - lignes droites - les surfaces et leur planéité - les surfaces et lignes horizontales - les lignes et surfaces verticales Il vise à outiller les élèves de notions géométriques de base : Alignements, droites, plans, parallélisme entre ces notions, perpendicularité et de modes simples de schématisation.

Ce premier travail, réalisé dans les quatre classes sur le mode des « leçons de chose » a beaucoup intéressé les élèves de cycle 3.
Il débouche sur une initiation à l'utilisation de théodolites.
La version aujourd'hui présentée en est dérivée et n'a pas encore été observée sous cette forme[4]; une partie en a été problématisée afin de prendre en compte les difficultés rencontrées par certains élèves à comprendre le fonctionnement du théodolite.

Calculs de distances et formes géométriques

Elles visent à installer un « monde » des figures simples (quasi) planes dans le méso-espace, et une forme de traitement géométrique imposant un traitement dans des espaces auxiliaires...

Problème générique Le support matériel est constitué par exemple par un ensemble de plots en ciment posés sur une surface quasi-plane dans la cour, espacés de 5 à 15 m les uns des autres, et reliés par une ficelle fine tendue. Le nombre des plots retenus détermine les figures polygonales du méso-espace constituant la base du projet d'exploration. Un brin de laine est fixé sur chaque côté, et il s'agit de déterminer la distance entre deux de ces brins, sans passer ni dessus, ni dessous la ligne, sans pénétrer dans l'espace délimité par la ficelle, ni par dessus, ni par dessous !	*Notions : Représentation proportionnelle : conservation des angles et des longueurs.* *Polygones simples et angles : constructions,* *Propriétés de la translation de longueurs (rectangles, parallélogrammes)* *Parallélisme de lignes droites, symétrie centrale et axiale.* *Et peut-être approche de l'espace de points* *Ces notions, visent la construction de représentations par des schémas plus ou moins complexes.*

[4] J'ai repris un dispositif semblable au « biglotron » de A. Duval, Grand N 54

Les situations peuvent être rapportées à une forme de la situation fondamentale de la géométrie formulée par Brousseau : « estimer la distance entre deux points ».
L'exploration de deux activités de cette famille est programmée fin mai en CM1 à Pau, sur la base de triangles rectangles.

TROISIÈME FAMILLE, BASÉE SUR DES DISPOSITIFS DE VISÉE

Elle permet d'explorer les figures traditionnelles de géométrie comme moyens de modéliser des dispositifs techniques simples comportant une forte quantité de connaissances géométriques. Les figures sont composées de lignes tantôt matérialisées, tantôt non matérialisées. Elle impose aussi une prise en compte de contraintes technologiques, tant dans la mise en œuvre que dans les représentations.	**Trois domaines d'exploration** - les différences de niveau, le théodolite - les rayons du soleil, les ombres, les angles et leur mesure - le troisième cas d'isométrie des triangles (un côté compris entre deux angles) - homothétie et triangles en position de Thalès

Des séances sur les différences de niveau et le théodolite ont été mises en place dans quatre classes de cycle 3, comme prolongement de la première famille de situation, dans l'approche de la relation entre des portions de plans horizontaux.

Questions et éléments de réponse

Q1 : Quelle est la pertinence de ce travail en 4° ou en 3° de collège, niveau qui correspond mieux au contenu mathématique sous-jacent ?
R1 : Je ne suis pas d'accord pour dire que le niveau de 4° et 3° de collège correspond mieux au contenu mathématique sous-jacent à nos propositions. Le travail à ce niveau du collège devrait pouvoir s'appuyer sur des connaissances importantes de base du point de vue de la modélisation (relations entre plans, droites, conservations dans une homothétie ou un déplacement) pour pouvoir se concentrer sur les relations logiques. Actuellement, l'absence de connaissances établies sur la modélisation géométrique de l'espace perceptif multiplie selon nous les difficultés de beaucoup d'élèves à trouver du sens à l'enseignement proposé.
Notre projet est d'explorer les connaissances fondamentales qui peuvent être acquises dès le cycle 3, du point de vue de la modélisation. Les premières investigations dont nous avons fait état sont prometteuses.

Q2 : Ne serait-il pas intéressant d'adapter ce travail en PE ?
R2 : Cette approche fournit des possibilités importantes pour un renouvellement intéressant de l'enseignement en PE. Mais il me paraît nécessaire de former les enseignants à la modélisation dès la FI, si on veut qu'ils puissent dépasser eux-mêmes l'obstacle culturel de la dévalorisation de l'espace introduit par l'enseignement de la géométrie et modifier un jour l'enseignement actuel.

Q3 : En collège, n'y a-t-il pas malgré tout une rupture entre la géométrie de la vie, celle du géomètre et celle du prof de math ?
R3 : D'un certain point de vue, je pense qu'il y a malheureusement rupture au sens d'étanchéité pour les élèves, voire pour des professeurs. Je pense qu'il doit y avoir différenciation explicite lorsqu'on introduit la démonstration, ce qui suppose l'existence, la reconnaissance d'un acquis au niveau pratique et de modélisation.
Si vous observez des professeurs de collège, voire de seconde, en cours de géométrie, vous pourrez noter qu'ils font appel par nécessité didactique aux différents niveaux de connaissances, mais qu'ils choisissent bien les moments où ils le font. L'élève reste

complètement démuni, car il ne sait pas comment ou pourquoi un niveau est ici autorisé et pas là...

Q4 : La géométrie du dessin apparaît comme représentant une situation concrète dans un autre cadre matériel ; cette situation est-elle de nature à résoudre le conflit entre pratique du dessin et pratique des propriétés ?
R4 : Il y a plusieurs usages géométriques du dessin, et grosso modo, deux classes, les schémas et les épures, qui se distinguent par les propriétés conservées ou non entre l'espace de référence et l'espace de représentation. On est en plein dans la question des propriétés ! ce que nous installons de plus, est la résolution de problèmes dont la résolution est associée à certaines propriétés...
Voici au moins deux aspects d'intervention des propriétés, certes différentes du mode de l'évidence (culturelle) sur lequel leur enseignement actuel se fonde trop souvent faute d'autres appuis...

Q5 : Comment introduire les angles avec les élèves ? que garde-t-on en mémoire ?
R5 : Il faut regarder ce que les situations permettent de différencier ou non. Avec les ombres et le repérage de la hauteur du soleil, qu'est-ce qu'on gagne par rapport à notre première approche...
De même qu'on peut voir ce qu'on gagne par notre première approche (voir Grand N 56), par rapport aux approches usuelles en 6ème...

Q6 : L'essentiel, dans ces situations, n'est-il pas de dessiner ce qui s'est passé quand on a fait une translation ou un déplacement d'objets dans le méso-espace.
R6 : Nous explorons des situations qui se résolvent par l'introduction d'isométries ou de transformations qui conservent les rapports de longueur et les angles, que ce soit en grandeur réelle ou en représentation. Le dessin peut avoir plusieurs fonctions : esquisser un projet d'action sur un espace de référence ou auxiliaire, ou constituer en lui-même la part spatiale du projet d'action qui sera complétée par des calculs...
Nous cherchons à introduire la feuille de papier avec pour statut celui d'un laboratoire spatial...

Q7 : Quand tu parles de problématique de modélisation, tu penses dessin représentant le réel ? N'est-ce pas parce qu'on n'enseigne pas assez les schémas à l'école que le dessin se colle autant à la figure ?
R7 Si on veut faire pratiquer la modélisation, il va bien falloir prendre en charge, outre les propriétés géométriques, les moyens perceptifs dans lesquelles elles s'incarnent dans les activités du géomètre. Donc, pour moi, il faut inclure des dessins dans le travail du professeur, avec une palette suffisante de statuts, ce qui est impossible si on reste sur une feuille de papier.
Pour enseigner les différentes sortes de schémas utiles, il faut un minimum d'a-didacticité dans les situations, et c'est très difficile dans le micro-espace.

Q8 : La fonction de mémoire des schémas est-elle vraiment simple ? Lien avec la technologie type « main à la pâte ».
R8 : Je connais mal ce qui relève de la « main à la pâte ». Des publications arriveront, je l'espère, et des collaborations peuvent se faire localement... j'ai l'impression que pour l'instant, c'est un peu l'auberge espagnole.
Je cherche à insérer la fonction « mémoire » non point dans une norme culturelle au départ, fut-elle scientifique comme les schémas de nos TP de physique, mais dans une fonctionnalité a-didactique. C'est ce qu'ont démarré très tôt les collègues de Grenoble et de Bordeaux avec

les communications de figures... Il y a problème de mémoire quant l'accès à l'évidence n'est plus possible à chaque instant...
Les schémas peuvent aussi développer des systèmes explicatifs... qui font mauvaise compagnie eux-aussi avec l'évidence de nos dessins...

Q9 Pour extraire une image plane (sous forme de dessin) d'une expérience spatiale en 3D, il faut mobiliser des connaissances. Les objets géométriques comme le plan et la droite qui sont introduits avec les schémas vont-ils rester fonctionnels, opératoires ?
R9 : J'ai du mal à interpréter cette question : s'il y a des objets fonctionnels en modélisation, c'est-à-dire pour décrire les solutions de problèmes, et en débattre, c'est bien les droites et les plans... Ils le resteront tant que les problèmes les alimenteront.
Certes, je m'interroge sur « jusqu'où » les élèves pourront s'emparer des notions de plans et de droites pour explorer et questionner leur environnement. C'est un défi des plus stimulants pour moi... mais çà reste un défi.
Quant au rapport avec les représentations, cela va dépendre du statut de ces représentations, images visuelles, ou espaces auxiliaires « analogiques » conservant certaines propriétés de l'espace problématique étudié ...

Q10 : Qu'est-ce qui valide les représentations des élèves, finalement ?
R10 : Ce qui valide les représentations des élèves finalement dans une modélisation, c'est leur capacité à permettre d'anticiper et/ou de comprendre des éléments décisifs d'une solution réussie d'une famille de problèmes qui ne fait pas partie des connaissances « pratiques »... de relier des solutions entre plusieurs problèmes... etc.
Cette question est effectivement celle de la modélisation ...et la validation n'est pas qu'empirique !

Q12 : Le problème de la croix du bûcheron » expérimenté sur le terrain, a provoqué la nécessité d'un schéma, puis d'une épure. Que faut-il au minimum dans le méso-espace pour récupérer la figure sur la feuille de papier ?
R12 : Je ne sais pas... cela dépend certes du niveau d'a-didacticité de la situation...Chacun peut s'interroger sur ce qu'il lui faut pour qu'il sorte (avec ses connaissances de géométrie) son crayon et son papier...
Il y a une question d'enjeu, et aussi de culture. C'est pour introduire le côté culturel qu'il faut des familles de problèmes dont certains devront être effectifs dans le méso-espace.
Je ne connais personne qui ait l'expérience de cette approche et qui me guide dans une réponse : combien de situations effectives, évoquées ? Il faut explorer !

Nicole Bonnet signale qu'il y a différentes façons de produire des plots, en chargeant de ciment ou de plâtre des bouteilles de plastiques, etc.
Ces questions matérielles sont essentielles du point de vue de l'écologie des situations dans les classes, et varient beaucoup d'un enseignant à l'autre, d'une école à l'autre : de la pelouse permet des piquets de tente, du béton, c'est lourd ! mais si on est convaincu de l'intérêt, les solutions adaptées seront trouvées...

Je demande l'indulgence des participants, n'ayant pas retrouvé les auteurs des questions stimulantes soulevées. Ces questions m'ont permis d'espérer pallier un peu à la difficulté du sujet et à mes difficultés d'en proposer une vision suffisamment organisée.

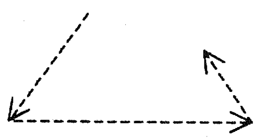
Annexe

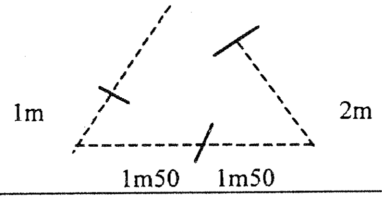
OBSERVATION 16 MAI, VICTOR HUGO, CLASSE DE DIDIER LASSALLE (IMF)
D'après les notes prises par Isabelle Bloch (mon film est blanc !)
Les PE2 du module espace et géométrie assistaient à la séance.
La fiche proposée comportait deux séances. Le M a annoncé qu'il ne pouvait consacrer qu'une séance à ce travail, et il a réduit le travail à la phase recherche (sans indications de plans à réaliser) et à une mise en commun.
Le matériel piquets de ciment a été remplacé par des piquets de tente plantés sur une partie herbeuse et plate de l'espace de récréation.
Les dimensions des côtés ont été réduits à 3m, 4m, 5m à la demande du maître. Au moment de la réalisation, le maître et nous-mêmes avons pensé qu'il aurait été préférable de conserver 6m, 8m, 10m, car nous avons craint que l'ensemble ne nécessite pas assez de recollements.
Des brins de laine colorés (J, B, N) sont fixés sur la ficelle à des distances variables des sommets (1m, 1m50, 2m)
Les enfants disposeront de matériel de géométrie du tableau, de ficelle, et surtout de décamètres en ruban.

P Ils sont en train de faire une installation dans la cour, d'installer des piquets…
E Ils ont fait un triangle

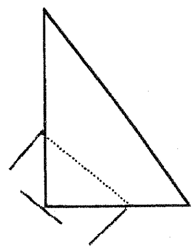
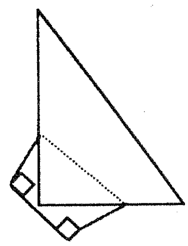
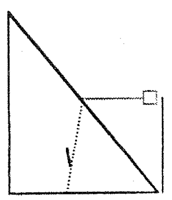
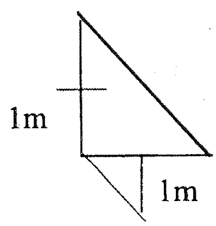
P en Classe	Voilà, ils ont fait trois triangles- avec 3 piquets et une ficelle. Il y aura des petits rubans positionnés n'importe où sur les côtés du triangle. Et on va vous demander de deviner, d'estimer la distance entre les rubans. Dans un premier temps, vous devinerez, 1,5 km, (rires) 25 cm… et dans un deuxième temps, vous n'aurez pas le droit de survoler le triangle. Est-ce que vous prévoyez d'emporter quelque chose ?
E	Non
P	Emportez du papier et des crayons, pour noter

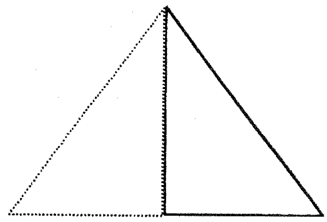
Les enfants arrivent sur les lieux

P	Première chose : attention à ne pas marcher dessus. On ne touche pas aux ficelles. Vous avez sur chaque triangle, deux petits rubans. Vous allez devoir estimer la distance entre le jaune et le noir.
E	On va mesurer avec les pieds
E	Il faut faire cette distance, puis diviser (l'élève montre un parcours sur les côtés reliant le ruban jaune au ruban noir) 
E	Certains mesurent les côtés avec les pieds
E	C'est quoi tes pas que tu fais ?
E	Si on suit le fil, ça fait 28 pas !
E	de l'autre côté, ça fait aussi 28 pas. Le point jaune, c'est le milieu.
Isabelle	Le milieu de quoi ?
E	Ben, le milieu du triangle
P	Bon, mais vous écrivez chacun votre estimation
E	Estimations : 1m40; 1m5dm ; 1m80 ; 28cm ; 1m50 ;
P	Dirigeant la vérification par mesure avec un décamètre directement entre les rubans 1m88 ; 1m90 ; 1m92
P	Cette fois, il ne s'agit plus d'estimer, mais de trouver un moyen de calculer exactement les deux distances reliant les autres rubans

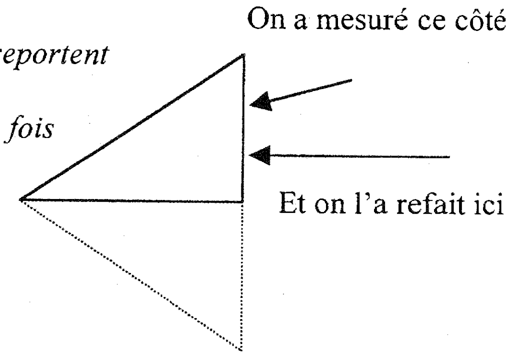
Es	Ils mesurent les distances entre rubans et sommets du triangle 
Alex	Ce n'est pas un résultat qu'on te demande, c'est un moyen de trouver
E	J'ai trouvé un moyen. Je fais 1m50 + 1m çà fait 2m50 et je divise par 2… non par trois…. Non par 2
Fred	Parce qu'il y a 2 côtés
Fred	Il me faut une réponse
Fred	Oui, mais l'autre angle, il n'est pas droit, c'est dommage !
Didier	C'est dommage que ce triangle n'ait pas trois angles droits !

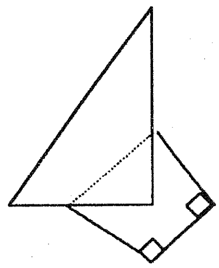
Les trois groupes constitués se répartissent autour des trois figures sur la pelouse.
Dans l'un, chaque enfant ou paire d'enfants fait des mesures, sans rien noter.
Dans l'autre (filles) au bout d'un quart d'heure environ, tous les enfants ont un schéma topologique et s'appliquent à y reporter les mesures des cotés et des segments déterminés.
Dans le troisième, les enfants notent sans schéma, ni désignation, sur leur feuille, les nombres obtenus par les différentes mesures effectuées.
Aucun groupe ne semble trouver de solutions, quand, après 1h15 environ, une première construction est réalisée (le rectangle)…
Un quart d'heure plus tard, des constructions fleurissent autour de chaque triangle.
Récréation.
Observations sur les constructions :

Groupe Haie (garçons) Equipe	Ils posent une règle passant par le sommet, en cherchant à la placer parallèlement à la ligne joignant les deux rubans. Ils utilisent deux autres règles et tentent de les placer perpendiculairement à la ligne des rubans et à la règle.  Essais avec 3 règles Ils prolongent et avec une équerre placée sur la ligne de la règle, ils cherchent à constituer un rectangle. Je calcule celle-là pour que ce sera la même longueur. La mesure du côté défini donne 1m71 à 1m72. Pourquoi ? Parce que c'est parallèle. Ta règle, tu l'as mise n'importe comment ? Non, j'ai fait un angle droit !  *Pour déterminer les positions des règles, il y a un contrôle à vue du parallélisme des règles déterminant les petits côtés, et un glissement de la règle sur une ligne parallèele aux rubans (à vue) déterminant le grand côté à mesurer…*
Autres équipes	 
Groupe 3	On veut refaire le triangle à l'extérieur (de la zone interdite)

Groupe 3	On veut refaire le triangle à l'extérieur (de la zone interdite) Ils mesurent 5 fois les côtés du triangle, et construisent le nouveau en position de symétrie, mais ils n'ont pas le temps de terminer 

Mise en commun, après la récréation

P	On va essayer d'expliquer ce qui a été fait.
G1	Ils ont tout mesuré avec le rond (le décamètre).
Eb	Notre but, c'était de mesurer tout le triangle. On a trouvé 2m53.
P	C'était combien en fait ?
Eb	1m82.
Eb	On avait tout transformé en cm, mais on s'était trompé en plaçant les rubans...
E	C'est comme les cartes !
B	On avait fait un triangle en cm
P	Et il fallait qu'il soit comment le triangle?
Eb	Pareil !
P	Est-ce que c'était une bonne idée ?
Es	Oui, mais il faut être précis
P	Je croyais que vous aviez mesuré ?
Eb	Oui, on l'avait fait, mais on s'est aperçu qu'on s'était trompé
P	Pourquoi ?
Eb	Parce que c'était pas la même longueur, parce qu'il y avait un virage !
P	Les filles ?
Ef	On a essayé de refaire le même triangle. *Les élèves prennent les mesures, puis reportent une longueur égale en prolongement, vérifient...en recommençant jusqu'à 5 fois les mesures*  Et après on a mesuré et c'était pareil. On a mesuré dans le 2
E	C'est le symétrique ! axe de symétrie !
P	Pendant un temps, il n'y avait plus personne autour du triangle. Qu'est-ce que vous faisiez ?
E	Sur le cahier de brouillon, on essayait de faire un plan d'architecte

Groupe Haie (garçons)	Arnaud et Nicolas au tableau On a refait un angle droit. On a tracé la parallèle et çà nous donnait la longueur 

Bastien et Fred	2+1,5 et on a divisé par 2
P	Est-ce que c'est juste ?
Es	Non
P	Est-ce que çà peut être juste ?
Arnaud	Oui, si on a la même distance au virage !
Ar	Oui, car si on fait un triangle de 2m et de 2m, forcément l'autre fait 2m
Cam	Non, parce que çà peut être plus écarté ou plus serré....

Bilan de René

Il semble que le principe de la séance soit bon car,

- après une heure de recherches infructueuses, ils n'avaient pas abandonné le problème !!
- les propositions sont très intéressantes pour un CM1, voire des élèves d'école primaire ! Elles permettent d'espérer un ensemble important de situations nouvelles de raisonnements.

à tempérer car

- *le maître a une expertise un peu inhabituelle des mathématiques, mais ce n'est pas lui, mais son remplaçant qui est chargé de la géométrie.*
- *la classe a récemment consacré plus de cinq leçons sur les représentations à l'échelle et la proportionnalité, sous la direction d'une PE2 assistée du M dans le cadre d'un mémoire.*
- *nous n'avons absolument pas pu contrôler l'intervention des PE2 observateurs, bien que ceux-ci ne devaient pas intervenir.*

Cependant une séance, c'est très insuffisant (c'était tout ce que j'ai pu obtenir dans les classes d'application à cette époque) car

- il faut un temps d'appropriation du problème ;
- les propositions de procédures n'ont pas eu le temps de diffuser suffisamment ;
- il aurait fallu une seconde séance au moins de mise en œuvre effective des procédures ;
- l'étude du domaine de validité de chacune des procédures peut être étalée sur plusieurs séances, permettant d'explorer une somme de problèmes de géométrie et d'occasion de raisonnements, de connaissances de procédures de contrôle de propriétés dans le méso-espace, de distinction entre ce que l'on peut contrôler, d'expériences graphiques, etc....

FONDEMENTS THEORIQUES ET PRESENTATION DES LOGICIELS DE LA SERIE ORATIO

ATELIER 10
Robert ADJIAGE,
IUFM d'Alsace

Résumé
Une introduction multi-registres des rationnels à l'école élémentaire.
Le constat qu'un recours précoce au système fractionnaire se heurtait à des obstacles résistants m'a amené à lui substituer un autre registre d'expression, celui des droites graduées, lors de l'introduction des rationnels. L'environnement informatique permet la gestion, à un coût acceptable, de ce registre et de son articulation avec les registres fractionnaires et décimaux étudiés dans un deuxième temps.

Mots clés : Registre sémiotique, nombre rationnel, droite graduée, fraction, décimal.

L'atelier a pour objet la présentation, par leur auteur, d'une série de logiciels et des choix théoriques qui ont présidé à leur élaboration. Ces logiciels constituent le socle d'un dispositif d'enseignement – développé lors d'une recherche doctorante – mis en œuvre dans une classe au cours des deux dernières années de son cycle III. Ils donnent aux élèves l'occasion d'une investigation de trois systèmes d'expression des rationnels, à savoir en respectant l'ordre de leur introduction en classe : les droites graduées ; les écritures fractionnaires ; les écritures décimales.

Exposé préliminaire

Les constats et choix fondamentaux

Deux questions permettront de cerner les enjeux de ce dispositif :
pourquoi accorder aux différents modes d'expression des rationnels une place centrale ?
pourquoi introduire les rationnels sans les fractions ?
Les éléments de réponse à ces deux questions se situent à la convergence de deux axes : l'un de nature empirique, l'autre de nature théorique.
En ce qui concerne le premier axe, maintes observations m'ont conduit à relever que les premiers contresens stables, plutôt freins que tremplins d'apprentissage, sont plus liés à des formes d'expression symbolique, notamment l'écriture fractionnaire, qu'à un défaut d'interprétation et de résolution, au moyen de la langue naturelle, des premiers problèmes rationnels, c'est-à-dire le plus souvent des problèmes qui modélisent une expérience physique mettant linéairement en relation deux séries de données entières (voir transparent #1).

Le deuxième axe se réfère à la théorie des registres de Raymond Duval, qui place l'appropriation et l'articulation d'au moins deux registres d'expression au cœur de la genèse conceptuelle. Cette théorie permet de mieux comprendre l'inadéquation du système fractionnaire à une introduction des rationnels. Examinons pour cela la manière dont s'oriente la prise et la production d'information, lors de la résolution d'un problème rationnel comme celui de la comparaison des épaisseurs de feuilles de papier de G. & N. Brousseau (voir transparent #1), suivant que le discours résolvant est tenu en langue naturelle ou au moyen des écritures fractionnaires. Dans le premier cas, l'énoncé du problème et son traitement mobilisent le même registre, qui sépare et articule séquentiellement les données, numériques (nombres exclusivement entiers) ou non numériques, le long d'une seule ligne d'écriture. Dans le second cas, le discours fractionnaire introduit une partition à deux voix, se développant sur deux lignes d'écritures (numérateur et dénominateur) liées, utilisant un symbolisme identique (les nombres entiers), mais dont le mode de signification et de traitement est radicalement différent. La conversion entre l'énoncé du problème (unidimensionnel) et les écritures fractionnaires résolvantes (bidimensionnelles) est donc non congruente, au sens de Duval (1995, pp. 47-49), et c'est ce caractère de non congruence qui peut expliquer les obstacles résistants rencontrés par les élèves lors des premiers apprentissages concernant les fractions. On notera qu'oser un développement **d'égalité en égalité** (ou d'inégalité en inégalité) est à l'origine de la bidimmensionnalité du discours fractionnaire et de sa compactification, ce qui le rend hautement appréciable pour les experts mais opaque pour les novices. Ces derniers ont en effet tendance à voir dans cette égalité (ou inégalité) une relation entre **deux** entiers (**deux** numérateurs et / ou **deux** dénominateurs successifs), et non une relation entre deux relations (les rapports à comparer) portant sur des entiers (Adjiage, 1999, pp.129-132). Par opposition, le traitement rhétorique (voir par exemple les démonstrations d'Euclide dans les livres V, VII et X, mais aussi les notations $a : b : : c : d$, lues a est à b comme c est à d, utilisées jusqu'au XIX^{ème} siècle), progressant **d'équivalence en équivalence**, maintient la séquentialité du discours.

Résumons-nous :
l'expression symbolique des rationnels pose problème ; ce type de problème sera la base des situations problèmes posées par les logiciels ;
l'expression fractionnaire est inadaptée à une introduction des rationnels.
Ces constats m'ont donc amené à envisager des apprentissages qui débutent par l'appropriation d'un premier système d'expression des rationnels, alternatif à celui des écritures fractionnaires : le système des droites graduées (voir transparent #2), entendu comme un véritable registre d'expression des rationnels, c'est-à-dire un concurrent sérieux et pas une simple illustration des systèmes fractionnaire et décimal.

