COPIRELEM

(Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire)

Concours externe de Recrutement des Professeurs d'Ecole
Mathématiques

Annales 1999

Sujets et corrigés

ARPEME

(Association pour l'élaboration et la diffusion de Ressources Pédagogiques sur l'Enseignement des Mathématiques à l'École)

UNIVERSITÉ DENIS DIDEROT
IREM PARIS 7

(Institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques)

COPIRELEM

(Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire)

Concours externe de Recrutement des Professeurs d'Ecole

Annales 1999

Sujets et corrigés

Concours externe de Recrutement des Professeurs d'Ecole

Corrigés des sujets 1999

Ces annales ont été réalisées par :

J. C. Aubertin (IUFM de Franche-Comté)
J.Briand (IUFM d'Aquitaine)
D. Butlen (IUFM Créteil)
A.Duval (IUFM d'Aquitaine)
J.L. Millet (IUFM du Limousin)
C. Houdement (IUFM de Normandie)
A.Rouchier : (IUFM d'Aquitaine)
P.Uger : (IUFM d'Aquitaine)
S.Vinant : (IUFM d'Aquitaine)

Un grand merci à François Colmez (Université Denis Diderot, IREM Paris 7) et à Martine et Nadine de l'IREM de PARIS 7 pour la saisie des sujets et la mise en page définitive.
Merci aussi à tous nos collègues en IUFM qui assurent la collecte des sujets et permettent la diffusion de ces annales.

Remerciements des auteurs

Ces annales ont pu être menées à bien grâce aux contributions de personnes, association et institutions :

- **Nos collègues formateurs à l'enseignement des mathématiques qui exercent en IUFM,** ou en circonscriptions, qui ont fait parvenir les sujets, souvent les corrigés rédigés dès que l'épreuve écrite du concours est passée, et aussi leurs remarques. Les premiers corrigés servent aux membres du jury pour la correction. Ils répondent à une urgence et un besoin nécessaire d'harmonisation des jurys. Nous nous appuyons sur ces corrigés pour notre travail. Parfois, nous les utilisons presque entièrement, parfois nous les reprenons. Le temps de concertation dont nous disposons nous permet d'approfondir certains points.

- **L'ARPEME** (Association pour l'élaboration et la diffusion de ressources pédagogiques sur l'enseignement des mathématiques à l'école.)
- ***Cette association a pour but de favoriser le développement de la réflexion sur l'enseignement des mathématiques à l'école et sur la formation des professeurs à l'enseignement des mathématiques :***
  -en aidant à la communication d'expériences, à la diffusion de documents de formation et de recherche sur l'enseignement des mathématiques.
  -en apportant un soutien à l'organisation de colloques et séminaires de réflexion rassemblant les formateurs intervenant à divers titres dans la formation en mathématiques des professeurs.
  -en prenant en charge l'élaboration, l'impression et la diffusion de tous documents utiles pour les formateurs en mathématiques des professeurs des écoles : documents pédagogiques écrits et audiovisuels, actes des colloques, comptes-rendus de séminaires.

- **La COPIRELEM** (Commission permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire).

- **L'IREM (Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques) de l'université de Paris VII Denis Diderot** qui, cette année encore, a aidé à la diffusion.

- **Un fascicule de commentaires séparé de ces annales, et réservé aux formateurs sera encore disponible cette année.**

L'épreuve du CRPE

Textes officiels de référence :
- BO n° 5 janv 92 définissant les épreuves des concours de professeurs des Ecoles.
- Le recueil de textes réglementaires sur les IUFM de Janvier 1992 (MEN)
- BO n° 43 nov 94 : recommandations relatives aux concours de recrutement des professeurs des Ecoles.
- BO n° 45 déc 94 : Référentiel des compétences et capacités caractéristiques d'un professeur d'Ecole
- La note de service 94-271 du 16 nov. 96 sur de nouvelles recommandations relatives aux concours de recrutement des professeurs des Ecoles.

L'épreuve du CRPE se présente comme suit :

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

- Cette partie vise à apprécier les connaissances mathématiques des candidats pour des notions relevant de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Les questions posées ne se limitent pas, bien entendu, à des exercices ou problèmes extraits de manuels scolaires de l'école primaire. Certaines questions permettent de valoriser des candidats manifestant une certaine aisance dans le domaine mathématique.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

- L'épreuve d'analyse de travaux d'élèves consiste à repérer les erreurs et les qualités dans une production d'élèves, à les analyser et les commenter en référence aux objectifs et aux contenus de la discipline tels qu'ils sont définis dans les programmes officiels.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

Pour enseigner à des élèves de l'école primaire il ne suffit pas de connaître les contenus mathématiques à transmettre. Cette connaissance est bien sûr nécessaire mais certainement pas suffisante. Une formation à l'enseignement des mathématiques ne se réduit ni à l'acquisition de contenus mathématiques, ni à un discours de pédagogie générale (qui, par nature exclue l'étude des contenus).
Ce second volet est consacré à l'analyse d'approches didactiques et démarches pédagogiques correspondantes.

Avertissement

Pour ce qui concerne le volet travaux d'élèves et volet didactique, la plupart des sujets de didactique soulèvent de vrais questions. Nous avons eu le souci de donner des réponses pertinentes sur le plan didactique et donc, quelquefois, plus approfondies que ce que l'on peut attendre d'un candidat au CRPE.

Conseil général aux candidats

- La lisibilité, la correction et la rigueur des réponses sur les plans mathématique et didactique sont bien entendu les critères principaux d'évaluation. Cependant, une écriture difficilement lisible, la présence de « fautes » d'orthographe par trop grossières et fréquentes, les coquilles fâcheuses, le verbiage pompeux et vide, l'abus d'expression hors de propos, finissent par avoir une incidence sur l'évaluation, et cela, quelle que soit la précision du barème de notation appliqué. Nous conseillons donc de relire la copie en tenant compte de tout cela.

- *Nous vous souhaitons une bonne lecture*

1999

	Partie mathématique										Analyse de travaux d'élèves	
	ARITHMETIQUE - ALGEBRE					GEOMETRIE - MESURE					CYCLE	THEME
	décimaux fractions	proport. (%, éch, vitesse)	Numéra division multipl	Arithmétique, équations	fonction et/ou graph.	Constr. Règle compas	propri. triangles quadrila.	Thalès Transf	Pythag. Périm. Aire Graduations	volume patron		
AIX-MARSEILLE, CORSE MONTPELLIER, NICE.		●	●	●		●	●		●		3	Calcul de 23,45 par 10 et recherche de justifications
AMIENS	●					●	●		●		3	Situation problème ouverte
BESANÇON		●		●		●	●	●			3	Résolution d'un problème soustractif très (trop) difficile : comparaison de deux quantités après transformation.
BORDEAUX-CAEN-CLERMONT-POITIERS-NANTES-LA REUNION.		●	●	●	●	●	●		●		3	Dans une situation problème, prendre en compte deux contraintes.
DIJON, NANCY-METZ				●			●	●			3	Trouver la longueur d'un segment sur une figure à partir d'un dessin à main levée et d'informations sur la figure
GRENOBLE / LYON			●	●		●		●	●		3	Proportionnalité
LILLE				●	●	●			●		3	Numération et écriture des grands nombres.
LIMOGES			●		●	●	●	●			2	Rangement de formes, selon la taille, en grande section de maternelle.
ORLEANS-TOURS				●			●		●	●	3	Proportionnalité
PARIS-CRETEIL-VERSAILLES		●	●			●	●				3	Résolution de problèmes
REIMS, STRASBOURG			●	●		●	●		●	●	3	Résoudre un problème complexe portant sur la somme de petits nombres, l'écart, la parité. Aide à apporter.
RENNES	●	●				●					3	Prendre des informations numériques dans un tableau
ROUEN			●			●	●		●		3	Division euclidienne
TOULOUSE			●			●	●		●	●	3	Périmètre et aire d'une figure complexe..

1999

Second volet (connaissances didactiques)

	CYCLE	Sujet mathématique étudié	questions de didactique des mathématiques.	Remarques
AIX-MARSEILLE, CORSE, MONTPELLIER, NICE	3	Proportionnalité	Influence du choix des nombres sur les procédures de résolution ; intérêt des tableaux. Comparaison de deux démarches d'introduction	
AMIENS	3	Résolution de problèmes.		Les questions intermédiaires : leur rôle.
BESANÇON	2	Numération opérations dans N	Variables didactiques	
BORDEAUX-CAEN-CLERMONT-POITIERS-NANTES-LA REUNION.		La proportionnalité dans différents cadres	connaissances objet / connaissance outil	Réflexion sur l'enseignement en ostension.
DIJON	2	Résolution de problèmes Situations additives	Procédures de calcul de 12+25 correspondant à différents niveaux de connaissances. Analyse de la tâche de l'élève , des compétences requises, des difficultés dans des problèmes. soustractifs	
GRENOBLE-/LYON	3	Sur les quadrilatères	Situation de formulation	« jeu de portrait »
LILLE	2	Numération au CP : groupements.	Variables didactiques	Il s'agit de comparer des situations.
LIMOGES	3	Reconnaissance d'une situation de proportionnalité dans un cadre spatial.	Deviner, estimer, prévoir, élaborer un modèle.	
NANCY-METZ	2	Calcul de sommes de petits nombres ; comparaison de nombres sous forme addtives ; notion d'écart de deux nombres	Variables didactiques Description et analyse du travail de l'élève : contrôle ou apprentissage ? Procédures de résolution : représentation ou calcul ?	
ORLEANS-TOURS	3	Propriétés de quadrilatères « particuliers »		« carte d'identité »
PARIS-CRETEIL-VERSAILLES	3	Comparaison de décimaux	Analyse de différentes conceptions de l'apprentissage des décimaux.	
REIMS, STRASBOURG	3	une nouvelle grandeur : l'aire.	procédures.	
RENNES	3	fonctions numériques et représentations graphiques	variables didactiques	
ROUEN	3	Division, critères de divisibilité		
TOULOUSE	3	Passage d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule		Analyse de nombreuses activités proposées dans un manuel scolaire.

Sommaire

ACADÉMIES D'AIX-MARSEILLE DE CORSE, DE MONTPELLIER, DE NICE

PREMIER VOLET

Première Partie (8 points)

Exercice 1 : *(1,5 pt)*

Dans une ville, lors d'une élection, trois listes sont en présence (A, B et C). Les résultats en nombre de voix et pourcentage des exprimés - figurent dans le tableau ci-dessous dont trois cases ont été effacées.

Reconstituer les cases manquantes en justifiant les réponses .

	Voix obtenues	Pourcentages
Liste A	2362	
Liste B		25%
Liste C	5522	

Exercice 2 : *(1,5 pt)*

Un nombre à trois chiffres a 4 pour chiffre des centaines. Ce nombre est 26 fois plus grand que le nombre à 2 chiffres obtenu en enlevant le chiffre des centaines. Trouver ce nombre.

Exercice 3 : *(1 pt)*
On cherche un nombre de trois chiffres, multiple de 9 et dont le quotient dans la division euclidienne par 21 est 33. Déterminer le (ou les) nombre(s) solution(s)

Exercice 4 : *(4 pts)*
On appelle " Amandin " un quadrilatère convexe dont deux angles opposés sont droits
(voir figure ci-dessous).

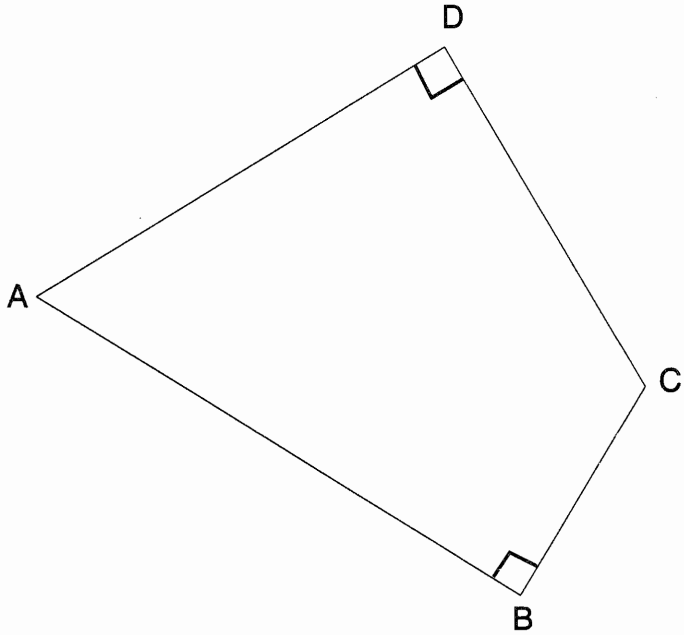
1. Voici 5 affirmations. Répondez par Vrai ou Faux en justifiant votre réponse.
a) Un rectangle est un " Amandin ",
b) Tous les trapèzes rectangles sont des " Amandins ".
c) Certains " Amandins " sont des losanges.
d) Un " Amandin " dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.
e) Un " Amandin " dont les diagonales sont de même longueur est un rectangle.

2. On considère " l'Amandin " ABCD dont les angles droits sont en B et D, et tel que :
- la diagonale (AC) a une longueur de 6 cm.

- la hauteur du triangle (ABC) issue de B mesure 2 cm.
- le triangle ADC est isocèle.

a) Construire A.BCD en Justifiant les tracés et les différentes étapes de la construction.
b) Déterminer l'aire ABCD.
c) Déterminer AD au mm près.

Les questions 1 et 2 de l'exercice 4 sont indépendantes.



Deuxième Partie (4 points)

Analyse de travaux d'élèves :

“ Dans une classe de CM2, un maître demande à quatre élèves de calculer :

23,45 x 10

Vous trouverez leurs réponses dans la colonne de gauche du tableau de l'annexe 1 page 4.

Il demande ensuite à quatre autres élèves s'ils sont d'accord avec la réponse en expliquant pourquoi.

Vous trouverez ces explications dans la colonne de droite du tableau de l'annexe 1 page 4. ”

QUESTIONS

1. Analyser chacune des 4 productions de la colonne de gauche.

2. Evaluer la pertinence des arguments apportés par chaque élève de la colonne de droite.

DEUXIÈME VOLET

(8 pts)

Vous trouverez en **annexes 2 et 3**, les extraits de deux manuels de CM1 concernant la proportionnalité.

Etude de l'extrait n° 1 : (annexe 2)

1. Quelles sont les compétences mathématiques nécessaires pour répondre aux questions des exercices 1 et 2 ?

2. Paragraphe “ j'ai appris ” :
Dans ce paragraphe, l'auteur propose une définition d'une situation de proportionnalité et une méthode de résolution.
Sur quelles propriétés mathématiques de la proportionnalité s'appuient-elles ?

3. Exercices 3 et 4 :
Pour chaque situation proposée, par quelle (s) procédure (s) un élève peut-il répondre à la question posée ?
En quoi le choix des nombres induit-il cette (ces) procédure (s) ?

Etude de l'extrait n° 2 : (annexe 3)

4. Exercices 1 et 2 de “ Je découvre ” et “ je m'entraîne ”
Par rapport à la notion en jeu et les problèmes proposés, quels sont les avantages et les inconvénients des tableaux donnés ou à construire ?

5. En tenant compte de tous les éléments qui servent à la présentation de l'exercice 3 :
Montrer que l'on peut obtenir des graphiques différents . Est-ce, d'après vous, l'intention de l'auteur ?

Etude comparative des 2 extraits

6. Comparer ces deux extraits de manuels en ce qui concerne les objectifs poursuivis par les auteurs, les méthodes de résolutions proposées, l'initiative laissée à l'élève.

ANNEXE 1

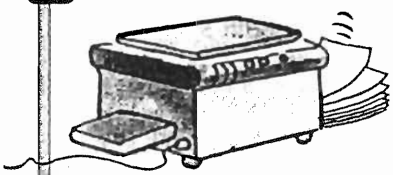
Calculer 23,45 x 10	
Réponses des élèves	**Réponses VRAIE ou FAUSSE** Pour les réponses fausses, explique pourquoi tu penses que l'élève s'est trompé
Sama 23,450 parce que quand on multiplie par dix on met un zéro	Léa FAUSSE, parce que c'est un nombre à virgule et qu'on multriplit par 10, on pousse la virgule d'un cran à droite. Après le numéro 5 on peut mettre plusieurs zéros sa ne comte pas.
Julien 230,450 car 23 x 10 = 230 45 x 10 = 450 donc ça fait 230, 450	Guillaume faux car ce sont 450 centièmes et pas 450 millièmes
Laetitia 234,50 car 23,45 + 23,45 + 23,45 + 23,45 + 23,45 + 23,45 + 23,45 + 23,45 + 23,45 + 23,45 = 234,50 (le calcul est fait en colonne à côté de l'égalité)	Evelyne Juste, car 23,45 = 2345 centièmes. Comme 1 u = 100 centièmes cela fait 4 u, reste 50 centièmes 23 x 10 = 230. 230 + les 4 u de retenue ça fait 234 234 + 50 centièmes = 234,50
Damien 230,45 parce que pour multiplier un nombre par 10, 100, 1000 ... le nombre prend un, deux, trois ... zéros	Vincent FAUX, car on décale la virgule et le 0 se mets à la fin du nombre, la réponse est 234,50

ANNEXE 2

Extrait n° 1 : “ J'APPRENDS LES MATHS ” Rémi BRISSIAND
Manuel de CM1 chez RETZ

Je découvre

1 Voici le tarif des photocopies d'une librairie :



75 centimes
LA PHOTOCOPIE

Combien coûtent 5 photocopies ?
Combien coûtent 9 photocopies ?
Calcule de 2 façons le prix de 14 photocopies.
Calcule de 2 façons le prix de 90 photocopies.

2 Voici le tarif d'une autre librairie :

PHOTOCOPIES

Quantité achetée	Prix à l'unité
De 1 à 6	85 c.
De 7 à 10	80 c.
De 11 à 20	70 c.
Plus de 21	60 c.

A. Calcule le prix de 5 photocopies.

M. Dubois fait 9 photocopies. Le libraire lui demande 7,20 F.
Vérifie que le libraire ne s'est pas trompé.

M. Diot fait 15 photocopies. Le libraire lui demande 10,50 F.
Vérifie que le libraire ne s'est pas trompé.

Combien coûtent 25 photocopies ?

B. On a vu que le prix de 5 photocopies est de 4,25 F et que celui de 9 photocopies est de 7,20 F.
Cela permet-il de calculer le prix de 14 photocopies ?

C. On a vu que le prix de 9 photocopies est de 7,20 F.
Cela permet-il de calculer le prix de 90 photocopies ?

J'ai appris

- Si le prix d'un objet diminue quand le nombre d'objets achetés augmente, on dit que le prix est **dégressif**.
- Si le prix d'un objet est le même quel que soit le nombre d'objets achetés, on dit que le prix est **proportionnel** au nombre d'objets achetés.
- C'est seulement quand le prix est proportionnel au nombre d'objets qu'on peut calculer facilement le prix de 13 objets si on connaît déjà celui de 5 et celui de 8 objets.

3 Dans chacun de ces exemples, détermine si le prix est proportionnel au nombre d'objets achetés. Justifie tes réponses.

- *Un lot de 3 paquets de café* Mélior *coûte 27 F. Un lot de 7 paquets de ce même café coûte 63 F.*
- *Six places de cinéma coûtent 258 F. Une carte pour 15 places coûte 585 F.*
- *Un lot de 4 litres d'eau minérale* Clara *coûte 17 F. Un lot de 10 litres d'eau* Clara *coûte 40 F.*

4 Dans ces deux problèmes, le prix est proportionnel au nombre d'objets achetés.
Calcule le prix demandé. Quand il y a plusieurs méthodes, choisis la plus facile.

- *Sept chaises sont vendues 1 092 F. Combien valent 14 chaises ?*
- *Huit fauteuils sont vendus 2472 F. Combien valent 13 fauteuils ?*

ACADEMIE D'AIX-MARSEILLE, DE CORSE, DE MONTPELLIER, DE NICE

ANNEXE 3

Extrait n° 2 : " MATHS " Nouvelle Collection THÉVENET
Manuel de CM1 chez BORDAS

61. La proportionnalité (1)

JE DÉCOUVRE

1. Voici la recette d'une tarte aux pommes.
Recopie et complète le tableau avec les quantités nécessaires pour 2, 3 ou 4 tartes.

Tarte aux pommes
- 200 g de farine
- 100 g de beurre
- 1/2 verre d'eau
- une pincée de sel
- 1 kg de pommes

m 3

Nombre de tartes / Quantités	1	2	3	4
farine en g	200	400	. . .	. . .
beurre en g	100	200	. . .	. . .
eau en verre	$\frac{1}{2}$	1	. . .	. . .
sel en pincée	1	2	. . .	. . .
pommes en kg	1	2	. . .	. . .

m 2 m 2

2. Les yaourts sont vendus par paquets de 6.
- Construis un tableau pour trouver le nombre de yaourts dans 2 paquets, 6 paquets, 5 paquets, 11 paquets.
- Combien de paquets peut-on faire avec 18 yaourts ? 24 yaourts ?

JE M'ENTRAÎNE

1. Avec sa bicyclette, Pierre parcourt 15 km en une heure.
- Recopie et complète le tableau.

temps en h	1	2	3	4	. . .	. . .	12
distance en km	15	. . .	. . .	. . .	75	150	. . .

m...

2. Complète les tableaux suivants.

m...

3	8	. . .	. . .	20
12	. . .	24	60	. . .

...

m...

7	12	18	36	. . .
. . .	36	. . .	. . .	33

...

m...

. . .	10	20	. . .	. . .
8	40	. . .	240	400

...

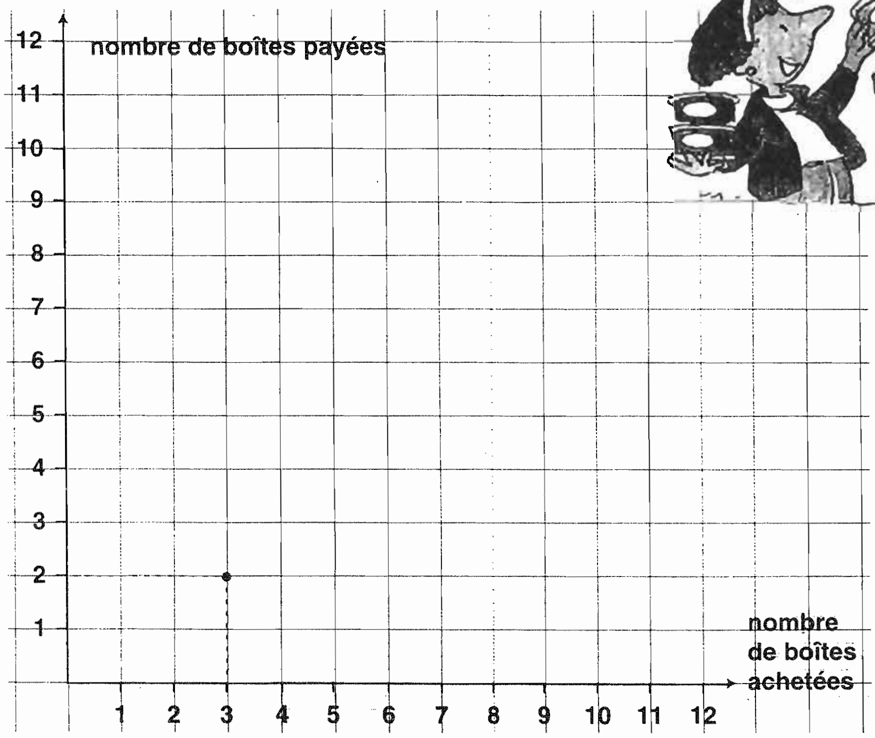
jouer avec les nombres

Chercher les nombres qui correspondent aux fractions $\frac{4}{2}$, $\frac{8}{2}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{6}{3}$.

3. Dans un magasin, on relève la publicité suivante :

- Complète le tableau suivant.

nombre de boîtes achetées	0	3	6	9	12
nombre de boîtes payées	0	2	. . .	. . .	. . .



- Place les points correspondants sur le quadrillage de ton cahier. Comment sont disposés les points ?
- Combien de boîtes paye-t-on lorsqu'on en achète 18 ? 24 ?

4. Émilie a acheté 3 paquets de gâteaux pour 18 F. Corinne voudrait en acheter 7.

- Combien devra-t-elle payer ?

5. Un libraire accorde une réduction de 4 F pour 100 F d'achats.

- Calcule la réduction pour un achat de 200 F, 500 F, 1 000 F, 250 F.
- Calcule le montant des achats correspondant à une remise de 24 F, 38 F, 48 F. *(Tu peux faire un tableau.)*

6. Avec son vélo, Nicolas avance de 10 m lorsqu'il fait 2 tours de pédalier.

- Combien de tours de pédalier devra-t-il faire pour parcourir 30 m ? 100 m ? 1 km ? 500 m ?
- Quelle distance parcourt-il lorsqu'il fait 4 tours de pédalier ? 10 tours ? 25 tours ?

ACADEMIE D'AMIENS

PREMIER VOLET

Première Partie (8 points)

Chaque réponse doit être justifiée. Chaque construction doit être accompagnée d'un texte explicatif. L'unité considérée est le centimètre.

1. Tracer en utilisant une règle graduée et un compas, un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 4 et BC = 8.

2. On considère 0 le milieu de [BC]. Comparer OA et BC.

3. Calculer l'aire exacte du triangle ABC. Donner une valeur approchée de cette aire à 0,1 cm^2 près. 1,732 est une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 0,001 près.

4. Placer E. le symétrique de A par rapport à C. Quelle est la nature du triangle ABE ?

5. Déterminer le rapport des aires des triangles ABE et ABC.

6. Déterminer l'aire exacte du triangle BCE.

7. On considère H le point d'intersection du cercle de centre 0 et de diamètre [BC] avec la droite (BE). Démontrer que [CH] est une hauteur du triangle BCE.

8. Placer F, le symétrique de B par rapport à C. Quelle est la nature du quadrillatère AFEB ? Quelle est son aire exacte ?

9. Exprimer l'aire d'un losange en fonction de la mesure de ses diagonales.

10. Construire un losange MPNQ à partir de ses diagonales qui ait la même aire que AFEB. Pour cela, vous utiliserez uniquement le compas (qui vous permettra de reporter des longueurs de la première figure) et une règle non graduée

Deuxième Partie (4 points)

L'**annexe 1** présente un énoncé de problème extrait du Nouvel *objectif calcul CM2,* Hatier 1996.

L'**annexe 2** propose les productions de trois élèves: Mickaël, Mathieu et Pauline.

Questions :

1. Expliquer la procédure de Pauline. Pourquoi selon vous n'a-t-elle pas abouti ?

2. Expliquer la procédure de Mathieu en mettant en évidence les causes de sa non-réussite.

3. Organiser les résultats de Mickaël dans un tableau et expliciter sa procédure.

DEUXIEME VOLET

(8 points)

Le travail porte toujours sur l'exercice proposé en **annexe 1**.

Questions :

1. On considère les réponses de deux élèves.
Audrey " *Ils ne se rattraperont jamais.* "
Vincent " *Le chien devra faire 15 bonds.* "
Expliquer ces deux réponses en vous référant aux informations données par l'énoncé.

2. Afin que les élèves s'approprient le problème, proposer deux types de questions qui les engageraient dans une procédure de résolution faisant intervenir des calculs.

3. Proposer un schéma qui s'inspire de la production de Mathieu (annexe 2) pour résoudre le problème. Enumérer les savoirs mathématiques que vous avez utilisés.

4. Proposer un graphique pour résoudre le problème. Enumérer les savoirs mathématiques que vous avez utilisés.

5. Les auteurs du manuel demandaient aux élèves de compléter le tableau suivant

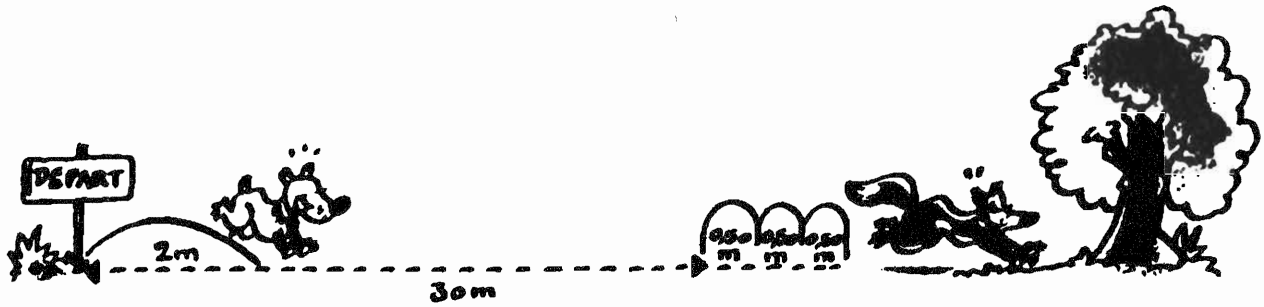
Nombre de bonds du chien	Nombre de bonds du renard	Ecart entre les 2 animaux
0	0	30
1	3	29,5
2	6	29
10	30	25
20	…	…
40	…	…
50	…	…
60	…	…
100	…	…

Quelles difficultés peut-on envisager pour les apprenants ?

ANNEXE 1

Bobi, le chien, essaie de rattraper Rousqueue le renard.

C'est une course éperdue.



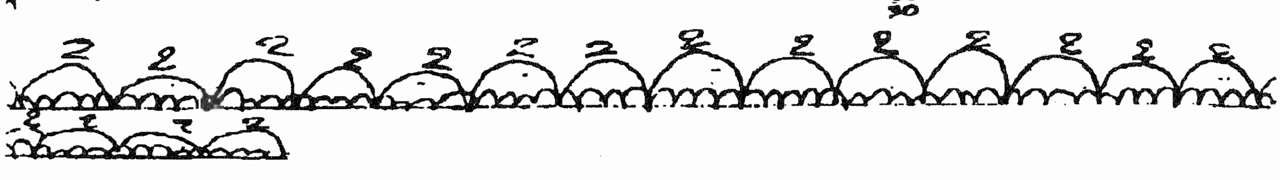
• Rousqueue démarre avec 30 m d'avance, sur Bobi.

• Pendant que Bobi fait un bond de 2 m, Rousqueue, lui, fait trois bonds de 0,50 m.

Trouve en combien de bonds le chien aura rattrapé le renard.

ANNEXE 2

Mathieu



Le chien a fait 33 bonds

ANNEXE 2 (suite)

Mickaël

Pour faire 30 m, le chien fait 15 bonds :
15 × 2 = 30
Pendant ce temps, le renard fait 22,5 m de plus
1,5 × 15
Le chien continue et fait 11 bonds :
2 × 11 = 22
Le renard continue :
1,5 × 11 = 16,5 m + 50 cm qui restaient
Le chien fait 8 bonds :
8 × 2 = 16
Le renard : 8 × 1,5 = 12
Le chien fait 6 bonds
6 × 2 = 12
le renard 9 m
6 × 1,5 = 9
le chien 5 bonds
5 × 2 = 10
le renard fait les siens
5 × 1,5 = 7,5
le chien en fait 3
3 × 2 = 6
le renard refait les siens
3 × 1,5 = 4,5 + 1,5 = 6 m
le chien en refait 3
3 × 2 = 6
le renard
3 × 1,5 = 4,5
le chien
3 × 2 = 6
Le renard
3 × 1,5 = 4,5
Le chien
2 × 2 = 4
le renard
2 × 1,5
Le chien
2 × 1 = 2
le renard 1,5 × 1 = 1,5 + 1,5 = 3 m, le chien en refait 1

$\boxed{\text{distance } 6 \cdot 1{,}5 =}$

$$\begin{array}{r} 15 \\ +\ 11 \\ +\ 8 \\ +\ 6 \\ +\ 5 \\ +\ 3 \\ +\ 3 \\ +\ 3 \\ +\ 2 \\ +\ 1 \\ +\ 1 \\ \hline 58 \end{array}$$

le chien fait 58 bonds pour attraper le renard.

ANNEXE 2 (fin)

Pauline

Problème.

$0,50 \times 3 = 1,50$

Le renard fait 1,50 en 3 bonds.

$2 - 1,50 = 0,50$

Le chien gagne 50cm par bonds.

30 : 0,50 =

30	0,50

ACADEMIE DE BESANÇON

PREMIER VOLET

Première Partie (8 points)

I) En 1997, les traitements des fonctionnaires ont été revalorisés de 0,5 % au l' mars, et encore de 0,5 % au 1er octobre. Quelle augmentation au premier janvier 1997 aurait permis le même gain annuel Le résultat sera arrondi au 1/100ème.

II) Soit le triangle TRI rectangle en R tel que RI = 3 et TR = 4, une unité de longueur ayant été fixée. M est un point du segment [RI]. On pose RM = x

1. Construire un rectangle MECA tel que E est sur [RT], C et A sur [TI].
a) Les constructions seront faites à la règle et au compas et resteront très visibles
b) Justifier la construction

2. a) Démontrer que la longueur h de la hauteur [RH] du triangle rectangle TRI est égale à $\frac{12}{5}$
b) Calculer la longueur ME
c) Calculer la longueur EC

3. On se pose le problème de l'existence de points M tels que ce rectangle soit carré, le résoudre.

Deuxième Partie (4 points)

*Analyse de productions d'élèves (voir **Annexe n'1**)*

Problème : deux enfants, Yann et Jean-François, ont le même nombre de billes. Ils jouent ensemble et Yann gagne 12 billes. Combien a-t-il maintenant de billes de plus que Jean-François ? Explique comment tu as fait pour trouver la réponse en l'écrivant ou en faisant un dessin.

1. À quel cycle ce problème peut-il être proposé ? Justifier-votre réponse.

2. Donner une résolution de ce problème telle qu'elle pourrait être proposée aux élèves.

3. Analyser les résolutions produites par Yohann, Clément et Mohamed. (Annexe n° 1)

DEUXIEME VOLET

(8 points)

Les nombres pour prévoir et vérifier

1. À quel cycle et au cours de quelle année de ce cycle les trois situations figurant en **annexe n° 2** sont-elles proposées ? Justifier cette réponse.

2. Les trois situations proposées ne sont pas dans l'ordre d'apparition dans le manuel dont elles sont extraites. Elles correspondent aux étapes 16, 32, 85 d'un ouvrage qui en comporte 95. Rétablir cet ordre et justifier.

3. Pour chaque étape, donner toutes les solutions possibles permettant d'atteindre le nombre cible.

4. Quels sont les objectifs visés par la demande suivante : " Écris toutes les solutions trouvées dans la classe " ?

5. Citer deux variables didactiques relatives à la mise en oeuvre de ces trois situations et justifier votre réponse.

6. On considère la situation A de **l'annexe n° 2**. Citer deux savoirs mathématiques du cycle concerné, nécessaires à la résolution du problème.

7. Rédiger une situation d'évaluation à proposer aux élèves, à la suite de l'étape A, en précisant les objectifs évalués ?

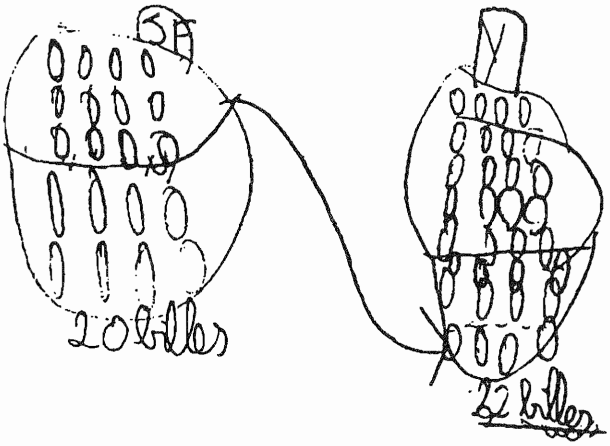
8. Concevoir une situation construite sur le modèle " du compte est bon " pour un autre cycle.

ANNEXE 1

Problème : deux enfants, Yann et Jean-François, ont le même nombre de billes. Ils jouent ensemble et Yann gagne 12 billes. Combien a- t-il maintenant de billes de plus que Jean-François ?

Explique comment tu as fait pour trouver la réponse en l'écrivant ou en faisant un dessin.

yoann



Yann a 12 billes de plus que Jeanfrançois

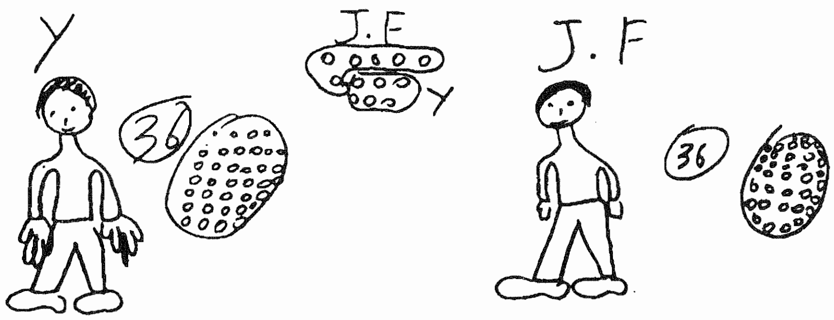
Clément

36+6=42 B

Yann à 6 billes de plus que J.F.

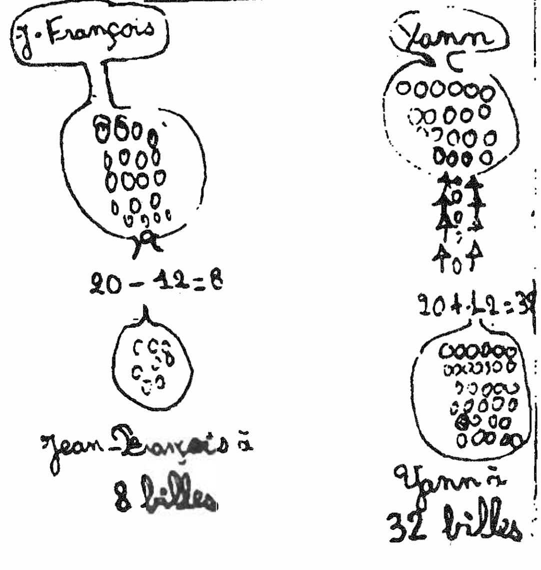
j'ai trouver en faisent un schéma.

$$\begin{array}{r} 36 \\ +\ 6 \\ \hline 42 \end{array}$$



Mohamed

Chéma



Calculs

Jean-François	yann
20	20
20-12=8 billes	20+12=32 billes
$\begin{array}{r} 20 \\ -12 \\ \hline 08 \end{array}$	$\begin{array}{r} 20 \\ +12 \\ \hline 32 \end{array}$
jean François à perdu 8 billes de moins que Yann.	Yann à gagné 12 billes de plus que jean François

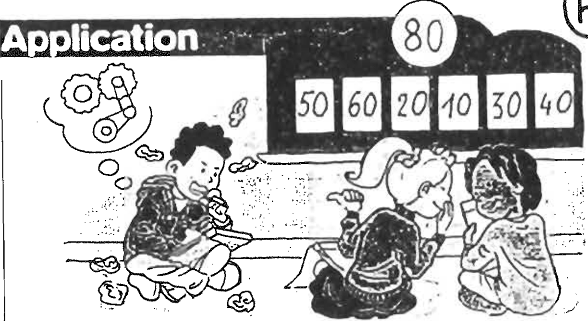
ANNEXE 2

("Le nouvel objectif calcul" Editions HATIER)

◆ Activité préparatoire : Jeu « le compte est bon ».

A

Application



Règle du jeu « Le compte est bon »

Un jeu de cartes-nombres. Le maître choisit six cartes et un nombre cible. Le gagnant est celui qui atteint ou approche le plus près possible le nombre cible. On peut additionner ou retrancher les nombres écrits sur trois cartes

Dessine une croix sur les trois cartes que tu choisis pour atteindre le nombre cible.

Complète l'égalité obtenue : 80 = ...

Écris toutes les solutions trouvées dans la classe : ....

....

◆ Activité préparatoire : Jeu « le compte est bon »

B

Application

Règle du jeu « le compte est bon »

Un jeu de cartes-nombres. Le maître choisit six cartes et un nombre cible. Le gagnant est celui qui atteint ou approche le plus près possible le nombre cible. On peut additionner, soustraire ou multiplier les nombres écrits sur deux cartes

Dessine une croix sous les deux cartes que tu choisis pour atteindre le nombre cible.

Écris l'égalité obtenue : 36 = ...

Écris toutes les solutions trouvées dans la classe : ....

....

◆ Activité préparatoire : jeu « le compte est bon ».

C

Application

Règle du jeu « Le compte est bon »

Un jeu de cartes-nombres. Le maître choisit six cartes et un nombre cible. Le gagnant est celui qui atteint ou approche le plus près possible le nombre cible en additionnant les nombres écrits sur trois cartes

Dessine une croix sur les trois cartes que tu choisis pour atteindre le nombre cible.

Écris l'égalité obtenue : 30 = ...

Écris toutes les solutions trouvées dans la classe : ....

....

ACADEMIES DE CRETEIL, PARIS,VERSAILLES

PREMIER VOLET

Première Partie (8 points)

La calculatrice est autorisée

Exercice 1 (2 points)

Tout l'exercice traite de la conversion de la monnaie en francs dans la monnaie du "Topland" (pays de fiction), monnaie appelée "top". On suppose que le taux de conversion entre top et francs est fixe 1 top pour 6,54321 F.

Dans la conversion du franc vers le top, les prix en tops sont arrondis au centième de top. Par
exemple : 7,034 tops est arrondi à 7,03 tops
7,037 tops est arrondi à 7,04 tops
7,035 tops est arrondi à 7,04 tops

D'autre part, les prix en francs sont arrondis au multiple de 5 centimes le plus proche (il n'existe pas de pièce de 1 centime).

1. Un croissant vaut 2,70 F. Quel prix afficher en tops ?

2. Une automobile vaut 80 500 F. Quel prix afficher en tops ?

3. Une place de cinéma va être affichée 5,04 tops. Quel prix valait-elle en francs ?

Exercice 2 (2 points)

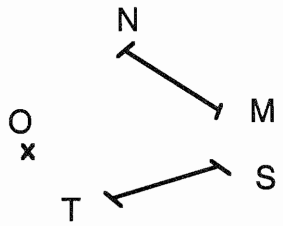
On considère le nombre A = 92 865 317 x 814 975
1. Déterminez le nombre de chiffres de A.

2. Démontrez que le chiffre des dizaines est 7 et que le chiffre des unités est 5.

3. Les calculatrices courantes ne donnent pas directement tous les chiffres du nombre A.
Sans utiliser la technique opératoire usuelle de la multiplication, c'est-à-dire sans "poser l'opération" 92 865 317 x 814 975, décrivez un procédé qui utilise une calculatrice affichant dix chiffres et qui permette de déterminer tous les chiffres du nombre A.

Exercice 3 (4 points)

Pour tout l'exercice, les constructions seront faites en utilisant la règle non graduée et le compas. On laissera apparents les traits de construction. On sera amené à reproduire deux fois sur la copie la figure ci-dessous:



On veut construire un quadrilatère convexe ABCD tel que :
- les points M et N appartiennent au côté [AB]
- les points S et T appartiennent au côté [BC] ,
- le point 0 soit à l'intérieur du quadrilatère et appartienne à l'une de ses diagonales.

1 . En respectant ces contraintes, construire :
a) Un parallélogramme (non rectangle, non losange) ABCD.
b) Un losange ABCD.

2 . Pour chacun de ces quadrilatères, préciser le programme de construction mis en œuvre.

3. Quelles sont les propriétés des figures (parallélogramme, losange) qui justifient la possibilité ou l'impossibilité de chaque construction ?

Deuxième Partie (4 points)

L'énoncé du problème suivant a été proposé à des élèves de CM2 :
«A l'étalage d'un marchand de fruits, il y a 3 plateaux : l'étiquette du premier plateau indique 4 francs pour 8 oranges ; celle du second plateau indique 2 francs pour 3 citrons ; celle du troisième plateau 4 francs pour 10 poires.
Quel est le fruit le plus cher, quel est le fruit le moins cher ? »

L'**annexe n° l** présente 4 productions d'élèves.

Pour chaque élève, analyser sa production du point de vue :
- du type de procédure utilisée
- de la réussite (ou non) au problème
- de la rédaction de la réponse
- du type d'erreurs et de difficultés qui apparaissent, en faisant des hypothèses sur leur origine.

DEUXIEME VOLET

(8 points)

Les annexes 2 et 3 présentent deux situations de départ concernant l'ordre sur les nombres décimaux. Les annexes 4 et 5 présentent des méthodes pour comparer les nombres décimaux.

1. A quel niveau de classe peut-on présenter les activités des annexes 2 et 3 ?

2 . Expliquez comment les seules règles de comparaison sur les nombres entiers peuvent permettre à un élève de donner une réponse juste dans le annexe 3.

3 . a) Dans les annexes 2 et 3 quelles sont les variables susceptibles d'avoir un effet sur les réussites et les procédures des élèves ?

b) Dans l'annexe 2 expliquez en quoi les choix de ces variables font que les règles de comparaison sur les nombres entiers évoquées dans la question 2) précédente ne suffisent pas.

4 . Lequel de ces annexes vous paraît le mieux adapté pour une situation de départ concernant la comparaison des nombres décimaux ? Justifiez votre réponse.

5 . Dans la mise en œuvre de l'annexe 2 comment le maître peut-il aider les élèves dans leur recherche ?

6. Les annexes 4 et 5 présentent plusieurs méthodes pour comparer les nombres décimaux.

a) Quelles critiques pouvez-vous en faire ?

b) Quelle règle proposeriez-vous à vos élèves ?

7. On considère l'exercice suivant :

Trouver un nombre compris entre
8,4 et 8,7
10, 1 et 10,2
25 et 25,1
7 et 7,01

a) Quelle propriété de l'ensemble des nombres décimaux ce type d'exercice permet-il de travailler ?

b) Expliquer pourquoi le choix des valeurs numériques est important dans ce type d'exercice.

ANNEXE 1

Productions d'élèves de CM2

SYLVAIN

①
$$\begin{array}{r|l} 10 & 4 \\ \cline{2-2} -8 & 2,5 \\ \hline 20 & \\ -20 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

②
$$\begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \cline{2-2} -2 & 1,5 \\ \hline 10 & \\ -10 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

③
$$\begin{array}{r|l} 8 & 4 \\ \cline{2-2} -8 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

①
1 poire = 2,5 F
1 sitron = 1,5 F
1 orange = 2

BRUNO

10 ÷ 4 = 2F50
poires franc

3 ÷ 2 = 0,65 centime
citron franc

8 ÷ 4 = 2F00
citron franc

ANNEXE 1 (suite)
Productions d'élèves de CM2

CYRIL

20 poires = 8 F

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times\ 2 \\ \hline 14\,F \end{array}$$

20 citrons = 13 F

20 oranges = 10 F

Le fruits le plus chir et le citron parceque ci on pren 20 citrons sa fait 13 F - 20 poires 8 F et 20 oranges.

Le fruit le moin chère est la poire.

ALEXIS

Je dis que c'est la poire le fruit le plus cher car : 4 F × 10 poires = 40,

Les citron 2 F × 3 citrons = 6.

Les oranges 4 F × 8 oranges = 32

ANNEXE 2

Extrait de « le nouvel objectif calcul », HATIER

Nombres décimaux : ordre

Comprendre et expliciter les règles de comparaison des nombres décimaux ;
elles diffèrent des règles de comparaison des entiers.

Découverte

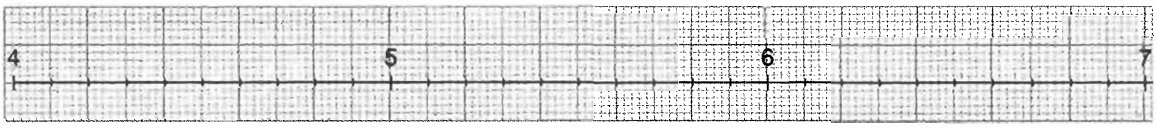
Un peu d'ordre !

1. Voici douze nombres décimaux qui se situent tous entre 4 et 7.

4,1 | 6,101 | 6,21 | 6,1 | $5 + \frac{3}{10}$ | 5,7 | 6,8 | $5 + \frac{959}{1000}$ | 4,40 | 4,04 | $5 + \frac{3}{100}$ | $6 + \frac{1}{1000}$

Range ces nombres dans l'ordre croisssant.
Pour cela :

- tu peux reproduire, découper et déplacer ces étiquettes ;
- tu peux placer, approximativement, chaque nombre sur la droite numérique.



2. Explique par écrit à tes camarades comment tu rangerais les nombres suivants en ordre croissant.

6,101 | 6,1 | 6,11 | 6,9 | 6,010

(Tu peux écrire des phrases ou faire un schéma.)

AIDE-MÉMOIRE N° 6 PAGE 217.

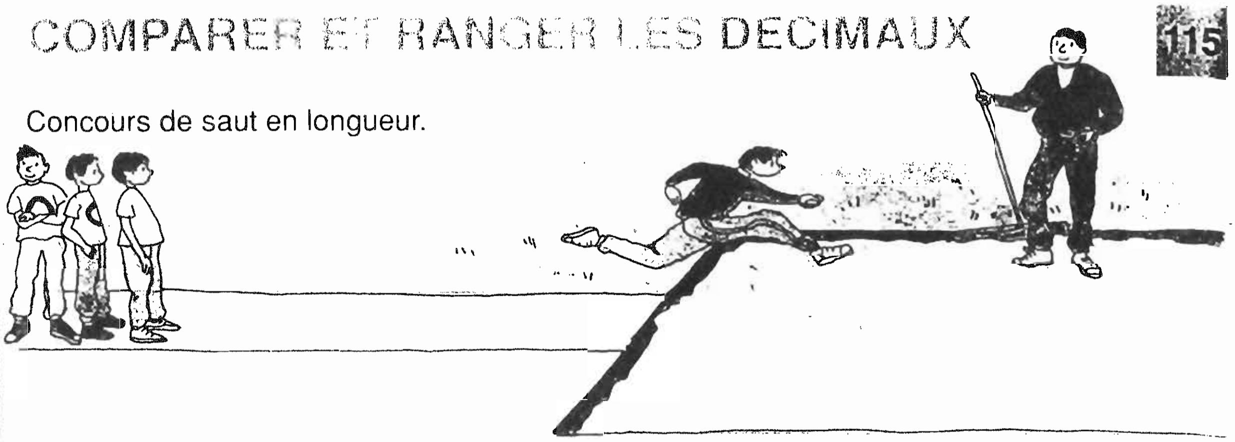
ANNEXE 3

Extrait de « Vivre les mathématiques », ARMAND COLIN

COMPARER ET RANGER LES DECIMAUX

115

1 Concours de saut en longueur.



	GUILLAUME	JOHAN	ALBAN	BERTRAND
1er essai	2,80 m	2,75 m	2,35 m	3,14 m
2ème essai	3,21 m	3,08 m	1,95 m	3,25 m
3ème essai	2,05 m	3,22 m	2,50 m	3,42 m
4ème essai	3,19 m	3 m	2,58 m	2,79 m

a) Relève la meilleure performance de chaque enfant.

b) Donne le résultat du concours en rangeant les enfants du 1er au 4e.