Ce choix se justifie par au moins quatre types de raisons :
- la nature de ce support, à la fois physique – explicite les opérations fondatrices de report et de subdivision – et à la fois sémiotique – représente des nombres et pas, comme les parts de tartes, une double quantification matérielle ;
- le type des traitements envisageables qui permettent d'annoncer et, après leur introduction, de contrôler les registres fractionnaire et décimal ;
- la possibilité, grâce aux ordinateurs, de faire de ce support un véritable champ expérimental, ouvrant la voie à des processus essai / erreur, à un coût raisonnable ;
- la possibilité d'inscrire dans ce registre les deux séries, liées par linéarité, de données entières qui caractérisent les premiers problèmes rationnels. En se reportant au transparent #2, paragraphe 0, on constatera en effet que, s'autorisant des repères autres que [0 ; 1], il est non seulement possible de représenter différemment "*trois fois un quart*" et "*un quart de trois*" (ce que ne permet pas le système fractionnaire), mais surtout d'interpréter trois quarts comme une dilatation transformant 4 en 3, (et donc 6 en 8, etc) ou comment 4 "peut tenir" dans 3, ce qui autorisera ultérieurement une interprétation du produit par une fraction (par exemple $\times\frac{3}{4}$) comme une dilatation (transformant 4 en 3 dans notre exemple).

Pour terminer ce paragraphe, j'évoquerai la manière dont la série ORATIO aborde l'étude des registres usuels, fractionnaire et décimal. Le cahier des charges, résumé dans le transparent #3, se veut minimal pour permettre, conformément à la théorie des registres, la détermination des unités signifiantes débouchant sur la discrimination de deux fractions ou de deux décimaux. On notera que la comparaison est l'opération qui fonde la possibilité de cette discrimination.

Structure de la série des 20 logiciels

On distingue deux grandes phases d'investigation des logiciels, liées aux trois opérations cognitives fondamentales (formation, traitement et conversion) énoncées par Raymond Duval (1995, pp.36-44). A ces deux phases correspondent deux familles de logiciels :

une première phase (formation et traitement) est destinée à une investigation interne à chacun des registres retenus ; la famille des logiciels qui lui correspond se subdivise en trois séries (Gradu ; Fracti ; Format) ;

une deuxième phase (conversion) est destinée à la mise en place des correspondances entre les diverses manières de signifier des trois registres étudiés ; la famille des logiciels qui lui correspond est formée de six éléments organisant toutes les conversions envisageables, dans les deux sens, entre les trois registres concernés.

Les ressources d'investigation des logiciels par les élèves

Les pré-requis sont minimaux : l'élève peut ne disposer pour tout bagage initial que des nombres entiers et de leur représentation sur droite graduée, d'une idée intuitive et / ou partielle de la notion de fractionnement, par exemple à travers une application de fractions simples – demis, quarts, tiers... – à des grandeurs usuelles – longueur, volume, durée.

L'investigation commence par la lecture du "mode d'emploi" qui annonce brièvement la nature de la tâche ; provoque les premiers questionnements auxquels on se garde bien de répondre.

Actions

Dans le but de respecter le mouvement entre les mises à l'épreuve, les réfutations et les validations, on se refuse, lors de l'exploration d'un registre, à enseigner a priori les règles qui le régissent. On préfère laisser les élèves tester les idées qu'ils se font de ces règles (par exemple, tester si 3,5 est plus petit que 3,14 parce que 5 est inférieur à 14), les mettre à l'épreuve des traitements autorisés par le logiciel puis des corrigés qu'il propose. Un maximum de degrés de liberté est en conséquence laissé aux utilisateurs (tenter, effacer, recommencer, changer d'échelle…). Cette phase permet de préciser le jeu des actions permises par le logiciel.

Rétroactions

Personnalisées et en temps réel, elles relancent le processus de recherche et donc ne sont pas de simples sanctions, positives ou négatives, débouchant sur des fins de non recevoir. (j'appelle « moulinette » une procédure, destinée à tester la validité d'une réponse, dont le verdict permet la mise au point d'un nouvel essai plus adéquat : *par exemple, pour trouver l'expression décimale de 3/4, on dispose de la moulinette : ... x 4 = 3, qui permet de décider qu'un essai comme 0,8 est trop grand car 0,8 x 4 > 3*).

Aide

Certains logiciels proposent une aide, non conçue pour accélérer ou court-circuiter un itinéraire d'apprentissage, mais pour pallier une difficulté technique – table de multiples – ou pour fournir un cadre de validation à forte valeur rétroactive – moulinette comme le format à virgule fixe pour la saisie et la comparaison des décimaux.

Verdict, score et corrigé

Pour que chaque action ait un coût, les exercices sont sanctionnés par un score prenant en compte le résultat et la manière d'y parvenir. Verdict et corrigé sont en général dynamiques, c'est-à-dire qu'ils prennent en compte à la fois la spécificité du cas traité et des interventions de l'élève. Il n'était pas rare d'observer, lors de mon expérimentation, des élèves qui, pour étudier les enseignements du corrigé, ont sciemment saisi des réponses erronées.

Trois moments forts du travail de conceptualisation ainsi entendu

1- Un premier moment important du travail de conceptualisation sera lié à des interrogations internes à un registre, par exemple l'équivalence des deux expressions suivantes de trois quarts : trois fois un quart et un quart de trois (transparent #2, § 0).

2- Un deuxième moment fort sera celui du détachement de la notion de son inscription initiale dans le premier système de représentation, droite graduée, par la prise en compte d'une inscription concurrente dans un autre système sémiotique, par exemple les écritures fractionnaires (voir Figure 1). Comment s'inscrit le 3, le 4, la barre de fraction de $\frac{3}{4}$ sur l'un ou l'autre des segments gradués ; quelles répercussions aura, sur l'expression au moyen du segment gradué, la variation d'un des constituants de la fraction ?

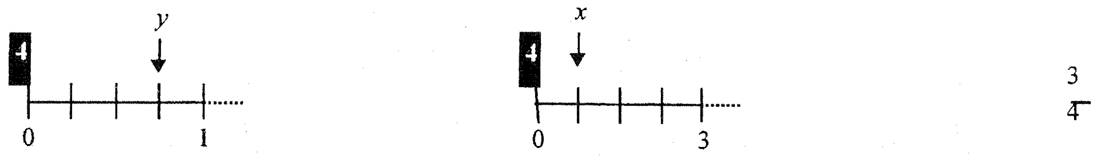


Figure 1 : trois expressions concurrentes de trois quarts

3 - Un troisième moment fort sera celui posé par la question de savoir en quoi l'une ou l'autre de ces expressions interprète et permet de résoudre un problème comme : 4 feuilles de papier ont une épaisseur de 3 mm, quelle est l'épaisseur d'une feuille de papier ? Ou encore comparer l'épaisseur d'une des feuilles de ce dernier tas à celle d'une feuille tirée d'un tas de 5 mm comportant 7 feuilles.

Itinéraire suggéré d'exploration des logiciels par les stagiaires

Logiciels de traitements

Série GRADU : gradu1 ; gradu4 ; gradu5 ; gradu6, exercices 1 et 4 ;

Série FRACTI : fracti1 ; fracti4 ; fracti5, exercice 4 ;

Série FORMAT : format1 ; format 2, exercice 3.

Logiciels de conversions

Form2gra, exercice 2 ; Form2fra, exercice1 ; Frac2for.

Deux questions et commentaires abordés lors du débat

Plutôt qu'un compte-rendu chronologique des différentes interventions, que j'aurais du reste été incapable de produire en l'absence d'un secrétariat de séance, j'ai trouvé préférable de tenter un résumé des interrogations autour de deux types de commentaires ou appréciations.

ORATIO et conceptualisation de la notion de rationnel

Question
Oratio ne propose-t-il pas qu'un travail sur des codes qui ne renverraient à rien ?

Éléments de réponse :
La notion de registre est beaucoup plus complexe que celle de code, car elle n'est pas centrée sur le signe mais sur la fonction d'objectivation qui suppose la mise en relation de discours tenus au moyen de formes d'expressions hétérogènes (et pas seulement celle d'un signifiant à un signifié). C'est lorsque je cherche à convertir 3,54 (élément d'un premier registre, inséré par ORATIO dans un discours de comparaison à 3,7 – ou 3,2345 ou …) au moyen d'un format à virgule fixe en un point d'une droite graduée (élément d'un deuxième registre, pris dans un discours d'approximations successives entre deux entiers puis, au moyen de zooms récurrents, entre deux graduations au dixième puis enfin attrapé par une graduation au dixième de dixième) que je peux comprendre le rôle de chaque décimale et, notamment, en quoi le 54 (de 3,54) est inférieur au 7 (de 3,7) ou supérieur au 2345 (de 3,2345). La notion de registre ne se conçoit pas de façon isolée (comme un code) mais en concurrence avec d'autres registres. La forme d'objectivation attendue (de la notion de décimal en l'occurrence) repose sur la recherche d'invariants entre ces représentations hétérogènes.
Lorsque l'on dit "ne renvoie à rien", on pense bien souvent à l'absence d'une expérience sensible, comme si la problématisation d'une notion mathématique ne pouvait se concevoir qu'en référence au monde physique. Sans chercher à nier l'importance de la modélisation de problèmes physiques dans la construction des objets et notions mathématiques (voir ci-dessus le paragraphe 0, point n° 0), il importe de la relativiser : "Or les mathématiques se nourrissent aussi de processus de création contingents et libres qui apportent des concepts réellement nouveaux, dont l'origine n'est **ni le monde extérieur** ni l'entendement pur, mais plutôt la **nécessité interne des formalismes eux-mêmes** " (Klein, 2000, p.71). Prenons quelques exemples.
La notion de continuité, sitôt qu'elle s'exprime en $(\varepsilon ; \eta)$, amène à prendre en compte des objets beaucoup plus diversifiés et complexes que ceux représentés graphiquement par un trait continu.
Le théorème de Fermat ($x \quad + y \quad = z$ n'admet pas de solutions entières pour $n > 2$), pour lequel une certaine forme d'expression (généralisant pour n quelconque l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ qui admet des solutions entières) est à l'origine et à l'horizon du problème posé.
La recherche de solutions, **exprimables par radicaux**, d'une équation de degré n témoigne d'une volonté des mathématiciens de considérer comme solutions acceptables à leur problème celles liées à une forme d'expression, les radicaux, dont on pourrait sans doute montrer qu'il s'agit bien d'un registre ; alors qu'il eût été envisageable – ce qu'a entrepris notamment Newton – de développer des méthodes d'analyse numérique pour exprimer et approcher les solutions de ce type d'équation.

En ce qui concerne les apprentissages liés aux rationnels à l'école élémentaire, rappelons enfin que ce qui nous a décidé à tenter l'expérience d'une introduction procédant par nécessités internes aux mathématiques provient du constat que la première source d'erreurs stables est plus liée à des obstacles sémiotiques qu'à des difficultés dans la modélisation des premiers problèmes rationnels.

ORATIO et les processus de validation

Remarque d'un participant

Un logiciel comme Form2fra (convertir des écritures à virgule en somme de fractions décimales) ne propose pas de "moulinette" pour valider les hypothèses des élèves. Seul le verdict sans appel du logiciel, et pas un travail réfléchi, permettrait de débusquer une confusion centièmes / centaines par exemple.

Éléments de réponse

Chaque logiciel d'ORATIO doit s'entendre dans un ensemble plus vaste, renvoyant à d'autres logiciels, donc à d'autres registres ou d'autres conversions, mais aussi à des expériences physiques dont on a vu l'affinité avec le registre des droites graduées. C'est pourquoi il convient, en présence d'un obstacle didactique, de s'interroger sur les possibilités offertes par ce dernier registre pour le traiter. En l'occurrence, le logiciel Form2gra qui propose des conversions, au moyen de zooms successifs, des écritures décimales vers le registre des droites graduées nous semble être une piste adaptée de travail consécutivement à une confusion de type centièmes / centaines. En effet, ce logiciel permet d'associer à chaque tête de série décimale (une puissance de dix) un niveau de "profondeur de zoom" et donc d'engager un protocole de discrimination basé sur des interventions directes de l'élève (sélectionner l'intervalle à agrandir, lui appliquer un zoom, décider d'arrêter, et donc de choisir une graduation, ou de poursuivre le processus...).

ANNEXES

Transparent #1

Les élèves comparent l'épaisseur de deux feuilles de papier, chacune issue d'un tas différent, connaissant l'épaisseur et le nombre de feuilles de chaque tas (dans un tas donné, les feuilles sont de même épaisseur). Ce problème est destiné à la construction de la notion de rationnel-mesure.
Propos d'un élève : *« 60 f[euilles] ; 7 mm, c'est du (papier) fin, c'est pas du A [un des types de papier étudiés auparavant], on avait trouvé pour A (3f ; 1 mm) » – sous-entendu 60 f de A feraient bien plus de 7 mm".*

Un traitement rhétorique du problème de la comparaison des épaisseurs de deux feuilles de papier (Brousseau, 1986, p. 141)

$$\frac{1}{3} = \frac{20}{60} \quad \text{or} \quad \frac{20}{60} > \frac{7}{60} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{3} > \frac{7}{60}$$

Un traitement fractionnaire du problème de la comparaison des épaisseurs de deux feuilles de papier

Transparent #2 : le registre des droites graduées

Données

Une droite graduée régulièrement par des entiers ; un repère formé d'un couple d'entiers privilégié, parfois initialement subdivisé en s ($s \geq 1$) intervalles ; un nombre entier f (initialement égal à s), le fractionneur, dans une fenêtre en blanc sur fond noir à gauche du repére ;

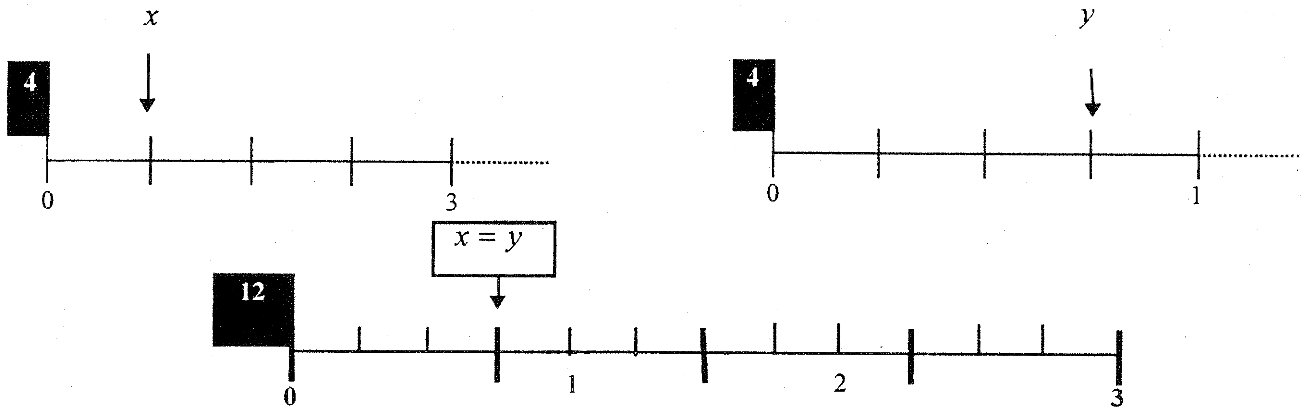
Ressources

Possibilité de resubdiviser **chaque intervalle** du repère en t sous-intervalles (f prenant alors la valeur $s\,t$), le recours à un système de zoom étant parfois possible ;
possibilité – pour certains logiciels seulement – de reporter le repére éventuellement resubdivisé.

Notons en outre que l'utilisateur :

saisit le nombre t directement au clavier, le logiciel assurant les opérations géométriques de resubdivision ;
peut effacer, modifier, tout recommencer...
marquer la position d'un rationnel par une flèche pointant vers un point de la droite.

Un exemple significatif : la possibilité d'inscrire différemment un quart de trois et trois fois un quart dans ce registre



Un quart de trois et trois fois un quart réfèrent au même nombre

Transparent # 3 : compétences minimales pour discriminer une fraction d'une autre fraction, un décimal d'un autre décimal

Registre fractionnaire

ranger les fractions par rapport aux entiers ;
ranger les fractions entre elles.
Exemples :

Séparation de $\frac{7}{5}$ et $\frac{9}{4}$, immédiat par 2

Séparation de $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{3}$

$\frac{3}{5}?5 = 3$; $\frac{2}{3}?5 = \frac{10}{3}$; et comme $\frac{10}{3} > 3$: $\frac{3}{5} < \frac{2}{3}$

Le point 0 utilise l'égalité : $\frac{a}{b}?n = \frac{na}{b}$, légitimée dans un contexte physique.

Registre décimal

ranger les décimaux entre eux .
Un outil purement sémiotique, le format à virgule fixe, suffit à l'acquisition de cette compétence.

BIBLIOGRAPHIE

Adjiage Robert & Heideier Aimé (1998), *didacticiels de la série Oratio*, éditions Pierron, 57206 Sarreguemines.

Adjiage Robert (1999), *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial*, thèse, IREM, ULP Strasbourg 1.

Adjiage Robert et Pluvinage François (2000), *Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels*, RDM Volume 20/1 n° 58, pp. 41-87, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

Brousseau Guy et Nadine (1986), *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, thèse, Bordeaux.

Brousseau Guy et Nadine (1987), *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, IREM de Bordeaux.

Duval Raymond (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Éditions Peter Lang, Bern.

Duval Raymond (1996), *Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?* RDM Volume 16/3, pp. 349-382, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

Klein Étienne (2000), *L'atome au pied du mur*, p. 71, Éditions Le Pommier.

PRESENTATION DE QUELQUES ACTIVITES EN FORMATION P.E.2
ARTICULATION THEORIE DIDACTIQUE ET PRATIQUE DE CLASSE

ATELIER 11
Michel WOROBEL
I.U.F.M. d'Auxerre

Présentation générale

Parcours photo pour prendre connaissance des locaux

I Programme de formation

Document A
Fiche remise aux P.E. 2 en début d'année
12 séances aboutissant à 12 rapports de séances

II Modalités d'évaluation

Document B
Fiche remise aux P.E. 2 en début d'année

III Organisation de l'année

Document C
Ce sont, en général, des séances de 2 heures
- une partie calcul mental
- puis une séance sur les situations d'apprentissage ou une séance de géométrie

Lorsque les séances sont de 3 heures,
- la 3ème heure est consacrée à un travail sur manuels en vu de réaliser le travail de groupe demandé en évaluation (doc A et B)

IV Modalités de validation

Bilan à partir d'une grille faisant référence à ce qui a été fait.

Partie « Situation d'apprentissage »

Objectifs de la formation

Document D

Amener le stagiaire à

→ Savoir faire des choix pertinents en fonction des objectifs visés pour sa classe

→ Savoir élaborer une fiche de préparation

En montrant des mises en œuvre de situations d'apprentissage variées qui constitueront un référent commun

Les contenus disciplinaires ne sont pas abordés de front

Il est nécessaire de dissocier les 3 types de situations d'apprentissage du support mathématique utilisé

J'apprends,		
J'applique, (type 1)	non synonyme de	Contenu notionnel,
Petites marches, (type 2)		Savoir-faire
Situations problèmes (type 3)		Recherche « gratuite »

Mise en œuvre

Quand les gens sont actifs, ils ont du mal « à voir »

Document D

Donc

- Deux stagiaires sont chargés d'observer le déroulement de la séance et à partie de leur prise de notes doivent reconstituer la fiche de préparation correspondant à cette mise en œuvre
- A la fin de chaque séance discussion avec les 2 observateurs seulement
- ou avec le groupe tout entier

⇨ le document brut élaboré à la suite de cette séance est photocopié pour l'ensemble des stagiaires

Documents E, F et G

La situation de type 1 nécessite de trouver un contenu mathématique que les stagiaires ne connaissent pas

Pour la situation de type 3 : C'est le professeur qui valide et en cas de non validation donne un contre exemple. Ce n'est donc pas une situation auto validante mais c'est ce qui arrive souvent dans le contexte de la classe et c'est l'occasion d'aborder cet aspect de la validation (difficulté pour l'enseignant à déterminer la validité de certaines réponses car il n'a pas tout envisagé)

Importance du travail de groupe

Importance de la dévolution

Remarques :

- Les observateurs ont tendance à vouloir participer.
- Un des observateurs doit se centrer sur le maître et l'autre sur les stagiaires.

- La discussion avec les observateurs s'engage parfois en cours de séance (sauf pour la séance 1 (nombres complexes, doc. C) qui accapare le formateur
  - · permet d'orienter l'observation
  - · de mettre l'accent sur les choix de l'enseignant
  - · de mettre l'accent sur le rôle de l'enseignant
  - ↳ discussion sur les a priori
  - ↳ nécessaires anticipations, donc éléments de la fiche de préparation

« A votre avis, comment je vais gérer la suite ?
Qu'est-ce que j'ai à faire ?
Que vont-ils trouver ? »

Partie « Calcul mental »

Documents H à L

Objectifs de la formation :

Amener le stagiaire à
→ Savoir faire le choix de variables didactiques en fonction des objectifs visés
→ Savoir conduire une séance
En vivant des séances de calcul mental variées

Ce qui est ciblé comme paramètres de la situation est transposable sur d'autres situations que des situations de calcul mental

Mise en œuvre :

Séances de 10 à 15 min, faites comme elles seraient faites dans une classe (avec ardoises) ; extraites d'un manuel de C.M.
Variation des mises en œuvre
Étude des paramètres
Travail sur : l'évaluation
La gestion du temps
La progression

- Deux stagiaires sont chargés d'observer le déroulement de la séance et à partir de leur prise de notes doivent reconstituer la fiche de préparation correspondant à cette mise en œuvre
- A la fin de chaque séance discussion avec les 2 observateurs seulement ou avec le groupe tout entier
  - ⇨ réflexion sur l'objectif opérationnel et sur les différents points devant figurer dans la fiche de préparation
  - ⇨ le document brut élaboré à la suite de cette séance est photocopié pour l'ensemble des stagiaires.

Variables évoquées

Impact de la compétition
« Le premier qui a bon au premier exercice a 10 points mais après il est hors course »

↬ Il peut y avoir un effet pervers car si le but est d'obtenir une participation maximum celui qui a obtenu ses 10 points peut se sentir démotivé par la suite
↬ Il faut cependant que chacun puisse avoir sa chance !

Impact de la consigne
« Vous levez le doigt quand vous avez fini »

↬ Il se peut qu'on attende un certain temps ! (pour diverses raisons) Et si personne ne lève le doigt ?

Impact de la correction
« Expliquez comment vous avez obtenu votre résultat »

↬ Passe-t-on toutes les procédures en revue ou choisit-on certaines d'entre elles ?
↬ S'agit-il de comparer des procédures efficaces ou de valider des procédures ?
↬ Le but doit être bien défini pour les élèves

↬ Le but peut être d'une autre nature : Modéliser des procédures de calcul

A partir des différents constats :
Peut-on envisager une progression ?

Partie « Géométrie »

Il y a une salle réservée à l'enseignement des mathématiques
⇨ tout le matériel pour faire ces activités est donc en permanence disponible ce qui autorise des démarches originales et permettent de travailler sur l'incidence de la présence ou non d'un certain nombre d'outils comme pouvant donner l'idée de …

Documents M à Q et plusieurs compte-rendu de séances

Objectifs de la formation

Amener le stagiaire à
→ S'interroger sur ses connaissances géométriques, vocabulaire, propriétés
→ S'interroger sur la place du travail individuel (dévolution)
→ S'interroger sur la nécessité de certaines contraintes (figures imposées ou figures libres etc.)
→ S'interroger sur l'importance et les limites d'une situation de communication
→ S'interroger sur les difficultés de la tâche et la gestion de la classe

Montrer des gestions de situations de classe variées avec une analyse des avantages et inconvénients pour mieux choisir

Séquence 1

Recherche individuelle libre
Bandes signifie à bords parallèles ; il n'y a pas de bandes prédécoupées et distribuées aux stagiaires ; c'est à eux de les réaliser
Géométriquement différentes pose le problème de ce que cela signifie
Réflexions sur l'organisation du travail, la place du tâtonnement, les aides possibles sans donner les solutions (introduction progressive d'un secteur angulaire dans ...)
Variante ① :
Répartition de la tâche pour avoir tous les cas de figure
1/3 du groupe travaillant avec des secteurs angulaires d'angle aigu
1/3 autre avec des angles obtus
le dernier tiers avec des angles droits
Variante ② :
On impose des mesures d'angle comme 60° ; 30° ; 90° ; etc.
Questions :
Peut-on obtenir ...
(un quadrilatère avec 1 (2) angle(s) droit(s) en utilisant ... ?)

Séquence 2

Un exemple d'assemblage de 2 triangles équilatéraux est donné au tableau
Quand les stagiaires font le dessin à main levée sur papier uni, ils n'identifient pas toujours l'équivalence des figures obtenues suivant l'orientation choisie

Le travail est effectué en scindant le groupe en deux et en menant l'activité de deux manières différentes avec un même but final pour les deux groupes
↳ effet de la démarche sur les procédures

Séquence 3

Travail par groupes de 3
Il est souvent préférable d'imposer les figures devant servir de support car les figures inventées par les stagiaires eux-mêmes sont généralement trop complexes

Problème de consigne

« Jeu du facteur
Transmettez un message, mais vous ne devez pas tout dire.
Vous ne pouvez pas dessiner la figure elle-même (un groupe a une fois dessiné la figure à l'encre sympathique !)

Problème des contraintes implicites et/ou explicites

Faut-il donner un point de départ sur la feuille ?
Faut-il que les deux figures soient orientées de la même manière ?

Problème de gestion de l'hétérogénéité des rythmes

Échanges au fur et à mesure que le travail est fini dans les différents groupes (nécessité de numéroter les groupes pour savoir qui échange avec qui)

Pour la séquence S3a il est nécessaire de faire une phase individuelle avant le travail de groupe si on veut faire émerger des procédures différentes
Le codage doit être élaboré par le groupe (nécessité d'un consensus)

Séquence 4
Problème de vocabulaire
« Tracez le …
Vous ne trouvez pas le même
Est-ce possible ? »
↳ Rôle des mots inducteurs ou trompeurs
↳ Prendre conscience de l'importance des mots et de leur effet contractuel

Travail de groupe sur les manuels

Thèmes abordés sur un ou plusieurs niveaux
Groupes de 4 à 5 stagiaires
Travail effectué pendant les cours
<u>2 modalités</u>
- faire une analyse sans texte de cadrage
une synthèse est alors faite par le professeur qui fait émerger les critères implicitement ou explicitement utilisés
- faire une analyse avec textes de cadrage
synthèse de plusieurs grilles

<u>Ce qui ressort venant d'eux</u>
→ il y a des manuels de type « boîte à outil »
→ il y a des manuels très enfermants
→ il y a un décalage entre les propositions du Livre du Maître et le manuel

<u>Choix des thèmes</u>
Si les lieux de stage sont connus suffisamment tôt les thèmes choisis sont en rapport avec ce qui sera à traiter durant le stage

<u>Objectifs</u>
Faire prendre conscience que 2 manuels ne fonctionnent pas de la même manière
Faire prendre conscience qu'il y a des manuels que l'on a intérêt à suivre pour la cohérence de la progression plutôt que de naviguer sur plusieurs manuels

Se poser la question et chercher à y répondre
« Qu'est-ce qu'on peut faire avec un manuel qu'on n'a pas choisi ? »

Le travail peut être diffusé s'il y a une demande

Document A

PROGRAMME DE FORMATION EN PE2

Objectifs généraux et modalités de mise en œuvres des différentes activités

Pour la partie "Calcul mental et géométrie"

- étoffer les représentations de séances d'apprentissage en mathématiques avec les dominantes
  - paramètres et variables didactiques en calcul mental
  - mise en œuvre en géométrie
- pratiquer une activité mathématique (transposable en classe de CM)
- travailler autour de la notion de fiche de préparation

Modalités pratiques : séries de séances "variées" que j'anime, après le vécu : discussion sur le ressenti, les procédures mises en œuvre, les paramètres possibles de la situation ; 2 PE2 en observateurs qui devront rendre un compte rendu écrit de type fiche de préparation de séance avec commentaires sur le déroulement.

Pour la partie "Situation d'apprentissage"

- "institutionnaliser", par et au travers du vécu, les trois types de situations d'apprentissage en référence au document de R. Charnay

Modalités pratiques : séries de 3 séances que j'anime (mise en œuvre de type "J'apprends, j'applique", "petites marches" et "situation-problème"), discussion sur 2 plans "comment l'avez-vous vécu ?" "Qu'avez-vous appris ? » 2 PE2 en observateurs qui devront rendre un compte rendu écrit de type fiche de préparation de séance avec commentaires sur le déroulement.

Pour la partie "Manuels scolaires"

- étude critique sur un point précis du contenu (varié ?) des manuels scolaires
- prise de conscience des possibilités et limites des manuels et livres du maître existant

Modalités pratiques : un point précis du programme (introduction de la soustraction), fiche de lecture dans des manuels différents, tableau comparatif synthétique. Travail en 2 temps : le premier plutôt du côté des situations d'introduction, le deuxième sur un thème plus large ou du côté des programmations, progressions.

Fichier "Evariste"

- pratiquer des mathématiques, recherche, problèmes "ouverts"
- gestion de classe "individualisée", alimenter un coin "lecture et math"

Modalités pratiques : un fichier d'exercices est disponible en salle de mathématiques. Contrat à remplir : rendre 30 exercices "Bons" pendant l'année scolaire. Je ne regarde que le résultat ; à priori il n'y aura pas de corrigé.

Consignes pour le stage tutelle

Discuter, rapporter :

a) modèle type de fiche de préparation (de l'IMF ?)

b) comment sont placés les horaires de mathématiques dans l'emploi du temps ?

c) comment sont réparties les activités mathématiques (place du calcul mental, alternance géométrie calcul,...) ?

d) plan de la classe si liaison avec la mise en place d'activités mathématiques.

Penser à la mise en place <u>personnelle</u> d'une situation d'apprentissage

Penser à lister ce que le stage aura révélé comme questions, manques...

Voir comment les IMF utilisent les manuels scolaires.

Document B

CONTROLE CONTINU EN MATHEMATIQUE

PE2 98/99

L'évaluation finale en mathématique portera principalement sur les deux volets suivants

1) Un travail par binôme de stage de pratique accompagnée

L'accent sera mis toute l'année sur les situations d'apprentissage et en particulier sur la place du problème dans l'enseignement des mathématiques. Des documents théoriques seront fournis : ils aideront chaque binôme à mettre en œuvre une situation d'apprentissage dans une classe, prioritairement celle du stage de pratique accompagnée.
Chaque binôme devra rendre un dossier précisant :

- les objectifs de l'activité et les caractéristiques de mise en œuvre
- une analyse a priori
- le compte rendu du déroulement réel
- l'analyse a posteriori du travail effectué
- l'évaluation de ce qu'ont appris les élèves
- les prolongements possibles

Il donnera lieu à une évaluation "binômiale" comptant pour dans l'évaluation finale.
Seront pris en compte la caractérisation et l'intérêt pédagogique de l'activité proposée, la pertinence de l'analyse à posteriori en regard du déroulement réel, ainsi que la qualité de la rédaction.

2) Deux travaux de groupe

a - une analyse comparée des manuels scolaires sera menée par groupes sur des thèmes restreints. L'objectif est de créer dans chaque groupe de PE2 un dossier de référence utilisable par chacun à son entrée en poste. L'implication dans la recherche et la qualité du dossier produit donneront lieu à *une évaluation comptant pour dans l'évaluation finale.*
b - un deuxième travail de groupe sera négocié avec les PE2 et pourra porter, par exemple, sur :

- des fiches de lecture de documents pédagogiques avec ouverture possible vers la classe sous forme de pistes de travail.
- Une analyse comparée de manuels scolaires axée cette fois sur la comparaison de progressions pour une même notion
- l'élaboration d'un cahier de référence en géométrie pour le maître
- ....

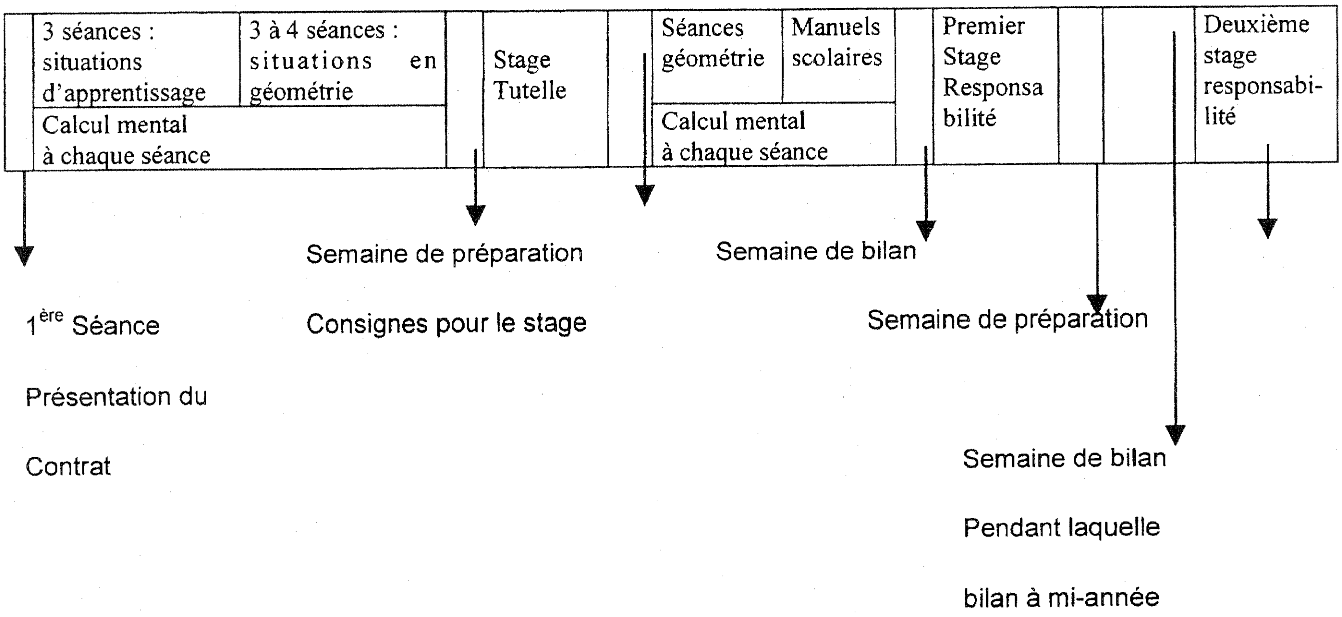
L'implication dans la recherche et la qualité du dossier produit donneront lieu à *une évaluation comptant pour dans l'évaluation finale.*

Sur d'autres travaux seront conduites des évaluations formatives ou une auto-évaluation (non prises en compte directement dans l'évaluation terminale)

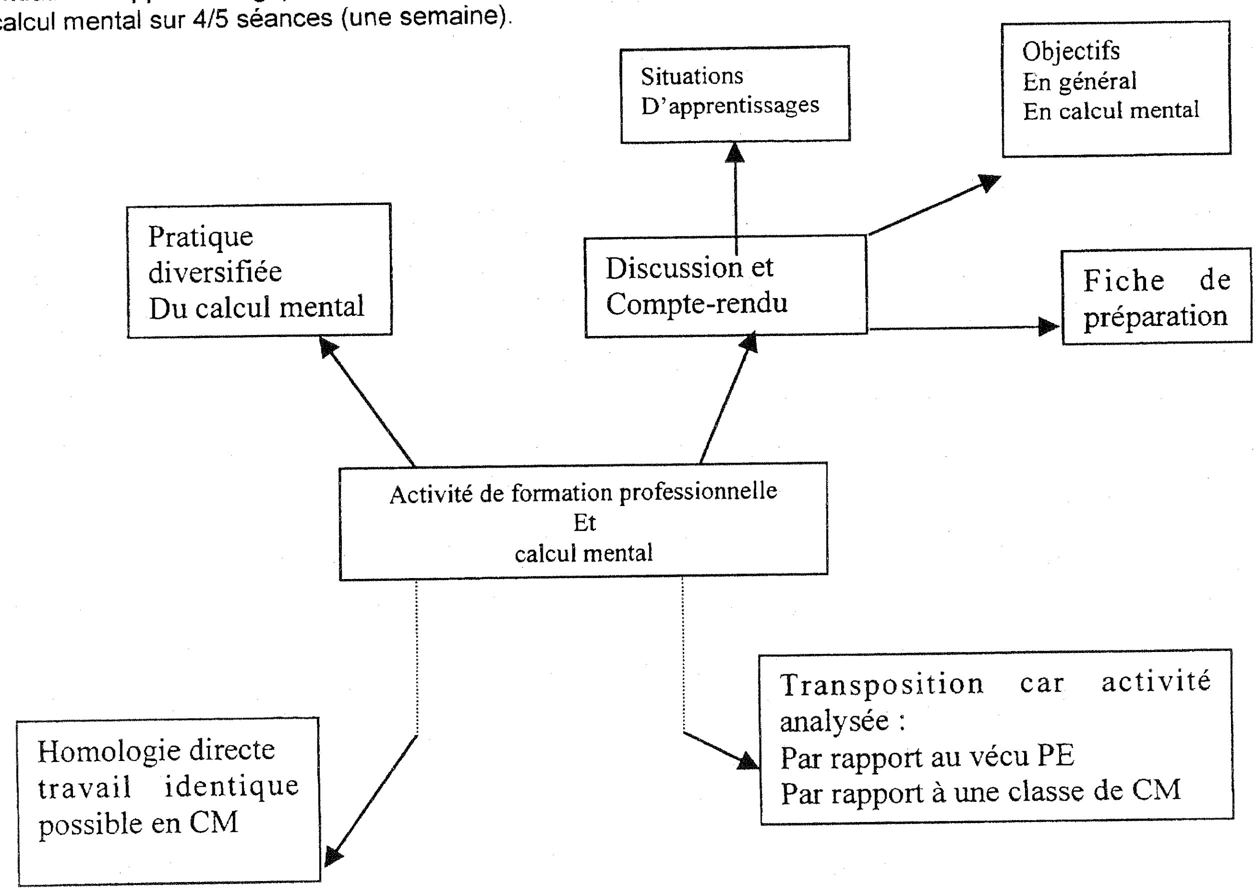
Des fiches bilans de séances de calcul mental et géométrie seront demandées.
Un fichier d'exercices à faire sera mis à disposition avec une fiche personnelle de suivi (un minimum de 30 exercices sur l'année).

Document C

L'expérience dans son contexte local



Pendant cette période avant le deuxième stage en responsabilité, les séances de calcul mental s'arrêtent pratiquement lorsque tous les PE2 ont eu à rendre un compte rendu de calcul mental et de géométrie (ou situation d'apprentissage). Une séance termine en général le travail sur la notion de progression possible en calcul mental sur 4/5 séances (une semaine).



Différentes stratégies de formation initiale selon Kusniak et Houdement (ou du moins telles que je les ai comprises)

- Stratégies « moins professionnelles » et peu utilisées en règle générale
- Stratégies culturelles. (C'est le cas par exemple de ce que nous faisons dans un module culturel optionnel que nous présentons aux étudiants « Formes géométriques et arts plastique »)
- Stratégies de recherche applicatives
- Stratégies basées sur l'autonomie.

Stratégies basées sur la monstration

Donnent aux étudiants des modèles d'action : c'est principalement celle utilisée par les IMF pendant les stages « tutelles ».

Stratégies basées sur l'homologie

Se fondent sur l'action de l'étudiant

	Proche de la monstration	Proche de la transposition
Directes Très proche de celle de l'école élémentaire (dans le contexte d'une conception constructiviste des apprentissages)	Ignorent le processus de transfert qui les sous-tend	Prétextes à plus d'explication (détails et variantes de mises en œuvres…) pour provoquer une certaine réflexion critique de la part des étudiants.
Indirectes Conservent la forme, sans l'intégralité du fond.		Le phénomène de transposition n'est pas pris en compte explicitement.

Stratégies basées sur la transposition

Supposent l'existence d'un savoir relatif à la pratique de l'enseignement qu'il s'agit de communiquer à l'étudiant.
Le formateur transmet ce savoir en formation, d'où l'existence d'un phénomène de transposition. Il est conscient des déformations que ce savoir subit lorsqu'il est « appris » par le formé et cherche à contrôler a priori ces transformations.
Deux approches différentes sont possibles :
Approche 1 de type pédagogique s'appuyant sur l'INRP
Approche 2 de type didactique s'appuyant sur les IREM et les équipes en didactique

L'approche choisie pour ce travail me semble relever de la transposition (ou tout au moins de l'homologie directe). En effet l'exigence de compte-rendu fait par les élèves permet :

- *De voir la compréhension que les rapporteurs ont eue de la situation et de sa gestion.*
- *De faire prendre de la distance, du recul à ceux qui l'ont vécu lors de la lecture du compte-rendu.*

Bien qu'une mise en relation précise ne soit pas toujours possible : compte-rendu arrivant décalé dans le temps, il arrive qu'une discussion ait lieu a posteriori qui, cette fois, me semble alors faire glisser la stratégie nettement vers la transposition.
Bien que décrite comme plus utilisée en formation continue par C.Houdement, il me semble que le calcul mental peut se prêter à une stratégie de transposition.

Document D

MISE EN OEUVRE EN FORMATION INITIALE ET CONTINUE DE TROIS TYPES DE SITUATIONS D'APPRENTISSAGE

Choix : faire vivre et analyser par les stagiaires, 3 types de situations d'apprentissage afin d'en faire ressortir leurs caractéristiques.

Situation 1 - « J'apprends, j'applique » et les nombres complexes.
Situation 2 - « Petites marches » et les sections planes du cube.
Situation 3 - « Situation-problème » et les carrés de DE BONO.
Les contenus ont été choisis dans des domaines différents des mathématiques et surtout pour le fait qu'ils doivent normalement être "nouveaux" pour les stagiaires et dans leur champ de compréhension.
L'organisation de classe choisie n'est pas spécifique de la situation mise en œuvre mais il faut bien en décider une qui est la plus adaptée à ce que l'on veut "montrer" (sinon cela multiplierait le nombre de situations à présenter !)

Modalités : durée 3h ou 6h.

Après chaque vécu, réactions « à chaud » sur deux questions :
Que pensez-vous avoir appris ?
Comment l'avez-vous ressenti ?
Question supplémentaire pour la situation 3 : dans quelle mesure le travail de groupe se justifie - t - il ?

Réactions orales si 3h, sinon réactions écrites individuellement puis en groupe de 4/5 avec production d'une affiche de synthèse.

Stage "Math en FC" (28 stagiaires) : placer pour 4 observateurs (différents pour chacune des phases ?) dont le rôle sera double :
- observer l'activité du professeur et des stagiaires.
- noter ce qui sera dit lors du bilan dans les groupes de 6 : réactions « à chaud ».

Ils pourront ainsi présenter oralement à chaud ce qui se sera dit, vécu et ensuite mettre par écrit pour le classeur de stage.

Document E

Situation 1 : nombres complexes

Objectif : première prise de contact avec un nouvel ensemble de nombre **C**.

Organisation : collectif frontal, tables mises en "rangée- colonne", avec des colonnes de 2 tables, travail individuel mais les discussions avec le voisin sont tolérées.
Démarche : rappel, justification, définition, début de fonctionnement, application immédiate.
Relation maître-élèves uniquement, maître 80% du temps de parole.
Avantages : - minutage possible
- pas de discussion
- une seule parole celle du maître

Inconvénients : - décrochage de certains qui ne voient pas l'utilité du travail.
- sensation d'échec personnel.
- tache non motivante malgré la tentative de présentation argumentée

Fais ressortir les fantasmes mathématiques "FORTS" des stagiaires.

Scénario
Vous connaissez certainement les différents ensembles de nombres N, Z, D, Q, R que les enfants côtoient, approfondissent pour certains à l'école primaire.
Rappel de l'emboîtement des ensembles avec le diagramme en patate par le biais des équations :
($x+1=0 \rightarrow Z$; $10x=3 \rightarrow D$; $3x=2 \rightarrow Q$; $x^2=2 \rightarrow R$)
Comme vous le savez, dans R, il n'y a pas de solution à l'équation $x^2 = -1$.
Eh bien, les algébristes ont inventé un nouveau « nombre » qui serait la solution de cette équation, on l'appellera « i ».
Comme souvent ce nouvel objet mathématique servira en physique, en particulier lors de l'étude des intensités de courant dans les circuits électriques.
Il sera défini par $i^2 = -1$
Ceci étant, on construit, en combinant avec les éléments de R un nouvel ensemble que l'on appellera C, ensemble des nombres complexes (ensemble qui doit prolonger R). Donc, grosso-modo, les règles de calcul sur les nombres dans R seront respectées dans ce nouvel ensemble.
Par exemple :
Combinons - par addition $a \in R$ $a+i \in C$
- par multiplication $b \in R$ $bxi \in C$

Combinons une nouvelle fois ces nouveaux nombres :
- par addition $a + i + bi = a + (b+1)i$
- par multiplication $(a+i) \times bi = abi + b\,i^2$ or $i^2=-1$
$= -b + abi$

Remarquons qu'au « deuxième ordre » on obtient une forme quasi « généralisable » : a + bi
Vérifions le : $(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bd\,i^2$
$= (ac-bd) + (bc + ad)i$ CQFD

Application : calculer $(2 + 3i)(5 - 4i)$

Un exemple de compte rendu de stagiaire :

FICHE DE PREPARATION: introduction aux nombres complexes

Lundi 12 Septembre 1998 DUREE: 30 minutes

OBJECTIFS:
Découverte des nombres complexes:
- le nombre *i*
- forme générale d'un nombre complexe
- règles de calcul dans **C**.

DEMARCHE GLOBALE:
Mise en place d'une situation de "J'apprends, j'applique"

DEROULEMENT DE LA SEANCE:

PHASE n°1:

Type de situation: cours magistral

Structure de travail: collectif frontal

Durée: 25 minutes

Consignes: Le maître écrit, en expliquant, la leçon au tableau. Les élèves écrivent la leçon sur leur cahier de Mathématiques.

PHASE n°2:

Type de situation: exercice d'application

Structure de travail: individuel

Durée: 5 minutes

Consignes: Les élèves cherchent seuls la solution de l'exercice. Le maître circule dans la classe pour répondre à d'éventuelles questions ou aider les élèves en difficulté. La correction est faite au tableau par un élève de la classe.

ANALYSE DE LA SEANCE:

1°)Comportement du maître:

Le but du maître est de présenter aux élèves une notion nouvelle: les nombres complexes. Pour cela, il suppose connus les ensembles de nombres: **N, Z, D, Q** et **R**.
Le maître fera un bref rappel sur ces ensembles, en les introduisant par la résolution d'équations. Il procède par un cours frontal: le maître écrit au tableau tous les éléments de sa leçon en les expliquant. Il s'assure brièvement que ses élèves comprennent et suivent. Il pose quelques questions (mais il n'attend pas forcément la réponse). Il se persuade que ses élèves ont compris en utilisant des expressions comme: "Vous admettrez que...", "Tout le monde suit ?".La logique du cours doit suffire à sa compréhension.
A la fin de la leçon, le maître donne aux élèves un exercice d'application. Le maître fait travailler les élèves individuellement pour s'assurer de la compréhension de chacun. Il impose un travail silencieux et personnel: "Si vous discutez, c'est que vous avez terminé!". Il passe dans les rangs pour aider les élèves. Mais il ne s'appuie pour répondre aux questions que sur le cours qu'il a fait au tableau: "Si vous avez suivi, c'est simple...". Enfin, une élève est désignée pour faire la correction au tableau. Celle-ci ayant réussi, aucune explication supplémentaire ne sera donnée à ceux qui ont échoués.

2°) Comportement des élèves:

Les élèves sont au début de la leçon très attentifs. Ils notent le cours et font les schémas. Certains participent à voix basse, en répondant aux questions du maître. Quand celui-ci introduit le nombre *i*, certains murmurent pour montrer qu'ils ne comprennent pas. Mais ils n'osent pas interrompre le cours.
Plus les nouvelles notions s'accumulent, moins les élèves sont concentrés sur la leçon. Ils se contentent de recopier le tableau. A la fin du cours, les élèves n'ont intégré que les éléments du début de la leçon. Il ne peuvent donc pas réussir l'exercice et auront un gros travail à fournir à la maison.

3°) Conclusion:

La situation de "J'apprends-j'applique" ~~est~~ sécurisante pour le maître car elle lui permet de bien contrôler le temps. De plus si sa leçon est "sans faille", elle doit se suffire à elle-même, et le maître n'a pas à apporter d'autres explications. La situation de "J'apprends-j'applique" sécurise aussi les élèves qui n'aiment pas s'investir en cours. Cependant, il est difficile pour les élèves de simultanément suivre, comprendre et noter le cours (surtout si la séance est longue). Les élèves ont un rôle trop passif, et beaucoup ne font que de la copie.
Cette situation d'apprentissage n'est donc pas idéale, mais permet d'introduire certaines notions délicates.

Document F

Situation 2 : section plane du cube

Objectif : découvrir progressivement les différentes sections planes du cube

Organisation : même disposition de classe que la situation 1 mais la recherche se fait avec son voisin, on ne passe à l'exercice suivant que si j'ai validé la solution proposée. Validation collective au tableau lorsque tout le monde (ou presque) a trouvé.

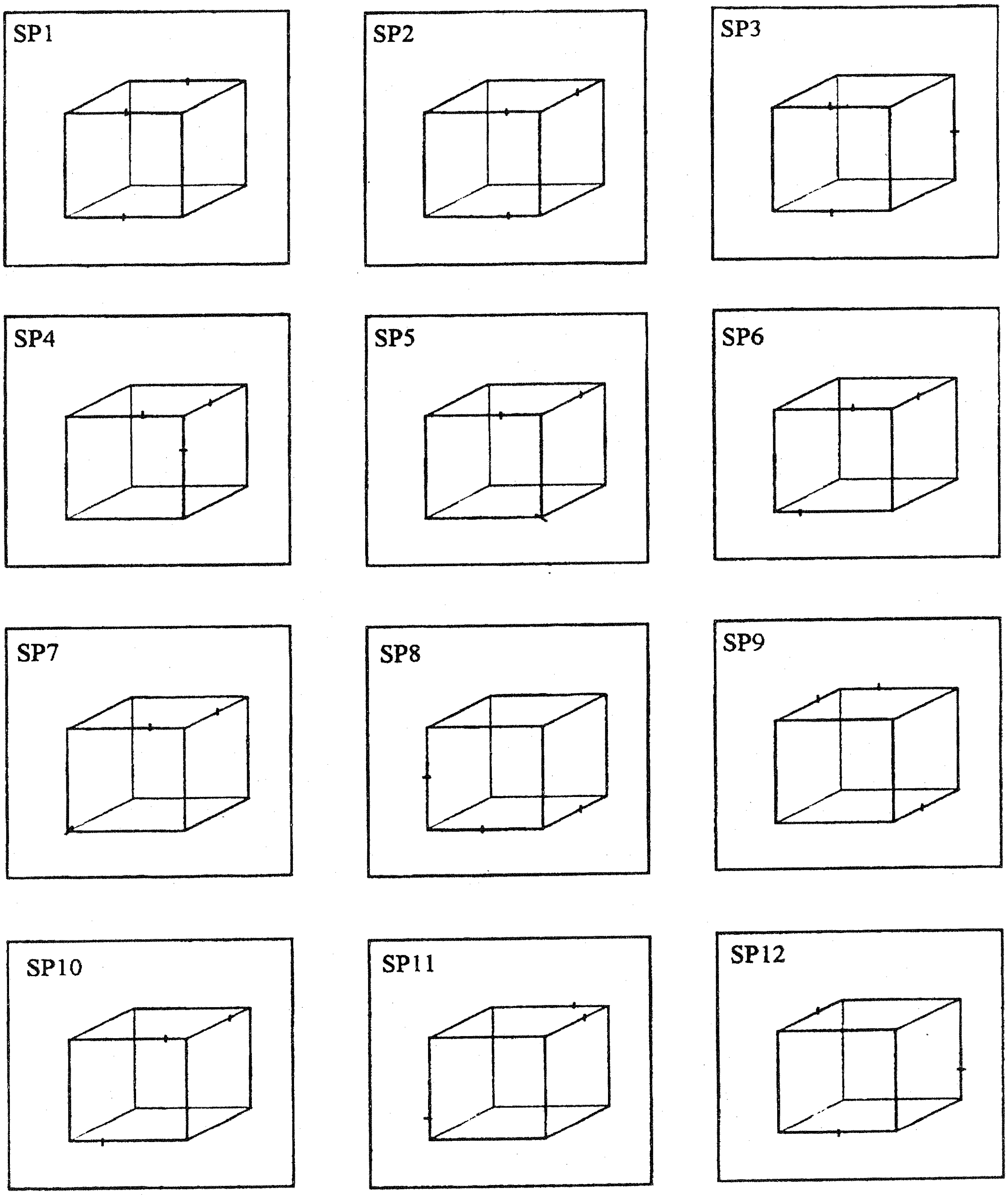
Démarche : consigne rapide relative à la tâche et à ma gestion du travail, distribution de la feuille, circulation pour préciser la consigne et valider les productions. Les exercices sont théoriquement de difficultés croissantes. Chaque "petite marche" sera traitée comme une situation-problème.
Relation courte maître-élèves puis majoritairement élèves-élèves, maître 20% du temps de parole.

Scénario : voici une feuille sur laquelle sont représentés douze cubes. Sur les arêtes de chacun de ces cubes sont placés 3 points. Vous devez retrouver le plan de coupe du cube qui passe par ces 3 points et tracer sur les faces du cube les traces de ce plan de coupe. Travail avec votre voisin proche (*mettez-vous côte à côte et non face à face !*). Vous faîtes les exercices dans l'ordre car j'ai gradué les difficultés et vous pouvez avoir besoin de ce qui a été réalisé avant pour vous aider à faire la suite. Je passe dans les rangs pour valider votre proposition et vous passez ensuite à l'exercice suivant.

Avantages : - travail possible à des rythmes différents.
- les stagiaires s'engagent tous dans le travail "facile au départ".
- suivi différencié possible de la tâche

Inconvénients : - comment gérer les différentes vitesses à l'arrivée ?
- difficile de répondre à toutes les demandes lorsque la difficulté s'accroît.

Ci-joint
La feuille élève
Un compte-rendu de séance :



Sections planes du cube (spcube1.pub)

FICHE DE PREPARATION DE COURS

Jour : mardi 15 septembre 1998

Durée : environ heure

Activité : géométrie dans l'espace «les sections planes du cubes »

Objectifs : - *de savoir* : être capable de déterminer le plan de coupe d'un cube passant par les trois points donnés
- *de méthodologie* : être capable de travailler par groupe de deux, de confronter ses idées de trouver des critères de validations.

Matériel nécessaire : - 1 feuille par élève, de format A3, constituée d'une page comportant 12 représentations de cube en perspective et présentant trois points de coupe, ainsi qu'une page où sont représentés deux cubes agrandis, destinés aux divers essais et recherches
- le matériel de géométrie usuel
- quelques cubes en bois pour les manipulations

Démarche globale : il s'agit à la fois d'une séance d'approche et de recherche, destinée à mettre en place une situation d'apprentissage du type «petites marches », dans le but d'en retirer les avantages et les inconvénients.