ANNEXE 4

Extrait de « Diagonale », NATHAN

Je retiens bien

Pour comparer deux nombres décimaux

$\boxed{7,25 \text{ et } 7,3}$

1re méthode : on compare les *parties entières*
ici 7 = 7,

lorsqu'elles sont égales, on compare
les parties décimales *chiffre après chiffre* :

$$\begin{array}{l} 7,\boxed{2}5 \\ 7,\boxed{3} \end{array}$$

3 est le plus grand

7,3 > 7,25

2e méthode : on met les deux nombres au même format,

7	,	2	5
7	,	3	0

et on compare les chiffres de ces nombres à partir de la gauche :

7,30 > 7,25

ANNEXE 5

Extrait de « Apprentissages mathématiques », NATHAN

2

J'OBSERVE

POUR COMPARER LES NOMBRES DÉCIMAUX...	
13,25 et 16,38	Je compare les *parties entières* si elles sont différentes : $\boxed{13 < 16}$ donc 13,25 < 16,38
15,62 et 15,36	Ou je compare les chiffres des *dixièmes* : $\boxed{6 > 3}$ donc 15,62 > 15,36
22,471 et 22,483	Ou je compare les chiffres des *centièmes* : $\boxed{7 < 8}$ donc 22,471 < 22,483 etc.

JE RETIENS

Pour comparer des nombres décimaux, on compare les parties entières.
Si celles-ci sont identiques, on compare les chiffres des dixièmes.
Si ceux-ci sont aussi les mêmes, on compare les chiffres des centièmes, puis éventuellement ceux des millièmes.

ACADEMIE DE DIJON

PREMIER VOLET

Première Partie (8 points)

Exercice 1

Se reporter d'abord au texte intitulé "*Le Fainéant et le Diable*" de l'annexe 1.

A propos de cet énoncé, répondre aux questions suivantes :

1. On désigne par x la somme détenue par le Fainéant avant le premier passage. Résoudre algébriquement le problème.

2. Donner aussi une solution arithmétique, c'est-à-dire n'utilisant pas de mise en équations.

Exercice 2

ABC est un triangle quelconque. On a tracé le cercle circonscrit à ce triangle, de centre 0. Cette figure est donnée dans l'annexe 2. On utilisera cette annexe 2 pour réaliser la suite de l'exercice. La figure complétée sur cette annexe sera jointe à la copie.

Soit D le point diamétralement opposé au point A. Les hauteurs [BB'] et [CC'] se coupent en H, orthocentre du triangle ABC.

1. Démontrer que la droite (DC) est perpendiculaire à la droite (AC) et en déduire que les droites (BB') et (DC) sont parallèles.

2. Démontrer que le quadrilatère BHCD est un parallélogramme.

3. La droite (HD) coupe la droite (BC) en M et la droite (AH) coupe le cercle en H'.
a) Quelle est la nature du triangle HH'M ? (Justifier).
b) En déduire que M est le centre du cercle circonscrit au triangle HH'D.

4. Démontrer que H' est le symétrique de H par rapport à la droite (BC).

5. Que peut-on dire des symétriques de H par rapport aux droites (AB) et (AC) ?
Enoncer la propriété qui a été démontrée au terme de cet exercice.

Deuxième Partie (4 points)

L'annexe 3 présente l'exercice 14 de l'évaluation nationale de mathématiques à l'entrée en 6ème pour l'année 1998.

L'annexe 4 présente les réponses de 5 élèves : A, B, C, D, E.

1. Classer les productions de ces élèves en fonction de la stratégie sous-jacente utilisée pour donner la réponse (même si celle-ci est fausse).

2. Pour chaque élève, décrire les erreurs éventuellement commises (ou signaler l'absence d'erreur).

DEUXIÈME VOLET

(8 points)

Les différentes séquences présentées dans les **annexes 5, 6 et 7** sont extraites du manuel scolaire «Maths» nouvelle collection THEVENET cycle des apprentissages fondamentaux. Cycle 2 - CP.

Toutes les séquences proposées appartiennent à des fiches intitulées «Atelier Problèmes». L'auteur précise dans le guide du maître : « (...) pour exercer des activités de recherche. C'est le cas essentiellement des fiches " Atelier Problèmes " ou des fiches " Pour aller plus loin " qui permettent un travail individuel ou collectif à partir de situations pour lesquelles les élèves ne disposent pas de méthode préalablement établie».

Extrait de la fiche 59 (annexe 5)

1 . Les élèves utilisent le fichier comme un cahier de mathématiques.

a) L'exercice proposé permet-il de faire acquérir aux enfants la stratégie annoncée en haut de la page ?
b) Quelles sont les réponses qu'il faut accepter à la question : "Pierre a-t-il un voisin ?" Justifier.

Les fiches entre 59 et 68* visent les objectifs suivants

• Savoir résoudre un problème additif du type : réunion de deux collections

• Repérer les données qui manquent pour répondre

• Se poser des questions.

Les élèves ont abordé la notion de dizaine dans plusieurs fiches, mais ne connaissent pas encore la technique de l'addition verticale.

Fiche 68 (annexe 6) .

Avant de commencer cette fiche, le maître propose le problème suivant :
«Muriel a ramassé 12 champignons et François en a ramassé 25. Combien de champignons ont-ils en tout ?»

2 . **a)** Proposer trois solutions de ce problème introductif révélant trois degrés d'appropriation du nombre pour un élève de cycle 2.

b) Quelles sont les tâches que doivent effectuer les élèves pour répondre à chacun des deux exercices de la fiche 68 ?

c) Par comparaison avec l'exercice proposé préalablement par le maître, quelles compétences supplémentaires sont requises pour les deux exercices de la fiche 68 ?

* *Ces fiches ne sont pas communiquées.*

Fiche 85 (annexe 7)

3. Citer deux difficultés communes aux trois énoncés que peuvent rencontrer certains élèves, les problèmes ayant été lus plusieurs fois.

Un enseignant, utilisant ce manuel, souhaite évaluer ses élèves sur la résolution de problèmes additifs en fin d'année scolaire. Il a prévu la fiche suivante. Pour ne pas évaluer des problèmes de lecture, il lira deux fois le premier énoncé et laissera aux élèves le temps de répondre. Puis il fera de même avec les problèmes 2 et 3. Pour le problème 4, il lira l'énoncé avec la première question, laissera un temps pour la résoudre, puis lira l'énoncé avec la deuxième question.

1. « J'ai des bonbons j'en mange 3 et puis encore 2. Peux-tu me dire combien il m'en reste ? »
   Oui : Il t'en reste ....
   Non : parce que ....

2. « J'ai des bonbons ; j'en mange 3, il m'en reste 15. Peux-tu me dire combien il m'en reste ? »
   Oui : Il t'en reste ....
   Non: parce que..

3. « J'ai 12 bonbons ; j'en mange beaucoup .... Oh il ne m'en reste plus ! Peux-tu me dire combien j'en ai mangé ? »
   Oui : tu en as mangé ....
   Non : parce que..

4. « Paul a des billes dans son sac. Il en gagne 3, il en a maintenant 15, il en gagne encore 4 »
   - combien a-t-il de billes à la fin ?
   - saurais-tu trouver combien il avait de billes avant de jouer ?

4. Cette évaluation est-elle cohérente avec les apprentissages visés par :
les fiches 59 à 68 (et le problème introductif à cette dernière)
la fiche 85 ?

ANNEXE 1

Le Fainéant et le Diable

Un Fainéant se désespérait d'être toujours sans le sou. Ne sachant plus à quel saint se vouer, il eut l'idée d'invoquer le Diable. A peine avait-il prononcé son nom qu'il le vit apparaître. Dominant son effroi, le Fainéant demanda à son visiteur une recette pour faire fortune.

« C'est enfantin, répondit le diable. Il suffit de traverser plusieurs fois le pont que tu vois là-bas. Après chaque traversée tu te retrouveras avec, dans ta poche, deux fois plus d'argent qu'auparavant.

- Pas possible ! s'exclama le Fainéant.

- Je m'en porte garant, affirma le diable. Mais attention ! Il y a une condition : pour me payer de ma peine, tu me donneras 24 francs au terme de chaque traversée miraculeuse. Entendu ?

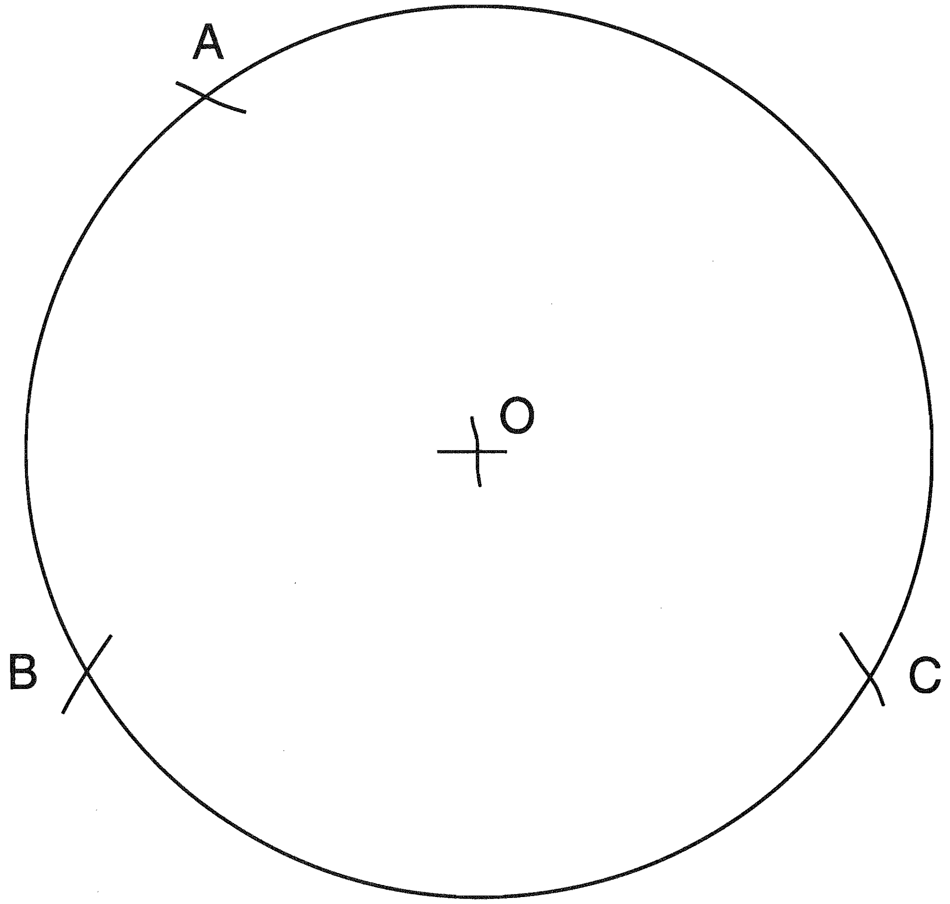
- Entendu ! répondit le Fainéant enthousiasmé à lidée de faire si facilement fortune. Commençons sur le champ ! »

Le Fainéant traversa donc le pont une première fois et, ô stupeur ! constata qu'il avait dans sa poche le double de la somme qui s'y trouvait auparavant. Ravi, il s'empressa de donner 24 francs au Diable et de traverser le pont une seconde fois. Il put s'assurer de nouveau que le Diable n'avait pas menti : son argent avait encore doublé. Il remit 24 francs au Diable et fit une troisième traversée, au terme de laquelle, l'argent ayant doublé une nouvelle fois, il se retrouva avec exactement... 24 francs, juste de quoi payer son perfide conseiller qui disparut en ricanant.

Combien le Fainéant avait-il d'argent initialement ?

« Sur le sentier des mathématiques »
(Kordiemsky - Dunod)

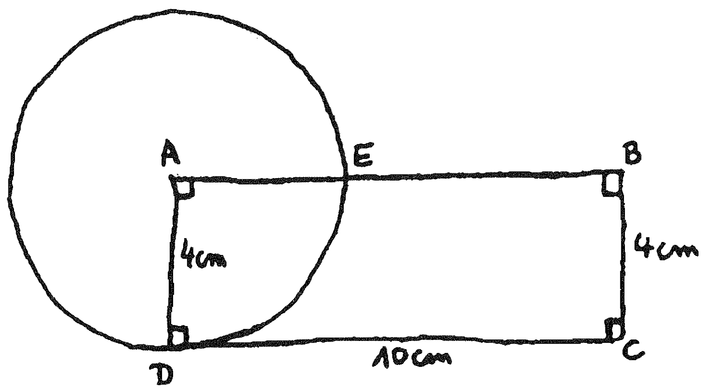
ANNEXE 2



ANNEXE 3

Exercice 14

Sur ce dessin à main levée, on a représenté un rectangle ABCD et un cercle de centre A qui passe par D. Les mesures réelles sont en centimètres. Ce cercle coupe le segment [AB] au point E.



Trouve la longueur du segment [EB]...

Explique ta réponse...

....

ANNEXE 4

Elève A

Trouve la longueur du segment [EB]. Elle est de 3,6 centimètres

Explique ta réponse : J'ai mesuré avec ma règle le segment [EB] et je trouve 3,6 centimètres

Elève B

Trouve la longueur du segment [EB]. 6 cm

Explique ta réponse : j'ai pris ma regle et j'ai mesuré le coté de 4 cm cela faisait sur ma règle 2,2 cm j'ai reporte cette mesure sur le segment A E cela faisait même longueur j'ai fait 10 moin 4 et jai trouvé 6

Elève C

Trouve la longueur du segment [EB]. 6 cm

Explique ta réponse : car J'ai prit la largeur = 2,2 = 4 cm et 10 − 4 = 6 cm.

Elève D

Trouve la longueur du segment [EB]. 3,06 cm

Explique ta réponse : j'ai pris la regle et j'ai mesuré

Elève E

Trouve la longueur du segment [EB]. La longueur du segment EB et de ~~7,6~~ 3,8

Explique ta réponse : Pour trouver la longueur de segment EB il faut faire 3,4 + 4 = 3,8 (L+l)

ANNEXE 5

59. Atelier Problèmes

Faire un schéma
pour répondre à une question

Date ....

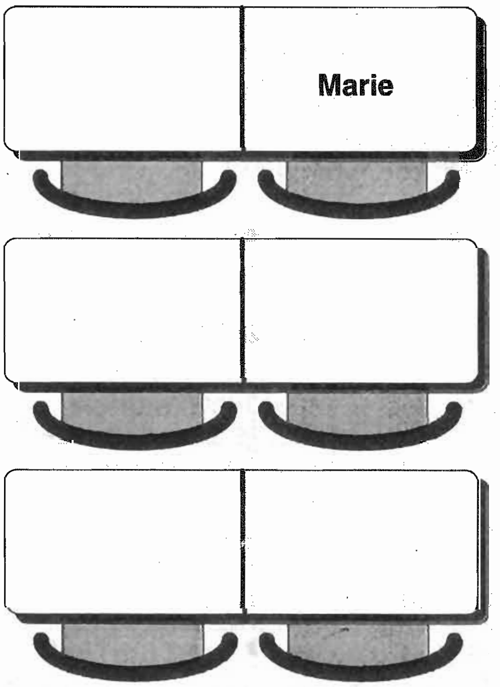
Lis attentivement les énoncés suivants.
Pour répondre aux questions, fais un dessin.

1. J'ai dessiné puis colorié en bleu et en **rouge** des ronds et des carrés.

J'ai dessiné 2 carrés bleus et 1 rond rouge puis 5 carrés rouges et 3 ronds bleus.

- Combien y a-t-il de ronds au total ? ....
- Combien y a-t-il de figures bleues ? ....
- Combien y a-t-il de figures rouges ? ....

2. Place les élèves.



- Luc est assis au premier rang à côté de Marie.
- Pierre est assis derrière Luc, mais il est devant Julie.
- Joël est le voisin de Julie.

a. A quel rang est assis Joël ?

....

b. Pierre a-t-il un voisin ?

....

ANNEXE 6

68. Atelier Problèmes

Problèmes additifs

Date

Combien ont-ils ?

Marie	Jeanne	Luc
		
. . . + . . . + . . . = . . .	. . . + . . . + . . . + . . . = . . .	. . . + . . . + . . . = . . .

18 francs

12 francs

6 francs

35 francs

20 francs

Marie a acheté	Jeanne a acheté	Luc a dépensé
		18 +12 + 6 = 36 F Dessine ce qu'il a acheté.
Elle a dépensé . . . . = . . . Il lui reste	Elle a dépensé . . . . = . . . Il lui reste	

71 72 73 74 75 76 77 78 79 **80**

ANNEXE 7

85. Atelier Problèmes

Problèmes additifs

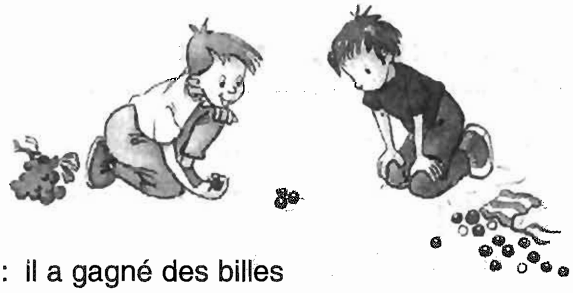
Date

. . . .

. . . .

1. La partie de billes

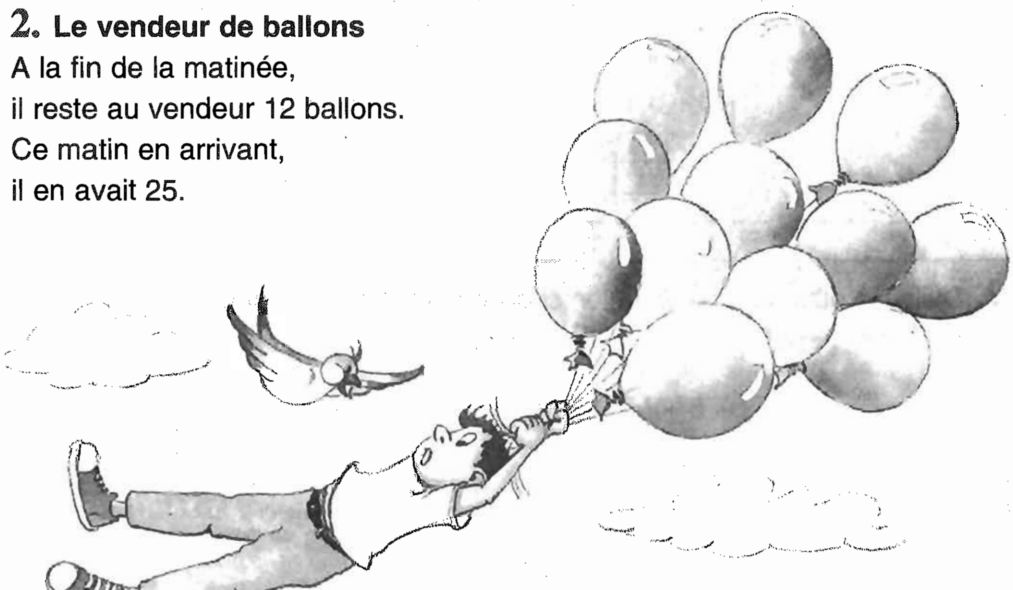
Au début de la récréation,
Luc avait 15 billes.
A la fin de la récréation,
il en a 24.



- Entoure la bonne réponse : il a gagné des billes
  il a perdu des billes.
- Combien a-t-il gagné ou perdu de billes ? . . . .

2. Le vendeur de ballons

A la fin de la matinée,
il reste au vendeur 12 ballons.
Ce matin en arrivant,
il en avait 25.



Combien a-t-il vendu de ballons ? . . . .

3. Les courses

Pierre est allé faire les courses au marché.
Il est parti avec 20 euros. Après le marché, il lui restait 12 euros.
Quelle question peux-tu poser ?

. . . .

91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

ACADEMIE DE LILLE

PREMIER VOLET

Première Partie (8 points)

Exercice 1

Soit ABCD un trapèze rectangle de hauteur AD = 4 cm, de bases AB = 4 cm et CD = 7 cm, et soit M un point du segment [AD]. On pose DM = x cm.

1. Evaluer, en fonction de x, les mesures a_1 et a_2 des aires du triangle CDM et du quadrilatère ABCM (mesures exprimées en centimètres carrés). *(1 point)*

2. Représenter la variation de ces deux aires quand M varie sur le segment [AD]. On utilisera la feuille de papier millimétré à en-tête jointe, et on prendra pour représenter les unités :
- 4 cm sur l'axe des abscisses (longueurs en centimètres)
- 1 cm sur l'axe des ordonnées (aires en centimètres carrés) *(1 point)*

3. Graphiquement, puis par le calcul, déterminer M pour que $a_1 = a_2$.*(1 point)*

Exercice 2

Jacques veut réaliser un enclos pour le poney de son fils. Il dispose pour cela d'un terrain rectangulaire, vierge de toute culture et non clos, de 22 m de long sur 18 m de large.
Il profite d'une vente promotionnelle pour acheter un rouleau de 48 m de grillage et 24 piquets. Le vendeur du magasin lui a conseillé de placer un piquet tous les 2 mètres.
Avant de poser ses piquets et son grillage, Jacques réfléchit à la forme qu'il doit donner à son enclos pour que le poney de son fils ait le maximum d'espace, tout en respectant les conseils du vendeur (un piquet tous les deux mètres).

1. Il se dit d'abord que le plus simple est de choisir une forme rectangulaire

1a) Quels sont tous les enclos à forme rectangulaire possibles ? *(1 point)*

1b) Parmi tous ces enclos, quel est celui qui offre le plus d'espace ? **Justifier**. *(0,5point)*

2. Jacques se demande s'il ne serait pas plus avantageux de réaliser un enclos qui aurait la forme d'un hexagone régulier.

2a) Justifiez que cette solution est possible. Démontrez en calculant l'aire d'un tel enclos que cette solution est plus intéressante que celle d'un enclos rectangulaire. *(1 point)*

2b) Donnez un programme de construction géométrique permettant de réaliser un plan de cet enclos hexagonal à l'échelle 1/200.

Réalisez-le en laissant apparents les traits de construction. Notez ensuite l'emplacement des piquets. *(1 point)*

3. Jacques se demande maintenant si un enclos qui aurait la forme d'un dodécagone régulier (12 côtés, voir annexe, ci-dessous) ne serait pas plus avantageux encore.

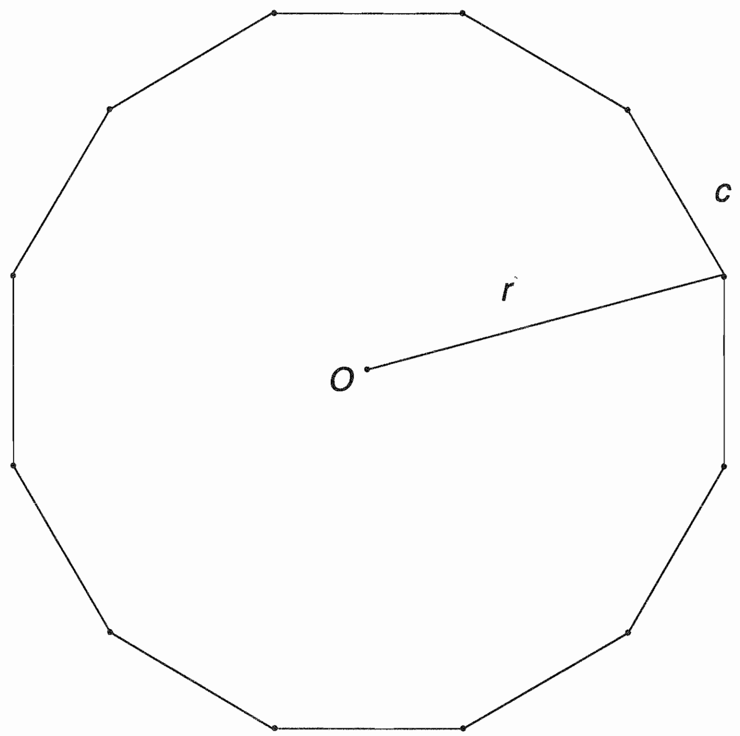
En utilisant le formulaire donné ci-dessous :

3a) Déterminez la longueur au cm près du côté de ce dodécagone et du rayon de son cercle cirzonscrit. Justifiez alors que cette solution est possible. (1 *point)*

3b) Montrer en calculant l'aire d'un tel enclos que cette solution est plus avantageuse que les précédentes. (0, 25 *point)*

4. A la lumière des résultats précédents, pouvez-vous imaginer, sans le démontrer, quelle forme **polygonale** Jacques devrait donner à son enclos pour qu'il fournisse au poney un maximum d'espace ? (0, 25 *point)*

Annexe : Définition et propriétés du dodécagone régulier



Un dodécagone régulier est un polygone (convexe) à 12 côtés de même longueur c, inscrit dans un cercle de rayon r.