Déroulement de la séance : elle débute par la dévolution du problème à la classe et comporte trois phases distinctes : la première est destinée à l'action et à la recherche personnelle, la seconde doit permettre aux élèves de formuler leur construction après avoir confronté leurs méthodes et enfin la troisième concerne la validation de cet exercice, à la fois à l'intérieur du groupe et par l'enseignant.

Consigne : elle est donnée oralement, par deux fois : « il s'agit de déterminer le plan de coupe qui passe par les trois points inscrits sur les arêtes du cubes ». Toutefois l'enseignant peut donner le conseil suivant : « Comme il s'agit d'une situation de type petites marches, il est préférable de suivre l'ordre donné car les difficultés ont été graduées ». De plus, il faut attendre l'approbation du maître avant de continuer les exercices, même s'il est possible d'anticiper la résolution du problème suivant.

Structure du travail : les élèves se mettent par deux, l'un à côté de l'autre afin d'avoir la même vision du cube.

Remarques sur le déroulement de la séance :
- très rapidement, les cubes en bois ont été demandés
- *plusieurs méthodes ont été utilisées* : dans certains groupes, chacun cherche la solution et la confronte avec celle de son voisin afin de la valider, d'autres groupes où l'un des élèves est plus rapide que l'autre explique à son binôme, enfin un troisième cas s'est présenté, celui où les deux élèves sont en situations d'échec et abandonnent très rapidement, soit parce que l'activité est jugée trop longue, soit parce qu'elle est trop difficile ou peu motivante. L'une des remédiations possibles aurait été de constituer des groupes plus homogènes, même au cours de l'activité.
- *différents outils ont été utilisés* : certains ont «vu » ce qui se passait à l'intérieur du cube en bois et l'ont représenté sur la feuille, d'autres se sont servis de plusieurs données géométriques (les milieux, la symétrie, les mesures de segments...), et ont donc réinvesti certaines de leurs connaissances, d'autres encore ont utilisé les propriétés des plans (comme par exemple les plans parallèles). Un seul groupe pour qui la situation était déjà connue a réinvesti ses connaissances et utilisé des traits de construction.

Avantages et inconvénients de cette situation du type «petites marches »

Les avantages :
- le problème est découpé en sous problèmes, ce qui permet une hiérarchisation des difficultés et pour chacun, une évolution à son propre rythme.
- Le travail de recherche par paire facilite l'échange la confrontation et la responsabilisation de chacun des élèves du groupe. Si les élèves avaient travaillé par quatre, la disposition spatiale de face ou en ligne n'aurait pas permis une communication suffisante à la résolution du problème.

Les inconvénients :
- il convient de ne pas trop sectionner le problème en micro-problèmes nuisant à la rapidité de résolution.
- cette situation présente une difficulté liée à l'entrée dans le problème
- à partir de la vignette n°8, les méthodes utilisées précédemment ne sont plus applicables aux dernières représentations du cube, pouvant conduire les élèves au blocage et à l'échec, d'où l'importance à accorder à l'élaboration du support de construction.

En fait, la séance pouvait être conçue comme une suite de quatre petites marches, puisque chacune des lignes constituait un objectif relevant de quatre processus différents.

La séance s'est terminée par la remise des solutions et l'invitation à poser des questions sur le corrigé donné. Dans la classe, il conviendrait de prévoir une phase d'institutionnalisation ainsi qu'une phase de réinvestissement afin de pouvoir évaluer les productions et vérifier si l'objectif est réellement atteint.

Document G

<u>Situation 3 :</u> carrés de DE BONO (d'après une idée de F. Boule)

Objectif : découvrir un critère de tri lié à une discrimination visuelle
élaborer un critère de tri

Organisation : travail de groupe (tâche "difficile"), groupes "géographiques".
situation de communication dans un second temps

Démarche : présentation des 2 tâches, validation des propositions, gestion des échanges entre groupes.
Relation courte maître-élèves puis majoritairement élèves-élèves, maître 10% du temps de parole.

Avantages : - travail "défi" d'où dévolution facile du problème.
- autovalidation possible à l'intérieur des groupes dans les 2 tâches.
- stagiaires plus à l'aise car moins de risques d'échecs personnels

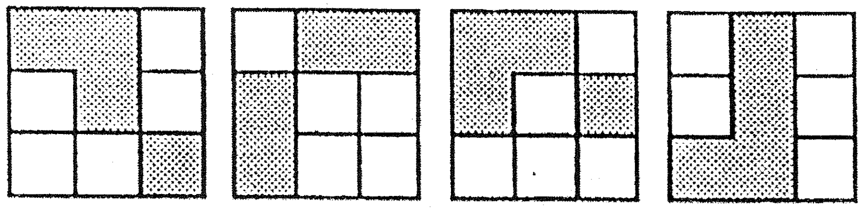
Inconvénients : - qui a réellement travaillé dans les groupes ?
- travail bruyant si "engagement des stagiaires".
- gestion de vitesses différentes de travail entre les groupes.

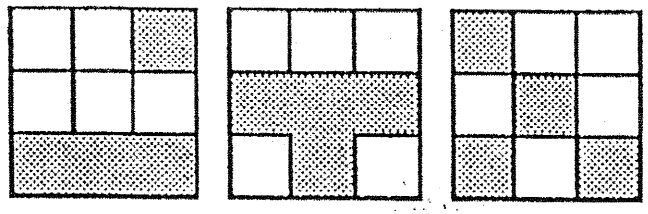
Scénario : 2 temps dans le travail

a) Quelle est la relation qui permet de dire que les 4 sont « truc » et les 3 autres «non-truc » ?
Le groupe doit trouver une solution et me la proposer (plusieurs solutions sont possibles)
a bis) Le jeu inventé par le mathématicien DE BONO comporte 34 pièces différentes. On a demandé à des élèves de trier certaines d'entre eux selon une certaine propriété que l'on appelle « truc ». Voici en haut de la feuille le résultat de leur tri :
à gauche ceux qui sont trucs
à droite ceux qui ne sont pas trucs
Pouvez-vous retrouver la relation qui permet de dire, de distinguer les trucs des pas-trucs

b) chaque groupe produit une relation (ou plusieurs) et propose un exercice identique au a).
Je transmets la proposition à un autre groupe qui doit identifier la relation en jeu, l'écrire, je transmets leur proposition au groupe émetteur qui doit valider la proposition.

Annexe 1 :

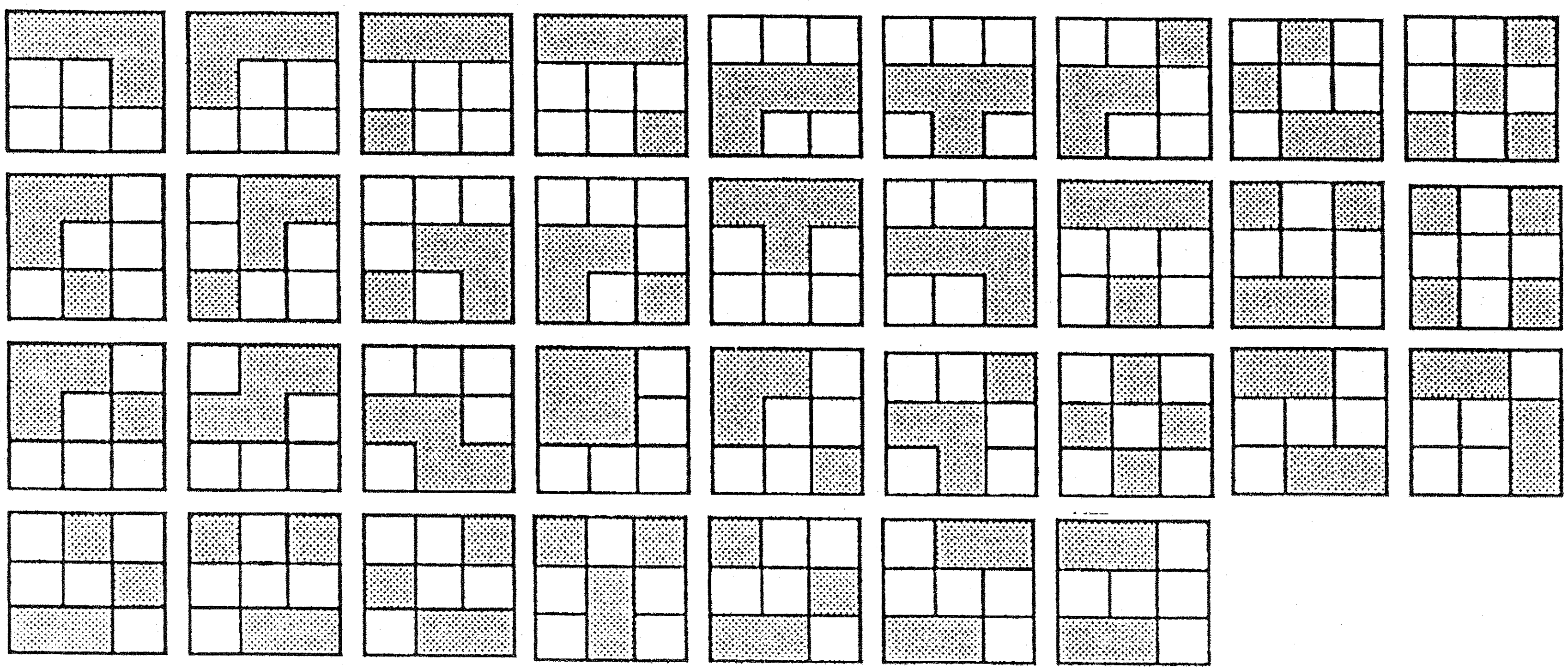




Ils sont "Truc"
Qu'est-ce qu'être "Truc" ?

Ils ne sont pas "Truc"
("Truqueïté")

Ces pièces consituent un jeu inventé par le mathématicien De Bono. Il s'agit de carrés (de carton, par exemple) dont on a colorié 4 cases sur 9. Il y a 34 pièces différentes :



FICHE DE PREPARATION

Activité : " Ils sont trucs, ils ne sont pas trucs "

Objectifs :

dégager un critère de tri et le formuler en termes Mathématiques
travailler en groupe : échange, communication .

Matériel :

- feuille polycopiée des trucs ;
  bristol, ciseaux, colle.

Organisation de la classe : groupes de 4 et aménagement de l'espace classe.

Démarche globale : situation-problème

Consigne : donnée par le maître oralement groupe par groupe.

"Ceux-ci vont ensemble, ceux-là ne vont pas ensemble : trouver la loi truc. Dès que vous l'aurez définie, appelez-moi, je valide ou non et ensuite c'est à vous d'inventer une loi truc. "

Démarche :

Phase

- *action* : appropriation du problème, proposition d'une loi ;
- *formulation* Mathématique de la solution par un message écrit ;
- *validation* par le maître.

Remarque : les solutions trouvées par les groupes sont différentes

Phase 2 :

- *réinvestissement* : chaque groupe invente une loi truc ;
- échange des lois trucs entre groupe par messages écrits;
- *synthèse* collective : plusieurs solutions sont possibles.

Remarque : un système de questions/réponses est mis en place afin d'aider les groupes à trouver les lois. C'est le maître qui joue le rôle du "facteur " afin d'éviter la communication entre les groupes.

Remarques liées à la situation proposée :

- première phase : démarrage rapide des groupes pour l'élaboration d'une loi ;
- deuxième phase : les groupes ont eu plus de difficultés pour trouver la logique des groupes émetteurs de lois trucs ;
- la synthèse aurait pu avoir lieu à la fin de la première phase.

Caractéristiques du travail de groupe :

- plus difficile à gérer qu'un collectif frontal, plus bruyant également ;
- pour *l'élève* : permet de s'exprimer, de se sentir moins en situation d'échec ;
- pour *le maître* : veiller à ce que tout le monde participe à la réalisation de la tâche : pas de leader, pas de passif . Gérer les vitesses de travail des différents groupes, le nombre d'interventions et leur contenu. S'interroger sur la constitution des groupes (de niveaux, homogènes, hétérogènes ou de proximité).

Document H

Quels paramètres dans la mise en œuvre des situations de calcul mental ?

Organisation générale des séances

Placer deux observateurs à chaque séance qui devront rendre compte de la séance mise en œuvre en produisant une fiche avec :

- objectifs en terme d'objectifs opérationnels selon Mager

- modalités sur deux plans (pas très variable en calcul mental)

démarche ("j'apprends, j'applique", "petites marches", situation-problème)

organisation de la classe (individuel, groupe, collectif frontal,...)

ainsi que les différentes phases le cas échéant

- évaluation prévue : comment sont recueillies les informations par le maître ?

N.B.1 *L'un des observateurs pourrait centrer sa prise de notes sur la conduite de la séance soit le maître, l'autre sur les réactions, les procédures des élèves.*

N.B.2. *Les observateurs par définition observent et rendent compte. Cela permet de disposer d'une mémoire de la classe et facilite la participation des autres qui peuvent pleinement pratiquer la séance sans chercher à prendre des notes personnelles sur la démarche proposée.*

N.B.3 *D'autre part cela permet de faire dégager pour les observateurs la notion d'objectifs "opérationnels" d'une séance et d'aborder le problème de la fiche de préparation.*

Unqui donne le résultat ?

- le maître.
- un élève dont on sait qu'il a bon.
- un élève dont on sait qu'il a faux (et dont on essaie d'analyser l'erreur)
- un élève au hasard (qui peut avoir bon ou faux).

Un paramètre ? comment recueille-t-on les réussites et les échecs ?

- exercice par exercice.
- avec ou sans analyse du processus de calcul (juste ou faux)
  de l'erreur commise
- pointage devant toute la classe des échecs
- autoévaluation avec inscription individuelle de son score sur son cahier
- correction par le voisin
- annonce orale des scores : qui a 9, 8,... calculs bons
  qui a 0, 1, 2... erreurs
- ....

Un paramètre ? Sur quel indice arrête-t-on les calculs ?

- le premier qui a fini
- lorsque n élèves ont fini
- lorsque "tous" ont fini
- lorsque le maître le décide : temps prévu au départ
- temps "illimité" mais les élèves notent leur temps mis
- ....

Travail aussi au niveau des consignes

Données oralement, avec ou sans répétition au départ et aussi pendant l'exercice, essai(s) "à blanc".

Document I

Présentations des différentes séances envisagées dans leur dernière version

Attention, les premiers comptes-rendus (1997/98) peuvent provenir de versions sensiblement différentes.

Principe général pour S1, 2, 3, 4 : « même » série d'opérations avec des modalités de mises en oeuvre différentes. Il est préférable de travailler au moins sur les trois premières séances avec l'ardoise car sinon d'une séance sur l'autre les PE reprennent leur cahier de brouillon et s'aperçoivent que ce sont les mêmes exercices et alors ! !

S1 - Je dicte une fois, je frappe : vous écrivez le résultat sur vos ardoises.
je frappe : vous posez vos stylos.
je frappe : vous levez votre ardoise, je note le nombre de réussites.

Cinq essais « à blanc » pour roder les modalités de fonctionnement, 10 exercices.

65+25=90 45+33=78 55+42=97 34+53=87 27+63=90

71+19=90	77+41=118
43+38=81	39+92=131
57+24=81	108+21=129
68+37=105	121+43=164
53+58=111	133+54=187

Démarrage "fort" avec des ardoises et des craies !!
Redonnez sa place au calcul mental, en particulier par un léger historique critique des Instructions Officielles mais aussi de la pratique en classe.

S2 - Je dicte deux fois, vous écrivez le résultat sur votre ardoise quand vous avez calculé le résultat.
Lorsque je frappe, vous posez vos stylos.
Je demande à un élève au hasard son résultat, il me montre son ardoise.
Je confirme si bon, j'infirme si faux et j'en interroge un autre.
Je demande qui a faux, je note le nombre d'erreurs (même liste d'exercices !).

Même liste d'exercices que pour S1.

Une rapide interview des élèves sur les procédures de calculs employées montre que, pour certains, il y a changement de technique employée due à la méthode employée. S2 favorise le calcul mental de type "opération posée dans sa tête" (variable didactique ?)

S3 - Je dicte une fois, vous écrivez quand vous avez calculé le résultat et vous levez le doigt, je dis « STOP » lorsque seulement quelques élèves n'ont pas fini. Je note deux éléments : pas eu le temps d'écrire, faux. Temps « autorégulé » par les élèves. Je donne le résultat.

Même liste d'exercices que pour S1.

C'est encore la même liste ! Des objectifs notionnels identiques peuvent être visés au travers de mises en œuvre différentes qui ne font pas nécessairement appel à des capacités identiques (voir les différences de résultats en annexe 1) et provoquent des réactions "psychologiques" différentes qui peuvent elles aussi influer sur le résultat.

S4 - Début d'un championnat!! Je dicte, vous levez le doigt lorsque vous avez calculé le résultat, j'interroge le premier qui a levé le doigt, il n'aura plus le droit de répondre. Je note en face de son nom 0 si la réponse est fausse, si la réponse est bonne, 10 pour le 1er exercice, 9 pour le 2ème, 8 pour le 3ème,...

Variable "psychologique" : compétition, entraînant à défaut de réactions négatives au moins des discussions sur la valeur pédagogique de la compétition mais aussi la justesse du barème appliqué !

S5 - Je donne une liste écrite complète de 20 calculs, temps limité pour y répondre (sans poser de calcul !) dans l'ordre que vous voulez. Je circule, je dis stop posez vos crayons lorsque plus des élèves ont fini. Correction : j'interroge, au hasard, un élève par calcul. Vous corrigez en rouge, je noterai combien d'élèves ont fait 1, 2, 3, 4, 5 et plus fautes (fautes si non-réponse ou erreur)
N.B. Différentes possibilités :
Je ramasse les feuilles (analyse d'erreur ?) ou je demande : qui n'a pas répondu ? Qui a faux ?

Je pourrais arrêter lorsque 1 (5 ?) élève a fini
Je pourrais aussi laisser temps libre et faire noter à chaque élève le temps mis.
Demander si les procédures de calcul ont été constantes ou ont varié par exemple en fonction de la retenue.
Questions autour de calcul mental / calcul écrit et calcul mental / calcul rapide.
(Exercices extraits de Maths CM1 collection Chapuis chez Nathan)

34x2=68	230x2=460
12x6=72	120x3=360
23x7=161	520x4=2080
65x6=390	550x6=3300
57x8=456	590x8=4720
21x3=63	120x4=480
23x4=92	160x6=960
53x4=212	580x2=1160
82x4=328	810x4=3240
71x7=497	720x7=5040

S6 - Les nombres sont écrits au tableau, seuls les résultats sont notés sur la feuille. Evaluation: score individuel.
(Exercices extraits de Maths CM1 collection Chapuis chez Nathan)

12x40=480	21x60=1260	52x40=2080	73x30=2190	71x70=4970
46x20=920	34x30=1020	18x70=1260	53x60=3180	56x80=4480

Si les résultats ne sont pas ordonnés surtout en cas de non-réponse, risque d'erreur par décalage des réponses (tiret en cas de non-réponse ?).Le problème du tiret sera surtout posé dans le cas de dictée de calculs consécutifs.
Question : quelle différence avec hier ou les données étaient aussi écrites, cela induit-il des différences dans les procédures de calcul, dans l'ordre dans lequel on fait les calculs ?

S7 - Je propose, un par un, 5 calculs que j'écris au tableau.
A chaque fois, je demande (et j'écris au tableau) les différentes techniques employées.

15x70	76x20	37x80	13x30	29x30

Pas d'évaluation, je n'interroge que ceux qui proposent une méthode de calcul, *je pourrais faire la même chose avec des résultats faux. De 3 à 5 procédures différentes pour le même calcul, sinon 6 à 7 procédures différentes pour les 5 exercices.*

S8 - Je donne une méthode de calcul qu'il faudra appliquer et être capable d'oraliser si on est interrogé.
(Exercices extraits de Maths CM1 collection Chapuis chez Nathan)
Retrancher 18

41-18=23	77-18=59	184-18=166	101-18=83	300-18=282
64-18=46	93-18=75	345-18=327	410-18=392	217-18=199

*Après avoir fait remarquer les différences de procédures, on peut "forcer" l'application d'une procédure pour qu'elle devienne disponible, opérationnelle pour tous. N.B. Pour 217-18, la procédure employée n'est peut-être pas la plus pertinente et l'on en revient au choix (personnel) de **sa** meilleure procédure dans un contexte donné mais aussi à l'ouverture possible au plus grand nombre possible de procédures disponibles afin d'avoir un réel choix.*

S9 - Le compte est bon.
Rappel des règles du jeu télévisé et de ses détournements pédagogiques.
Temps de réflexion. Quand on a trouvé, on lève le doigt ; au bout de 5 doigts levés, le signal stop est donné. Si personne ne trouve, arrêt au bout de « n » minutes, qui s'en approche le plus ?
Le résultat est demandé à un élève qui explique sa méthode au tableau puis on compare les différentes méthodes le cas échéant.
Quatre situations : *(pas de difficultés)*

10	35	25	1	7	62
100	50	25	7	75	243
70	40	15	4	50	145
15	25	75	10	20	70

Présentation des procédures de calculs opération par opération, avec parenthèses et en arbre.
Dans d'autres jeux on impose d'utiliser tous les nombres, les "quatre opérations",...
Ecrire les procédures de calcul pendant la recherche peut être autorisé, cela n'exclut pas le calcul mental si le temps intervient.

S10 - Problème du bus : des gens montent, descendent, montent. Combien y-a-t-il de personnes dans le bus ?
Pour des raisons évidentes, je ne donne l'énoncé qu'une seule fois. 5 à 10 secondes de réflexion, j'interroge un élève au hasard, lui seul me donne sa procédure mentale (bonne ou fausse), si non-réponse ou réponse fausse je réitère l'interrogation.
Cela pourrait se faire en collectif avec les ardoises
Un essai « à vide » ou l'on a le droit de tout écrire.
21 au départ, montent 3, descendent 4.

28 au départ, montent 5, descendent 2. *Niveau "normal"*
37 au départ, montent 4, descendent 7.
24 au départ, descendent 5, montent 6.
27 au départ, descendent 3, montent 8.
20 au départ, montent 14, descendent 7, montent 5, descendent 2
23 au départ, -9, +12, -7, +15, -8 *Niveau rapide "décontextualisé"*
Il est évident que plus j'enrobe le problème dans une histoire avec des anecdotes, le nom des stations,... plus j'accrois le risque de décrochage en cours de calcul. Niveau "très contextualisé"
Le passage à de nombreuses stations implique la procédure de calcul "pas à pas".

S11 - Trouver un nombre en moins de coups possibles
La classe est coupée en six équipes.
Je pense à un nombre. [Décimal mais je ne le dis pas], l'équipe propose par écrit un nombre, je note + ou -Je tourne d'une équipe à l'autre et l'équipe gagnante est celle qui trouvera en le moins de coups possibles.
Discussion possible entre les membres d'un groupe mais à voix basse bien évidemment !

S12 - Les cartes magiques
Je dispose d'un jeu de carte, vous choisissez un nombre entre 0 et 100, vous me montrez les cartes ou ce nombre apparaît, je vous dis en simulant un gros effort de concentration mental quel était votre nombre. Retrouvez le procédé, le justifier, s'y entraîner en jouant à deux.
Je le fais avec un élève, je lui explique, démultiplication pour 2 autres, puis 4, ...

S13 - Calculs approchés et approximation.
Le panier de la ménagère à 100F prés.

S14 - Approximation.
Ordre de grandeur du complément à 100F.

S16 - Calcul mental et « astuces » sur un exemple : multiplication d'un nombre de deux chiffres par 11.
Découverte de la règle sur quelques exemples et domaine de validité de la règle.

11x36=396	11x54=594	11x35=385
11x75=825	11x65=715	
11x123=1553	11x421=4631	

Application systématisée.

11x32=352	11x54=594	11x63=693	11x67=737

Document J

L'évaluation envisagée, les questionnaires PE et quelques interprétations

Rappel : il est difficile d'évaluer un dispositif dont on est acteur et évaluateur mais ce n'est pas une raison pour ne pas essayer. D'autre part la formation des PE étant polyvalente, il est difficile d'isoler son action par rapport aux autres collègues (et aussi par rapport aux IMF qui les reçoivent en stage tutelle).

Le questionnaire : Passation en deux temps
Une première fiche plutôt « ouverte » pour essayer de faire émerger les représentations.
Une deuxième fiche plus « fermée » pour essayer de typer les réponses.

Première Fiche

Nom : Classe :

A votre avis :
- place du calcul mental dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire
- place du calcul mental dans la vie courante

Comment voyez-vous l'organisation du calcul mental en classe :
- au niveau de la démarche ?
- au niveau de l'emploi du temps ?

Dites ce qui vous passe par la tête au sujet du calcul mental et qui n'aurait pas été pris en compte par les questions précédentes :

Deuxième fiche
Cette fiche a subi des modifications après un premier essai qui ne nous a pas donné satisfaction mais qui est présenté afin de pouvoir en citer les résultats.
Version 1 :

Nom : Classe :

Cochez la colonne qui correspond le plus à votre opinion :

	fondamental	important	secondaire	sans intérêt	sans avis
Le calcul mental sert à approximer le panier de la ménagère					
Le calcul mental est nécessaire pour progresser dans les techniques opératoires					
Avec l'invention des calculettes le calcul mental ne sert plus					
Le calcul mental est nécessaire pour la résolution de problème					
Le calcul mental c'est faire réciter les tables d'addition					
Le calcul mental est une bonne gymnastique de l'esprit					

Document K

S1 - Je dicte une fois, je frappe : vous écrivez.
je frappe : vous posez vos stylos.
je frappe : vous levez votre ardoise, je note le nombre d'erreurs.
Cinq essais « à blanc » pour roder les modalités de fonctionnement, 10 exercices.
65+25=90 45+33=78 55+42=97 34+53=87 27+63=90
71+19=90 77+41=118 43+38=81 39+92=131 57+24=81 108+21=129
68+37=105 121+43=164 53+58=111 133+54=187
Démarrage "fort" avec des ardoises et des craies!!
Redonnez sa place au calcul mental, en particulier par un léger historique critique des Instructions Officielles mais aussi de la pratique en classe.

Compte rendu
S1A

Objectifs
Etre capable de donner le résultat exact d'une addition (somme de deux chiffres et de trois chiffres), sans poser l'opération.

Matériel
1 ardoise et une craie par élève
1 règle pour le maître

Déroulement
1) - le maître demande à un élève de distribuer le matériel ;
- il explique les deux étapes successives de sa démarche ;
a) 1 exercice d'échauffement comprenant 5 opérations
b) 1 exercice d'application avec évaluation globale de la classe (le nombre de résultats exacts est noté par le maître). Cet exercice compte 5 opérations.

2) - il donne ensuite les consignes :
a) le maître donne oralement l'addition à calculer.
b) Temps de réflexion.
c) Au 1er signal, les élèves écrivent le résultat sur leur ardoise.
d) Au 2ème signal, ils lèvent leur ardoise.
e) Le maître donne le résultat exact de l'opération.

Place du maître
Debout devant toute la classe.

Observation Maitre/Eleves

MAITRE	ELEVES
Exercices d'échauffement - voir si la consigne est comprise par tous	- exercice nécessaire. Permet l'assimilation des différentes étapes dans le processus mis en place. *Exemple :* beaucoup avaient écrit le résultat de l'opération avant le signal du maître, un élève avait posé l'opération sur son ardoise. - Appréhension des élèves, panique.
Exercices évalués Noter les bons résultats sur une fiche évaluation de l'ensemble de la classe progression dans la difficulté - addition de dizaines sans retenue - addition de dizaines avec retenue - addition de centaines sans retenue	- motivation (due à l'évaluation du maître ou au système mis en place par le maître ?) - Après quelques opérations (5), fatigue de certains, tricherie, manque de participation, découragement et énervement

Les résultats de l'évaluation :

10 opérations et un effectif de 12 élèves (il s'agit de la 1ère addition demandée : est-ce la plus simple ou pas encore de fatigue ?)

12 bonnes réponses à 1 opération, 11 à 3, 9 à 3, 8 à 1, 7 à 1, 6 à 1

Remarques

Les résultats sont, pour la plupart, notés en haut et à gauche de l'ardoise, et le plus souvent en petit ;

A l'annonce de résultat exact par le maître, les élèves s'assurent de leur réponse en retournant l'ardoise vers eux (oubli de leur réponse ?).

Certains élèves commencent par écrire le chiffre des unités puis celui des dizaines, alors que d'autres notent directement le résultat ;

Analyse des erreurs par les élèves eux-mêmes, qui à l'annonce du résultat, comprennent leur erreur ;

Pas d'encouragement de la part du maître qui a gardé la même attitude tout au long de l'exercice (n'a pas non plus décompté le nombre d'opérations effectuées au cours de l'exercice « il en reste encore ... »).

Compte-rendu S1B

Calcul mental : procédé Lamartinière

Calcul de sommes de nombres de 2 ou 3 chiffres

Durée : 10 à 15 minutes.

Niveau : **CM1**

Objectifs : Développer une capacité à diversifier les procédures de calcul d'une somme

Développer une agilité de l'esprit.

Développer les mémoires à court et moyen terme

Matériel : Craie Ardoise Chiffon

Démarche globale : Réinvestissement des tables d'addition et utilisation du procédé Lamartinière.

Déroulement

Phase 1 : Formulation de la consigne et vérification de la compréhension de la tâche.

Consigne : « Je dicte un calcul, quand je frappe vous pouvez écrire le résultat. Quand je frappe à nouveau, vous arrêtez d'écrire. Quand je frappe enfin vous levez l'ardoise. Vous avez 5 essais. »

Structure de travail : individuel.

Vérification des résultats : le maître annonce le résultat et comptabilise les erreurs.

Anonymat des réponses

Objectif	Déroulement phase 1	Remarques
Intégrer le processus	Durée : 4 à 5 min Attitude du maître : Assis face aux élèves. 65+25=90 45+33=78 55+42=97 34+42=97 (1 erreur) 27+63=90 (1 erreur)	La consigne n'a pas été comprise par tous les élèves : non respect du rythme, manque d'attention.

Objectif	Déroulement phase 2	Remarques
Eviter le calcul en ligne	Durée : 8 à 10 min 71+19=90 43+38=81 (2 erreurs) 57+24=81 (2 erreurs) 68+37=105 (6 erreurs) 53+58=111 (2 erreurs) 77+41=118 (6 erreurs) 39+92=131 (beaucoup de 121) 108+21=129 (1 erreur) 121+43=164 (3 erreurs) 133+54=187 (1 erreur)	Participation active de tous. La retenue n'est pas toujours prise en compte. Ceci laisse supposer un calcul en ligne. Pour la réponse 81 on note sur certaines ardoises 8 ou 1. Le « 1 » témoigne d'un calcul en ligne. Problème de rapidité.

le 07.09.99

Compte-rendu de la séquence "calcul mental "

Objectifs : **Disciplinaires :**

- mémoriser des tables d'opérations
- acquérir des procédures de calcul mental par rapport aux propriétés des opérations
- développer des stratégies de calcul

Transversaux :

- développer l'attention, la concentration et la mémoire

Matériel : Une ardoise, une craie et un chiffon par élève
Une règle " T " pour le maître
La liste des opérations avec et sans retenues à énoncer

Déroulement :

Le maître demande à deux élèves, responsables de classe, de distribuer une ardoise, une craie et un chiffon par élève, puis presse le groupe classe à s'installer et à se concentrer. La consigne suivante est alors énoncée : " Ecoutez bien la consigne, je ne vous la dirai qu'une fois. Je serai très strict. Après avoir énoncé une opération, je frapperai avec la règle, vous écrirez le résultat de l'opération sur l'ardoise, je frapperai une deuxième fois, vous lèverez alors l'ardoise. Je relèverai les erreurs. "

Le maître procède alors à une première série de dix opérations (séquence test) afin de vérifier que tous les élèves ont bien compris la consigne. Il sanctionne tout élève qui lève trop tôt ou trop tard l'ardoise, ainsi que ceux qui notent l'opération.

Une seconde série d'opérations est alors énoncée à un rythme plus soutenu. Après chaque opération, le maître annonce le bon résultat ainsi que le nombre d'erreurs sur l'ensemble de la classe.

A la fin de la séance, les deux responsables de classe sont chargés de ramasser et ranger le matériel.

Prolongements : Augmenter la difficulté des opérations.
Résoudre des problèmes limités en temps mettant en oeuvre des opérations complexes (multiplications, divisions).

Liste des opérations :

65+25=	118+31=
45+33=	93+38=
55+42=	39+92=
39+53=	57+29=
27+63=	108+21=
71+19=	53+58=
77+41=	133+59=

FICHE DE PREPARATION

Jour : Jeudi 16 sept **Durée :** 15-20 minutes

Activité : Calcul mental

Objectifs : → mettre en place des stratégies de calcul adaptées aux consignes
→ additionner mentalement deux nombres à deux ou trois chiffres dans un temps déterminé

Matériel : ardoise, craie, chiffon

Démarche globale : il s'agit de la 2ème séance de calcul mental

Modifications par rapport à la 1ère séance :

→ le maître dicte 2 fois
→ écriture du résultat possible dès qu'il est calculé
→ un seul élève est interrogé pour donner le résultat

Déroulement : Le maître dicte 2 fois l'addition.

Les élèves peuvent écrire le résultat dès que celui-ci est calculé

Au signal, du maître, ils posent la craie. Si l'un d'eux ne respecte pas le temps qui lui est accordé, son résultat est considéré comme faux.

Le maître demande au hasard à un élève son résultat, qu'il confirme ou non. Dans le cas d'un résultat faux, il interroge un autre élève.

Remarques :

→ Les opérations proposées sont les mêmes que pour la 1ère séance.
→ Problème de consigne : certains ont levé l'ardoise au signal du maître (il s'agissait de la consigne de la 1ère séance).
→ Dicter 2 fois donne plus de temps de réflexion mais peut également perturber certains élèves dans leur travail.
→ Le fait de pouvoir écrire le résultat dès que celui-ci est calculé constitue une variable didactique car l'élève utilise une stratégie de calcul différente par rapport à la 1ère séance : il lui est possible de poser l'opération dans sa tête et d'écrire le résultat au fur et à mesure ce qui se traduit par une écriture de droite à gauche du résultat pour certains (unités puis dizaines).
→ Globalement les résultats ont été meilleurs que la séance précédente.

Document L

S2 - Je dicte deux fois, vous écrivez le résultat sur votre ardoise quand vous avez calculé le résultat.
Lorsque je frappe, vous posez vos stylos.
Je demande à un élève au hasard son résultat, il me montre son ardoise.
Je confirme si bon, j'infirme si faux et j'en interroge un autre.
Je demande qui a faux, je note le nombre d'erreurs (même liste d'exercices !).
Même liste d'exercices que pour S1.
Une rapide interview des élèves sur les procédures de calculs employées montre que, pour certains, il y a changement de technique employée due à la méthode employée. S2 favorise le calcul mental de type "opération posée dans sa tête" (variable didactique ?)

Compte-rendu
S2A

Calcul mental : seconde séance

Objectif : Etre capable de donner le résultat exact d'une addition (ensemble de nombres de 2 et de 3 chiffres) sans poser l'opération.

Matériel : 1 ardoise, 1 craie.

Déroulement

1. Le maître demande à un élève de distribuer le matériel.

Il explique sa démarche : un exercice d'application avec évaluation globale de la classe (le nombre de résultats exacts est noté par le maître). Cet exercice compte dix opérations.

2. Le maître donne les consignes :
   - le maître donne deux fois l'opération oralement.
   - Les élèves ne doivent écrire que le résultat sur l'ardoise.
   - Au bout d'un certain temps le maître tape pour marquer la fin de l'opération : les élèves doivent poser leur craie.
   - Le maître demande la réponse à un élève qui doit lever son ardoise.
   - Seront considérés comme faux les résultats inexacts et ceux qui n'ont pas été écrits sur l'ardoise.

Le maître se place debout devant toute la classe.

Observations maitre/eleves

Maître
- Notait les bons résultats sur sa fiche
- Evaluation de l'ensemble de la classe
- Progression sur la difficulté :
  - addition de dizaines sans retenue
  - addition de dizaines avec retenue

Elèves
- Mauvaise compréhension des consignes :s élèves lèvent leur ardoise lorsque le maître ɔe, l'éléve interrogé pour donner la réponse la nne oralement au lieu de lever son ardoise)
- Après quelques opérations (5) fatigue, concentration, découragement et énervement

Compte rendu S2B
Fiche de préparation de mathématiques

Jour : mardi 8 septembre 1998

Durée : 10 minutes

Activités : séance brève de calcul mental (addition)

Objectifs

➔ *savoir* : l'élève doit être capable d'effectuer une addition de deux nombres à 2 ou 3 chiffres < 150 et dont le résultat exact est < 200.

➔ *savoir-faire* : l'élève doit être capable de gérer son temps de réflexion.

Matériel nécessaire : une craie, une ardoise et un chiffon par élève.

Démarche globale : le réinvestissement de la procédure additive la plus efficace (rapidité / performance).

Déroulement :

➔ *phase 1* :
Type de situation : phase de formulation des différentes étapes du travail.
Consignes : « Je dicte 2 fois l'opération. Vous écrivez le résultat quand vous voulez. Je frappe une fois : vous posez la craie. Je demande à un élève désigné au hasard son résultat, si celui-ci est exact une autre opération est dictée. En revanche si celui-ci est faux un autre élève sera interrogé jusqu'à l'obtention de la bonne réponse. »
Je m'assure que les élèves ont bien compris les consignes en leur posant la question puis en effectuant un essai blanc : opération proposée : 65 + 25 = 90.
Après la vérification du résultat, je fais un sondage des erreurs dans la classe

➔ *Phase 2* :
Type de situation : phase d'action

Opérations dictées	Nombres d'erreurs des élèves	Remarques en cours de route
71+19=90	0	Pour cette série, j'ai dicté l'addition seulement une fois.
43+38=81	0	
57+24=81	1	
68+37=105	2	A partir d'ici le nombre d'erreurs augmente. Est-ce dû au rythme que j'ai accéléré ou aux opérations dont les résultats sont > 100 ?
58+53=111	2	
77+41=118	2	Pour cette série, consigne de départ respectée : j'ai dicté 2 fois les additions.
39+92=131	3	
108+21=129	2	
121+43=164	0	
« le dernier » 133+54=187	0	

Constats généraux sur le déroulement de la séance

a) procédures réellement appliquées par les élèves :

Le temps d'attente proposé semble donner l'occasion aux élèves de visualiser les nombres plus facilement et de poser mentalement l'addition comme s'ils la posait par écrit.

Pour certains, ce temps suffit à résoudre totalement l'opération mentalement et ils écrivent directement le résultat sur leur ardoise. Pour d'autres, en revanche, il semble préférable de résoudre mentalement l'addition des unités puis d'écrire le résultat et de procéder de même pour les dizaines et éventuellement les centaines.

b) Les paramètres :

- ➔ Le temps d'attente : le délai d'écriture permet à chaque élève de trouver sa méthode de résolution et de gérer son rythme de travail.
- ➔ Répéter 2 fois les énoncés : cela peut perturber certains élèves dans la mesure où ça les dérange dans leur réflexion. A l'inverse, pour d'autres, ça leur permet de mieux visualiser les nombres en cours.

Document M

Séquence n° 1 : intersection de bandes, secteurs angulaires (gestion sur 2h)

Activité 1 : trouver toutes les intersections "géométriquement différentes" de 2 bandes
Recherche individuelle, correction par un (deux) élève au tableau. Qu'est-ce qui change selon que les bandes sont de même largeur ou non ?.
Dévolution du problème : qu'appelle-t-on "géométriquement différentes" et, en particulier, du caractère infini des bandes ? [Consignes volontairement floues dont la clarification doit conduire à un apprentissage de type réponses-questions-réponses]
Activité qui peut se faire en :
au CP/CE : l'étude, la caractérisation des différents cas trouvés permet d'introduire le vocabulaire (N.B. un carré n'est pas alors un losange!)
au CM : comme pour vous, cela peut être un exercice de révision : placer du vocabulaire connu en situation.
Autrement : situation de classe de type JEU au CM, vous avez tous 2 bandes (ou autres) trouvez une position telle que leur intersection soit un "rectangle",... Peut provoquer des erreurs intéressantes si par exemple les bandes sont considérées comme des rectangles !

Activité 2 : trouver toutes les intersections "géométriquement différentes" d'une bande et d'un secteur angulaire
Recherche en groupe, distribution d'une feuille par groupe format A3 à me rendre dans 30mn, avec la conclusion "claire" de votre recherche
Affichage des productions soumises à l'analyse, la critique par la classe.
Synthèse pour faire ressortir les différentes approches du problème et la structuration de la recherche. Exigence de justification du caractère "différent" (sur quel critère géométrique) des figures proposées.

Activité 3 : réinvestissement de la démarche dans le cas de deux secteurs angulaires (cet exercice permet de voir ceux qui sont capable d'ordonner la recherche pour trouver tous (le plus possible ?) les cas).
Un cas différent par groupe :
- deux secteurs angulaires aigus quelconques
- un secteur angulaire aigu quelconque et un de 60°
- un secteur angulaire aigu quelconque et un de 90°
- un secteur angulaire aigu quelconque et un secteur angulaire rentrant (entre 270° et 360°)...

Contrainte : rendre le résultat de la recherche sur une feuille.
Prolongements possibles en classe :
Réalisation collective d'une fiche synthèse avec étiquetage (institutionnalisation des savoirs visés)

Vocabulaire et notions abordées pendant la séance :
- droites (infinies?), segments, demi-droites et origine
- angle nul, aigu, obtus, saillant, rentrant, droit, plat, rentrant
- bandes et droites parallèles (infinies), secteurs angulaires (infinis) demi-bandes à 3,4 "côtés"
- parallélogramme, carré, losange, rectangle, trapèze (rectangle, isocèle), quadrilatère quelconque
- triangle scalène, rectangle, rectangle isocèle, isocèle, équilatéral

Pour les PE :
- rappel précaution : tout carré est un losange....
- discussion pour justifier le choix individuel 1° séquence / groupe 2° séquence
- notion d'objectifs opérationnels pour les fiches de préparation.

Document N

Séquence n°2 quadrillage à maille triangulaire

Une même notion mathématique : deux introductions différentes pas neutres !
J'ai besoin d'une grande salle ou mieux de deux salles.
Recherche individuelle (donner le nombre de cas recherchés permettrait une autoévaluation).
Je distribue des quadrillages triangulaires comme une aide possible *(variable pas uniquement gain de temps! car elle peut être bloquante en particulier si on ne "tourne pas la feuille)*

Pour la moitié de la classe :
Trouver tous les hexatriangles (12).
Recherche individuelle, présentation au tableau des résultats par un élève puis compléments éventuels par d'autres, listage des procédures employées (hasard, recherche organisée,...)
Pour l'autre moitié :
Trouver tous les assemblages différents de 2 (1), 3(1), 4(2), 5(4), 6(12) triangles équilatéraux.

Influence du mode de travail sur les procédures de recherche
Différents par glissement ou par glissement et retournement

Autres pistes possibles :

Quadrillage à maille carrée et hexacarrés :
Dans les différents cas, poser le problème : lesquels représentent des patrons de solides ?

Quadrillage point :
tracer tous les "différents" triangles possibles (N.B. carré impossible si maille triangle)
tracer tous les "différents quadrilatères possibles
tracer des droites parallèles, perpendiculaires, dans des directions "différentes"

Géoplan ou planche à clou :
Problèmes possibles aussi de pavage

Document O

Séquence n°3 codage de déplacements ou de figures sur quadrillage et transmission de messages

S3a - Tout se fait par écrit et uniquement par écrit. Chacun dispose de plusieurs (3 ou 4) quadrillages à maille triangulaire, en fait une feuille double à couper en 4.
Codage individuel de "ou chemin ou figure" (pas de figures "imposées" par le maître), décodage par échange avec un autre "éloigné dans la salle" que je désigne. Les porteurs de messages seront moi et les rapporteurs de séance. Mettre sur le message le nom de l'émetteur et du récepteur. Validation par retour des productions à l'émetteur : production = figure ou question en cas de non-compréhension des consignes. Possibilité en cas d'échec pour l'émetteur de produire un message corrigé (un ou plusieurs allers et retours possibles ?)

S3b - Tout se fait par écrit et uniquement par écrit. Quatre groupes : chacun disposera d'une fiche comportant un dessin sur un quadrillage à maille triangulaire. Chaque groupe devra produire un écrit (français ou pictogramme) qui, transmis à un autre groupe devra lui permettre de retracer la figure. Les messages ne doivent pas comporter de dessin de tout ou partie de la figure proposée. La validation se fera par la production sur quadrillage d'un dessin "identique, superposable" au dessin initial. Si le message n'est pas lisible ou la figure non réussie possibilité de questionner le groupe émetteur mais uniquement par message écrit.

Problème du point de départ : je le fixe ou je laisse le problème se poser ?
Problème : l'émetteur peut avoir tendance à vouloir mettre en difficulté le récepteur, des systèmes d'évaluation peuvent compenser cette tendance (voir Création d'un code à l'école maternelle IREM de Bordeaux)
Cette activité doit poser les problèmes, les contraintes d'un message écrit en mathématique.
En classe primaire, ce travail gagnerait certainement à être conduit en groupe vu les difficultés du passage à l'écrit à cet âge mais l'activité peut être conduite comme en S7a "individuellement"..
Relation possible avec le langage LOGO.

Document P

Séquence n°4 Constructions et réflexions autour des quadrilatères

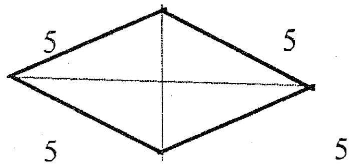
Individuel strict puis collectif frontal, je "sors", de façon provocatrice, des figures différentes en demandant qui a faux (car j'ai demandé **le**)

Tracer : le carré de côté 4 cm (un seul)
le losange de côté 5 cm (une infinité)
le rectangle de côté 4 cm, 5 cm (un seul)
le parallélogramme de côtés 3,5 cm et 5,5 cm (une infinité)
le trapèze de côtés 3,4,6,8 cm (plusieurs) [recherche à faire pour la semaine prochaine]
le quadrilatère de côté 3,4,5,6 cm [idem]

Questions possibles :
- des dimensions étant données peut-on toujours construire un, des quadrilatères correspondants aux données ?
- périmètres, aires des surfaces obtenues ?

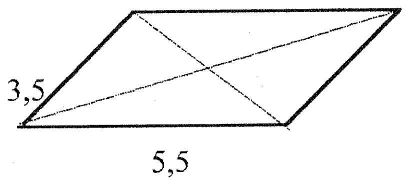
A l'école primaire relation possible avec des systèmes articulés : avec des pièces type Meccano

Losange : peut être un carré



élastique = diagonales
d'où constat : diagonales toujours perpendiculaires
diagonales se coupent en leur milieu

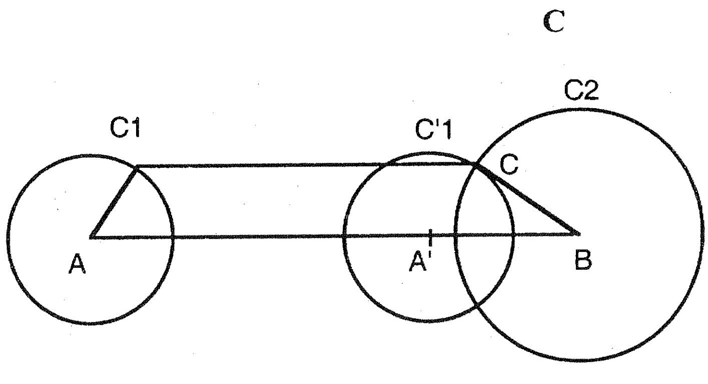
Parallélogramme : peut être un rectangle



de même diagonales se coupent en leur milieu

Construction pour le trapèze

AB=a
C1(A,b)
C2(B,c)
AA'=d
C'1=Translaté de C1 de vecteur AA'
C=C'1∩C2



Document Q

Séquence n°5 jeu du portrait avec la fiche quadrilatère

Individuel en collectif frontal. A mener rapidement et de façon très rythmée.
Principe : chaque élève dispose d'une fiche sur laquelle sont représentés différents quadrilatères, je donne une consigne : "je suis un quadrilatère qui a telle propriété qui suis-je ?" J'interroge un élève qui me liste ceux qu'il a trouvés, validation de la proposition par la classe, rappel du nom éventuel de la famille de quadrilatère ainsi identifié.
Les mêmes questions pourraient être utilisées dans une activité plus "créatrice" je suis un quadrilatère qui a telle propriété, dessine-moi ; essaie de me trouver des formes différentes.

Séquence n°6 Triangles et pliages

Travail individuel, forte directivité du maître, type "je dessine, vous faîtes, vous constatez"

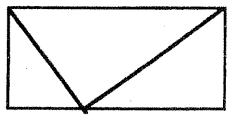
1) A partir d'un triangle scalène, par pliage, retrouver la somme des angles

activité de constat :

peut se faire de 3 manières : rapporteur (hors programme), découpage,, pliage

Autre exploitation possible : aire du triangle / aire du rectangle (sans mesure)

Une fois l'action faite, "Que pouvez-vous dire de ?"

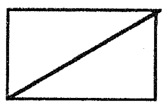


2) pliage du triangle rectangle

angles complémentaires somme=angle droit

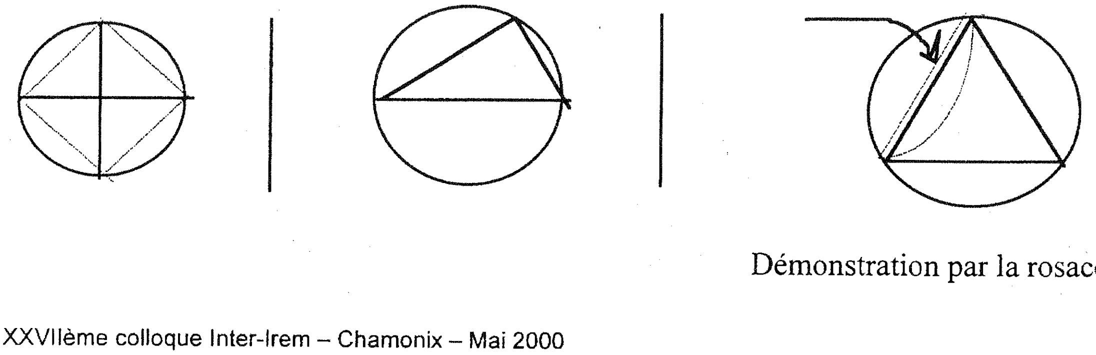
surface du triangle / surface du rectangle

Démonstration par les diagonales d'un rectangle.



3) A partir d'un disque, par pliage, je peux obtenir un triangle rectangle, un triangle équilatéral, rectangle isocèle.

Exploitation pédagogique de type origami, en particulier possibilité d'assembler les surfaces par les languettes obtenues pour obtenir des volumes ou des objets figuratifs en volumes.



Démonstration par la rosace

Date : 15/09/98 Durée : 1heure

GEOMETRIE – Intersection d'une bande et d'un secteur angulaire

Objectifs :
Réinvestissement de vocabulaire en géométrie.
Elaborer une technique, une démarche de recherche permettant de trouver toutes les solutions au problème posé.

Matériel nécessaire :
Des feuilles de papier non quadrillé, format A3 (2 feuilles par groupe : 1 brouillon et 1 à rendre pour 5 groupes)
Des aimants pour l'affichage
Eventuellement du papier calque ou papier cristal

Démarche globale :
Dans une progression : réinvestissement – recherche
Pour cette séance : petites marche (phase 1)
Situation problème (phase 2)

Déroulement : *Remarques*

PHASE 1 Durée : 20 min

Objectifs : Formuler, clarifier la tâche ⇒ dévolution du problème
- Investissement personnel dans la recherche
- Harmonisation du vocabulaire
- Favoriser l'émergence de différentes solutions

Type de situation : action – formulation
Consigne:
Trouver toutes les intersections géométriquement différentes de 2 bandes (consigne volontairement floue pour une définition élaborée en commun par la suite)
Structure de travail :
- Travail individuel de recherche (bien préciser qu'il ne doit pas y avoir d'échanges entre élèves)
- Rôle du maître : circuler dans la classe pour voir l'évolution des recherches de chacun
- Envoyer ceux – celles qui ont fini écrire leurs solutions au tableau
- Critique au sein de la classe des solutions proposées au tableau ⇒ émergence d'une définition plus précise du terme de bande, à savoir " une bande est infinie, elle se prolonge"
- Réponse attendue : carré, rectangle, losange, parallélogramme

PHASE 2 Durée : 25 min

Objectifs :
- Partage des idées au sein du groupe
- Elaboration d'une méthode de recherche

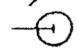
Type de situation : action
Consigne :
Imaginer toutes les intersections géométriquement différentes d'une bande et d'un secteur angulaire (précision : un secteur angulaire est un morceau de plan délimité par 2 demi-droites)
Chaque groupe devra rendre son résultat bien présenté sur une feuille fournie
La durée de la recherche est limitée à 15 minutes
Structure de travail :
- Travail par groupe de 4 personnes
- Rôle du maître : circuler et contrôler l'avancement du travail / temps

PHASE 3 Durée : 15 min

Type de situation : validation – institutionnalisation
Objectifs :
- Rappel de certaines définitions (ex : angle obtus, ...)
- Laisser une trace écrite

Structure de travail :
- Travail collectif frontal
- Affichage des solutions proposées par les différents groupes au tableau et commentaires de ces solutions par la classe
- Au tableau

Rappel sur les angles :

Angle aigu : 
Angle droit : 
Angle obtus : 
Angle plat : 
Angle rentrant : 
Angle plein : 

Solutions dans le cas particulier de l'angle aigu :
Point
Demi-droite
Triangle Isocèle
Rectangle
Equilatéral si 60°
Isocèle – rectangle si 45°
Trapèze Isocèle
Rectangle
Demi-bande

- Validation des affiches au tableau

Prolongement possible

Objectif :
- Réinvestissement de la méthode de recherche

Consigne : même travail dans le cas de 2 secteurs angulaires
Structure de travail :
- Par groupe de 4 personnes en donnant à chacun des angles différents

LES DIFFERENTES VARIABLES DIDACTIQUES D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE EN GEOMETRIE.

Activité : **Les hexatriangles : Situation de recherche.**

Jour : 10 novembre 1998
Durée : 1 h

Objectifs :
- mettre en place une démarche de recherche
- travailler par groupes

Matériel nécessaire :
- des feuilles blanches et des feuilles triangulées.