On admet les formules suivantes (qui découlent du théorème de Pythagore)

$r = c\sqrt{2+\sqrt{3}} \cong 1{,}932\ c$

Aire du dodécagone = $3r^2 = (6+3\sqrt{3})c^2 \cong 11{,}196\ c^2$.

Deuxième Partie (4 points)

Les exercices suivants[1] ont été proposés au tableau dans une classe de CM1 au mois d'octobre :

1) Ecrire en chiffres le nombre deux millions trois cent quarante mille cent cinq 2) Ecrire en chiffres le nombre dix-sept millions deux mille cinquante-huit

L'exercice 1 est corrigé collectivement avant que l'exercice 2 ne soit donné aux élèves.
Dans les séances précédentes, les élèves ont travaillé l'écriture des grands nombres, ce qui a conduit à l'introduction, pour faciliter la lecture, d'un espace entre les classes qui correspondent à des tranches de trois chiffres, et l'enseignant a conclu : " on remplace les mots millions et mille par des espaces ".
Voici les productions relevées pour chacun des exercices :

Exercice 1 :		**Exercice 2 :**	
2 340 105 :	17 élèves	17 002 058 :	11 élèves
2 340 500 :	6 élèves	17 200 058 :	5 élèves
2 340 050 :	1 élève	17 200 58 :	2 élèves
200003004015015 :	1 élève	17 2 058 :	1 élève
234500 :	1 élève	17 2000 058 :	1 élève
		17 2000 58 :	1 élève
		17 2 58 :	5 élèves

Questions :

1. Expliquez la différence de réussite entre les deux exercices. *(1 point)*

2. Faites une hypothèse d'interprétation des réponses dans le premier exercice
a) Pour la réponse 2 340 5 00 *(0,25 point)*
b) Pour la réponse 200003004015015 *(0,5 point)*

3. Dans l'exercice 2), pour chacune des réponses 17 200 058 et 17 2 58, indiquez en quoi elle respecte ou non les conventions usuelles d'écriture et la conclusion du maître. *(1 point)*

4. Quel argument devrait permettre aux élèves de rejeter la réponse 17 200 058 ?
Permet-il de rejeter 17 2 58 ? Pourquoi ? *(1 point)*

5. Proposez un nombre qui pourrait poser problème aux adeptes de la réponse 17 2 58 et les inciter à repérer les inconvénients de leur proposition. Justifiez votre réponse. (0, 75 *point)*

[1] Les exercices et productions d'élèves proposés dans cet exercice sont tirés de l'ouvrage " Variations sur une leçon de mathématiques ", paru aux éditions L'Harmattan, sous la direction de C. Blanchard-Laville. La séquence analysée s'est déroulée à l'école J. Michelet à Bordeaux.

DEUXIEME VOLET

I

Voici une situation inspirée du manuel de CP de la collection " Objectif Calcul " édition 1985 (Hatier). Elle est proposée au cours du mois de novembre à des élèves d'un cours préparatoire. Le maître veut faire apparaître l'intérêt d'un groupement par paquets pour comparer des collections.

Conditions matérielles:
Rapprocher deux tables face à face, poser une grande feuille de papier kraft, au milieu de la feuille tirer un trait. D'un côté poser une soixantaine de cubes, de l'autre une collection de bûchettes ayant à peu près le même nombre d'objets. Le travail est réalisé par groupes de 4 enfants.

Consignes :
" Cherchez si les deux collections ont le même nombre d'objets. Mais attention, chaque collection doit rester du côté où elle a été posée, le trait ne peut être franchi, les collections ne peuvent donc pas se mélanger. "

Questions posées aux candidats :

1. **a)** Donnez **trois** stratégies de résolution que les enfants peuvent essayer de mettre en œuvre à cette époque de l'année pour résoudre le problème posé. *(1 point)*

b) Identifiez **trois** des variables didactiques de la situation, et expliquez les choix faits par le maître en fonction de son intention. *(1, 5 point)*

c) Proposez une gestion possible de la séance en distinguant les étapes essentielles que vous envisagez et en indiquant les interventions éventuelles du maître. *(1 point)*

Vous trouverez en **Annexe 1** un exercice d'évaluation élaboré par le maître et proposé individuellement à chaque élève. La consigne donnée oralement est la suivante " Est-ce que chaque poisson aura son bocal ? Si la réponse est non, dites alors ce qu'il faut faire pour que chaque poisson ait son bocal. ". Les élèves devront rendre la feuille (il n'est donc pas question de la découper).

2 **a)** Quelle difficulté spécifique présente cette activité par rapport à l'activité précédente ? *(0,5 point)*

b) Par rapport aux objectifs du maître, l'exercice d'évaluation proposé vous parait-il bien conçu ? Développez deux arguments, en référence au document. *(1 point)*

c) Donnez sur les feuilles annexes (**annexe 2** et **annexe 3**) à rendre avec la copie, deux exemples de productions d'élèves **correspondant aux attentes du maître.** Justifiez brièvement en quoi elles sont conformes à l'attente du maître et en quoi elles diffèrent l'une de l'autre. *(1 point)*

II

A la fin du CP, le maître propose l'activité suivante.

Conditions matérielles :
Une première collection d'une bonne centaine de cubes est rangée dans une boîte. Une deuxième collection ayant à peu près le même nombre d'objets (bûchettes) est rangée dans une autre boite. Le travail est encore réalisé par groupes de 4 enfants.

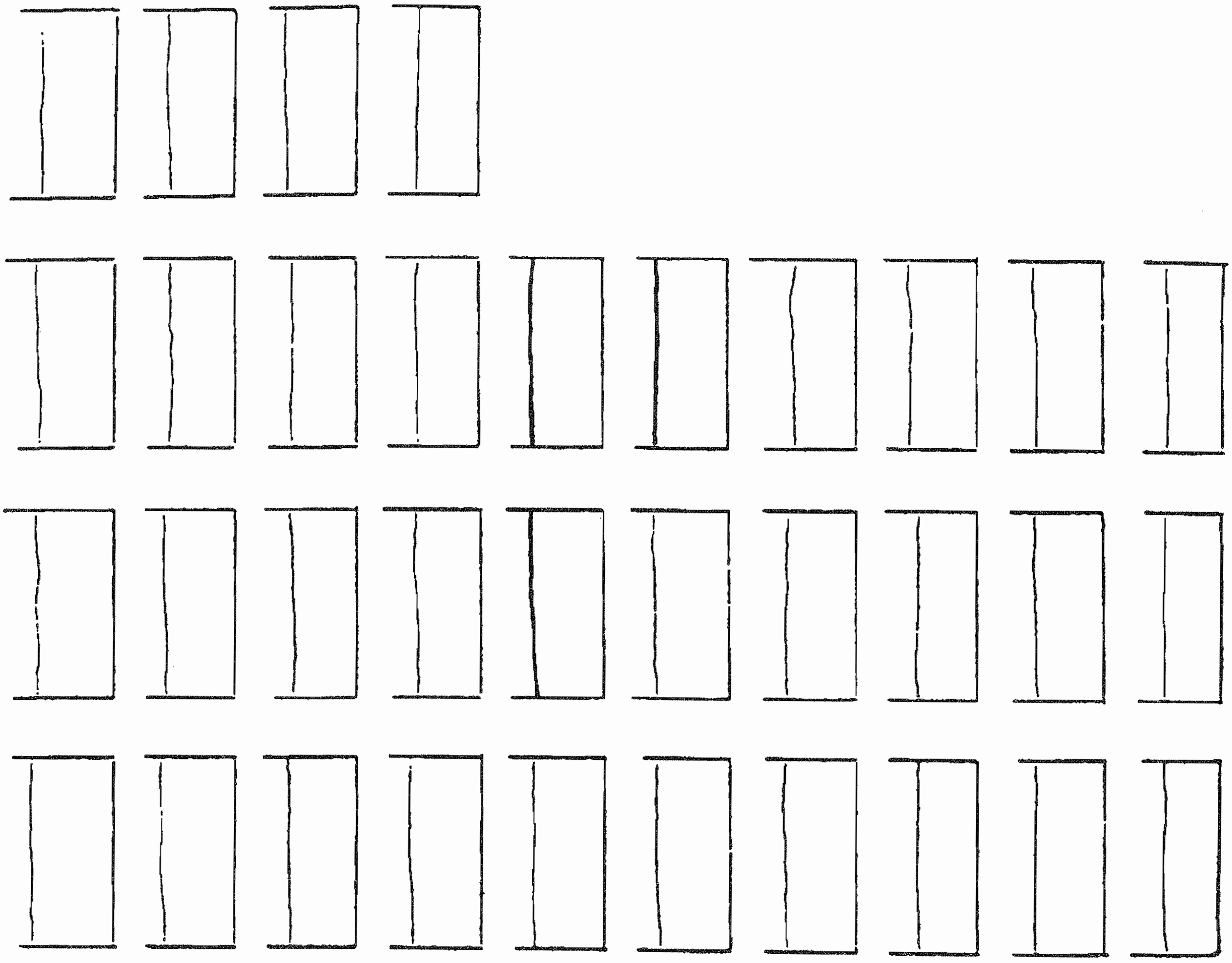
Consignes :
" Cherchez si les deux collections ont le même nombre d'objets. Mais attention, vous ne pouvez ouvrir qu'une boîte à la fois et vous devez remettre les objets dans la boîte avant d'ouvrir l'autre. "

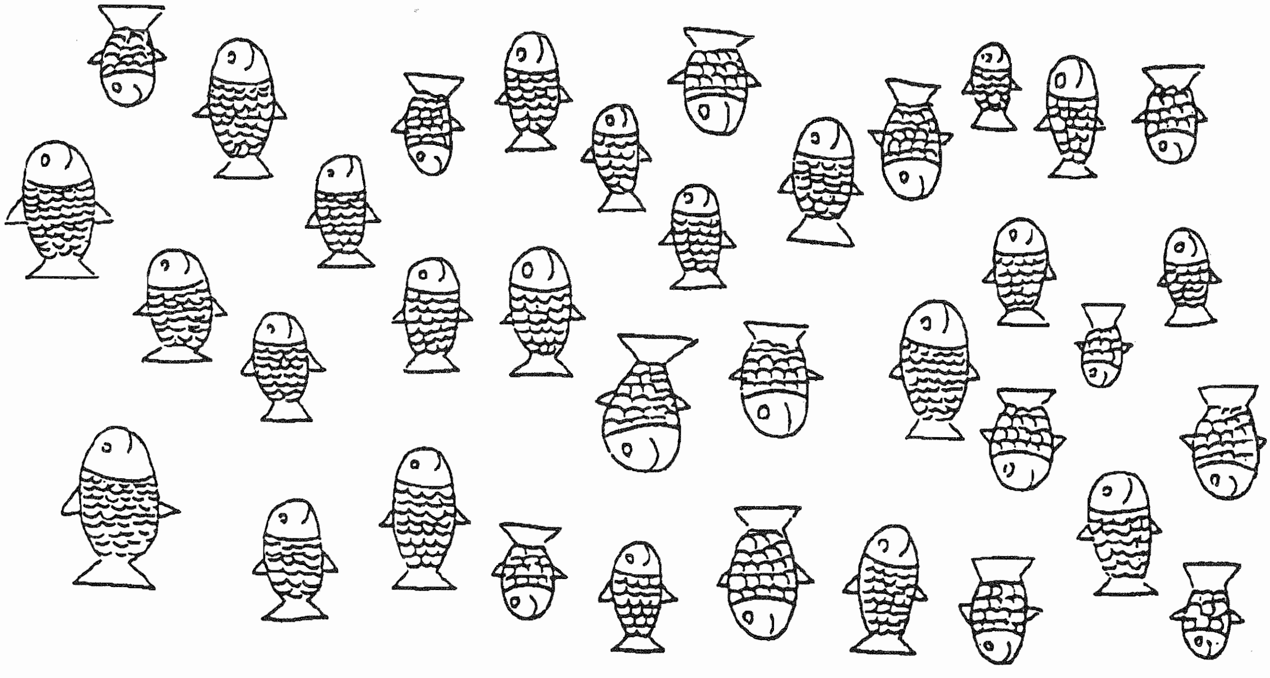
Questions posées aux candidats:

3 **a)** Proposez l'une des solutions que le maître attend des élèves. *(0, 75 point)*

b) Quelles nouvelles compétences (par rapport aux activités précédentes) sont travaillées dans cette activité ? Argumentez votre réponse en référence à l'activité. *(1, 25 point)*

ANNEXES 1, 2 et 3





ACADEMIE DE LIMOGES

PREMIER VOLET

Première Partie (8 points)

Problème : *(3,5 points)*

I

Soit ABC un triangle, A', B'et C'les milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

1. Tracer la figure à la règle et au compas en laissant apparents les traits de construction.

2. Montrer que (AC), (BC) et (AB) sont respectivement parallèles à $(A'C')$, $(B'C')$ et $(A'B')$.

3. Calculer l'aire du triangle $A'B'C'$en fonction de celle du triangle ABC

4. **a)** Montrer que $[A'A)$, $[B'B)$ et [C'C) sont les médianes du triangle $A'B'C'$.
b) Que peut-on dire des positions des centres de gravité des triangles ABC et $A'B'C'$?

II

Soit IJK un triangle. On place les points I', J'et K' respectivement sur les côtés $[JK]$, $[IK]$ et $[IJ]$ de telle sorte que :

$$\frac{IK'}{IJ} = \frac{JI'}{JK} = \frac{KJ'}{KI} = r$$

où r est un nombre compris entre 0 et 1.

1. Dites à quoi correspond le triangle $I'J'K'$ dans les cas où $r = 0$ et $r = 1$.

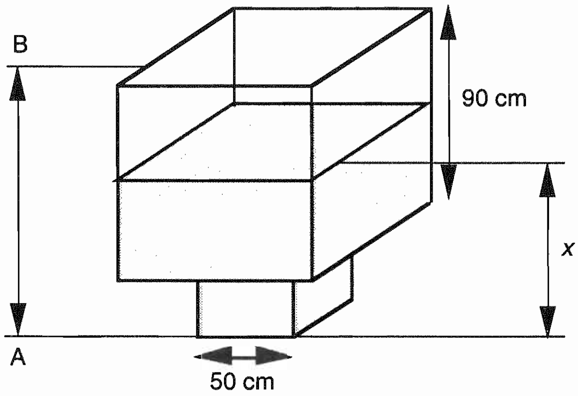
2. Tracer la figure à la règle et au compas (en laissant apparents les traits de construction) lorsque $r = \frac{1}{5}$

3. Tracer à la règle et au compas les médianes du triangle $I'J'K'$.

4. Quelle conjecture pouvez-vous énoncer ?

Exercice 1 : *(3 points)*

Une cuve est formée de deux cubes superposés qui communiquent entre eux. L'arête du cube supérieur (le grand cube) mesure 90 cm. L'arête du cube inférieur (le petit cube) mesure 50 cm.



Cette cuve contient un liquide. On note x la hauteur de liquide dans la cuve. On note V(x) le volume. en litres, du liquide dans la cuve lorsque la hauteur est x. (x étant exprimé en cm).

1. Calculer V(30). V(51). V(90)

2. Exprimer V(x) en fonction de x.

3. Construire sur la feuille de papier millimétré mise à votre disposition une représentation graphique de la fonction qui à x associe V(x).

4. Sur un segment [AB] on marque une graduation indiquant, en litres, le volume du liquide entreposé dans la cuve. Représenter cette graduation à l'échelle 1/10.

Exercice 2 : *(1.5 points)*

Voici un exemple de la manière qu'avaient les Egyptiens de multiplier deux nombres entre eux :

25	35
~~12~~	~~70~~
~~6~~	~~140~~
3	280
1	560
	875

25 x 35 = 875

On convient d'appeler colonne de gauche la colonne des nombres : 25 ; 12 ; 6 ; 3; 1. Dans l'exemple fourni, la colonne de gauche comporte 5 lignes.
On convient d'appeler colonne de droite la colonne des nombres : 35 ; 70 ; 140 ; 280 ; 560.

1. En utilisant le procédé égyptien. **calculer 186 x 31.**

2. **Justifier,** à partir de l'exemple 25 x 35. la validité de l'algorithme de calcul des Egyptiens.

3. **Construire** un exemple de multiplication de deux nombres, exemple dans lequel la colonne de gauche comporte 8 lignes et où l'on barre toutes les lignes, sauf la dernière.

Deuxième Partie (4 points)

Des élèves d'une classe de grande section de l'école maternelle ont déjà travaillé sur le rangement de formes géométriques simples (carrés, disques, rectangles, triangles) en appliquant le critère : « *La forme A est plus petite que la forme B s'il est possible de placer A sur B de telle sorte que la forme A soit entièrement contenue à l'intérieur de la forme B* ».

Aujourd'hui, 18 décembre 1998, la maîtresse remet à chaque élève :

- une enveloppe contenant les formes prédécoupées dans du carton vert représentées dans l'annexe 1 ;
- une feuille de papier A4
- de la colle.

La maîtresse donne la consigne suivante : « *Faites un sapin avec ces formes* ».

En annexes 2, 3, 4 et 5 sont fournies les productions de quatre élèves ainsi qu'une phrase d'explication de sa démarche par chaque élève.

1. Quels pouvaient être les objectifs de la maîtresse ? *(0,5 point)*

2. Est-ce que l'application stricte du critère de rangement défini par la maîtresse permet de réussir l'exercice ? *(0,5 point)*

3. Trouver six critères permettant d'analyser les productions des élèves. Appliquer ces critères à l'analyse des quatre productions. *(2,5 points)*

4. Quelle incidence la formulation de la consigne et le matériel fourni aux élèves ont-ils eue sur les productions de certains élèves ? *(0,5 point)*

DEUXIEME VOLET

Les réponses attendues devront être précises et brèves.

Barème envisagé: 1,25 ; 2,5 ; 2,5 ; 1,75

En fin de CM1, un maître conçoit, pour sa classe de 22 élèves, un dispositif expérimental lui permettant de travailler sur les ombres. Pour cela, il dispose d'une lampe, d'un support sur lequel il fixera des formes carrées découpées dans du carton et d'un écran sur lequel seront projetées les ombres des formes carrées.

On supposera que :

- le dispositif est opérationnel et permet d'obtenir des ombres aux contours nets, sur lesquelles il est possible d'effectuer des mesures de longueur précises au mm près ;

- les élèves ont déjà travaillé sur les ombres d'un point de vue géométrique. Ils savent, en particulier, qu'il existe des positions relatives de la lampe, du carton carré et de l'écran pour lesquelles l'ombre d'un carré est un carré ;

- les distances, d'une part entre la lampe et le carton, d'autre part entre le carton et l'écran, sont maintenues constantes tout au long de la séance ;

- dans cette classe, les élèves recourent librement à la calculatrice.

1. *(1,25 points)*

La lampe est éteinte. Le maître dispose sur le support un carré en carton de 9 cm de côté. Il dit: « *Lorsque j'allumerai l'ampoule vous verrez apparaître sur l'écran l'ombre de ce carré. Cette ombre sera de forme carrée. Ecrivez sur vos cahiers la longueur que mesurera le côté de l'ombre* ».

Il interroge quelques élèves sur leurs prévisions. Les élèves ont fait des estimations qui varient de 12 cm à 43 cm. Toutes les prévisions sont notées au tableau. Le maître invite un élève à effectuer l'expérimentation : allumage de l'ampoule, mesure du côté de l'ombre. Cet élève trouve 24 cm.

Le maître demande : « Qui a fait la meilleure prévision ? Rangez vos prévisions de la moins bonne à la meilleure ».

1.1 Pourquoi aucun élève n'a-t-il répondu au maître qu'il était impossible de prévoir la mesure du côté de l'ombre ?

1.2 Quelle est la notion mathématique dont le maître a le projet de se servir comme modèle mathématique permettant de prévoir les dimensions des ombres en fonction des dimensions des carrés en carton ? Justifier la réponse par une analyse mathématique, éventuellement accompagnée d'un schéma, de la situation expérimentale

1.3 En admettant que 24 cm soit la bonne mesure du côté de l'ombre, comment procéder mathématiquement pour ranger les estimations des élèves de la moins bonne à la meilleure ?

2. *(2,5 points)*

La lampe est éteinte. Le maître remplace, sur le support, le carré de 9 cm de côté par un carré de 6 cm de côté. Cette nouvelle mesure est écrite au tableau. Le maître demande: « *Et maintenant, quelle est la mesure de la longueur du côté de l'ombre* » ? Toujours, sans allumer la lampe, le maître demande rapidement quelques anticipations, sans leurs justifications.

2.1 Certains élèves proposent 21 cm ; d'autres, 15 cm. Analyser ces deux réponses.

2.2 Le maître refuse que les élèves discutent des raisons qui ont motivé leurs anticipations. Pourquoi ?

2.3 Les élèves pouvaient-ils, à ce moment de la séance, « deviner juste » ?

Le maître fait effectuer par un élève la vérification expérimentale. La lampe est allumée, l'ombre mesurée. L'élève expérimentateur trouve 16 cm de côté.

Un seul élève, avait proposé 16 cm. Le maître lui demande comment il a procédé. Il répond: « *J'ai deviné. C'est le hasard si je suis tombé juste. On peut y arriver en devinant* ».

2.4 Quel problème rencontrent alors les élèves ?

2.5 Quel problème rencontre le maître ? Quels choix s'offrent à lui ? Argumenter sur la pertinence de ces choix.

3. *(2,5 points)*

La lampe est de nouveau éteinte. Le maître remplace le carré de 6 cm de côté par un carré de 18 cm de côté. Le maître demande : « *Et maintenant, quelle est la mesure de la longueur du côté de l'ombre ?* » Certains élèves (la majorité) calculent ; d'autres pensent qu'on peut trouver en devinant. Une douzaine d'élèves - tous des calculateurs - propose un même résultat : 48 cm.

3.1 Sur quelles propriétés de la notion mathématique mise en jeu, pouvaient s'appuyer les élèves pourjustifier la réponse 48 cm ?

Le maître fait effectuer par un élève la vérification expérimentale. La lampe est allumée, l'ombre mesurée. L'élève expérimentateur trouve 47,9 cm de côté. Parmi les élèves qui avaient trouvé 48 cm, certains contestent la mesure tandis que d'autres s'accommodent de la différence de 1 mm. Aucun de ceux qui voulaient trouver le résultat en devinant n'est parvenu à donner une bonne anticipation.

3.2 Comment expliquer la différence entre la mesure effectuée par l'élève et la prévision exacte de certains élèves ?

3.3 Quelle difficulté pose au maître l'écart entre le prévu et le mesuré ?

A ce point de la séance, un élève dit au maître : « *Au début, le carré de 9 cm donne une ombre de 24 cm. Je me suis dit que l'ombre d'un carré de 1 cm de côté serait neuf fois moins grande. J'ai pris ma calculatrice et j'ai divisé 24 par 9. J'ai trouvé 2,6666666. J'ai multiplié par 18 et j'ai trouvé 47,999999* ».

3.4 Analyser l'intervention de cet élève.

3.5 Indiquer deux problèmes que rencontre le maître à la suite de l'intervention de cet élève.

Un élève qui utilisait aussi sa calculatrice, remarque : « *Sur ma calculatrice, 24 divisé par 9, cela fait 2,6666667* ». Un autre élève, dit: « *Sur ma calculatrice, j'ai tapé à la suite 24 : 9 X 18 = et j'ai trouvé 48* ».

3.6 Expliquer brièvement les résultats différents donnés par les calculatrices.

3.7 Le maître demande alors à tous les élèves de ranger leurs calculatrices. Analyser cette décision.

4. *(1,75points)*

La lampe est éteinte. Le maître place un carré de 15 cm de côté sur le support. Il demande de nouveau de trouver la mesure de l'ombre lorsqu'on allumera la lampe. Les élèves débattent de leurs méthodes.

4.1 Caractériser une telle situation sur le plan didactique.

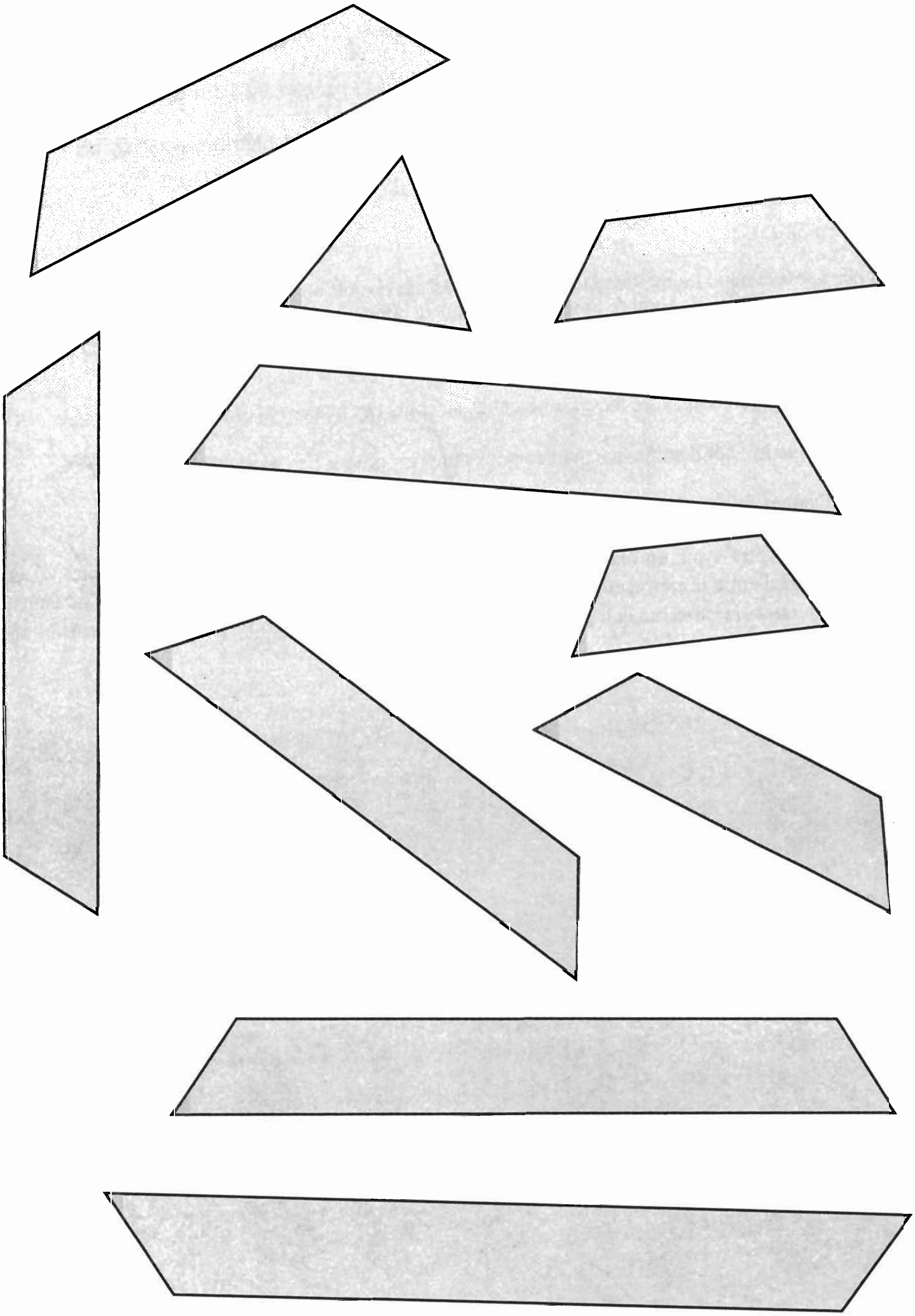
Au tableau figurent toutes les mesures obtenues au cours des quatre expérimentations successives.

4.2 Le maître conduit l'inventaire des procédures proposées par les élèves. Pourquoi ?

4.3 Donner deux cadres possibles de traitement de la notion étudiée.

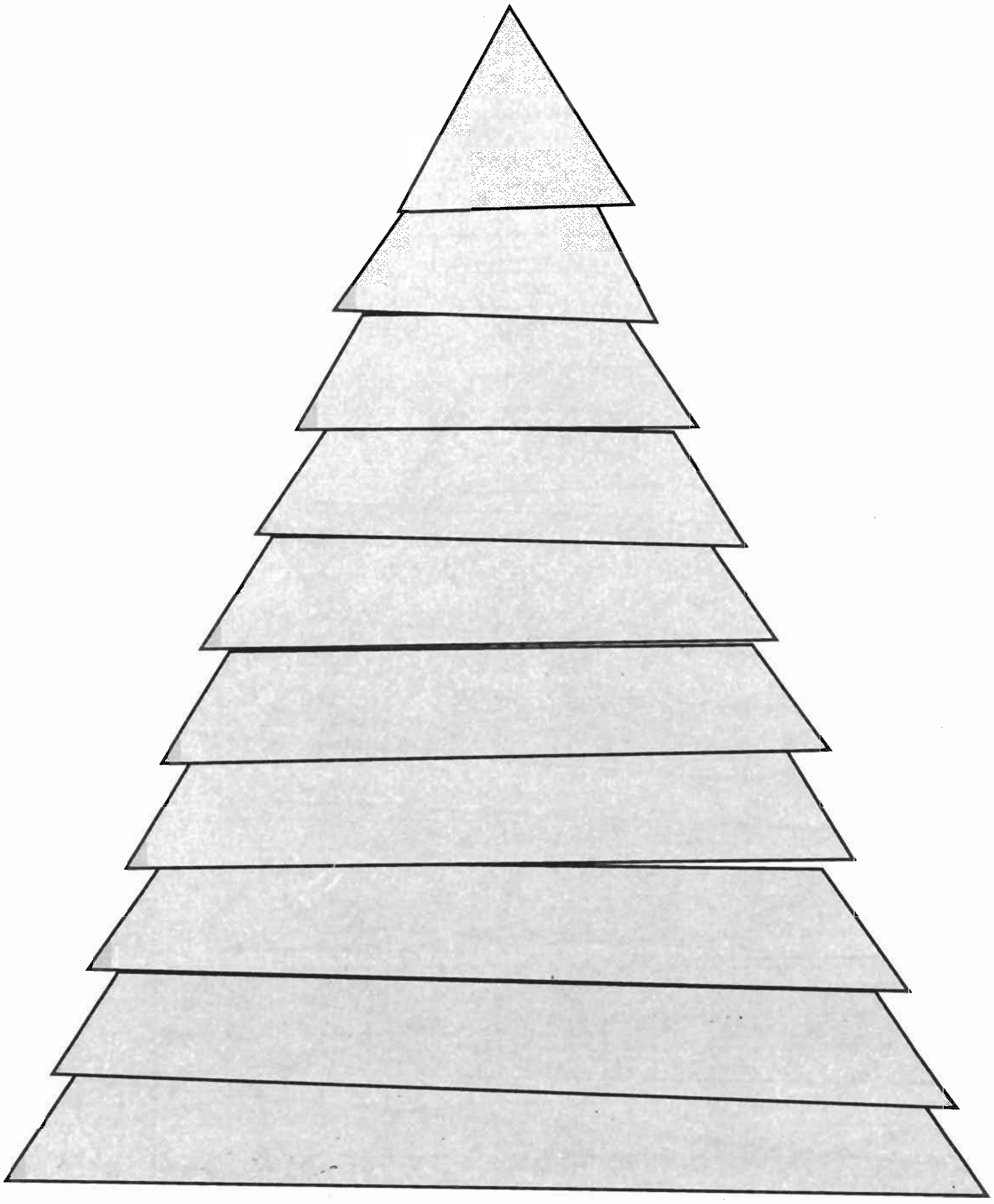
4.4 Si le maître avait, en maintenant constante la distance entre la lampe et le carton fait varier la distance entre le carton et l'écran, aurait-il aussi obtenu un tableau de proportionnalité entre les distances carton-écran et les longueurs des côtés des ombres correspondantes ? Justifier votre réponse.

ANNEXE 1



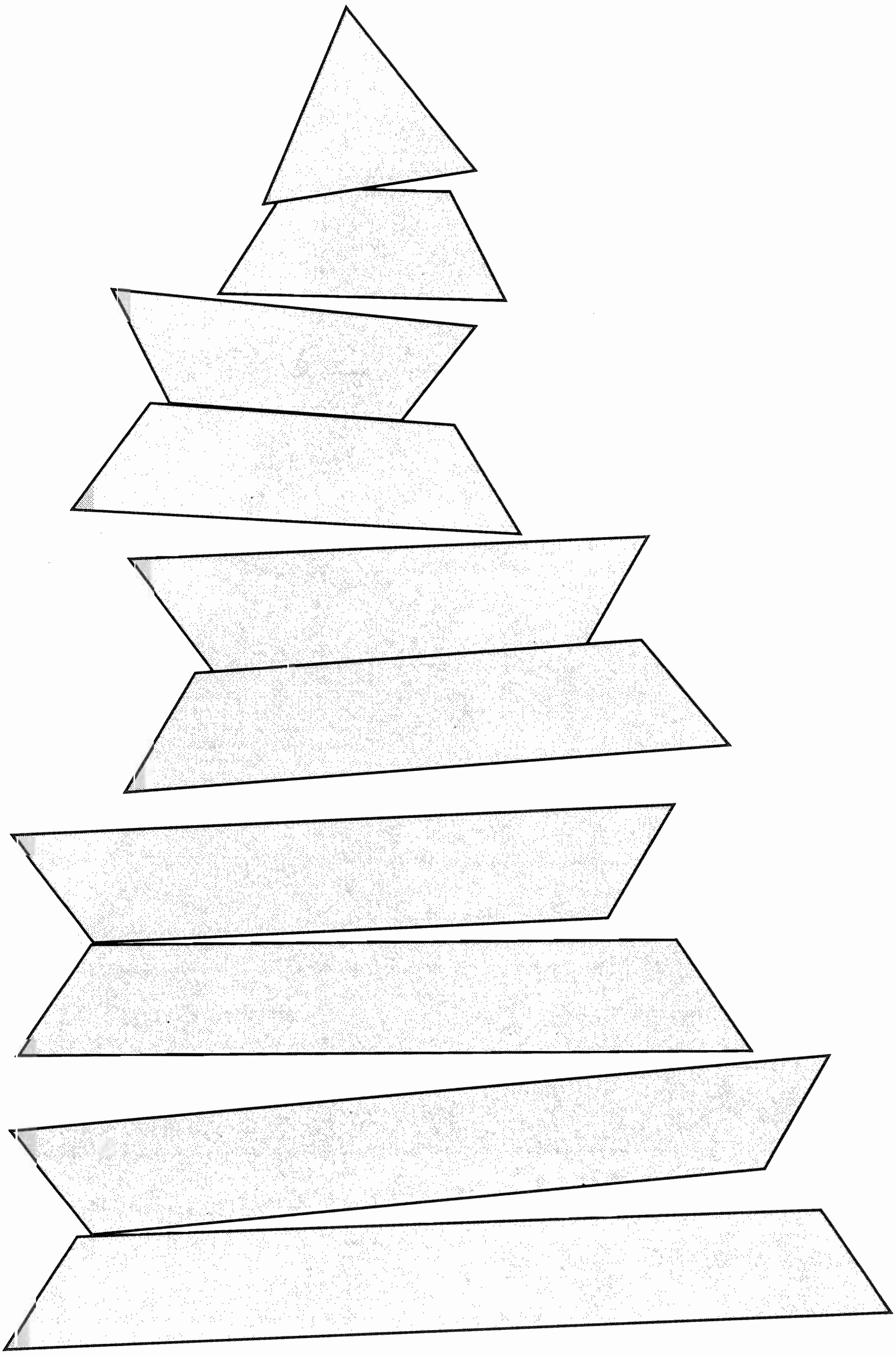
ANNEXE 2

Pierre : « *J'ai d'abord mis le petit triangle en haut puis j'ai mis les autres dessous du plus petit au plus grand , je les ai mis l'un sur l'autre pour voir la taille* ».



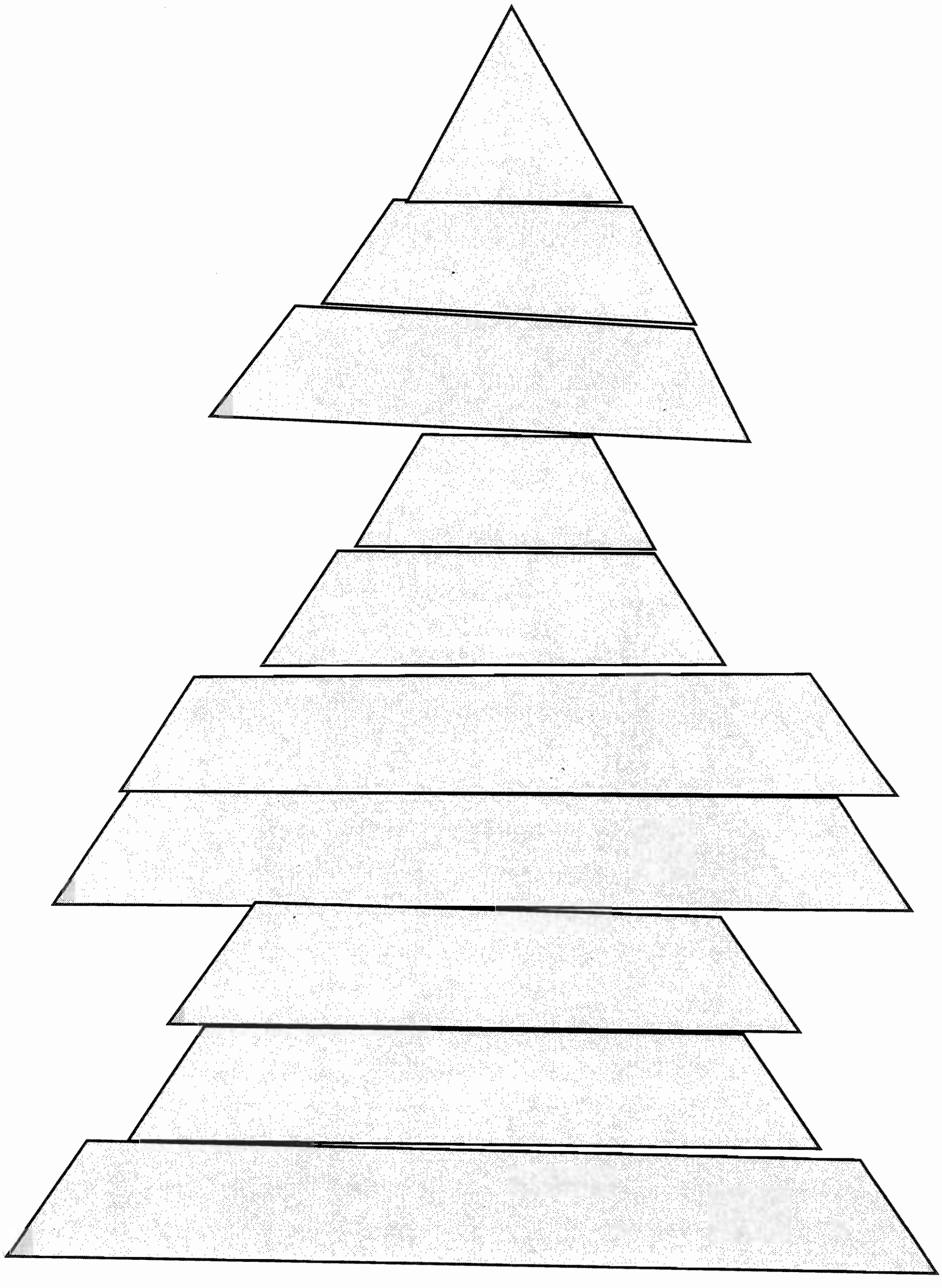
Annexe 3

Caroline : « *J'ai mis le petit morceau en haut et le grand en bas parce que un sapin c'est petit en haut et grand en bas* ».



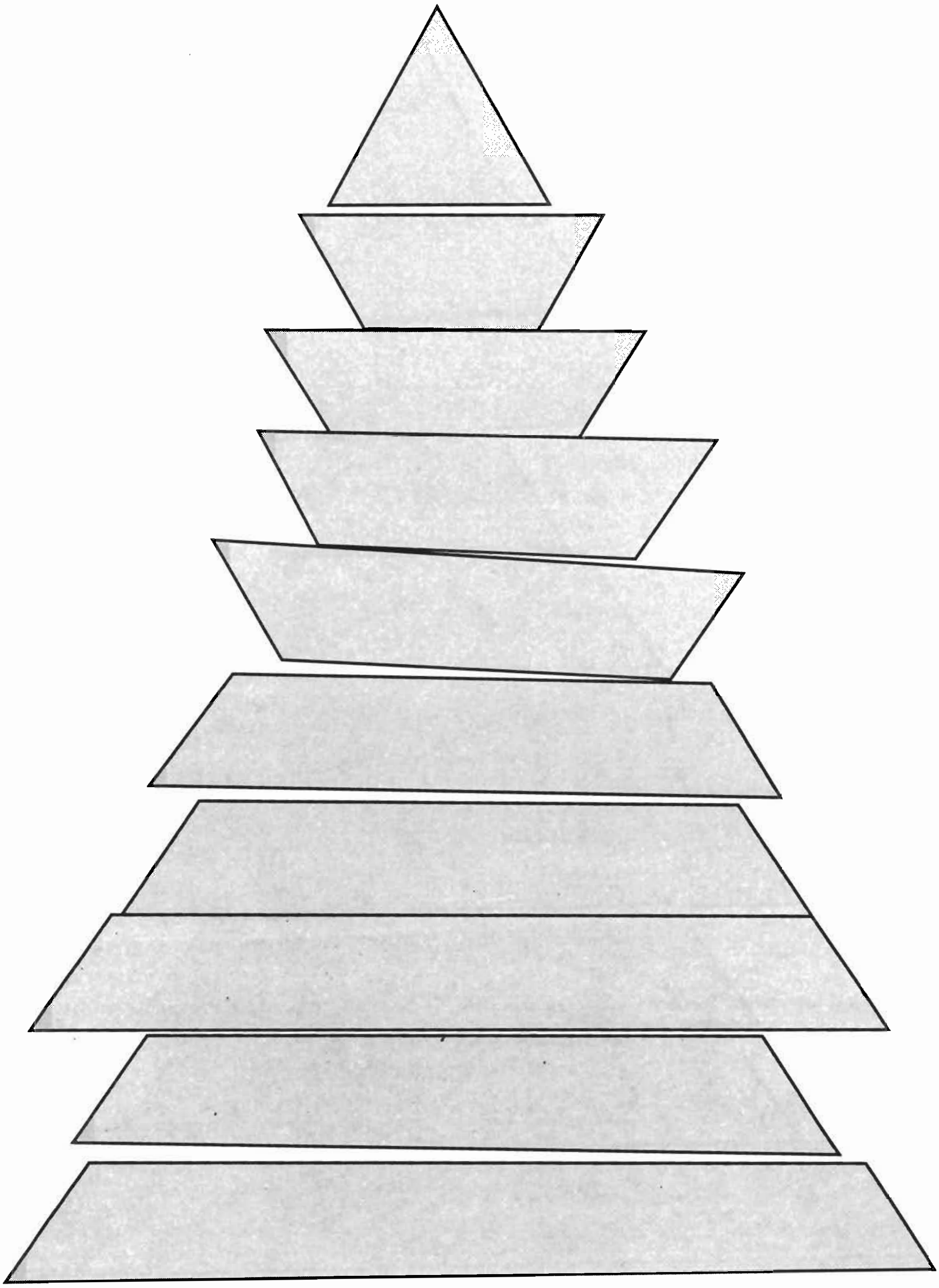
Annexe 4

Elodie : « *J'ai mis le petit en haut, le grand en bas et j'ai fait les branches* ».



Annexe 5

Anne : « *J'ai fait les branches du sapin* ».



ACADEMIE DE LYON, GRENOBLE

PREMIER VOLET

(12 points)

Première Partie (8 points)

Cette partie est constituée de deux exercices, le premier sur 2,5 points et le second sur 5,5 points.

• **Exercice 1** *(2,5 points)*

On considère la suite croissante de tous les nombres entiers naturels non multiples de 7 :

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17...)

Le terme de rang un est 1, de rang deux est 2, de rang sept est 8, de rang treize est 15, etc.

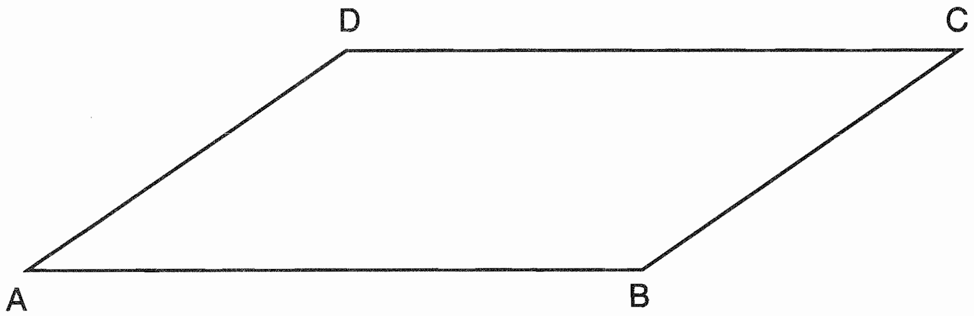
1 . Quel est le rang du terme 47 ? Et celui du terme 741 ?

2 . Quel est le terme de rang vingt-six ? Celui de rang cinquante-deux ? Et celui de rang cent trente-six ?

• **Exercice 2** *(5,5 points)*

Les seuls instruments autorisés pour les tracés sont la règle non graduée et le compas.

On considère le parallélogramme ABCD ci-dessous:



1 . Reproduire à l'échelle 1 ce parallélogramme avec règle non graduée et compas. Laisser nettement apparents les tracés de construction.

Écrire le programme de construction correspondant.

2 . Soit 0 le centre du parallélogramme ABCD. Soit E le symétrique de D par rapport à A. Soit F le point d'intersection des droites (AB) et (OE).

Démontrer : $AF = \frac{1}{3} AB$ (on pourra utiliser le triangle BDE).

3 . La parallèle à (BD) passant par F coupe la droite (AC) en I et la droite (AD) en H.

Calculer les rapports $\frac{AH}{AD}$ et $\frac{AI}{AC}$

4. Soit R le point de la demi-droite [AB) tel que : $AR = \frac{4}{3}$ AB.

Soit S le point de la demi droite [AC) tel que : $AS = \frac{4}{3}$ AC.

Soit T le point de la demi-droite [AD) tel que : $AT = \frac{4}{3}$ AD.

a) Placer R, S et T à la règle non graduée et au compas en explicitant le procédé utilisé.

b) Quelle est la nature du quadrilatère ARST ?

c) Exprimer l'aire du quadrilatère ARST en fonction de l'aire du parallélogramme ABCD.

Deuxième Partie (4 points)

Les documents placés en **annexes 1 et 2** sont constitués par les productions de deux élèves, en réponse un problème posé par l'enseignant à des élèves de fin de cycle 3.

1. Préciser les connaissances et les compétences qu'un enseignant peut évaluer à l'aide de ce problème.

2. Analyser les productions des deux élèves Gaël et Mariem en précisant pour chacune d'elles :

- les types de procédures que les élèves ont voulu mettre en œuvre ;
- la nature des difficultés qu'ils ont éventuellement rencontrées ;
- l'origine possible de ces difficultés.

DEUXIEME VOLET

(8 points)

Un enseignant de CM1 se propose d'utiliser les supports fournis dans **l'annexe 3** pour les deux activités suivantes :

Activité 1 : “ Jeu du portrait ” à partir des figures données en annexe 3.

Les élèves disposent d'une fiche sur laquelle sont reproduites ces figures (sans les questions a et b). L'enseignant annonce aux élèves qu'il a choisi une des figures et qu'ils doivent la retrouver en lui posant des questions. Au début, les questions sont libres (sauf celles qui mentionnent la position des figures sur la feuille ou les lettres qui les désignent) ; ensuite les questions mentionnant les noms des figures sont interdites (par exemple, la question “ *Est-ce un rectangle ?* ” est maintenant interdite).

Activité 2 : Exercice écrit : répondre aux questions a et b figurant dans l'annexe 3.

1. Analyse de l'activité 1

1.1 Quelles compétences générales et quelles connaissances relatives aux quadrilatères peuvent être mises en œuvre dans ce “ jeu du portrait ” ?

1.2 Analyser le choix des caractéristiques des figures de l'annexe 3 en référence aux objectifs que peut viser l'enseignant à travers l'exploitation du “ jeu du portrait ”.

1.3 Après avoir fait jouer au “ jeu du portrait ”, l'enseignant demande à chaque élève de choisir l'une des figures et de fournir un message écrit comportant des renseignements qui permettront aux autres élèves de retrouver la figure choisie. Il impose comme contrainte de ne pas citer de nom de figure. Un élève choisit la figure B.

Indiquer en quoi cette activité de production de messages met en jeu des compétences différentes de celles en oeuvre dans le “ jeu du portrait ”.

Proposer trois messages corrects différents que cet élève est susceptible de rédiger pour permettre aux autres élèves de retrouver cette figure.

2. Analyse de l'activité 2

2.1 Répondre aux questions posées dans l'exercice proposé aux élèves.

2.2 Indiquer, en le justifiant, l'ensemble des instruments géométriques que vous donneriez aux élèves pour qu'ils puissent répondre aux questions posées.

2.3 Indiquer quels types de difficultés les élèves peuvent rencontrer pour répondre aux questions posées.

3. Dans le but d'évaluer les acquis des élèves, l'enseignant propose une fiche comportant huit figures de **l'annexe 3**, en demandant aux élèves de reconnaître les carrés et les rectangles. Cette fiche comporte quatre intrus (ni carrés, ni rectangles).

Indiquer les huit figures que vous proposeriez en précisant les critères qui ont guidé votre choix.

ANNEXE 1

Prénom : GAEL

Dans la confiserie, on peut acheter des chocolats au détail.
100 g de chocolat coûtent 16 F.

1) Julie rentre pour acheter 250 g de chocolat. Combien va-t-elle payer 7

100 g + 100 g = 200 g = 32 F (16 F + 16 F)

200 g + 50 g = 250 g = 82 F (32 F + 50 F)

Julie devra payer 82 F pour 100 g de chocolat

2) Hervé demande 325 g de chocolat. Combien va-t-il payer ?

200 g + 100 g = 300 g = 48 F (32 F + 16 F)

200 g + 25 g = 225 g = 73 F (48 F + 25 F)

il doit payer 73 F pour 325 g de chocolat

3) Sophie demande 430 g de chocolat. Combien va-t-elle payer ?