Démarche globale :
- **Dans la progression** : cette situation ne se situe pas réellement dans une progression de géométrie. Il s'agit d'une situation où c'est la recherche qui prime.
- **Pour cette séance**, deux groupes sont mis dans une situation d'apprentissage de type « situation–problème », les deux autres sont mis dans une situation d'apprentissage de type «petites marches ». Pour chaque situation d'apprentissage, un groupe a du papier triangulé, l'autre a du papier blanc.

Déroulement :
- phase 1 : Dévolution du problème. Le maître passe dans les groupes pour donner la consigne particulière à chaque groupe. Il répond aux questions qui se posent. Consigne pour les « situation-problème » : *Cherchez toutes les configurations possibles de six triangles équilatéraux accolés (qui se touchent par un côté), sans en donner en doubles (elles ne doivent pas être superposables).* Consignes pour les « petites marches » : *Cherchez toutes les figures de base que l'on peut former avec deux triangles équilatéraux accolés. Quand vous les aurez tous trouvés, cherchez les figures à trois triangles, puis à quatre, cinq et six triangles. A chaque fois, vous devez trouver toutes les figures différentes, donc non-superposables.*
- Phase 2 : Action. Chaque groupe fait sa recherche. Le maître passe entre les groupes « petites marches » pour comparer le nombre de figures trouvées pour chaque nombre de triangles, dans le but de remotiver la recherche.
- Phase 3 : Synthèse de chaque groupe. Le maître ne donne pas le résultat (le nombre d'hexatriangles).

Analyse a priori :
Les groupes de type « situation-problème » devraient progressivement et après une période de tâtonnements formuler une stratégie pour trouver tous les hexatriangles sans en oublier un seul. Pour les groupes « petites-marches », la stratégie est induite : prendre tous les exemplaires de la configuration précédente et ajouter un triangle.

Les groupes qui travaillent sur feuille blanche peuvent commettre des erreurs ou trouver des doublons si les triangles ne sont pas bien équilatéraux.

Analyse a posteriori :

Le groupe 1 (petites marches sur papier triangulé) n'a pas établi de méthode jusqu'aux configurations à 5 triangles. La recherche s'est faite d'abord de manière individuelle, puis confrontation des figures trouvées. Après environ 10 minutes de recherche (configurations à 4 triangles), le groupe a estimé nécessaire de découper les configurations pour tester leur superposabilité. Pour les décrire, il emploie un vocabulaire très imagé (berceau…).

Le groupe 2 (situation-problème et papier triangulé) a achoppé tout d'abord sur un problème de compréhension de la consigne : le maître ayant comparé les hexatriangles à l'ensemble de tous les patrons de cubes, le groupe est parti sur une construction de volumes. Après rectification de la part du maître, il a essayé assez rapidement une méthode : partir de l'hexagone et dénombrer les positions possibles d'un, puis 2, puis 3 triangles enlevés de cet hexagone. Ensuite, il y a eu des doutes au sujet de la validité de cette méthode en raison du grand nombre de configurations trouvées, et la moitié du groupe est reparti sur une méthode de type « petites marches ».

Le groupe 3 (petites marches sur papier blanc) a fonctionné surtout par recherche individuelle suivie d'une comparaison deux par deux. La méthode attendue a été rapidement adoptée par deux membres du groupe.

Le groupe 4 (situation-problème et papier blanc) a rapidement fractionné le travail, après une phase de recherche individuelle. Ils ont éliminé le problème de la feuille blanche en découpant un gabarit. Ils ont établi une certaine méthode de classement des figures trouvées par lignes de 4 ou 5 triangles, mais sans exploiter rigoureusement cette méthode pour la recherche des formes. Il y a eu découpage des formes pour tester la superposition, puis collage des configurations validées par le groupe, selon le classement.

SEANCE DE GEOMETRIE	REMARQUES
CYCLE 3 Mardi 22 septembre 1998. Durée: 30 min Activité: géométrie: construction de figures planes connues en travail individuel. **Objectifs:** - principal: être capable de reconnaître que pour une même figure géométrique, il peut y avoir une ou plusieurs constructions possibles utilisant les mêmes mesures de longueurs. - savoir-faire: être capable d'utiliser le matériel géométrique. Matériel nécessaire: tout le matériel de géométrie: règle graduée, compas, équerre. **DEMARCHE GLOBALE:** Progression: 1) réinvestissement d'acquis: révision de construction de figures planes et de leur nom. 2) réflexion à partir des comparaisons des figures des élèves. Cette séance est une situation de recherche. **DEROULEMENT:** Phase 1: phase de construction, c'est une situation d'action.	
Consigne: c'est un travail en individuel strict, je vais vous poser un certain nombre de questions. Vous aurez à me faire les tracés demandés. Si vous n'avez pas le matériel, vous les faites à main levée. Quand la plupart des gens ont fini, on fait une synthèse au tableau.	Les enfants commencent à faire les constructions demandées sans noter la consigne.
- tracer le carré de côté 4 cm. - tracer le losange de côté 5 cm. - tracer le rectangle de côtés 4cm, 5 cm. - tracer le parallélogramme de côtés 3,5 cm; 5,5 cm. - tracer le trapèze de côtés 3cm; 4 cm; 6 cm; 8 cm. - tracer le quadrilatère de côtés 3; 4; 5; 6 cm. Structure de travail: individuel strict.	Intervention du maître pour rappeler les élèves à l'ordre:" ne vous dispersez pas dans des commentaires inutiles, on exécute." Les enfants continuent à confronter leurs travaux. PB de gestion de l'individuel strict. 2ème rappel à l'ordre: " c'est individuel, si vous êtes coincés, vous attendez que le maître vous décoince!"
Phase 2: phase d'action (suite). consigne: le maître fait douter les élèves sur la validité de leur production: comparaison avec son voisin. Provocation du maître:"mais vous n'avez pas le même losange, ni le même parallélogramme, ce n'est pas normal, j'avais demandé LE losange,LE parallélogramme. Vous êtes sûrs que vos figures correspondent à la question? Mais, vous n'avez pas le même, alors qui a bon et qui a faux?" Structure de travail : individuel frontal.	Le maître tente de mettre les élèves en doute mais, ils ne sont pas perturbés: "c'est le maître qui s'est trompé dans la consigne." PB de costruction du trapèze, le maître rappelle que cette figure a 2 côtés parallèles. Les enfants disent n'avoir pas fait la différence entre LE et UN. Ici, le maître prépare la phase de synthèse collective, il dit aux enfants les réponses qu'il attend dans la phase de synthèse: "on a pas le même...".
Phase 3 : synthèse au tableau, comparaison, discussion. C'est une situation de réflexion. Consigne:" vous arrêtez vos tracés et vous écoutez le maître. Alors, le carré, tout le monde a le même? oui. Mais le losange, il y en a plusieurs, est-ce-normal ? Mêmes questions pour les autres figures. Structure de travail: collectif frontal .	Les enfants répètent ce que le maître leur a dit à la phase précedente.
Phase 4: phase d'institutionnalisation: faire la différence entre LE et UN. Consigne: Pour certaines figures nous allons donc corriger le consigne: c'est UN losange, UN parallèlogramme, UN quadrilatère. Structure de travail: collectif frontal.	Où vont-ils corriger la consigne puisqu'ils ne l'ont pas notée? PB de représentation des élèves: pour eux, un carré n'est pas un losange, un rectangle n'est pas un parallèlogramme. Est-ce-le PB du contrat, car le carré et le rectangle sont demandés avant? Pb de construction du trapèze qui devra être terminé à la maison. Rappel: respect strict des mesures de longueur.

Jour: 20.09.1996 Durée: 25 mn.

54

Activité: géométrie.

Objectif général: constuire quelques figures planes par pliages.

Objectifs spécifiques: - être capable d'utiliser les techniques du pliage et du découpage, ainsi que les outils usuels (ciseaux, compas...).
- être capable d'utiliser à bon escient le vocabulaire précis donné par les programmes.
- être capable de construire des triangles particuliers à partir d'un disque.

Compétences transversales: - être capable de communiquer ses démarches.
- être capable de décrire une manipulation.
- être capable de mobiliser des connaissances de base déjà mémorisées.

Matériel: - feuilles de papier blanches.
- ciseaux.
- compas.
- crayon gris et règle.

Démarche globale: résoudre une succession de tâches, guidées par l'enseignant.

Structure de travail: consigne donnée à l'ensemble de la classe, chaque élève la réalise individuellement.

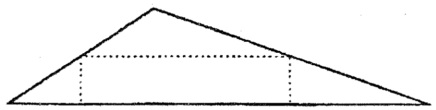
Déroulement:

Observations:

- phase 1: travail sur un triangle scalène.

consigne 1: « découpez un triangle quelconque ».
Les élèves réalisent la consigne.
consigne 2: « trouvez le milieu d'un segment par pliage »
Le maître demande à un élève d'expliquer sa démarche. Puis il explique à la classe au tableau, avec l'aide d'un dessin les différents pliages successifs suivants à réaliser.

Observations: Cette étape est bien réussie par l'ensemble de la classe.



-2-

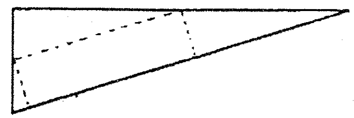
consigne 3: « réalisez ces pliages et notez ce que vous constatez »
Le maître passe dans les rangs, il guide ou explique à nouveau si besoin est. Lorsque l'ensemble de la classe a terminé les manipulatifons, les résultats sont mis en commun: la figure géométrique obtenue est un rectangle. On constate que la somme des angles fait 180° et que l'aire du rectangle obtenu est égale à la moitié de celle du triangle de départ.

Observations: Beaucoup d'élèves obtiennent un rectangle rapidement et le notent. Pour certains les interventions au cas par cas du maître sont necessaires (pliages pas assez précis).

-phase 2: travail sur un triangle rectangle.

consigne: « réalisez les mêmes pliages avec un triangle rectangle; que constatez-vous? »
Le maître réalise à nouveau au tableau un dessin et fournit les explications correspondantes.Il passe dans les rangs, guide ceux qui en ont besoin. Les résultats sont mis en commun et sont identiques aux précédents.

Observations: Pour découper le triangle rectangle deux techniques sont adoptées: certains tracent avec l'équerre l'angle droit; d'autres se servent de celui de la feuille de papier.
La figure géométrique obtenue (le rectangle) est immédiatement proposée, alors que la somme des angles demande plus de temps avant d'être énoncée.



- phase 3: travail sur un disque.

Le maître interroge quelques élèves sur le vocabulaire mathématique: différence entre cercle et disque, que désigne le mot « carré »...

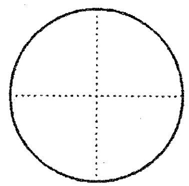
Observations: Les termes mathématiques de cercle (circonférence) et disque (surface) sont bien maîtrisés. Celui de carré qui recouvre à la fois le périmètre et la surface n'est correctement défini qu'après plusieurs interventions.

consigne 1: « tracez et découpez quatre disques »
Le maître explique que l'on va essayer d'obtenir par pliages des triangles particuliers.Il passe dans les rangs pour observer l'avancement du travail.Quand la plupart des élèves a découpé les disques, le maître en montre un à toute la classe et demande l'attention de chacun.

Observations: L'organisation du temps est ici très différente selon les élèves: certains tracent encore au compas pendant que d'autres découpent déjà leur dernier disque.

consigne 2: « expliquez comment on peut retrouver le centre du disque ? »
Les élèves proposent, le maître réalise les opérations proposées, on vérifie leur validité.
Le maître réalise les pliages suivants:

Observations: Un élève propose: « on plie deux fois ». Le maître précise: « pas n'importe comment »; et localise le centre en effectuant deux pliages successifs.



UN ESSAI DE LECTURE DIDACTIQUE DU TEXTE DE RIEMANN SUR LES FONDEMENTS DE LA GEOMETRIE DE LA GEOMETRIE EUCLIDIENNE AUX GEOMETRIES INTRINSEQUES

ATELIER 12
Alain KUZNIAK
IUFM d'Alsace.

Une interrogation didactique de certains textes fondamentaux des mathématiques est-elle possible ? Qu'apporte-t-elle à l'enseignement des mathématiques en général et à la formation des enseignants en particulier ?
Nous avons développé ce questionnement, avec une visée spécifique sur l'enseignement de la géométrie, en étudiant le texte de Riemann «sur les hypothèses qui servent de fondements à la géométrie ». Ce texte, écrit en 1854, sans pratiquement aucune formule est parfois considéré comme le texte fondateur de l'évolution des mathématiques à la fin du dix-neuvième siècle et au début du vingtième siècle.

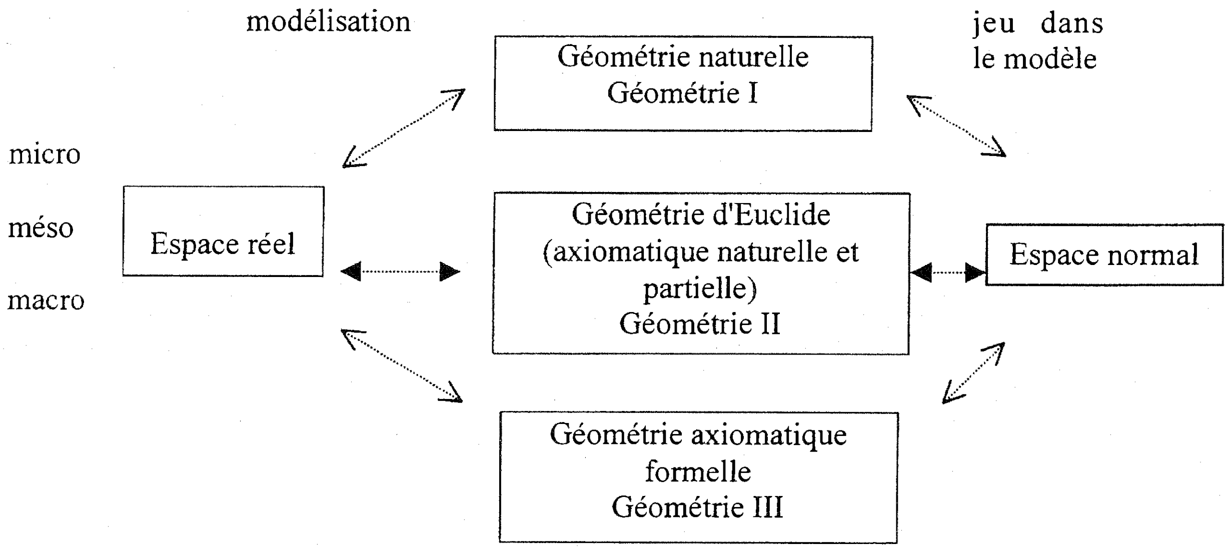
I. Introduction

1) Point de départ et genèse de la démarche suivie

Avec C. Houdement [1], nous avons étudié la géométrie enseignée dans tout le cursus scolaire et en formation des enseignants. Dans ce cadre, la définition de l'objet même de l'enseignement visé en géométrie nous est nécessaire pour analyser les transitions entre les différentes conceptions de la géométrie qui apparaissent au cours de la scolarité.
La géométrie dont nous traitons est la géométrie élémentaire dans un espace de dimension trois. Dans nos travaux, nous avons insisté, à côté du raisonnement déductif, sur l'importance de l'intuition et de l'expérience dans la constitution de la démarche géométrique notamment par rapport au démarquage du monde physique. Nous avons introduit et étudié trois types de paradigmes géométriques : la géométrie naturelle, la géométrie axiomatique naturelle et la géométrie axiomatique formaliste [1a].

D'un point de vue didactique, nous nous sommes interrogé sur la pertinence de l'approche de la géométrie développée par Berthelot et Salin [2]. Ces derniers, analysant la géométrie comme une modélisation de l'espace, développent notamment un jeu didactique autour de la décomposition de l'espace en micro, meso et macroespace. C'est de ce dernier aspect que nous contestons la pertinence et surtout l'aspect nécessaire dans une approche de la géométrie.
Cette opposition nous a conduit à introduire la notion *d'espace normal* [1b] de la géométrie qui représente le modèle choisi pour faire de la géométrie. Une réalisation de cet espace est possible dans un espace physique suffisamment réduit (comme la feuille de papier ou l'écran d'un ordinateur) pour faciliter le travail du géomètre.

Pour étayer notre position, nous avons exploré deux pistes. La première, purement didactique, critique les lourdes ingénieries mises en place dans le méso-espace et l'enfermement du jeu de la modélisation dans la géométrie pratique dont les exigences d'exactitude et de précision graphiques éloignent de la géométrie spéculative.
Une autre voie de recherche plus mathématique, mais toujours selon nous didactique, porte sur l'étude de la modélisation mathématique de l'espace et sur les relations entre les différentes sortes d'espace et le modèle mis en place. C'est ce dernier point qui nous a conduit à envisager l'étude des *variétés mathématiques* pour analyser le passage du local au global. Nous précisons également en quoi les espaces introduits par Berthelot et Salin ne sont pas, d'un point mathématique, réductibles simplement les uns aux autres. Enfin cette étude vise à affiner la notion *d'espace normal.*
Nous pouvons résumer notre questionnement par le schéma suivant :



Méthode suivie

Pour aborder le problème de la modélisation géométrique de l'espace dans les travaux mathématiques actuels, nous sommes confrontés à la difficulté de mettre en évidence les concepts élémentaires que nous cherchons. En effet, suivant une voie bien décrite par Bourbaki[1] *les contenus intuitifs qui sont à l'origine de la plupart des formes mathématiques sont progressivement évacués pour*, c'est le point de vue de Bourbaki, *leur donner toute l'efficacité qu'elles portaient en puissance.* Cette évacuation de tout contenu sensible est particulièrement nette dans la définition des variétés abstraites.

Pour tenter de retrouver ces contenus intuitifs initiaux, nous avons choisi de revenir aux textes fondateurs. Nous avons d'autant plus été encouragés à poursuivre dans cette voie que ces textes ont été écrits par des mathématiciens pour qui le raisonnement mathématique ne se réduit pas à une pratique axiomatique privée de l'intuition. Ainsi, Riemann s'inscrit dans le courant du philosophe Herbart initiateur de la Naturphilosophie allemande qui cherche à comprendre le monde et ne se contente pas de l'aspect formaliste ou calculatoire des mathématiques. Riemann insiste souvent sur le fait de voir "clairement, représenter géométriquement, éviter les formules et les calculs inutiles".

[1] On peut me demander par courrier électronique ce texte en traduction française.

Enfin d'un point de vue méthodologique, nous avons retenu pour l'étude du texte de Riemann, le point de vue herméneutique de Gadamer [3] sur un mode d'interprétation qui insiste sur l'importance de la formulation de la question et sur l'effet d'horizon propre au lecteur. Notre questionnement portant sur la nature de la modélisation de l'espace dans le cadre de la géométrie enseignée, nous emploierons librement les termes de micro, meso ou macroespace ainsi que la notion d'espace normal. Ces notions ne figurent évidemment pas dans la littérature mathématique étudiée et renvoient au champ de la didactique qui nous préoccupe. C'est en cela que nous pouvons parler de lecture didactique d'un texte mathématique.

Eclairage apporté sur la notion d'espace de la géométrie élémentaire

En fait, notre pêche a été bien plus riche que ce que nous l'avions espérée en renouvelant de manière importante notre vision de la géométrie élémentaire et en attirant notre attention sur une possible approche intrinsèque de la géométrie enseignée. C'est ce que nous allons tenter de rapporter dans la suite de cette présentation.

II. Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen

(Sur les hypothèses qui servent de fondements à la géométrie)

1) Présentation de l'œuvre

Peut-être est-ce là le travail géométrique le plus important de tous les temps, sinon par son étendue - il était fort bref - du moins par le monde d'idées qu'il contenait, par la puissante lumière qu'il projetait sur la base de l'édifice géométrique, par les répercussions, géométriques et physiques, qu'il devait avoir.

Ainsi s'exprime, A. Buhl[2] en 1928 soit plus de soixante-dix ans après la soutenance de Riemann. En effet, le texte que nous avons étudié est une Habilitationvortrag, c'est-à-dire une thèse dont le thème est fixé par l'Université, qui a été présentée en 1854 par Riemann en complément de son Habilitationschrift pour obtenir le poste de Privatdozent. Ce poste permettait à son titulaire d'enseigner à l'Université sans traitement mais en vivant des droits payés par les étudiants.

Le thème de son habilitation lui a été donné par Gauss qui figurait parmi les membres du Jury. Ce jury était composite et ses membres étaient des enseignants de toutes les disciplines. Ceci explique, en partie, le caractère intermédiaire du texte entre mathématique et philosophie. Il ne s'agit pas d'un écrit mathématique au sens usuel du terme car il n'y a pas de démonstrations explicites mais plutôt d'un programme de recherche. Ce texte de 20 pages sera publié pour la première fois en 1867 soit un an après la mort de Riemann survenue en 1866. Son caractère particulièrement elliptique et son côté novateur expliquent sa complexité qui a été soulignée par tous les contemporains de Riemann.

Il est divisé en trois parties précédées par une courte introduction particulièrement riche. Nous ne donnons de notre lecture de cette œuvre que les éléments particulièrement en relation avec notre sujet.

(Voir le plan en annexe)

---

[2] Barbarin La géométrie non euclidienne (3 ed) Gauthier Villars

2) Commentaires sur l'introduction : une formulation locale et métrique de la géométrie

Riemann interroge les fondements de la Géométrie. Ces derniers sont constitués d'axiomes et de relations liant les objets. Mais la logique des principes de l'édifice n'apparaît pas : pourquoi ces axiomes, sont-ils nécessaires, comment les a-t-on choisis ?
Les rapports mutuels de ces données primitives restent obscurs ; on n'aperçoit pas bien si elles sont nécessairement liées entre elles, ni jusqu'à quel point elles le sont, ni même a priori si elles peuvent l'être.

Cette interrogation, formulée ici par un mathématicien de premier plan, rejoint la question naïve des élèves, et plus généralement celle de tous les utilisateurs de la géométrie dans un cadre scolaire. Leur naïveté est sans doute plus grande et le type de réponse attendu ne renvoie pas nécessairement au champ de réflexion qui préoccupe Riemann. Mais le désir de l'intelligibilité est le même.
La voie que propose d'explorer Riemann est celle de grandeurs plusieurs fois étendues (mehrfach ausdedehnten Grössen). Il s'agit pour lui de construire un concept d'espace par extension du concept de grandeur en général, les grandeurs de l'espace physique (Raumgrössen) en constituant un cas particulier. Dès l'introduction, Riemann nous annonce le contenu décisif de son traité :
De là, il en ressortira qu'une grandeur de dimensions multiples est susceptible de différents rapports métriques, et que l'espace n'est par suite qu'un cas particulier d'une grandeur de trois dimensions.
Comment alors parmi tous ces espaces reconnaître notre espace ? Cela ne peut pas être le résultat d'une réflexion a priori mais la conséquence d'expériences.
Comme l'espace, défini par Euclide, de la géométrie élémentaire n'est pas la conséquence nécessaire de la construction développée par Riemann, il ne peut prétendre être a priori le modèle de l'espace physique. Seule l'expérience permet de faire le choix crucial du bon espace de représentation. Mais, c'est compliqué car il faut rechercher des faits simples pour déterminer les rapports métriques et les choix sont multiples. On peut privilégier ceux choisis par Euclide mais en étant conscient qu'il ne s'agit que d'hypothèses en conformité probable avec l'observation mais dont rien ne prouve l'extension à l'infiniment grand ou à l'infiniment petit.

3) Notion de variété et de courbure

Variété ou mannigfaltigkeit

Comme nous l'avons signalé, le développement de l'exposé de Riemann comprend trois parties. Les deux premières permettent à Riemann de préciser son idée de la construction de l'espace et de mettre en place celle-ci de manière intrinsèque.
La partie A, la plus générale et sans doute celle qui a donné lieu au plus d'interprétations diverses, sert à définir l'extension de la grandeur à plusieurs dimensions de manière assez imprécise et un peu floue. L'important est ici que cette construction se fait de proche en proche en étendant progressivement le nombre de dimensions nécessaires et en distinguant les extensions continues et discrètes.
Les modes de détermination parcourus formeront une variété de dimension une, dont le caractère essentiel est que, dans cette variété, on ne peut, en partant d'un point, s'avancer d'une manière continue que dans deux directions : en avant et en arrière. Imaginons maintenant que cette variété se transporte à son tour sur une autre variété complètement

distincte, et cela encore d'une manière déterminée, c'est-à-dire tellement que chacun de ses points se transporte en un point déterminé de l'autre variété ; l'ensemble des modes de détermination ainsi obtenus formera une variété de dimension deux.

L'autre idée qui donne tout son sens à la notion de dimension est qu'une grandeur n fois étendue est exactement déterminée par n grandeurs. Ainsi, la variété peut aussi être définie de manière intrinsèque sans recours aux coordonnées de l'espace ambiant.
La notion ainsi introduite est à la source de la notion moderne de variété. Dans le cadre général présenté par Riemann dans sa première partie, il s'agit plutôt de l'idée de variété topologique, les variétés différentielles (au sens moderne du terme) constituent le germe de la seconde partie.

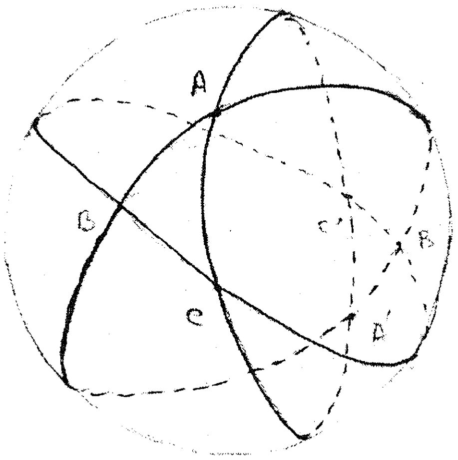
Dans cette seconde partie, Riemann introduit un certain nombre d'hypothèses métriques portant sur *l'élément linéaire ds_* de longueur qui constitue une généralisation de la longueur euclidienne obtenue grâce au théorème de Pythagore. Dans le plan euclidien, on peut mesurer la distance infinitésimale de deux points M(x,y) et M'(x+dx, y+dy) grâce à la valeur ds_= dx_ + dy_ (dans le plan). Riemann généralise cet élément linéaire en le définissant grâce à une forme quadratique définie positive $\Sigma g_{ij} dx_i dy_j$ où les g_{ij} peuvent être des fonctions continûment différentiables en fonction des différents x_i. Il est alors possible de bâtir une métrique intrinsèque où la distance de deux points est la longueur de la géodésique qui relie ces deux points, cette dernière existe grâce aux conditions posées sur les g_{ij} et sur la forme quadratique.

Un raisonnement simple utilisant le nombre de variables et de fonctions mises en jeu permet à Riemann de montrer que les espaces généralisés qu'il vient d'introduire ne se réduisent pas tous aux espaces euclidiens. La généralisation du concept de mesure proposé par Riemann fait ainsi éclater le cadre de la géométrie euclidienne et donne naissance à une multitude d'espaces non euclidien. Mais le point de vue proposé ici n'est pas axiomatique : les nouvelles géométries ne sont pas fondées sur la négation de l'axiome des parallèles mais proviennent naturellement d'une interrogation sur la métrique de l'espace.

Courbure

Les variétés particulières qui peuvent se ramener au *ds* euclidien usuel sont appelées par Riemann des variétés planes. Il consacre l'essentiel de la fin de la seconde partie à essayer de caractériser la diversité des variétés générées par l'élément linéaire en mesurant leur écart à la planéité et pour cela, il s'appuie sur une notion de courbure (inspirée de Gauss). Cette notion est essentielle pour bien comprendre la genèse intrinsèque de l'espace à partir d'un point de vue local. Nous allons l'illustrer sur le cas le plus simple, d'ailleurs développé par Riemann, celui des surfaces (de dimension 2) à courbure constante et positive. Nous suivons la voie intuitive présentée par Cartan[3] Il existe bien sûr des présentations plus rigoureuses basées sur une approche analytique.

1) On commence par définir un triangle ABC géodésique infinitésimal sur une surface, c'est-à-dire la figure formée par trois points et par les lignes de plus courte distance qui joignent ces trois points.

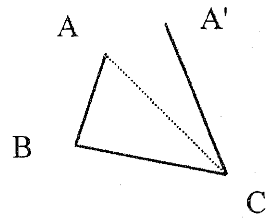


Dans le cas de la sphère, on peut calculer l'aire de ce triangle
A',B' et C' sont les points antipodaux de A, B, et C.
On calcule d'abord l'aire du fuseau (ou du double fuseau) dont les deux sommets sont A et A'. Cette aire est égale à 2↔4πR_↔A/2π, si A est mesuré en radians, c'est donc 4R_↔A. Puis, on calcule de la même façon les fuseaux déterminés par B et C. Ces trois fuseaux recouvrent la sphère en entier mais les triangles ABC et A'B'C' sont recouverts trois fois (une fois par chaque fuseau).
*On peut donc écrire: 4R_A+ 4R_B+ 4R_C= 4πR_+ 4 Aire (ABC) et l'aire du triangle ABC est égale à (A+B+C-π)R_*

2) On réalise ensuite une transformation qui envoie ce triangle curviligne sur le plan en conservant les distances et les angles. Le triangle ne se referme pas nécessairement comme le montre l'exemple de la sphère. Dans ce cas, l'aire du triangle ABC est(A+B+C-π)↔R_.
Comme une aire est toujours positive cette formule montre que la somme des angles d'un triangle sur la sphère est toujours supérieure à π.
Le point A du triangle aura donc deux images A et A' dans la transformation qui envoie (aplatit ?) le triangle curviligne sur le plan.

[3] Cartan (1926) Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann. Gauthier-Villars

3) Dans le triangle développé sur le plan, on obtient, en général, un angle ACA' non nul dont la mesure est $K(\sigma)d\sigma$ en chaque point de la variété où $d\sigma$ est l'aire du triangle infinitésimal ABC.



$K(\sigma)$, caractéristique de la variété, définit la courbure de la variété en un point.
Dans le cas de la sphère, on a donc $K(\sigma)d\sigma \leftrightarrow R\_=d\sigma$ et donc $K(\sigma) = 1/R\_$, la courbure de la sphère est constante.

Dans les espaces à courbure constante, les figures peuvent se mouvoir sans extension et sont donc invariantes par isométrie. Cette propriété, encore appelée axiome de libre mobilité, vraie dans l'espace euclidien l'est dans d'autres espaces. Ainsi, certaines propriétés qui résultent d'observations valides dans le méso-espace ne sont pas caractéristiques de l'espace euclidien et peuvent engendrer d'autres géométries.

4) Conclusion : applications à l'espace

Après avoir fait éclater le cadre traditionnel de la géométrie euclidienne et de fait créer une infinité d'espaces possibles, Riemann, dans sa conclusion, revient sur le problème du lien entre espace physique et géométrie. Il précise un certain nombre de conditions nécessaires et suffisantes pour que les variétés introduites à partir de l'élément linéaire possèdent les propriétés locales propres à la géométrie euclidienne. Ces propriétés sont valides dans les limites de l'observation de l'espace physique local.
La fin de l'exposé de Riemann ouvre des perspectives sur la physique de l'infiniment petit et de l'infiniment grand. Pour lui la géométrie de ces espaces est très probablement différente de la géométrie de l'espace ambiant comme semblaient le montrer les propriétés électromagnétiques découvertes à son époque. A cet égard, sa conclusion est particulièrement caractéristique d'un mode de pensée ouvert et prospectif, libre de tout préjugé.
Des recherches partant de concepts généraux, comme l'étude que nous venons de faire, ne peuvent avoir d'autre utilité que d'empêcher que ce travail ne soit entravé par des vues trop étroites, et que le progrès dans la connaissance de la dépendance mutuelle des choses ne trouve un obstacle dans les préjugés traditionnels.

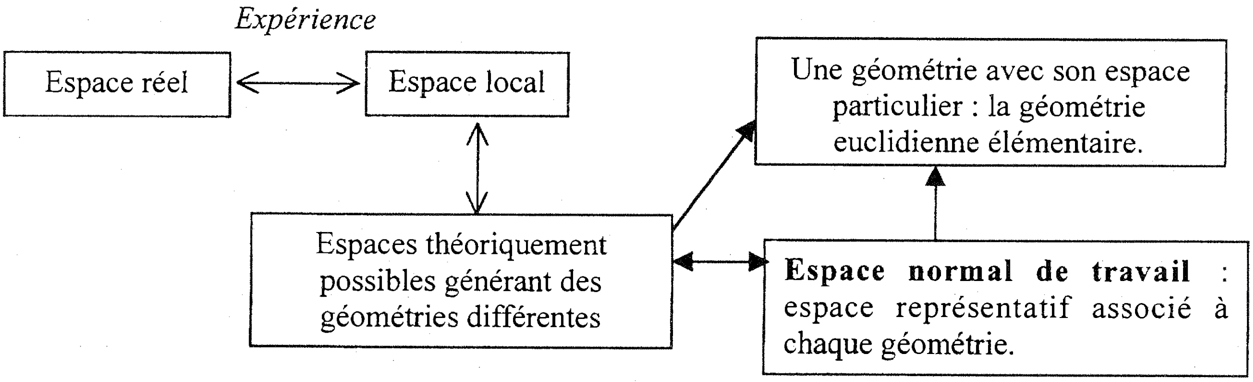
III. Retour au didactique

1) Une géométrie particulière : la géométrie élémentaire euclidienne

Dans cette partie, nous allons revenir à notre propos initial qui portait, rappelons le, sur les liens entre espace, géométrie et enseignement. Le détour par l'étude des conceptions de Riemann, nous semblait a priori susceptible d'éclairer les liens entre la géométrie et la modélisation de l'espace.
Quelques points nous semblent particulièrement fondamentaux dans une perspective didactique qui tente d'intégrer l'approche épistémologique.

L'existence de multiples géométries, la géométrie euclidienne n'étant qu'une géométrie parmi d'autres. Ces géométries vont être génèrées de manière naturelle en insistant sur certains points cruciaux de la modélisation en acte de l'espace.
L'insistance sur la localité. Les hypothèses fondatrices résultent d'observations locales et il faut être prudent sur toute généralisation hors du champ du méso-espace.
L'insistance sur la difficile adéquation du modèle avec la réalité. Le choix des faits nécessaires pour modéliser l'espace n'a rien d'évident et plusieurs directions existent.
et enfin
L'insistance sur la mesure des grandeurs (même abstraites) pour fonder et générer la géométrie. Cela constitue une rupture par rapport à la tradition euclidienne. Il s'agit aussi d'une rupture par rapport à une certaine tradition de l'enseignement dans sa version axiomatique renforcée par la trilogie affine, projectif, euclidien.

Nous résumons dans un nouveau schéma la problématique de la géométrie en tant que théorie de l'espace telle qu'elle nous apparaît à l'issue de l'étude du texte de Riemann.



Nous avons développé une articulation entre ces points de vue orientée vers une possible mise en œuvre dans un cadre scolaire. Notre réflexion passe par un approfondissement du lien local-global et par la mise en évidence de modèles localement mais non globalement euclidiens.

2) Articulation local-global

De manière traditionnelle, le passage du local au global s'effectue par une opération de la pensée qui reproduit à l'infini sans les modifier les propriétés rencontrées localement. Le local n'est que la réduction à l'identique du monde global et inversement ce dernier apparaît comme un monde local dont on aurait supprimé les murs.
Mais Riemann vient modifier cette vision et plusieurs types de problèmes sont alors envisageables.
1) Les propriétés retenues, vraies dans l'espace qui nous entourent le sont-elles encore dans l'infiniment petit et dans l'infiniment grand. Ceci est un problème de physique, mais ce problème vient perturber la question initiale sur l'unicité de la géométrie naturelle.
2) L'extension de la géométrie localement perçue comme euclidienne donne-t-elle nécessairement l'espace euclidien?
C'est Klein qui le premier a développé et résolu le problème de décrire tous les espaces globaux qui localement étaient indiscernables de l'espace euclidien dans le cadre de sa théorie des formes spatiales (Raumformen). Nous allons étudier ce problème en donnant un sens plus précis à la notion d'espace localement euclidien et ceci à partir de l'étude du cas du cylindre. Cette étude nous semble a priori fructueuse dans un cadre didactique grâce à son aspect particulièrement intuitif.

3) Digression mathématique : les espaces localement euclidiens

1) Sur une « géométrie naturelle » du cylindre

Nous considérons ici le cylindre classique, c'est-à-dire la surface infinie de dimension deux définie par un cercle directeur et des droites génératrices dont la direction est perpendiculaire au plan contenant le cercle directeur. L désigne la longueur du cercle directeur.
Nous pouvons, à la manière de l'écrivain anglais Abbott dans Flatland[4], imaginer un habitant de cette surface cylindrique. Cet habitant va être conduit à développer une géométrie naturelle qu'il peut construire en s'appuyant sur la notion de distance. Nous pouvons ainsi bâtir une géométrie métrique qui permet de résoudre un certain nombre de problèmes issus de l'expérience et nécessaires à la géométrie pratique des habitants du cylindre. Voici quelques-unes de ces questions.

Quel est le plus court chemin d'un point à un autre ? La réponse à cette question permet de développer une notion de droite sur la surface si l'on définit de manière classique la droite comme "le plus court chemin d'un point à un autre".

Quels sont les propriétés des triangles et des figures usuelles, par exemple la somme des angles du triangle est-elle égale à 180° ?

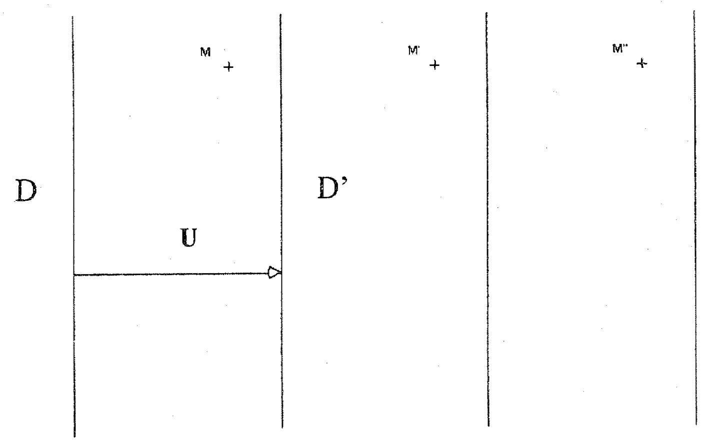
Le théorème de Pythagore est-il vrai ? etc.

Nous invitons le lecteur à essayer de résoudre ces différents problèmes sans lire immédiatement la suite de cet article. Il pourra prendre, comme les étudiants en formation, une feuille de papier et la rouler en cylindre. On peut aussi utiliser les rouleaux d'essuie-tout (vides) et étudier la manière dont ils sont faits.

Nous allons voir que pour résoudre ces différents problèmes, il est indispensable de disposer de plusieurs modèles de la surface cylindrique et de déterminer l'espace normal (ou les espaces normaux) de cette géométrie.

Un premier modèle (Modèle 1) résulte du développement isométrique du cylindre roulant sur le plan.

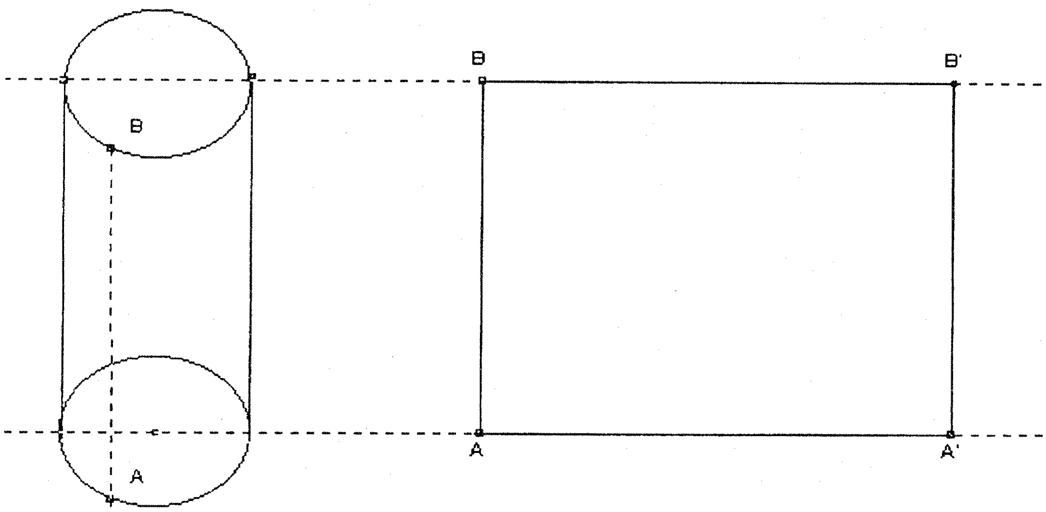
Nous le ferons même rouler autant de fois que nécessaire. Nous obtenons un réseau constitué



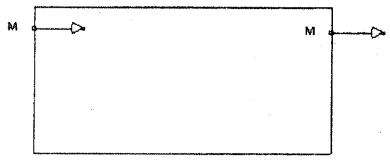
[4] Abbott (1884) Flatland Livre de Poche.

de droites parallèles.
Dans ce réseau, deux points M et M' sont équivalents s'ils sont les images sur le plan du même point du cylindre dans le déroulement précédent. En d'autres termes, s'il existe un entier relatif n et une translation t de vecteur $n.\vec{U}$ telle que M'=t(M) où $\vec{U}$ est un vecteur dont la longueur est le périmètre L du cercle directeur.

Un deuxième modèle (Modèle 2) est constitué par la bande plane délimitée par les deux droites parallèles (AB) et (A'B').



Ce modèle apparaît comme l'image du cylindre découpé suivant une génératrice qui devient (AB) et (A'B'). Il faut considérer comme identiques deux points sur les droites (AB) et (A'B') qui sont confondus sur la génératrice avant le développement.

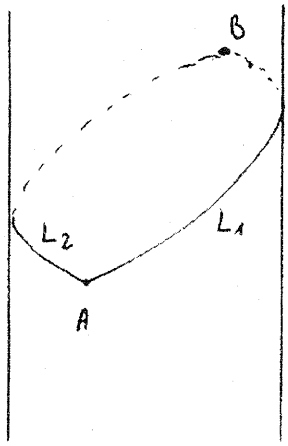


Ces modèles plans donnent naissance à des espaces normaux de travail sur une feuille de papier ou sur l'écran d'un ordinateur.

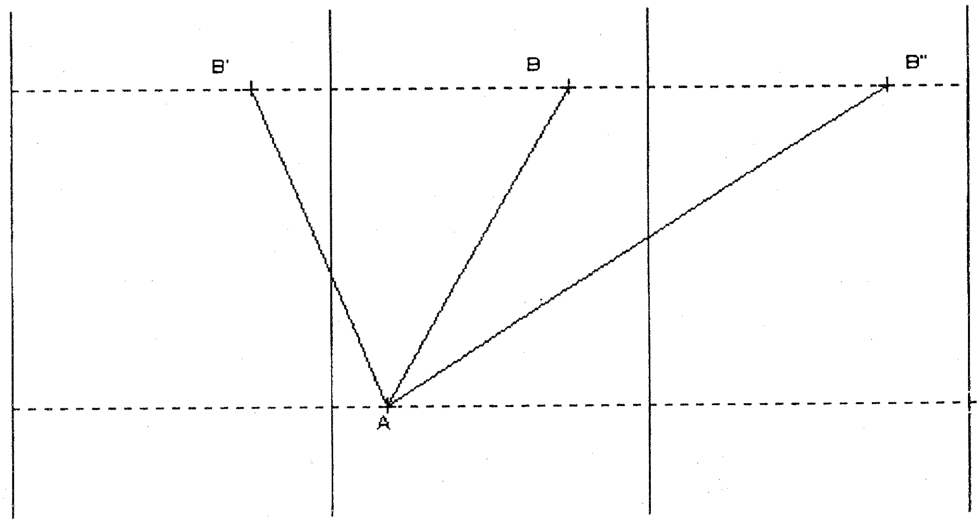
Ainsi en LOGO, la tortue peut quitter l'écran sur le côté droit pour réapparaître en un point opposé sur le coté gauche.

Nous disposons ainsi de plusieurs représentations du cylindre qui vont nous permettre de résoudre les problèmes que nous nous posons à propos de la définition d'une géométrie naturelle sur cette surface.

A titre d'exemple, nous allons envisager le problème de la définition des géodésiques sur le cylindre.
Une première difficulté surgit pour définir la distance de deux points du cylindre (plus court chemin de A à B). En effet, il existe deux possibilités pour rejoindre B à partir de A, on peut l'aborder par la gauche ou par la droite, laquelle des deux lignes est-elle la plus courte ?



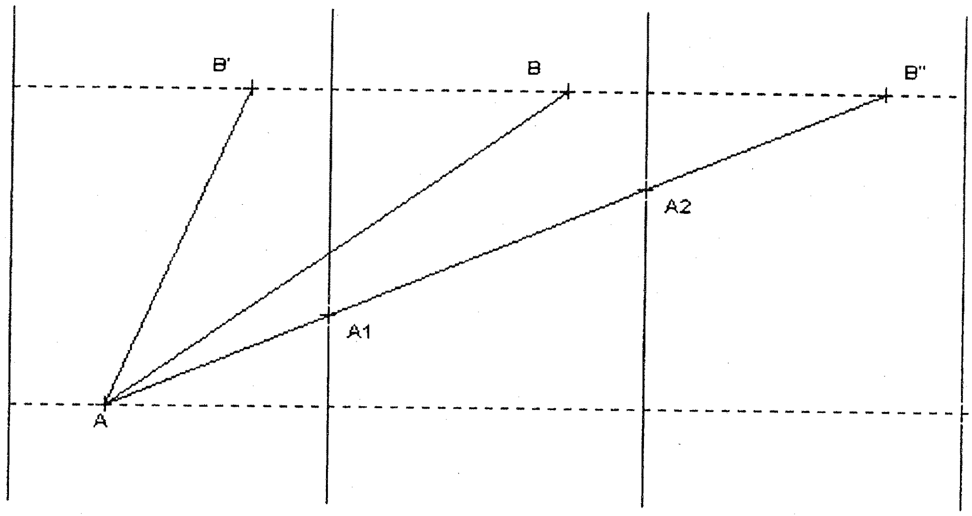
Plaçons-nous dans le réseau plan (Modèle 1) associé au cylindre, le point B est équivalent aux points B', B" etc. La distance de B à A est ainsi obtenue en considérant le plus court des segments AB_i.

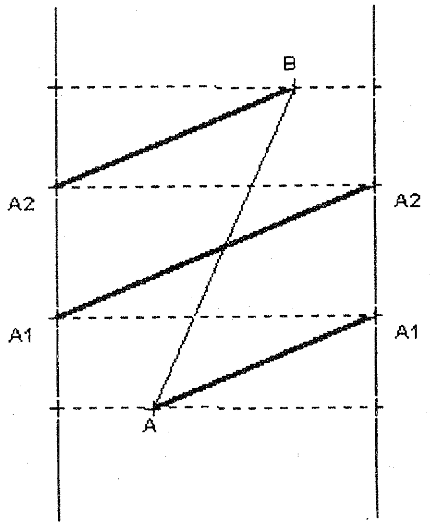


Suivant la position de A par rapport à la médiatrice de BB', le chemin le plus court sera AB ou AB'.

Les droites tracées sur le modèle 1 forment un angle constant avec les génératrices et si l'on retourne maintenant à la surface cylindrique dans R^3, les lignes ainsi obtenues sont des hélices.

Par extension, nous allons appeler droites du cylindre les lignes obtenues en prolongeant le segment de plus courte longueur qui joint A à B. Quelles sont alors toutes les droites du cylindre ?
A côté des hélices, il y a aussi les génératrices qui joignent deux points reliés par une droite parallèle à D.
Enfin, si deux points sont situés sur une perpendiculaire à D, la droite est alors un cercle directeur du cylindre. Dans ce cas, on remarque que la droite (le cercle directeur) est bornée et n'est donc pas illimitée comme dans le plan euclidien.
Il y a donc trois types distincts de droites : les hélices, les cercles directeurs et les génératrices.
Une autre propriété fondamentale de la géométrie euclidienne est fausse dans la géométrie du cylindre : par deux points il passe une infinité de droites. On peut le vérifier grâce aux deux figures suivantes tracées dans les modèles 1 et 2.





Dans l'espace normal associé au modèle 2, le segment AB, résultant de AB" dans le modèle 1, est constitué par les segments $[AA_1]$, $[A_1A_2]$ et $[A_2B]$.

Pour un observateur local, les diverses droites sont pour lui des segments de droites parallèles.

Le développement plan montre également que le théorème de Pythagore est vrai et que la somme des angles dans un triangle est toujours égale à 180°.

Pour conclure, nous pouvons affirmer que dans une boule de rayon L/4, le cylindre possède une géométrie euclidienne, ce n'est pas le cas globalement. Nous dirons que l'espace en question est localement euclidien.

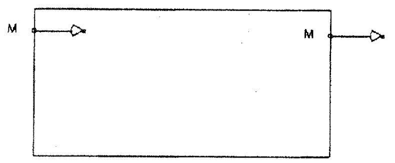
2) Géométrie localement euclidienne : le cas général[5]

Nous définirons, de manière assez intuitive, les espaces localement euclidiens, comme des espaces dont la géométrie sur tout disque dont le diamètre est inférieur à une valeur fixe L, est une géométrie euclidienne. Une manière plus rigoureuse, dans le droit fil de la pensée de Riemann, consiste à appeler ainsi les variétés dont l'élément linéaire est euclidien.
En dimension deux, nous venons de voir qu'il existe au moins deux espaces localement euclidiens : le plan euclidien et le cylindre. En existe-t-il d'autres? En fait, il y a cinq espaces localement euclidiens de dimension 2 : le plan, le cylindre, le tore, le cylindre de Möbius, la bouteille de Klein.

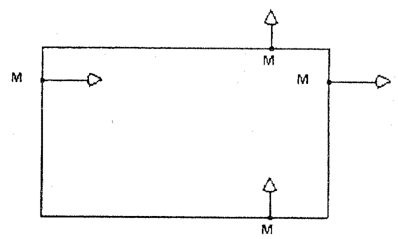
[5] Pour une présentation plus complète de cette partie, nous renvoyons à un article à paraître dans L'ouvert, Université Louis Pasteur, Strasbourg. On peut aussi consulter Cartan opus cité, Klein (1928) Nicht-euklidische Geometrie, et Nikulin et Shafarevitch (1982) Groups and Geometry, les deux ouvrages chez Springer Verlag.

Le problème de la description est résolu grâce à la mise en évidence d'un groupe d'isométries qui agit sur une partie du plan, le domaine fondamental. Ces groupes ont la propriété d'être totalement discontinus et sans point fixe : il s'agit donc de sous-groupes de pavage du plan ou de l'espace considéré. Ainsi, pour décrire l'espace il faut connaître son domaine fondamental et son groupe d'isométrie, on peut ensuite essayer de donner la surface de l'espace qui en est aussi l'image.

Le cylindre,

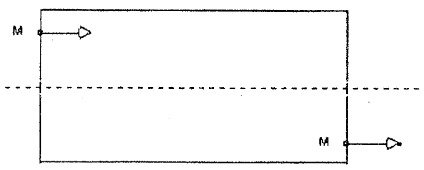


Le tore,



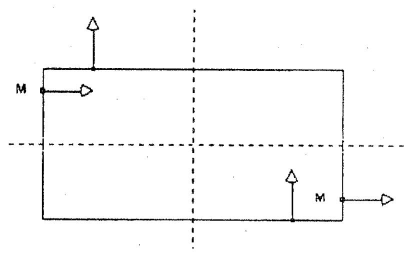
On peut aisément réaliser en LOGO, ces deux géométries. Il faut autoriser le mode enroulement latéral (pour le cylindre) et latéral et vertical (pour le tore)

Le cylindre de Möbius
On peut plonger cette surface dans R^3, en



réalisant un ruban de Möbius, mais infini.

La bouteille de Klein,



Il s'agit de la surface la plus complexe, son plongement dans R^3 est imparfait puisqu'il n'est pas injectif.

En LOGO, il est possible d'envisager ces deux dernières géométries mais en introduisant une tortue bicolore, rouge et bleue. Ainsi, dans la cas de Möbius, la tortue quitte l'écran latéralement en bas et à droite avec sa partie rouge vers le haut et revient latéralement en haut et à gauche avec sa partie rouge vers le bas. Voici un monde bien désorientant à l'image de ces surfaces qui ne sont pas orientables !
Enfin, nous voyons aussi la spécificité de *l'espace normal* qui correspond à ces écrans et qui aide le raisonnement géométrique à s'exercer dans ces espaces.

Vers une approche intrinsèque de l'enseignement de la géométrie ?

Pour conclure de manière provisoire, nous énonçons un certain nombre de pistes que nous souhaitons approfondir à l'avenir et qui nous ont été suggérées par ce travail.

Sur la diversité des géométries

La vision naïve de la géométrie éclate et ceci sans nécessairement recourir aux géométries non-euclidiennes les plus complexes. La validité de la modélisation traditionnelle qui consiste

à passer de la perception de l'espace au modèle géométrique sans interroger le passage du local au global, est remise en cause pour des raisons mathématiques.
Par rapport à notre questionnement initial, nous pouvons noter l'utilité d'introduire la notion "d'espace normal" comme support pour faire de la géométrie. Cet espace dépend de la géométrie choisie par l'intermédiaire du domaine fondamental dans le cas des géométries localement euclidiennes. Nous voyons qu'il ne se réduit pas simplement au micro espace et qu'il est riche, en puissance, de toutes les propriétés de la géométrie étudiée.

Sur l'intérêt mathématique d'une approche intrinsèque

Sans nier l'importance et la nécessité du modèle euclidien ne serait-ce que comme référence, on ne peut exclure de l'enseignement les approches intrinsèques de la géométrie. En effet, il est grand temps de prendre en compte la révolution épistémologique survenue à la fin du XIXème siècle et de préparer les élèves à une vision contemporaine de la géométrie et de la physique. Il est en effet devenu usuel de jongler entre les diverses modélisations de l'espace en fonction de leur efficacité pour résoudre les divers problèmes abordés.
L'enseignement français paraît figé sur le point de vue conventionnaliste développé par Poincaré. Cette approche privilégie la modification des règles de calcul au sein d'un modèle dépassé mais familier alors que dans le point de vue moderne c'est la modification du modèle qui permet d'interpréter et de comprendre les faits.

Sur l'intérêt didactique de cette approche

Les diverses géométries, localement euclidiennes, appuyées sur des espaces différents et familiers peuvent apparaître comme les différents cadres d'un jeu didactique (au sens de R. Douady). Ce jeu peut donner du sens à la définition des objets rencontrés :nous avons vu le problème des droites, mais il en est ainsi de tous les objets qui sont à la base du raisonnement géométrique. On peut ainsi espérer favoriser le processus de définition par les élèves, fondamental en classe, mais difficile à mettre en œuvre. En effet, dans le cadre de la géométrie euclidienne trop d'évidences perceptives viennent parasiter ce processus.
Cette variété des géométries attire aussi l'attention sur la nature des invariants à privilégier et ceci à un moment où les programmes de Lycée réintroduisent les triangles égaux et les triangles de même forme.
Cependant, la question reste entière de déterminer le type de mise en œuvre possible dans la scolarité des élèves et dans la formation des enseignants. Il s'agit là d'un thème possible de recherche didactique profond et à long terme non inféodé à la pression versatile de l'institution scolaire.