200 g + 200 g = 400 g = 64 F (32 F + 32 F)

400 g + 30 g = 430 g = 94 F (30 F + 64 F)

Sophie devra payer 94 F de ch pour 100 g de chocolat.

4) Bernard a payé 24 F pour les chocolats qu'il a achetés. Quelle quantité de chocolat a-t-il achetée ?

ANNEXE 2

Prénom : Mariem

Dans la confiserie, on peut acheter des chocolats au détail.
100 g de chocolat coûtent 16 F.

1) Julie rentre pour acheter 250 g de chocolat. Combien va-t-elle payer 7

$100 \times 2 = 200 g$ $\quad$ $100 \div 2 = 50 g$

$16 \times 2 = 32$ $\quad$ $16 \div 2 = 8$ $\quad$ $200 + 50 = 250 g$

$32 + 8 = 40$

Elle paye 40F

2) Hervé demande 325 g de chocolat. Combien va-t-il payer ?

$100 \times 3 = 300 g$ $\quad$ $100 - 75 = 25$

$16 \times 3 = 48$ $\quad$ $16 - 75 = 31$ $\quad$ $300 + 25 = 325 g$

il paye 31F

3) Sophie demande 430 g de chocolat. Combien va-t-elle payer ?

$100 \times 4 = 400 gr$ $\quad$ $100 - 70 = 30$

$16 \times 4 = 64$ $\quad$ $16 - 70 = 46$ $\quad$ $400 + 30 = 430 g$

$46 + 64 = 110$

elle paye 110 F

4) Bernard a payé 24 F pour les chocolats qu'il a achetés. Quelle quantité de chocolat a-t-il achetée ?

$$\begin{array}{r} 16 \\ + \boxed{08} \\ \hline 24 \end{array}$$

$16 + 8 = 24 F$

$100 + 50 = 150 g$

il a acheté 150g

ANNEXE 3

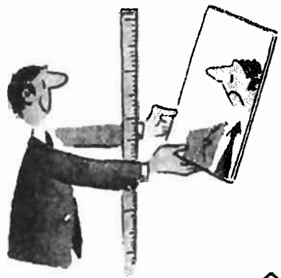
Extrait de Math en Flèche - CM1 - Collection Diagonale - NATHAN

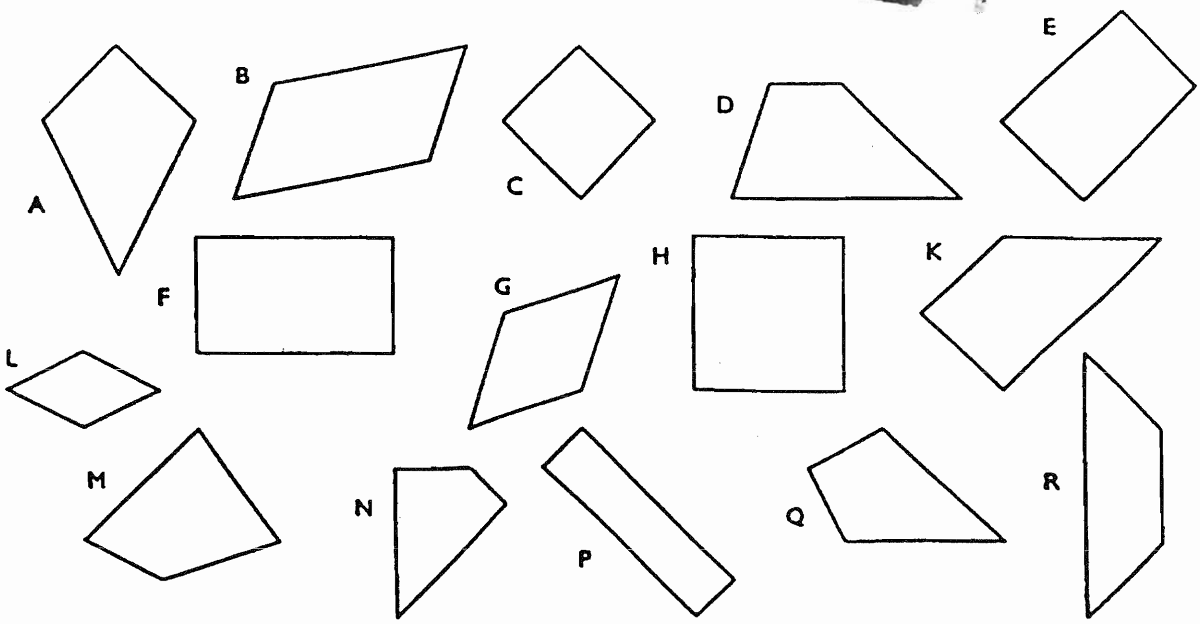
1 Activité

Qui suis-je ?

a • Je n'ai que 2 côtés opposés parallèles ;
• je possède 1 axe de symétrie.

b • J'ai au moins 2 angles droits ;
• je n'ai que 2 axes de symétrie.





ACADEMIE DE NANCY

PREMIER VOLET

(voir **DIJON**)

DEUXIÈME VOLET

La situation décrite en annexe 5 est proposée à 24 élèves de CP. Elle consiste en une suite de jeux de cible répondant à des règles différentes. Pour chaque règle, les élèves peuvent effectuer plusieurs parties. Les éléments matériels du jeu sont constitués d'une cible dessinée au sol ou sur un mur et de balles en caoutchouc. Les joueurs sont les élèves de la classe.

Dans cette classe de CP, les élèves savent pour la plupart :
- énumérer les nombres entiers jusqu'à 50 environ
- additionner des petits nombres
- comparer deux nombres et justifier leur résultat en calculant l'écart.

1 : Citer trois variables didactiques dont un changement de valeur est susceptible d'entraîner un changement de procédure des élèves dans ce jeu. On justifiera la réponse.

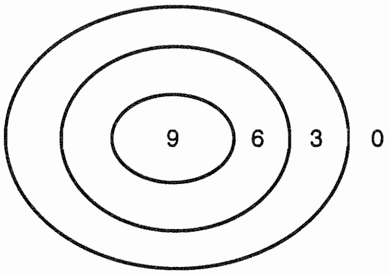
2 : On s'intéresse dans cette question à la situation relative à la $1^{ère}$ règle du jeu.
En quoi consiste le travail des élèves ?
S'agit-il d'un contrôle d'acquis ou d'un apprentissage ?

3 : On s'intéresse dans cette question à la situation relative à la $2^{ème}$ règle du jeu.
a) Quel est le but de cette séance ?
b) Comment procéderait un élève de CE1 pour résoudre ce problème ?
c) Décrire deux procédures de résolution , l'une basée sur la représentation, l'autre sur le calcul, que pourraient utiliser les élèves de CP.

4 : On s'intéresse dans cette question à la situation relative à la $3^{ème}$ règle du jeu.
a) Quelle est l'opération mise en jeu dans cette situation-problème ?
b) Quelle nouvelle règle du jeu peut-on introduire pour que les élèves travaillent sur un autre registre de nombres ?

ANNEXE

JEU DE CIBLE



1ère règle du jeu

le jeu est individuel. Chaque joueur lance la balle 3 fois. Il marque à chaque lancer le nombre de points indiqué par la zone de la cible que la balle a touchée. Le gain d'un joueur est le total des points marqués aux trois lancers. Le gagnant est celui qui a gagné le plus de points.

Consigne :

1 - jouer
2 - ordonner les 24 joueurs du gagnant au perdant.

2ème règle du jeu

les joueurs sont groupés par équipes de 4. Chaquejoueur lance la balle trois fois. Le score d'une équipe est constitué de 12 nombres les 3 scores de chacun des 4 joueurs. L'équipe gagnante est celle qui totalise le plus de points.

Consigne :

1 - jouer
2 - ordonner les équipes, de la gagnante à la perdante.

scores réalisés par 3 équipes sur les 6 :

Adrien	6	6	6
Pierre	9	3	6
solène	6	0	9
Nicolas	9	3	0

Laura	6	9	0
Fanny	3	6	9
Marine	3	0	3
Hélène	9	9	3

Claire	9	9	6
Anthony	6	6	9
Alexandre	0	0	0
Julien	3	3	6

3ème règle du jeu

Il s'agit de marquer 18 points ou de s'en approcher le mieux possible. Les joueurs sont en équipes de 4. Chaque joueur lance la balle une fois.

ACADEMIE D'ORLEANS

PREMIER VOLET

Première Partie (8 points)

Les parties **A**. **B** *et* **C** *sont indépendantes.*

Toutes les mesures de longueurs, d'aires et de volumes sont exprimées respectivement en cm, cm^2 et cm^3.

A. Soit x un nombre réel positif vérifiant : $0 \leq x \leq 3$.

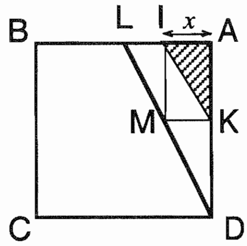
On considère un carré ABCD dont le côté mesure 8 cm.

Soit I le point du côté [AB] tel que AI = x.

Soit L le milieu du segment [BA].

M est le point du segment [LD] qui admet le point I comme projection orthogonale sur le segment [BA] et le point K comme projection orthogonale sur le segment [AD], comme le montre le schéma ci-contre.

On se propose d'étudier l'aire du triangle AKI.



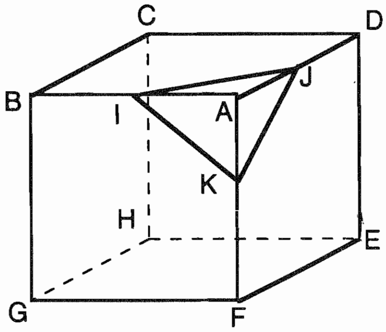
1. Démontrer que AK = 8 - 2x
2. En déduire l'aire $\mathcal{A}(x)$ du triangle AKI en fonction de x et démontrer que:
$$\mathcal{A}(x) = 4 - (x - 2)^2.$$
3. Quelle est la plus grande valeur de cette aire ? Justifier la réponse.
4. Calculer les aires, $\mathcal{A}(0)$ et, $\mathcal{A}(3)$ du triangle AKI associées aux valeurs extrêmes correspondant à $x = 0$ et à $x = 3$.
L'énoncé suivant est-il vrai ou faux : « Si $0 \leq x \leq 3$) , alors $\mathcal{A}(0) \leq$ aire AKI $\leq \mathcal{A}(3)$ » ?
Justifier la réponse.

B. On considère le cube ABCDEFGH de 8 cm d'arête. Les points I, J et K désignent respectivement un point de chacune des arêtes [BA], [AD] et [AF].

On découpe le cube ABCDEFGH selon le plan IJK. puis on détache le tétraèdre AIJK du cube.

On se propose d'étudier le volume du tétraèdre AIJK.

On pose AI = AJ = AK = x avec $0 \leq x \leq 4$.

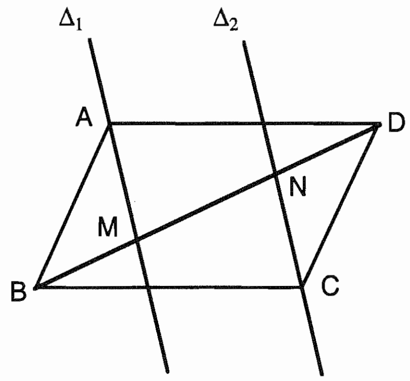


1. Calculer le volume $\mathcal{V}(x)$ du tétraèdre AIJK en fonction de x.
On précisera la base et la hauteur correspondantes de ce tétraèdre permettant d'appliquer la formule ci-dessous.

<u>Note</u> *on rappelle que le volume d'une pyramide ayant pour aire de base B et pour hauteur h est :*
$\frac{1}{3}Bh$

2. Sachant que x est compris entre 0 et 4, donner la plus grande valeur que peut prendre $\mathcal{V}(x)$. Justifier la réponse.

C. Soit ABCD un parallélogramme de centre 0 et Δ_1 et Δ_2 deux droites parallèles qui passent respectivement par A et C. Les droites Δ_1 et Δ_2 coupent respectivement la droite (BD) en M et N.



1. Préciser la nature du quadrilatère AMCN. Justifier la réponse.

2. Prouver qu'il existe une position des droites Δ_1 et Δ_2 , pour laquelle AMCN est un rectangle.
Donner, dans ce cas, le programme de construction du rectangle AMCN.
Le construire dans deux cas :
1^er^ cas : AC < BD   2^ème^ cas : AC > BD

3. Le quadrilatère AMCN peut-il être un losange ? Pourquoi ? Modifier les données de l'énoncé pour que AMCN soit un losange.

<u>Deuxième Partie</u> (4 points)

Analyse de productions d'élèves

On donne le problème suivant à une classe :

« Tu achètes un CD. Le prix est écrit sur l'étiquette : 13 euros.
Cherche le prix du CD en francs.
On considère qu'un euro équivaut à six francs. »

On pourra utiliser les **annexes 1** *et* **2.** *On y trouvera les productions de trois élèves et un extrait des Instructions Officielles.*

1. Démarche de l'élève A (Annexe 1)

a) Quelle stratégie utilise-t-il pour commencer la résolution du problème ?

b) Pourquoi dessine-t-il les treize euros ?

c) Quel savoir mathématique utilise-t-il pour calculer ?

2. Démarche de l'élève B (Annexe 1)

a) Préciser les savoir-faire mathématiques observables dans la procédure de l'élève.

b) Comparer la démarche de l'élève B à celle de l'élève A.

3. Démarche de l'élève C (Annexe 1)

a) Quelle est l'idée de départ de l'élève C ?

b) Expliciter sa stratégie de calcul en précisant les savoir-faire utilisés.

4. En considérant les procédures des élèves, déterminer les compétences mises en œuvre dans la résolution de ce problème. Préciser en particulier les savoir-faire mathématiques observés.

5. En utilisant les réponses à la question précédente, déterminer le niveau de classe (cycle et année dans le cycle).

Justifier la réponse en citant une compétence absente dans les productions des élèves.

DEUXIEME VOLET

Cette partie consiste à analyser une séquence sur l'étude de quelques quadrilatères particuliers proposée par un manuel de la dernière année du cycle 3 (Maths CM2, Collection Chapuis-Nathan) et le livre du maître correspondant.

Les candidats porteront le plus grand soin à justifier les réponses données.
Le livre du maître prévoit une première étape qu'il décrit de la manière suivante.

Étape 1

Par équipes. Cartes d'identité des quadrilatères. Chaque élève dispose de la première partie de la fiche photocopiée (voir **annexe 3**).
Il s'agit de dresser la carte d'identité de chaque quadrilatère après avoir tracé ses diagonales. Les élèves doivent savoir qu'ils auront à prouver ce qu'ils avancent, notamment à l'aide des instruments de mesures et de tracé, de la superposition, du découpage, du pliage, etc.
Synthèse. Présentation. Confrontation.
Cette communication des fiches d'identité sera l'occasion d'expliciter oralement les justifications et donc d'utiliser un vocabulaire et une syntaxe adaptés.

1. **a)** Préciser les consignes à donner aux élèves pour qu'ils puissent réaliser cette tâche de rédaction des cartes d'identité en suivant les intentions manifestées dans l'*étape 1* du livre du maître.

b) Rédiger les cartes d'identité (voir annexe 3) du carré et du losange auxquelles la classe doit aboutir au terme de l'*étape 1.*

2. **a)** Quels sont les éléments de vocabulaire minimaux qui paraissent nécessaires pour effectuer le travail demandé lors de *l'étape 1 ?*
b) Quelles procédures les élèves peuvent-ils mettre en œuvre pour vérifier les propriétés décrites dans la carte d'identité du carré ? Préciser, dans chaque cas. les instruments utilisés.
*N. B. : On pourra. pour la question 2, se reporter à l'**annexe 4.***

A l'*étape 1* étudiée précédemment succèdent les deux étapes suivantes.

Etape 2

Constructions. Par équipes.

Il s'agit de choisir parmi les propriétés d'une figure celles qui vont permettre sa construction.
Selon les propriétés choisies, les élèves aboutiront à différentes techniques de construction.

Plusieurs problèmes géométriques sont posés aux équipes.

- Comment construire un carré de 4 cm de côté ?
- Comment construire un rectangle de 6 cm de longueur sur 4 cm de largeur ?
- Comment construire un losange de 4 cm.de côté? On attirera l'attention sur le rapport entre la mesure du côté et celle de la diagonale. (...)
- Comment construire un parallélogramme quelconque?

Étape 3

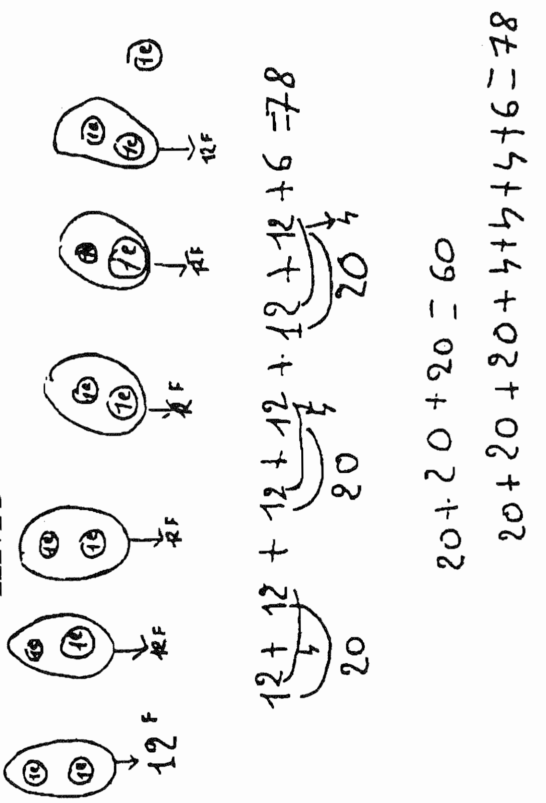
Entraînement et vérification de la compréhension individuelle.

3. On considère ici le problème de construction d'un losange de côté 4 cm proposé aux élèves lors de *l'étape 2*. Les auteurs du livre du maître écrivent à ce propos : « selon les propriétés choisies, les élèves aboutiront à différentes techniques de construction ».
Donner deux modes de construction différents, utilisant des instruments classiques de tracé, et permettant aux élèves d'aboutir à la figure demandée. On précisera, pour chaque mode de construction, les propriétés du losange sur lesquelles elle s'appuie.
*N.B. : On pourra s'appuyer sur l'**annexe** 5.*

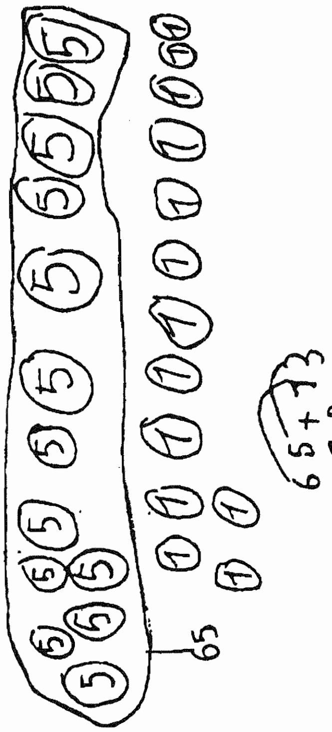
4. Un professeur d'école envisage de proposer l'exercice suivant au titre de l'*étape 3* :
Exercice: Peut-on construire un losanze dont une diagonale mesure 12 cm et le côté 5 cm ?
Répondre à la question posée en justifiant succinctement la réponse.
Quelle analyse peut-on faire de cet exercice :
a) du point de vue de sa liaison avec les travaux précédents
b) en fonction des programmes du cycle 3 ?

ANNEXE 1

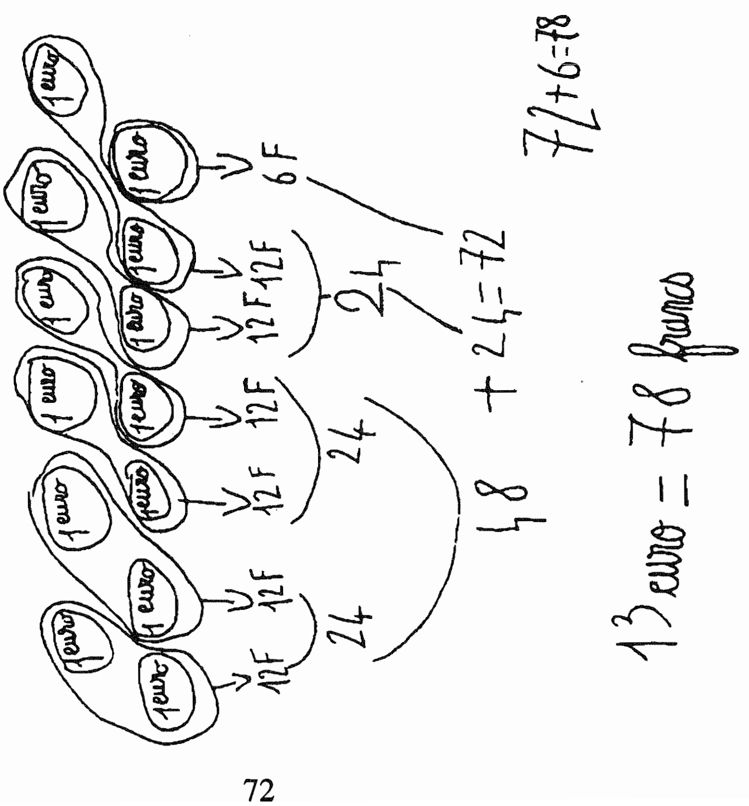
ELEVE B



ELEVE C



ELEVE A



ANNEXE 2

Cycle 2

Résolution de problèmes

Il est important que, dès le cycle des apprentissages fondamentaux, l'élève soit confronté à de véritables problèmes de recherche (qu'il n'a donc pas encore appris à résoudre) et pour lesquels il peut mettre en œuvre son esprit créatif et son imagination pour l'élaboration de solutions originales.
A l'issue de ce cycle, il doit donc pouvoir :
- ■ analyser des problèmes de recherche simple ;
- ■ choisir les données nécessaires à leur résolution ;
- ■ mobiliser les connaissances déjà acquises
- ■ exposer clairement des résultats

Connaissance des nombres

Le domaine des nombres maîtrisés s'étend jusqu'à 1000, mais des nombres plus grands peuvent être rencontrés

Ce domaine numérique est structuré d'un triple point de vue ; l'enfant doit pouvoir :
■ du point de vue des systèmes de désignation écrite et parlée :

- être capable de coder une quantité par la mise en œuvre de procédures de groupements ou d'échanges par dizaines et centaines,
- comprendre la signification des différents chiffres de l'écriture d'un nombre ; par exemple, être capable de faire la différence entre le chiffre des dizaines et le nombre des dizaines,
- maîtriser les suites écrites et orales de 1 en 1 et de 10 en 10… ,

■ du point de vue de l'ordre :
- connaître la suite des nombres ;
- ranger des nombres en ordre croissant ou décroissant :
- intercaler un nombre entre deux autres ;
- utiliser des nombres pour repérer des positions sur une ligne graduée ;

■ du point de vue arithmétique :
- connaître quelques doubles et moitiés ;
- savoir utiliser les relations entre nombres comme 5, 10, 25, 50, 100…

Calcul

L'élève doit :

■ dans le domaine du calcul réfléchi, à partir de résultats mémorisés, savoir élaborer (mentalement ou avec l'aide de l'écrit) le résultat de certains calculs additifs, soustractifs et multiplicatifs, sans recourir nécessairement aux techniques opératoires usuelles ; il aura été particulièrement exercé à la pratique du calcul mental (il connaîtra notamment les décompositions additives des nombres jusqu'à 20 et saura les utiliser pour effectuer mentalement des additions) ;

■ maîtriser la technique opératoire de l'addition (seule technique dont la maîtrise est exigée à la fin de ce cycle)

■ réaliser des encadrements (d'entiers ou de décimaux) et évaluer un ordre de grandeur :

■ intercaler des entiers ou des décimaux entre deux nombres donnés.

Cycle 3

Résolution de problèmes

Dans des situations variées, l'élève pourra :
- ■ reconnaître, trier, organiser et traiter les données utiles à la résolution d'un problème :
- ■ formuler et communiquer sa démarche et ses résultats ;
- ■ argumenter à propos de la validité d'une solution
- ■ élaborer une démarche originale dans un véritable problème de recherche, c'est à dire un problème pour lequel on ne dispose d'aucune solution déjà éprouvée ;
- ■ élaborer un questionnement à partir d'un ensemble de données.

Connaissance des nombres

L'élève saura nommer, écrire des nombres entiers ou décimaux, passer d'une écriture à une autre, en particulier :

- ■ associer écriture littérale et écriture chiffrée d'un entier, quelle qu'en soit sa taille ;
- ■ connaître la signification de chacun des chiffres composant un nombre entier et décomposer ce nombre suivant les puissances de dix ;
- ■ employer quelques écritures fractionnaires usuelles (demi, tiers, quart, fractions décimales) ;
- ■ connaître la signification de chacun des chiffres de l'écriture à virgule d'un nombre décimal ;
- ■ passer, pour un nombre décimal, d'une écriture à virgule à une écriture décimale (et réciproquement).