Sur la possibilité d'expérimenter

La considération des espaces localement euclidiens, notamment celui du cylindre et du tore, donne aux élèves la possibilité de mener une expérience dans le monde réel. Le passage effectif du modèle abstrait à sa réalisation concrète sur une surface, le jeu dans le modèle rendu possible grâce aux logiciels donnent un sens intuitif fort à ces géométries. Cela nous semble une condition nécessaire pour pouvoir envisager des mises en œuvre dans les classes.

Développement dans le plan euclidien.

Surface de R^3 **Espace Normal**

Modèle informatique

Sur le nouveau sens de la géométrie naturelle

L'ensemble de ces approches renouvelle l'intérêt de bâtir la géométrie naturelle en l'adaptant à son espace de référence. Cette approche plus métrique de la géométrie basée sur des problèmes rejoint l'approche de Clairaut mais en diversifiant les possibilités de modélisation. Cependant la dérive est rapide qui fait passer des problèmes de mesure de l'espace à la mesure effective de l'espace et qui transforme l'élève-géomètre en élève-arpenteur.

Annexe : table des matières de sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie

Plan de cette étude

A. Concept d'une grandeur de n dimensions.

§1. Variétés continues et discrètes. Les parties déterminées d'une variété sont dites des quanta. Division de la doctrine des grandeurs continues en :

1. Doctrine des simples rapports d'étendue, dans laquelle on ne suppose pas que les grandeurs soient indépendantes du lieu.

2. Doctrine des rapports métriques, dans laquelle cette indépendance doit être supposée.

§2. Génération du concept d'une variété d'une, de deux, ... de n dimensions.

§3. Réduction de la détermination de lieu, dans une variété donnée, à des déterminations de quantités Caractère essentiel d'une variété de n dimensions..

B. Rapports métriques dont est susceptible une variété de n dimensions, dans l'hypothèse où les lignes possèdent une longueur, indépendamment de leur position, et où toute ligne est ainsi mesurable par toute autre ligne

§1. Expression de l'élément linéaire. On considère comme planes les variétés dans lesquelles l'élément linéaire est exprimable par la racine carrée d'une somme de carrés de différentielles complètes.

§2. Etude de variétés de n dimensions, dans lesquelles l'élément linéaire peut être représenté par la racine carrée d'une expression différentielle du second degré. Mesure de leur écart de planéité (courbure) en un point donné et en suivant une direction superficielle donnée. Pour la détermination de leurs rapports métriques, il est (sous certaines directions) nécessaire et suffisant que l'on donne en chaque point la courbure suivant $n\frac{n-1}{2}$ directions superficielles.

§3. Explication géométrique.

§4. Les variétés planes (dans lesquelles la courbure est partout nulle) peuvent être considérées comme un cas particulier des variétés dont la courbure est constante. Celles-ci peuvent encore être définies par la propriété que les grandeurs de n dimensions y sont indépendantes du lieu (mobilité de ces grandeurs sans extension).

§5. Surface de courbure constante.

C. Application à l'espace

§1. Systèmes de faits suffisants pour la détermination des rapports métriques de l'espace, tels que la géométrie les suppose.

§2. Jusqu'à quel degré est probable la légitimité de ces déterminations empiriques, lorsqu'on sort des limites de l'observation pour entrer dans l'incommensurablement grand.

§3. Jusqu'à quel degré est-elle probable pour l'incommensurablement petit ? Lien de cette question avec l'explication des phénomènes naturels.

Références :

[1] Houdement et Kuzniak

a) 1999 « Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres » Educational Studies in Mathematics Vol 40/3..

b) 2000 « Formations des maîtres et paradigmes géométriques ». Recherches en Didactique des Mathématiques 20/1.

c) 1999 « Quelques éléments de réflexion sur l'enseignement de la géométrie : de l'école primaire à la formation des maîtres » (Avec C Houdement). Revue Petit X n°51. Article repris dans la revue Grand N

[2] Berthelot et Salin (1992) L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire. Thèse de l'université de Bordeaux.

[3] Gadamer (1976) Vérité et méthode **Seuil.**

---

1 Cahiers du Sud (1948) 1986, *Les grands courants de pensée mathématique* p 47. Ed Rivages

COMPTE-RENDU DE L'ATELIER "UN COIN MATHEMATIQUE DANS LA CLASSE, POUR QUOI FAIRE ?"

ATELIER 13
Michel BOURGUET
IUFM de Nîmes

L'atelier s'est déroulé en deux parties, la première consacrée à l'exposition d'une problématique posée par l'expérience menée depuis deux ans maintenant à Nîmes sur le coin mathématique et les problèmes ouverts, suivie d'une discussion dans la deuxième partie menée à partir de la question centrale de ce travail : "mais tout ça, est-ce encore des mathématiques ?".
(23 participants).

L'expérience menée à Nîmes

Il s'agit d'un travail en plusieurs volets complémentaires et tournant tous autour d'une idée simple : les problèmes ouverts ou les récréations mathématiques semblent intéressantes pour amener un maximum d'élèves à chercher. La caractéristique de ces activités étant d'être assez éloignées d'un savoir à institutionnaliser, les élèves – et même leur professeur – s'en sentent rassurés et en partie libérés. Ce qui pousse beaucoup à s'investir alors dans le jeu et à devoir mener une réflexion assez approfondie...
Les actions mises en place sont :
- un travail avec des IMF pour expérimenter la mise en place d'un coin mathématique.
- un stage de formation continue de deux semaines intitulé "Le printemps des maths" et ayant pour but de mêler les maths et d'autres disciplines plus artistiques... mais cette action n'a pas fait l'objet de l'atelier.
- un travail mené en classe de sixième et dans des classes de primaire sur les problèmes ouverts.

Modalités de mise en pratique

L'installation d'un coin-mathématique dans la classe répond grosso modo aux même buts que l'installation d'un coin lecture. Il s'agit de math-plaisir comme on peut avoir une lecture privée, pour le plaisir de l'histoire. Il faut donc y proposer des maths qui ne ressemblent pas tout à fait aux maths de tous les jours, d'où l'idée déjà beaucoup avancée et beaucoup utilisée de récréations mathématiques. Mais l'enjeu doit être plus ambitieux, si on veut que cela fonctionne, que la simple mise en affiche de la rubrique jeux des revues scientifiques. S'il s'agit d'une activité dans le cadre de l'école il faut qu'elle soit encadrée et d'une certaine façon productive. Autrement dit il faut que l'on soit sûr de la recherche de l'élève et qu'on lui permette d'en rendre compte. L'important n'est peut-être pas plus de chercher que de

communiquer afin d'argumenter et valider collectivement. Aussi le cadre qui s'est naturellement présenté est le suivant : une "énigme" – éviter le mot problème, bien sûr - est présentée chaque semaine à la classe à date fixe, puis cette énigme est affichée dans le coin mathématique et tous les élèves ont la possibilité de la résoudre à des moments aménagés pour cela. Une boîte est alors à disposition des élèves pour qu'ils y mettent leurs réponses, datées, sachant qu'un même élève peut apporter plusieurs réponses et améliorer la première.
La boîte est ouverte ensuite par l'enseignant qui fait un tri et prépare la séance de mise en commun des réponses, qui est le moment le plus délicat du processus. Il ne doit s'agir ni d'une correction ni d'une validation directe par le maître mais d'un réel débat afin de valider ou invalider des réponses proposées et d'argumenter sur leur validité.
Pour permettre cela les énigmes proposées doivent être bien choisies…
Exemple : La pyramide des nombres. Il s'agit avec les nombres de 1 à 10 de faire une pyramide telle que chaque brique d'un rang intermédiaire soit la différence des deux briques qui la soutiennent. Il y a 4 solutions différentes…
Autre exemple : Dans un troupeau il y a des chameaux et des dromadaires. On compte 100 bosses et 60 têtes. Combien y a-t-il de chameaux ?

Afin d'initier l'envie de résoudre ces énigmes, il paraît nécessaire de proposer aux élèves quelquefois dans l'année, une situation de problème ouvert dans laquelle il est important d'être plusieurs pour la résoudre. Les jeux à stratégie optimale en sont un exemple parfait : soit la course à 20 (le joueur qui commence écrit 1 ou 2, le deuxième joueur a la possibilité de rajouter 1 ou 2 et ainsi de suite… le premier qui arrive à 20 a gagné), le carré de chocolat (*voir actes d'un précédent colloque*) ou encore le compte est bon collectif *(Colloque Angers 1987)*

- Les élèves sont par équipes de 5 et ont chacun devant eux des étiquettes de 0 à 9, le professeur annonce un nombre entre 0 et 45 et instantanément les élèves doivent lever une étiquette. On fait la somme dans chaque groupe et l'équipe qui est la plus proche du nombre annoncé a gagné. Bien sûr on peut se concerter avant que l'enseignant annonce son nombre.
On peut encore citer en exemple de ce type de situations la situation des 4000 jours en sixième : l'enseignant arrive un jour et dit "aujourd'hui quelqu'un dans la classe a 4000 jours -bien faire les calculs la veille- Qui c'est ? Bien sûr je ne vous donne pas les dates de naissance…."
Encore une fois la phase difficile à bien gérer et qui est pourtant primordiale est la phase de mise en commun des résultats. Car il doit y avoir dans la classe les clauses d'un réel débat. Il n'est peut-être pas nécessaire de proposer à tous les groupes de rendre compte de leur travail si on veut écourter la phase un peu stérile de compte-rendu strict.

Problématique et questions en suspens

Le débat qui a suivi dans l'atelier a bien posé les bases de la problématique. Tout ça c'est bien joli et séduisant mais est-ce bien des mathématiques ?
Le pari qui est fait et qui reste à démontrer est que le savoir mathématique ne se résume pas à des contenus techniques ou des connaissances déclaratives, mais que l'émission de conjectures, le tâtonnement suivi d'une vraie explication et validation collective est le centre même de l'activité mathématique et qu'essayant de résoudre ces petits problèmes sans suite institutionnalisable, les élèves sauront mieux s'investir dans les mathématiques puisque ayant

compris le sens de leur activité. Si ceci est un vœu pieux, et ne semble profiter qu'aux bons élèves (pour qui il faut bien trouver des moyens pour leur donner du grain à moudre) on constate quand même que tous "aiment" bien ce type de mathématiques et que certains reprennent confiance dans leurs capacités à émettre et conduire un raisonnement. Si une dédramatisation des maths en ressortait, ce serait déjà beaucoup....

Dans l'exemple de la course à 20, un élève qui dit "17 est gagnant" n'est quand même pas loin d'une activité mathématique, puisqu'il a mis au point une procédure qu'il est capable de justifier (si on l'y invite). Il n'a plus ensuite qu'à transférer son "théorème" local ainsi établi sur un cas pour en déduire que "14 aussi est gagnant" et puis la suite 11, 8, 5, et 2.
Si on l'invite à jouer à la course à 30 et qu'il arrive à trouver que 27 est alors gagnant, le transfert est ainsi généralisé et la "théorisation" n'est pas loin. Il aura en tout cas épuisé le jeu... et vidé le problème.
La discussion a semblé tourner en ce sens et établir que chercher, dire ce qu'on a trouvé et argumenter ses résultats sont un socle nécessaire à toute activité mathématique et peut-être même spécifique à elle et que cela s'apprend... Commençons alors le plus tôt possible (dès la maternelle) et maintenons cette activité en éveil tout au long de la scolarité. C'est un pari qui ne sera sans doute pas perdu.

LES AUTRES PRODUCTIONS DE LA COPIRELEM

La COPIRELEM ou Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement Elémentaire s'intéresse à la fois aux recherches sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire (enfants de 2 à 12 ans) et à la formation des professeurs d'école.

☆☆☆

Cette commission a été à l'origine de l'élaboration de documents en didactique des mathématiques pour la formation initiale et continuée des professeurs d'école entre 1991 et 1997.
Les fruits de ces travaux sont consignés en 6 tomes disponibles auprès de l'IREM de Paris 7.

☆☆☆

Chaque année, depuis 25 ans, la COPIRELEM organise un colloque national et, depuis 4 ans, un séminaire à destination des nouveaux formateurs en IUFM.
Les conférences plénières, les exposés et les travaux en ateliers de ses deux manifestations sont consignés dans :

- **Les ACTES** des deux précédents colloques :
  LOCTUDY 98 - Disponible auprès de l'IREM de BREST.
  LIMOGES 99 - Disponible auprès de l'IREM de LIMOGES.

- **LES CAHIERS DU FORMATEUR :**
  3 tomes parus et disponibles à l'IREM de Paris 7.

☆☆☆

La COPIRELEM participe également à la publication des annales des concours de recrutement des professeurs des écoles :
- **ANNALES du concours CRPE 2000**
  Disponibles auprès de l'IREM de Paris 7.

« **Grand N** »,
I.R.E.M. de Grenoble
B.P. 41 - 38402 Saint-Martin-d'Hères - Cedex
Tél. : 04-76-51-44-06 Fax 04 76 51 42 37
E.mail : direm@fourier.ujf-grenoble.fr

Bulletin d'abonnement

Revue de mathématiques, sciences et technologie pour les maîtres de l'enseignement primaire

année 2001-2002 : n° 69-70 année 2001-2002 : n° 71-72

Abonnements	1 an 2001-2002	2 ans 2001-2002 et 2002-2003
France	26 euros	45 euros
Etranger	32 euros	55 euros

Je souscris .... abonnement(s) de .... an(s) à ....

Nom .... n° abonné ....
Adresse ....
....

....

Spéciaux « Grand N »

Commande

I.R.E.M. de Grenoble
B.P. 41 - 38402 Saint-Martin-d'Hères - Cedex
Tél. : 04-76-51-44-06

Titre	Quantité	Prix unitaire	Montant
Spécial sciences cycle II (200 p)	épuisé		
Spécial sciences cycle III (240 p)		120 F – 18,50 €	....
Spécial Maternelle tome 1 (200 p)	....	95 F - 14,50 €	....
Spécial Maternelle tome 2 (176 p)	....	95 F - 14,50 €	....
Spécial Maternelle tome 1 et 2	....	180 F - 27,50 €	....
Spécial Maternelle tome 1 et 2	+ de 10 ex.	160 F - 24,50 €	....
	Franco de port	Total	....

Renvoyez le bulletin et / ou le bon de commande à l'adresse ci-dessus en joignant un chèque à l'ordre de **Monsieur l'agent comptable de l'Université Joseph Fourier – Grenoble ou** un bon de commande administratif.

Une recherche par mots clés sur les résumés des articles de la revue est disponible sur le site
http://crdp.ac-grenoble.fr/IMEL/

Spécial *grand N* **maternelle**

irem de Grenoble

SOMMAIRE TOME 1
approche du nombre

GENERALITES SUR LES PROGRAMMES DU CYCLE 1

* Des conceptions qui ont variées

RÉFLEXIONS GÉNÉRALES SUR LES APPRENTISSAGES NUMÉRIQUES

* Compter à l'école maternelle ? oui, mais
* Calculer et compter de la petite section à la grande section
* Calcul ou comptage ? Calcul et comptage

ACTIVITÉS LIÉES À LA DÉSIGNATION

* Une activité de marquage-désignation
* Élaboration et lecture de listes
* La course au trésor

ACTIVITÉS AVEC DOMINANTE NUMÉRIQUE

* Livres à compter
* Du rite de l'appel à des activités mathématiques
* Enseigner l'énumération en moyenne section
* Deux oiseaux dans chaque nid
* Partage en deux
* Distribuons des perles
* Jeux numériques et élaboration de règles

SOMMAIRE TOME 2
structuration de l'espace

FABRICATION D'OBJETS ET RECONNAISSANCE DE FORMES

* Pliages
* Fabrication d'objets fonctionnels
* Boites à trous et jeux de formes
* Polydrons
* Formes et équilibre

REPÉRAGES ET CLASSEMENTS

* Placer des jetons
* Où placer le jeton
* Les couleurs du carré magique
* Tortue de sol-logo
* Trier en petite section

JEUX DE SOCIÉTÉ

* La préparation des ateliers jeux de société
* Faire ses courses en grande section
* Jeux de société et apprentissages mathématiques

BON DE COMMANDE

Titre	Quantité	Prix unitaire	Montant
Spécial N Mat. Approche du nombre	____	95 F - 15 €	____
Spécial N Mat. Structuration de l'espace	____	95 F - 15 €	____
Spécial N Mat. 2 volumes	____	180 F - 28 €	____
Spécial N Mat. 2 volumes	+ de 10 ex.	160 F - 25 €	____
Franco de port			
		Soit un total de :	____

Je joins un bon de commande ou un chèque à l'ordre de
Monsieur l'Agent Comptable de l' U. J. F.

Nom : Fonction :

Adresse :

Bon à retourner à
" Grand N "

IREM de Grenoble BP 41 - 38402 Saint-Martin-d'Hères cedex - Tél. : 04 76 51 44 06 - Fax : 04 76 51 42 37 *petit x*

IREM de Grenoble
B.P. 41
38402 SAINT-MARTIN D'HERES Cedex
France
Tél. : 04 76 51 46 06 - Fax : 04 76 51 42 37
e.mail : direm@ujf-grenoble.fr

Abonnement année 2000-01
n° 55-56-57

**JOURNAL POUR LES ENSEIGNANTS DE MATHEMATIQUES
DE LA SIXIEME A LA SECONDE**

Ouverture vers les Sciences et les Technologies

Abonnez-vous et faites abonner le centre de documentation de votre collège

Renouvellement ☐ Premier abonnement ☐

abonnement pour :	France	Etranger
1 an (2000-01)	200 F	260 F
2 ans (2000-01 et 2001-02)	360 F	440 F

Encore disponible : Numéro hors série Activités «petit x» 1993 à 1998
Prix pour les abonnés : 60 F
Prix pour les non abonnés : 90 F

Renvoyez ce bulletin d'abonnement à l'adresse ci-dessus et joignez un bon de commande ou un chèque à l'ordre de **M. l'agent comptable de l'Université Joseph Fourier**

Nom : .... n° d'abonné : ....
Adresse : ....
....
e-mail : ....

------ ✂ --

A conserver

n° d'abonné ☐

Je suis abonné pour ☐ 1 an 2000-2001 (n° 55-56-57)
☐ 2 ans 2000-2001/2001-2002 (du n° 55 au n° 60)

Donnez votre numéro d'abonné dans toute correspondance

Paiement par chèque n° .... banque ou CCP

La revue dispose de correspondants en Suisse et au Canada. Si vous résidez dans ces deux pays, adressez-vous directement à eux.

En Suisse : ◆ François CONNE ou Ruhal FLORIS
Au Canada : ◆◆ Jean PORTUGAIS

◆ François CONNE, Chercheur en didactique des mathématiques, La Romachère, Etoy.
◆Ruhal FLORIS, Didactique des mathématiques, équipe de Jean Brun, FAPSE, Université de Genève, 9, route de Drize, CH-1227 Carouge. Tél. (41) 22-705-98-36. Fax (41) 22-300-14-82. E-mail. floris@fapse.unige.ch
◆◆ Jean PORTUGAIS, Université de Montréal, Faculté des sciences de l'éducation, Département de didactique, C.P. 6128, succursale Centre-ville, Montréal (Québec) H3C 3J7. Tél. (514) 343-7102. Fax (514) 343-7286. E-mail. portugai@ere.umontreal.ca

Liste des participants

Prénom Nom	Ville	Prénom Nom	Ville
Robert ADJIAGE	STRASBOURG	Alain KUZNIAK	STRASBOURG
Michelle AMIOT	CLERMONT	Gérard LACORRE	BONNEVILLE
Françoise ANDRÉ	PERPIGNAN	Marie Hélène LALLEMENT	AVIGNON
Henri-Claude ARGAUD	VALENCE	Michèle LAMBERT	CHAMBERY
Danièle ARHEL	ANTONY	Martine LARDEY	GRAVELINES
Marianne ASSELINEAU	PASSY	Marie Hélène LE NOST	VERSAILLES
Jean-Claude AUBERTIN	BESANÇON	Gabriel LE POCHE	RENNES
Annette AUBIN	AIX-EN-PROVENCE	Alain LEBON	LA REUNION
Catherine AURAND	VERSAILLES	Jean Claude LEBRETON	ORLEANS TOURS
Christian BARTH	VALENCE	Christian LEDUC	VALENCIENNES
René BERTHELOT	PAU	Marc LEGRAND	GRENOBLE
Anne BERTOTTO	MASSY	Anne Marie LEGRAND	THONON
Isabelle BLOCH	PAU	Michèle LEJEUNE	BONNEUIL/MARNE
Bernadette BOCHATAY	CHAMONIX	Agnès LENFANT	REIMS
Myriam BOHN	ROUEN	Marc L'EPLATTENIER	EVREUX
Vincent BOISSARD	NIMES	Pascale LEVAILLANT	VERSAILLES
Jeanne BOLON	ANTONY	Laurence MAGENDIE	ORLEANS TOURS
Nicole BONNET	BOURGOGNE	Annie MALLEN-DONTENWILL	VESOUL
Marie-Françoise BORATTO	MARSEILLE	Michel MANTE	LYON
François BOULE	PARIS	Joëlle MARISSAL - DOUÇOT	LAON
Nivôse BOULEAU	MARTINIQUE	Elise MARTINELLI	GRENOBLE
Michel BOURGUET	NIMES	Pascale MASSELOT	MELUN
Françoise BOURHIS LAINE	ANTONY	Claude MAURIN	AVIGNON
Chantal BOUVATIER	VERSAILLES	Florence MICHON	BONNEVILLE
Jean-Luc BREGEON	MOULINS	Brigitte MORIZOT-DELBREIL	ROUEN
Robert BURGNIARD	ANNEMASSE	Robert NEYRET	GRENOBLE
Denis BUTLEN	MELUN	Bernadette NGONO	ROUEN
Michel CARRAL	TOULOUSE	Brigitte NICOLAS-LORRAIN	METZ
Michèle CARRIER	CHAMONIX	Catherine NORMAND	VERSAILLES
Robert CATHALIFAUD	LIMOGES	Nelcy PAOLETTI	AJACCIO
Claudette CHAMPION	MACON	Jean-Claude PEDROLETTI	BESANÇON
Michel CLINARD	BORDEAUX	Marie-Lise PELTIER	ROUEN
Catherine COLONNA D'ISTRIA	GANNAT	Sophie PERSYN	CHAMONIX
Sylvie COPPE	LYON	Monique PEZARD-CHARLES	MELUN
Bernadette COUSSON	BESANÇON	Jean Dominique PICCHIOTTINO	CRETEIL
Anne-Claire DALSTEIN	METZ	Dominique POIRET	REIMS
Chantal DAVAINE	BERGUES	Jean Claude PONCHEELE	ARRAS
Henri-Patrice DELEGUE	GRAVELINES	Jacqueline PRIA	VERSAILLES
Dominique DELHAYE	OUTREAU	Noëlle QUINQUIS	QUIMPER
Luce DOSSAT	CLERMONT -FD	Geneviève RANC	MASSY
Annie DUBUT	ROUEN	Jean Claude RAUSCHER	STRASBOURG
Gilda DUFOURD METRAL	ANNEMASSE	Patrick RENAULT	ROUEN
Alain DUVAL	BORDEAUX	Anne-Marie RINALDI	BEAUVAIS
Yvonne EXCOFFON	TROYES	Ghislaine ROBERT	BEAUVAIS
Pierre EYSSERIC	AIX-EN-PROVENCE	Christiane ROLET	LYON
Jean-François FAVRAT	NIMES	Jean ROUSSEL	GRAVELINES
Norbert FEAZ	CHAMBERY	Brigitte ROUSSEL	NIMES
Jean-Claude FENICE	TROYES	Marie-Hélène SALIN	BORDEAUX
Marcelle FERAUD	DIGNE	Nathalie SAYAC	CRETEIL
Marianne FREMIN	ANTONY	Marie Josephe SCHMITT	CLUSES
Marie-Pierre GALISSON	CERGY	Rolande SERMET MAGDELAIN	SALLANCHES
Sylvie GAMO	CRETEIL	Patrick SOUDIN	CHAMBERY
Claude GASPARD	ANNEMASSE	Denis SOUMAN	METZ
Gérard GERDIL MARGUERON	GRENOBLE	Claire TARDY	SAINT ETIENNE
Monique GEROLA	CORDON	Catherine TAVEAU	BONNEUIL/MARNE
Sandrine GEROLA	CORDON	Suzanne TERRIER	SAINT BRIEUC
Yves GIRMENS	PERPIGNAN	Luc TIENNOT	BASTIA
Eric GREFF	ANTONY	Brahim TIGROUSSINE	CHERBOURG
Jean François GRELIER	TOULOUSE	Marie-Françoise TILLIER	MACON
Tuulikki GREPILLAT	ANNEMASSE	Jean TOROMANOFF	ORLEANS TOURS
Brigitte GRUGEON ALLYS	BEAUVAIS	Joëlle TOURBE-LAPERSONNE	LAON
Aimé HACHELOUF	VALENCE	Patrick URRUTY	TULLE
Catherine HOUDEMENT	ROUEN	Marie Paule VANNIER	MOISSY
Jean-Louis IMBERT	TARBES	Odile VERBAERE	LILLE
Anik INCERTI	VERSAILLES	Agnès VERDIER	VERSAILLES
Michel JAFFROT	LA ROCHE SUR YON	Yvan VESSILLER	MOUTIERS
Christian JEANTET	ANNECY	Stéphanie VINDRET	CHAMONIX
Marie Claire JOLLIVET	ANGOULEME	Michel VUARCHERE	ANNECY
Marie Alberte JOSHUA	MARSEILLE	Christian WILLHEM	SAINT BRIEUC
Jean JULO	RENNES	Michel WOROBEL	AUXERRE
Chantal KRITTER	ANTONY	Chantal YANDZA	ANNECY

Auteurs : Travail collectif coordonné par la COPIRELEM

Titre :

Actes du XXVII^{e} Colloque Inter-IREM
des formateurs et professeurs de mathématiques
chargés de la
formation des maîtres
« Évolution de l'enseignement des mathématiques et de la formation des maîtres »

Public concerné :

Professeurs de mathématiques et formateurs chargés de cette discipline pour le premier degré.

Résumé :

Cette brochure contient les textes des conférences et des communications de recherches ainsi que les comptes-rendus des ateliers du colloque qui s'est déroulé à l'École Nationale de Ski et d'Alpinisme à Chamonix Mont blanc.

Mots clés :

Didactique des mathématiques, enseignement et apprentissage, formation des maîtres, école élémentaire.

Éditeurs :

IREM de GRENOBLE
100, rue des mathématiques - BP 41
38402 SAINT MARTIN D'HERES CEDEX
Téléphone : 04 76 51 46 62 - Télécopie : 04 76 51 42 37 - E.mail : direm@fourier.ujf-grenoble.fr

Responsable de la publication :

Monsieur Marc Legrand, Directeur de l'IREM de Grenoble

Date : avril 2001

Nombre de pages : 390

Prix : 20 Euros (soit environ 130 Francs)

N° ISBN : 2-903815-39-9

Composition couverture :
Sylvie Galigne
Daniel Iglésias