L'enfant saura comparer des nombres, notamment :
- ■ comparer deux entiers naturels quelconques et utiliser correctement le signes de comparaison ; ranger des nombres entiers ;
- ■ comparer, ranger des nombres décimaux ;

Calcul

L'élève sera apte à calculer sur les nombres ; pour cela, il devra :

■ utiliser à bon escient le calcul réfléchi (mental ou écrit) ; en particulier, l'élève aura été entraîné à une pratique régulière du calcul mental, dont il maîtrisera les méthodes usuelles (additionner deux nombres mentalement, réaliser certaines multiplications "de tête", savoir multiplier ou diviser un nombre entier ou décimal par 10, par 100, par 1000, multiplier un nombre entier par 0,1, par 0,01 et connaître les critères de divisibilité par 2 ou 5) ;
■ maîtriser les techniques opératoires usuelles :
- addition et soustraction des entiers ou des décimaux,
- multiplication des entiers ou d'un décimal par un entier,
- division euclidienne (avec quotient et reste) de deux entiers, division d'un décimal par un entier (le calcul du produit ou du quotient de deux décimaux n'est pas un objectif du cycle) ;

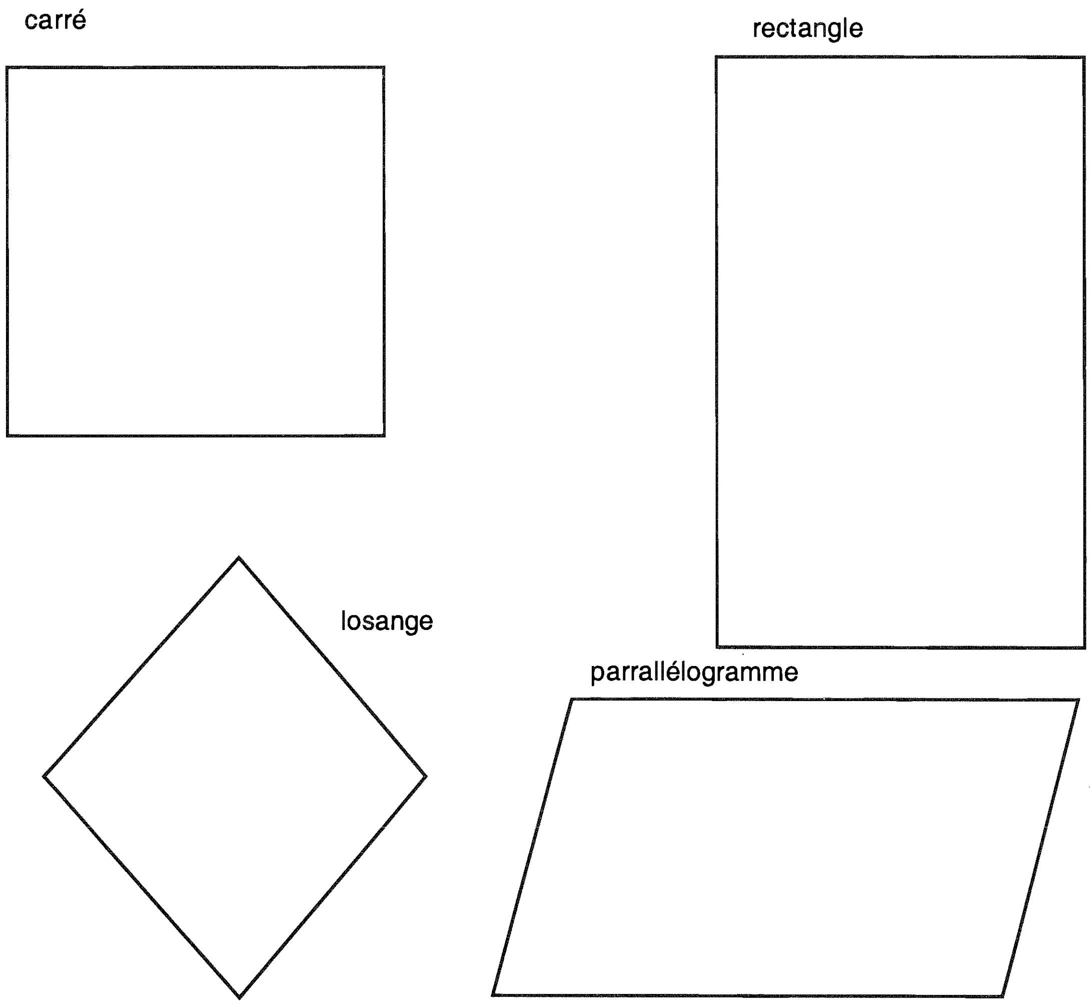
■ évaluer un ordre de grandeur ;
■ utiliser la calculette
Il saura reconnaître les problèmes qui relèvent des opérations évoquées précédemment.

Il sera capable de :
- ■ lire, construire et interpréter quelques schémas simples, tableaux, diagrammes, graphiques ;
- ■ reconnaître une situation de proportionnalité et la traiter par les moyens de son choix (utilisation de graphiques, de tableaux de nombres).

ANNEXE 3

Extrait du livre du maîte de MATHS CM2, collection Chapuis Nathan

première partie



deuxième partie

Nom	carré
Famille	quadrilatère
Côtés	
Angles	
Diagonales	

Nom	rectangle
Famille	quadrilatère
Côtés	
Angles	
Diagonales	

Nom	losange
Famille	quadrilatère
Côtés	
Angles	
Diagonales	

Nom	parallélogramme
Famille	quadrilatère
Côtés	
Angles	
Diagonales	

ANNEXE 4

Extrait des « Compléments aux progrmmes et instructions officielles »

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

La géométrie présente une grande importance pour toute l'activité mathématique : c'est elle qui permet de visualiser les concepts fondamentaux (ensembles de nombres, continuité, limite (...); elle est inséparable du nombre et de la mesure. Construire l'espace représentatif est indispensable pour que l'activité mathématique puisse s'exercer.

Les activités géométriques (constructions, tracés, ...) offrent la possibilité de cultiver, chez l'élève, le goût du travail bien fait, car la précision d'une construction dépend du soin apporté à sa réalisation. La conservation, par l'élève, des travaux qu'il a exécutés est, de même, une bonne incitation à une recherche de qualité et une motivation pour procéder à des constructions plus complexes et plus personnelles (...).

2 - LES ACTIVITÉS A CONDUIRE AVEC CES OBJETS

Les activités géométriques consistent à reproduire, à décrire, à présenter, à construire (...).

Décrire

On pourra effectuer des classements et dresser une liste des propriétés de l'objet, en utilisant un langage de plus en plus précis.

Il s'agit donc de décrire pour :
- identifier : l'élève doit être capable d'expliciter les critères discriminants, d'énoncer les propriétés communes aux éléments d'une collection et de préciser pourquoi tel objet n'appartient pas à la collection (intrus) ;
- reproduire : l'élève doit être capable de formuler la demande en matériel nécessaire à la reproduction et de la justifier ;
- représenter : l'élève doit être capable de classer les remarques de type géométrique à propos d'un objet, d'une part celles qui sont mises en évidence dans une représentation donnée, d'autre part celles qui ne le sont pas (...).

Construire

La construction est l'aboutissement d'un processus qui s'appuie sur la représentation et la description. Elle nécessite la mise en œuvre des techniques de tracés associées à un vocabulaire fonctionnel (...).

Dans le plan, on pourra utiliser des planches à clous, des fils élastiques, des baguettes ou procéder à des assemblages (tangram, puzzles). Une partie importante du travail à effectuer concerne l'usage des instruments de tracé et de mesure : règle, équerre, compas, règle graduée, papier caique, quadrillage, réseau, gabarit, rapporteur. Il peut être intéressant, à cet égard, de mettre l'élève en situation de construire un objet qui réponde à un "cahier des charges". La validation est alors immédiate, les causes d'erreurs devant être situées pour progresser (...).

La construction est, en géométrie, un bon exemple de résolution de problème.

3 - REFLEXIONS SUR LES MÉTHODES

Vocabulaire

Le vocabulaire géométrique sert à la transmission et à la compréhension des informations ; il aide aussi à la conceptualisation. Des mots précis, en nombre limité, doivent être acquis en situation fonctionnelle et parfaitement maîtrisés. L'élève doit accéder, le plus tôt possible, au vocabulaire correct et définitif, qui est celui de l'adulte. Il vaut mieux éviter tout vocabulaire provisoire (...).

Il s'agit avant tout d'acquérir un vocabulaire actif et utile.

ANNEXE 5

Extrait de MATHS CM2, collection Chapuis Nathan

Le carré

Construire un carré ABCD de 4 cm de côté

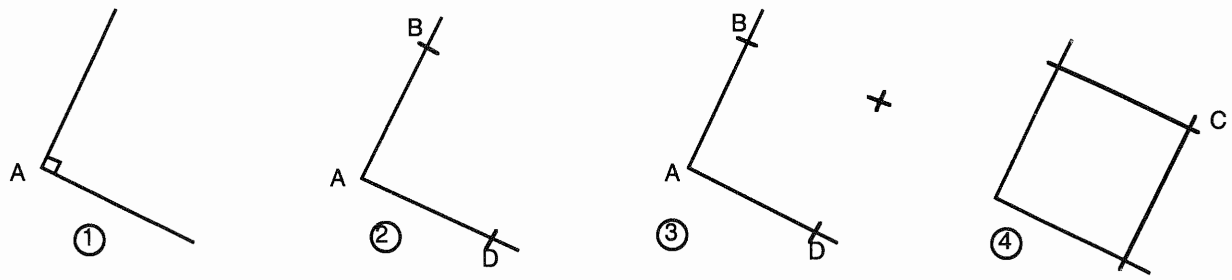
Instructions :

1. Trace un angle droit de sommet A. ①

2. Reporte sur chacun de ses côtés la même longueur (4 cm). Place les points B et D. ②

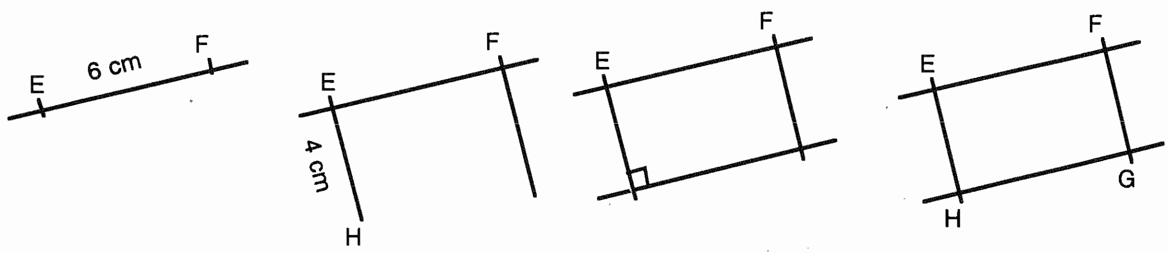
3. En gardant le même écartement du compas trace 2 arcs de cercle à partir de B puis de D. ③

4.Place le point C à l'intersection des deux arcs de cercle puis trace les 4 côtés. ④



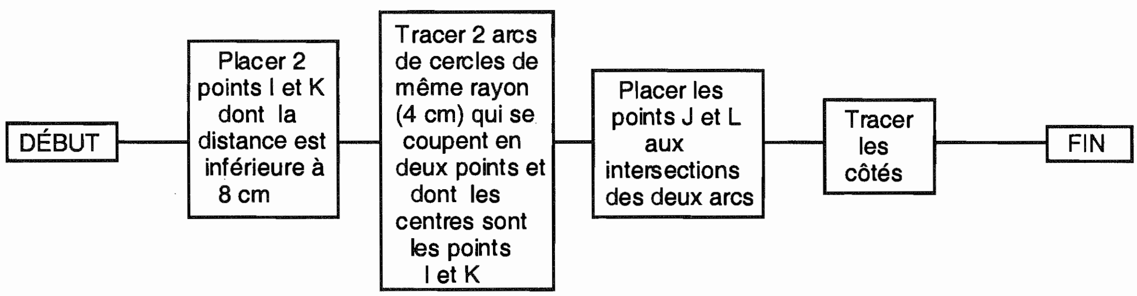
Le rectangle

Construire un rectangle EFGH dont les côtés mesurent respectivement 6 cm et 4 cm
Écris les différentes étapes de ta construction puis trace la figure en utilisant la règle graduée et l'équerre



Le losange
Construire un losange EFGH dont les côtés mesure 4 cm.

Lis cette suite d'instructions puis trace la figure.



ACADEMIE DE REIMS, STRASBOURG

PREMIER VOLET

Première Partie (8 points)

Exercice 1

On considère un champ rectangulaire

- si on diminue sa longueur de 80 m et si on augmente sa largeur de 40 m alors il devient carré.
- si on diminue sa longueur de 60 m et si on augmente sa largeur de 20 m alors son aire diminue de 400 M2.

1. Transcrire ces hypothèses sous la forme d'un système d'équations.
2. Déterminer les dimensions du champ.

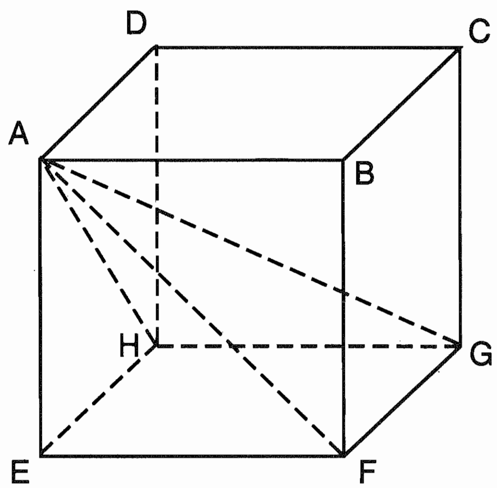
Exercice 2

Vous comptez de 7 en 7 à partir de 38 jusqu'au plus grand nombre entier strictement inférieur à 365.

1. Quel est le dernier nombre nommé ? Combien avez vous nommé de nombres (38 compris) ?
2. Par quels nombres entiers positifs pourrait-on remplacer le nombre 365 de l'énoncé de sorte que les réponses obtenues en question a) restent valides ?

Exercice 3

Dans un cube ABCDEFGH dont les arêtes mesurent 4 cm, on considère la pyramide de sommet A et de base EFGH (voir figure ci-après).



1. Quelle est la nature de chacune des faces de cette pyramide ? (on ne demande pas de justification).

2. Sur la copie (présentant un quadrillage de 4 cm de côté), dessiner un patron de cette pyramide en utilisant uniquement une règle non graduée et un compas. On laissera apparents les traits de construction.

3. Donner une valeur exacte en cm^2 Puis une valeur approchée à 0,01 cm^2 près de l'aire totale de la pyramide AEFGH.

Deuxième Partie (4 points)

L'exercice 11 figurant sur l'annexe 1 a été proposé dans le cadre des évaluations nationales de Sixième en septembre 1998. La seule consigne donnée oralement fut le temps alloué pour réaliser cet exercice.

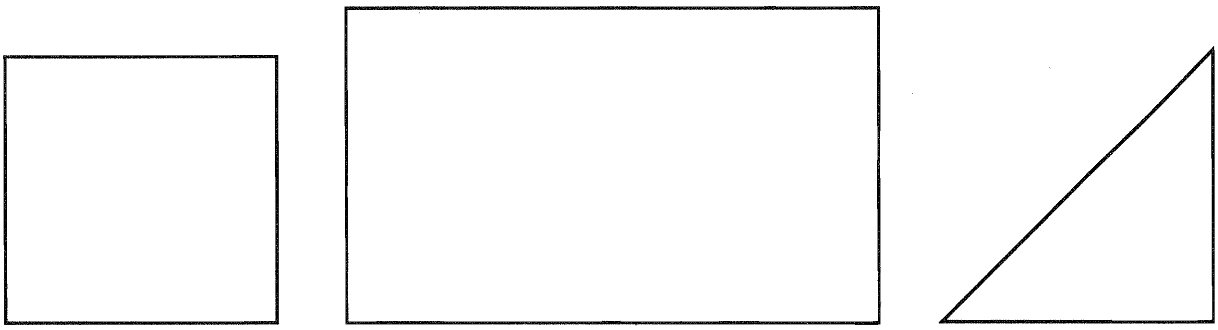
1. Identifier si possible, pour chaque production d'élève figurant sur l'annexe 2, les erreurs commises.

2. L'enseignant veut apporter une aide individuelle à chaque élève sans donner la solution. Préciser, pour chaque élève, une intervention orale possible de l'enseignant pour amener l'élève à découvrir son (ou ses) erreur(s).

DEUXIEME VOLET

(8 points)

I Les trois surfaces ci-dessous sont présentées aux élèves sous la forme de pièces cartonnées manipulables.



Le maître demande aux élèves de les comparer.

1. Citer deux grandeurs sur lesquelles les élèves peuvent faire porter leur comparaison.
2. Alain place le triangle "à l'intérieur" du rectangle et dit "le triangle est plus petit que le rectangle". Quelle grandeur a-t-il perçue ?
3. Bernard "fait rouler" les différentes pièces sur le bord de sa feuille, en marquant d'un "trait" "le début et la fin".
Après avoir mis en œuvre plusieurs fois les procédures de comparaison évoquées ci-dessus, Alain et Bernard obtiennent un rangement identique pour les trois figures. Peut-on envisager de transformer l'une des trois figures de sorte qu'Alain et Bernard obtiennent deux rangements différents ? Si oui, proposer une solution et dessiner la figure transformée.

Pour la suite de son travail, le maître propose de ne plus considérer que la grandeur mise en évidence par Alain.

II (Voir annexe 3). Le maître demande aux élèves de comparer les surfaces ① et ② en utilisant les pièces du tangram.

1. Indiquer deux procédés permettant aux élèves d'aboutir à la comparaison demandée.

2. **(Voir annexe 4).** Le maître distribue des silhouettes (le cygne ①, le chat ②, le danseur ③, le château d'eau ④) et demande de les recouvrir avec les pièces du tangram. Les enfants obtiennent les résultats représentés.
Quelles conclusions peuvent-ils tirer de leur travail, du point de vue de la comparaison des quatre silhouettes ?

III Pour consigner les résultats obtenus dans le **II**, les élèves ont réalisé le tableau suivant :

	Nombre de carrés	Nombre de grands triangles	Nombre de triangles moyens	Nombre de petits triangles	Nombre de parallélogr.
Tangram (Rectangle)	1	2	1	2	1
Chat	1	2	1	2	1
Cygne	1	2	1	2	1
Château	2	2	1	2	1
Danseur	1	2	1	1	1

1. Le seul examen de ce tableau permet-il de retrouver les conclusions obtenues après la manipulation effectuée en **II** ? Justifier la réponse.

2. Créer une nouvelle silhouette pour laquelle le seul examen du tableau ne permet pas la comparaison. Justifier la réponse.

3. Dans le cadre de l'utilisation du tangram et des silhouettes, comment le maître peut-il prolonger ce travail pour parvenir à la mesure de la grandeur considérée ? (Justifier la réponse). Exprimer alors la mesure de chacune des pièces de l'annexe 4.

IV

1. A quel cycle cette suite de séquences est-elle destinée ? Préciser à quelle période de ce cycle elle paraît la mieux adaptée.
Justifier brièvement la réponse.

2. Exprimer d'une phrase l'intention du maître dans chacune des parties **I**, **II** et **III** sur le plan des apprentissages mathématiques.

3. Dans la démarche engagée ci-dessus, quelle nouvelle étape pourrait être proposée aux enfants au cours de la leçon suivante ?

ANNEXE 1

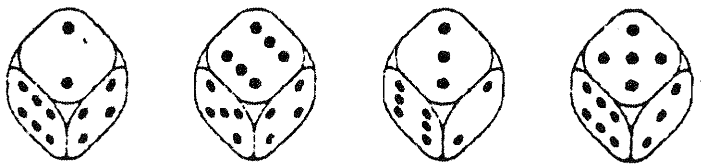
Exercice 11

Muriel et Anthony ont inventé un nouveau jeu

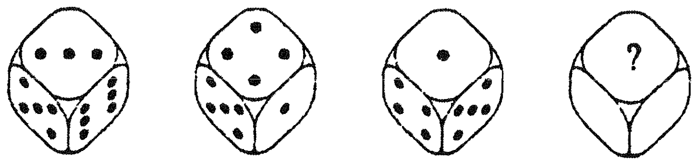
On lance quatre dés.
Pour chaque dé :
- *si le résultat est pair (2 ; 4 ou 6), on le multiplie par deux*
- *si le résultat est impair, on le garde.*

Puis on additionne les quatre nombres obtenus.
L'enfant qui aura le plus grand total aura gagné.

Muriel joue la première et obtient les résultats suivants: **2** ; **6** ; **3** et **5**.



Anthony lance à son tour les quatre dés et s'écrie aussitôt : " Nous sommes à égalité ! " et il a raison.
Muriel a vu les trois premiers résultats d'Anthony : **3** ; **4** et **1**.



Quel est le nombre indiqué par le quatrième dé d'Anthony ?
Ecris tous tes calculs.

ANNEXE 2

$3+4+1=12 \longrightarrow 16$

$4 \times 2 = 8$

$4 : 3 = 2$

Réponse : 2

1

$$\begin{array}{r} 2 \\ +6 \\ +3 \\ +5 \\ \hline 16 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ +4 \\ +1 \\ \hline 8 \end{array}$$

Réponse : impossible

2

Muriel a obtenue 16 $6+5+3+2=16$

Anthonny a 8 $4+3+1=8$

$8+8=16$ Le dernier dé d'Anthony est

Réponse : 8

3

Murièle $2\times2=4$
$2\times6=12$
3
5
$\overline{13\ 2}$

Anthonys $2\times2=4$
$2\times6=12$
$\times\ 8$
$\overline{126.}$

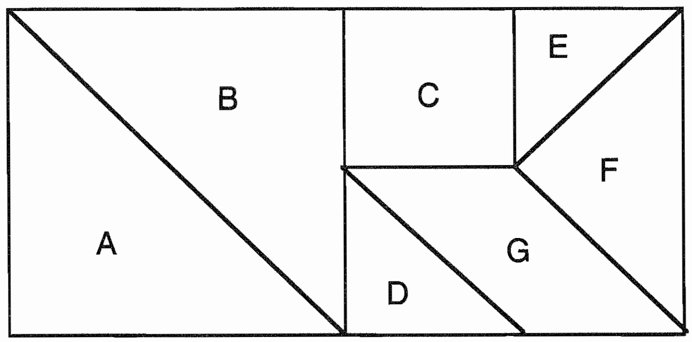
Le nombre indiqué par le quatrième dé d'Anthony est le 6.

Réponse : Muriel a le plus grand total que Anthony.

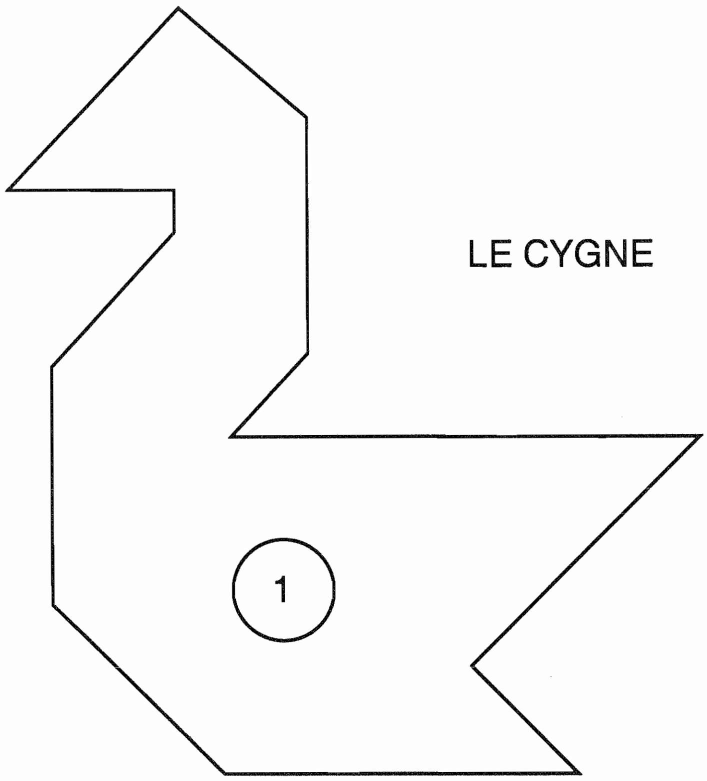
4

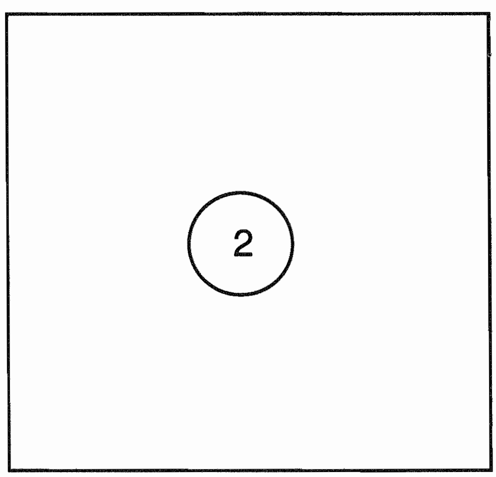
ANNEXE 3

TANGRAM

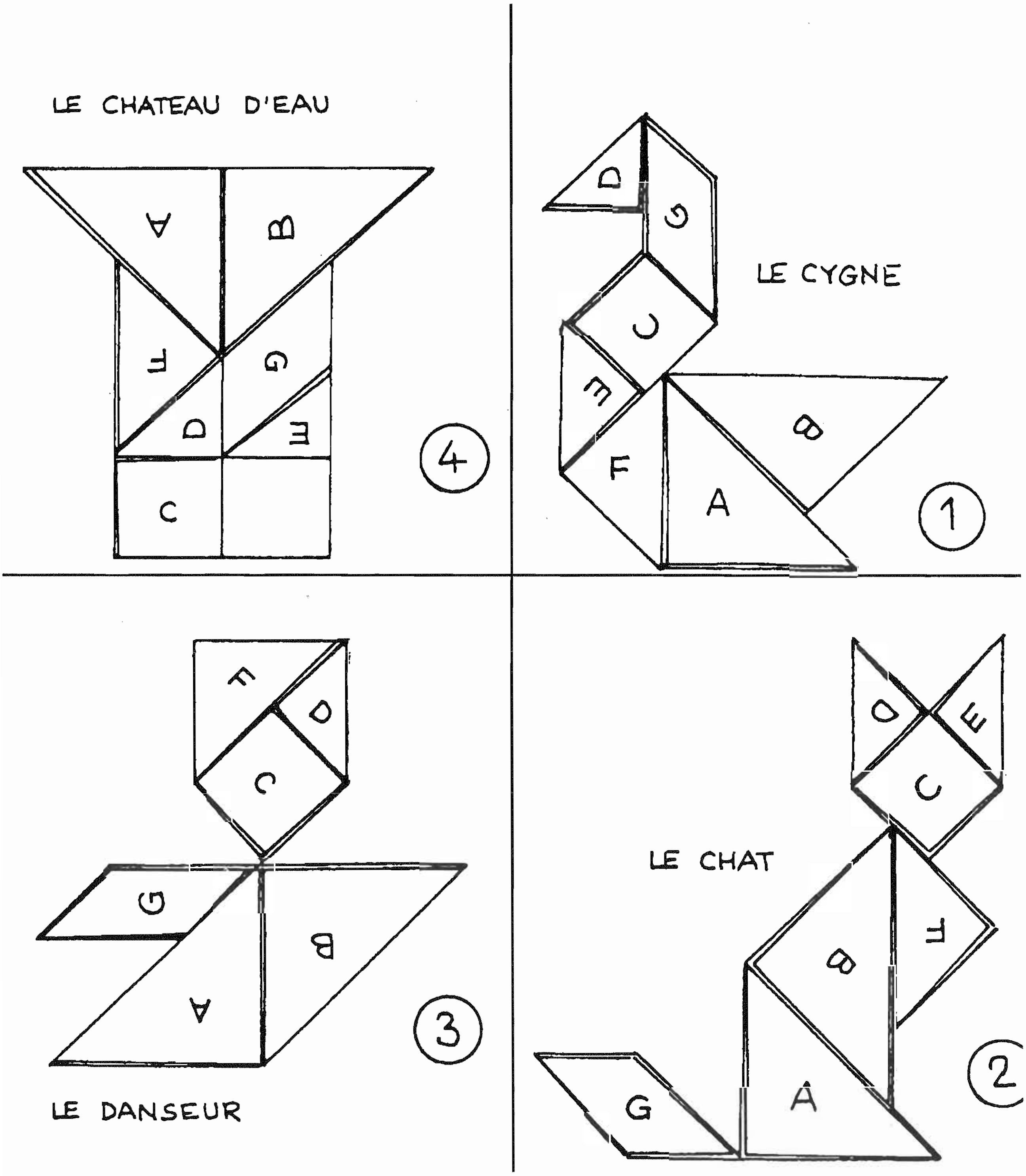


LE CYGNE





ANNEXE 4


LE CHATEAU D'EAU
A
B
F
G
D
E
C
4
LE CYGNE
D
G
C
E
F
A
B
1
LE DANSEUR
F
D
C
G
B
A
3
LE CHAT
D
E
C
B
F
A
G
2

ACADÉMIE DE RENNES

PREMIER VOLET

Première Partie (8 points)

Exercice 1

A propos de la conversion des francs en euros, des citations sont extraites du guide de L'euro du ministère de l'Economie, des Finances et de l'Industrie. Les calculs sont basés sur la valeur officielle de 1 euro pour 6,55957 francs.

" *Une règle impérative d'arrondi : elle est appliquée pour aboutir à un prix en euros qui ne comporte que deux chiffres après la virgule, les cents ou centimes. Si le troisième chiffre après la virgule est inférieur à 5, on arrondit au cent ou centime inférieur. S'il est égal ou supérieur à 5, on arrondit au cent ou centime supérieur* ". " *S'il y a addition de plusieurs prix sur un ticket de caisse ou une facture, seul le montant total sera converti en euros. Ceci évitera de fausser l'addition en accumulant les arrondis. En effet, la somme des arrondis des prix ligne par ligne, pourrait ne pas correspondre à l'arrondi de la somme globale* ".

1. A l'aide d'un ou plusieurs exemples, montrez comment vous comprenez la dernière phrase de cet extrait.

" *Pratique : Un procédé simple pour avoir une idée approximative de la valeur des francs en euros : ajoutez la moitié de la valeur en francs et divisez le total par 10* ".

2. Que pensez-vous des affirmations suivantes ?

a - Pierre : " Ce procédé ne donne le résultat exact pour aucune somme ".

b - Charles : " Pour effectuer la conversion inverse (d'euros en francs), il suffit de retirer la moitié de la valeur en euros et de multiplier par 10 ".

Exercice 2

La presqu'île d'Htel est un obstacle redouté par les navigateurs. Voici comment l'un d'entre eux décrit son parcours.

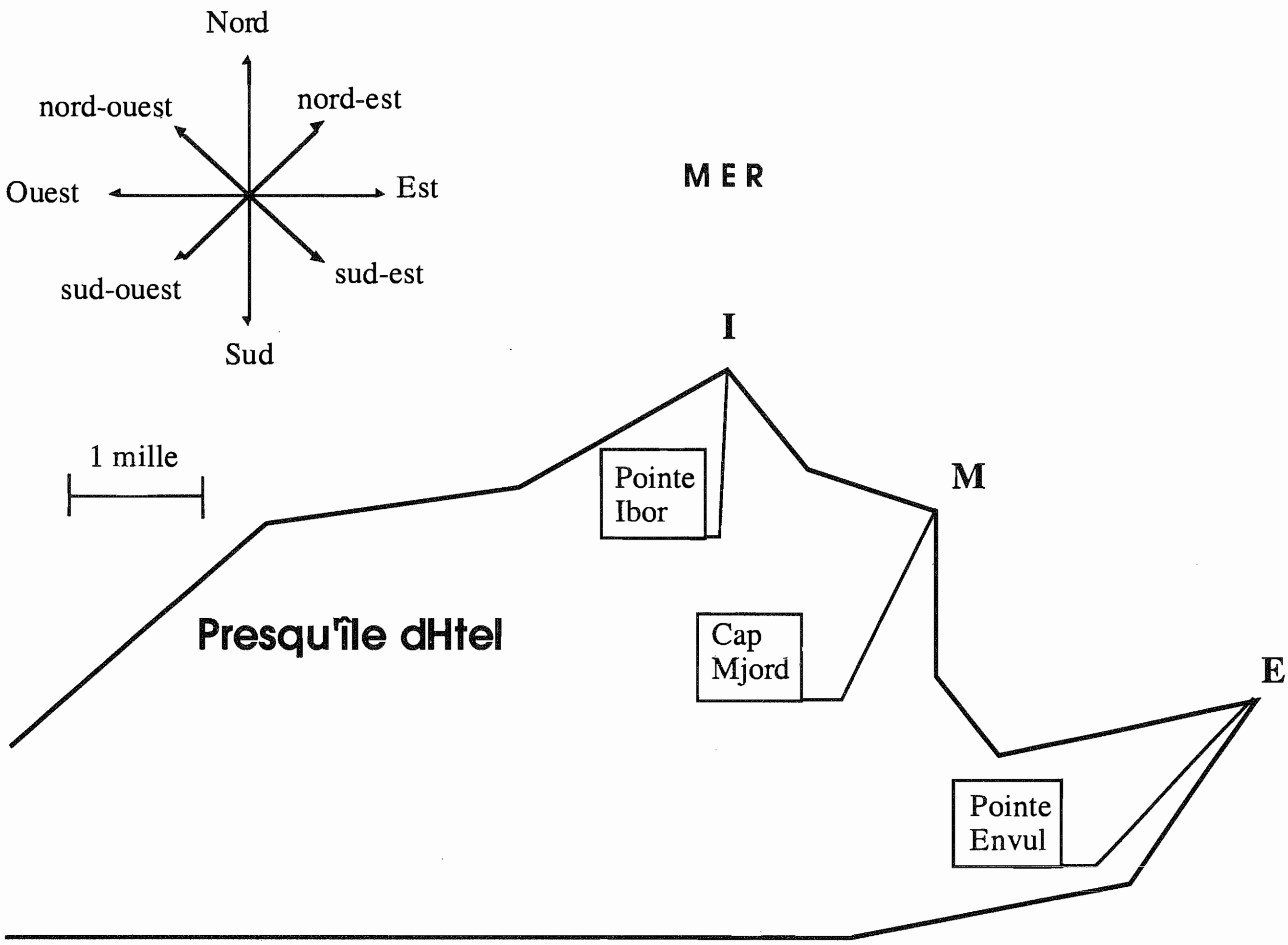
" *A 10 h du matin, j'ai aperçu la pointe Ibor (point I) exactement à l'Est (position P_1). J'ai fait route pour rester à distance constante de cette pointe, jusqu'à me trouver à égale distance de la pointe Ibor et du cap Mjord (point M) (position P_2). J'ai alors mis le cap au sud-est, jusqu'à apercevoir la pointe Envul exactement au sud-ouest (position P_3). J'ai mis alors le cap au Sud. Dans cette direction, j'ai parcouru 3 milles. Il était alors 11 h et j'ai aperçu la pointe Envul (point E) exactement au nord-ouest (position P_4)* ".

L'objet de l'exercice est de reconstituer le parcours de ce navigateur.

1. **a)** - Montrer que le triangle P_3EP_4 est rectangle isocèle.

b) - A quelle distance du point E se trouve le navigateur à 11 h (Point P_4) ?

2. A partir du point P_4, retrouver, avec les instruments de la géométrie, le parcours du navigateur (on utilisera la figure ci-dessous).



Deuxième Partie (4 points)

L'exercice suivant a été proposé à des élèves de cycle III. On trouvera en annexe 1, 2 et 3, les productions de quatre élèves.

Une agence de location de cassettes vidéo possède 3200 films.
Au cours de la première semaine, le tableau des cassettes louées et rendues est le suivant :

films	cassettes louées	cassettes rendues
policier	497	375
aventure	1388	1299
dessins animés	479	384

Indique le nombre de cassettes qui restent disponibles à la fin de la semaine

* non reproduite ici

QUESTIONS :

l. Expliciter la procédure utilisée par chacun des élèves ; indiquer dans chaque cas si le résultat est juste ou erroné.

2. **a)** Indiquer les causes possibles des erreurs dans les productions où le résultat exact n'a pas été obtenu.
b) Quelles remédiations peut-on apporter aux élèves dont le résultat n'est pas correct ?

DEUXIEME VOLET

Les questions font référence aux annexes 4 et 5.Ces documents proviennent du livre de l'élève *Collection Diagonale, Editions Nathan,* niveau CM2 ; ils regroupent les pages 102 et 103 dans un chapitre consacré aux fonctions numériques.

QUESTIONS :

1. **a)** Préciser les objectifs pédagogiques de cette séquence.
b) Indiquer la compétence de fin de cycle sollicitée.
c) Quelles sont les notions essentielles sous-jacentes à ces activités ?

2. **a)** Après lecture des annexes 4 et 5 (pages 102 et 103), donner les différents supports utilisés pour mettre les élèves dans une situation d'apprentissage sur les fonctions numériques.
b) Que peut apporter la traduction graphique de données numériques ?

3. Quels sont les intérêts et/ou les inconvénients des deux activités de la page 102 ?

4. Dans l'ensemble des exercices proposés en annexes 4 et 5, la possibilité pour lès élèves de construire leurs propres stratégies apparaît-elle ? Expliquer pourquoi.

5. Dans l'exercice 1 de la page 103, quelles sont les variables didactiques de la situation ?

6. **a)** Le fait de suivre pas à pas le livre de l'élève traduit-il une démarche pertinente ?
b) Justifier l'existence de l'exercice 3 page 103 en fin de séquence.

ANNEXE 1

Une agence de location de cassettes vidéo possède 3200 films.
Au cours de la première semaine, le tableau des cassettes louées et rendues est le suivant :

films	cassettes louées	cassettes rendues
policier	497	375
aventure	1388	1299
dessins animés	479	384

Indique le nombre de cassettes qui restent disponibles à la fin de la semaine

1388
+ 479
497
2364
− 2058
0306

375
+ 1299
384
2058

3200
− 306
2894

Il reste 2894 films disponibles à la fin de la semaine.

Une agence de location de cassettes vidéo possède 3200 films.
Au cours de la première semaine, le tableau des cassettes louées et rendues est le suivant :

films	cassettes louées	cassettes rendues
policier	497	375
aventure	1388	1299
dessins animés	479	384

Indique le nombre de cassettes qui restent disponibles à la fin de la semaine

louées
~~497~~
~~1388~~
~~+ 479~~
~~1374~~

rendues
375
+ 1299
384
1058

3200
− 1058
2142

Le nombres de cassettes qui restent disponibles à la fin de semaines est : $\boxed{2142}$ cassettes

ANNEXE 2

Une agence de location de cassettes vidéo possède 3200 films.
Au cours de la première semaine, le tableau des cassettes louées et rendues est le suivant :

films	cassettes louées	cassettes rendues
policier	497	375
aventure	1388	1299
dessins animés	479	384

Indique le nombre de cassettes qui restent disponibles à la fin de la semaine

$$\begin{array}{r} 497 \\ -\ 375 \\ \hline 122 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1388 \\ -\ 1299 \\ \hline 0089 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 479 \\ -\ 384 \\ \hline 095 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 122 \\ 89 \\ +\ 95 \\ \hline 306 \end{array}$$

Il reste 306 cassettes vidéo disponibles à la fin de la semaine.

ANNEXE 3

Elève D

solution	Opérations
Il y a eu 2364 cassettes louées	1388 + 479 + 497 2364
Il y a eu 2058 cassettes rendus	1399 + 284 + 375 2058
Il reste 306 cassettes non rendus	2364 − 2058 0306
Il y a 2894 cassettes disponibles à la fin de la semaine	3200 − 306 2894

ANNEXE 4

Fonctions numériques (1)

Avec les nombres...
Trouver trois nombres compris entre **9 et 10** **5,6 et 5,7** **0,12 et 0,13**

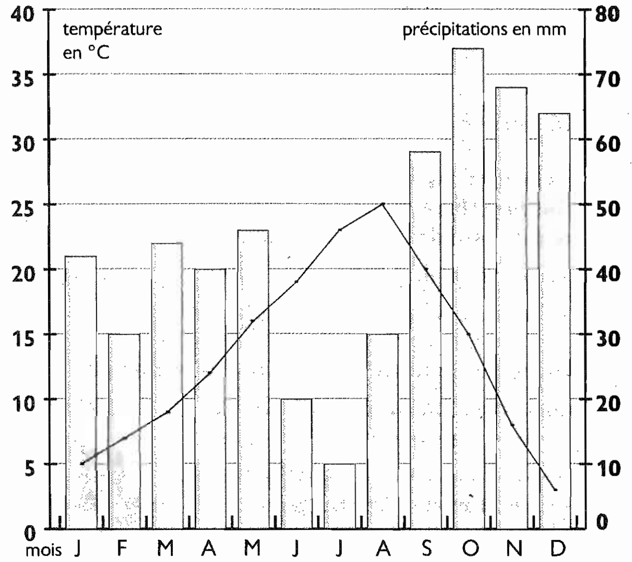
1 Activités

a Au mois d'août à Marseille, la moyenne des températures a été de 25 °C. Ce même mois, il est tombé en moyenne 30 mm d'eau par jour.

- Comment lis-tu ces données sur le graphique ?
- Complète le tableau ci-dessous en utilisant le graphique.

b Calcule l'écart de température entre la température moyenne minimale et la température moyenne maximale.

Le temps à Marseille cette année - là...



mois	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
température en °C								**25**				
précipitations en mm								**30**				

2

Dans l'Antiquité, certaines unités de longueur étaient associées à des éléments du corps humain : le *pouce,* le *pied,* la *coudée,* etc.

– À Babylone, la coudée valait 54 cm ; le doigt valait un trentième de coudée.
– Chez les Grecs, le doigt valait 1,9 cm ; le pied valait 30 cm et la coudée 48 cm.
– Chez les Romains, le doigt valait 1,8 cm ; le pied valait 29 cm et la coudée 44 cm.

En France, jusqu'à la Révolution, on utilisait les unités suivantes : le *pied du Roi* valait 32,4 cm et le *pouce*, un douzième de pied.

a Organise toutes ces données dans un tableau. Des cases restent vides. Pour en remplir certaines, tu dois faire des calculs.

b Complète le tableau :

Nombre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
doigt romain (en cm)	1,8									
pouce français (en cm)	____									

c Une longueur est comprise entre 7 et 8 doigts romains et entre 4 et 5 pouces d'avant la Révolution. Que peux-tu dire de cette longueur ?

ANNEXE 5

Exercices

1

Pour déterminer la *pointure* d'une chaussure correspondant à un pied, il suffit de mesurer la longueur du pied et de consulter un tableau de correspondance.

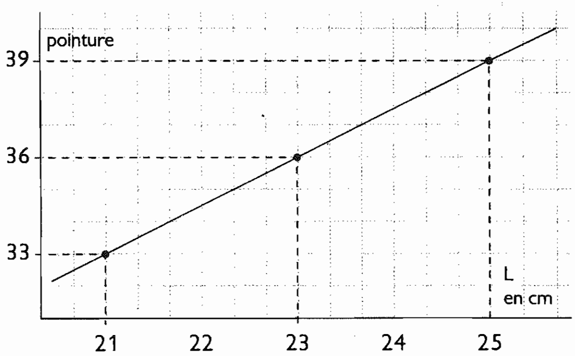
Voici une partie de ce tableau :

longueur en cm	21	23	25	27
pointure	33	36	39	42

• Reproduis le graphique ci-contre sur ton cahier en y indiquant les pointures données dans le tableau.

• À l'aide de ce graphique, détermine les longueurs L pour les pointures intermédiaires non données dans le tableau : 34, 35, 37, 38, 40 et 41.

Donne les résultats sous la forme d'une somme d'un entier et d'une fraction.



2

Un constructeur d'automobiles fournit les renseignements suivants pour un modèle de voiture.

BREAK 850 GLT

• Sur *route* pour 100 km, à la vitesse de 90 km par heure, la consommation est de 6,40 *l*.
• En *ville* pour 100 km, à faible vitesse, la consommation est de 12,40 *l*.

a Complète le tableau.

distance parcourue en km	50	100	150	200	250
consommation sur route en *l*					
consommation en ville en *l*					

b Quel serait le nombre de litres de carburant nécessaire pour parcourir 25 000 km en ville ?

• Un automobiliste a calculé qu'il avait consommé en un an une quantité d'essence correspondant à 15 000 km réalisés sur route. Calcule cette consommation.

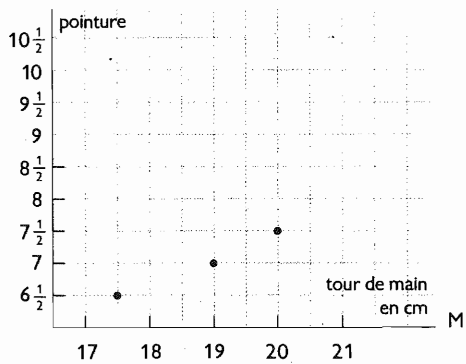
3

La pointure des gants, pour un adulte, est, en général, un nombre compris entre $6\frac{1}{2}$ et 10.

Pour connaître la pointure d'une personne, on mesure en cm le tour de sa main (M) et on consulte le tableau de correspondance :

M en cm	17,5	19	20	21,5	23	24	25,5	27,5
pointure	$6\frac{1}{2}$	7	$7\frac{1}{2}$	8	$8\frac{1}{2}$	9	$9\frac{1}{2}$	10

Reproduis et achève le graphique ci-dessous, en y indiquant toutes les pointures de $6\frac{1}{2}$ à 10 en fonction du tour de main M en cm.



ACADÉMIE DE ROUEN

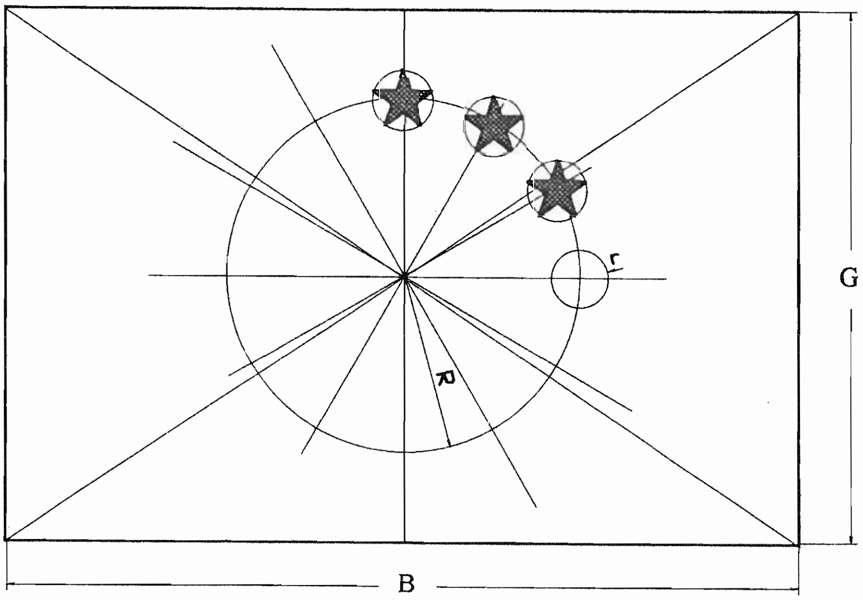
PREMIER VOLET

Première Partie (8 points)

Exercice 1 :

Description géométrique du drapeau de l'Europe : (D'après Hypercube n° 16 de février/mars 1997)

"L'emblème est constitué par un rectangle bleu dont le battant (B) a une fois et demie la longueur du guindant (G). Les douze étoiles d'or s'alignent régulièrement le long d'un cercle non apparent dont le centre est situé au point de rencontre des diagonales du rectangle. Le rayon de ce cercle (R) est égal au tiers de la hauteur du guindant. Chacune des étoiles à cinq branches est construite dans un cercle non apparent dont le rayon (r) est égal à 1/18 de la hauteur du guindant. Toutes les étoiles sont disposées verticalement, c'est-à-dire avec une branche dirigée vers le haut et deux branches s'appuyant sur une ligne non apparente, perpendiculaire à la hampe".



I°) La construction du drapeau.

1°) Calculer les dimensions G et B du drapeau quand le rayon (r) d'un petit cercle est 6 cm.

2°) On veut construire sur une feuille de format A3 (297 mm sur 420 mm) un drapeau européen de telle façon que r, R, G et B soient des nombres entiers de mm. Quelle valeur doit-on donner à chacune de ces différentes mesures pour que le drapeau obtenu soit le plus grand possible ?

II°) La construction d'une étoile.

On veut construire une étoile en partant d'un cercle de rayon r = 6 cm.
En utilisant le « film » donné en annexe 1, réaliser la construction (laisser les traits de construction apparents).

III°) L'étude du pentagone convexe régulier ABCDE obtenu à partir d'un cercle de rayon 6 cm. (voir annexe 1, figure 1)

1°) Calculer les mesures des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{ABC}$.

2°) Calculer les valeurs exactes des longueurs MA et ON.

3°) En déduire que la troncature à deux décimales de la mesure, en cm, du côté de ce pentagone régulier est 7,05.

IV°) L'étude du pentagone étoilé régulier ACEBD obtenu à partir d'un cercle de rayon 6 cm. (voir annexe 1, figure 2)

1°) Pourquoi appelle-t-on ACEBD un pentagone étoilé ?

2°) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{CAD}$.

3°) On sait que le rapport entre la diagonale du pentagone convexe régulier et son côté est égal au nombre d'or Φ.

a) Sachant que $\Phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, calculer la troncature à une décimale de la mesure, en cm, du côté AC du pentagone étoilé.

b) Le nombre d'or occupe une place importante dans l'histoire mathématique. Donner une propriété de ce nombre.

Exercice 2 :

Dans la division euclidienne d'un nombre non nul par 7, on trouve un quotient égal au double du reste.
Trouver toutes les valeurs possibles du dividende, du quotient et du reste de cette division.

Deuxième Partie (4 points)

Dans le cadre de l'Evaluation Nationale d'entrée en sixième, il a été proposé aux élèves d'effectuer, sans calculatrice, la division euclidienne de 4 584 par 8.

Les documents en annexe 2 présentent les travaux de cinq élèves A, B, C, D et E.

1°) Précisez sur cet exemple la technique opératoire que doit connaître un élève en fin de CM2.

2°) Décrivez pour chaque élève les procédures utilisées pour effectuer la division proposée.

3°) Relevez et caractérisez les erreurs éventuelles.

4°) Quelle technique intermédiaire de la division pourriez-vous proposer pour aider les élèves B et C ?

DEUXIÈME VOLET

(8 pts)

Cette partie a pour objet l'analyse de trois documents extraits de manuels de CM2. (**annexes 3, 4 et 5**).

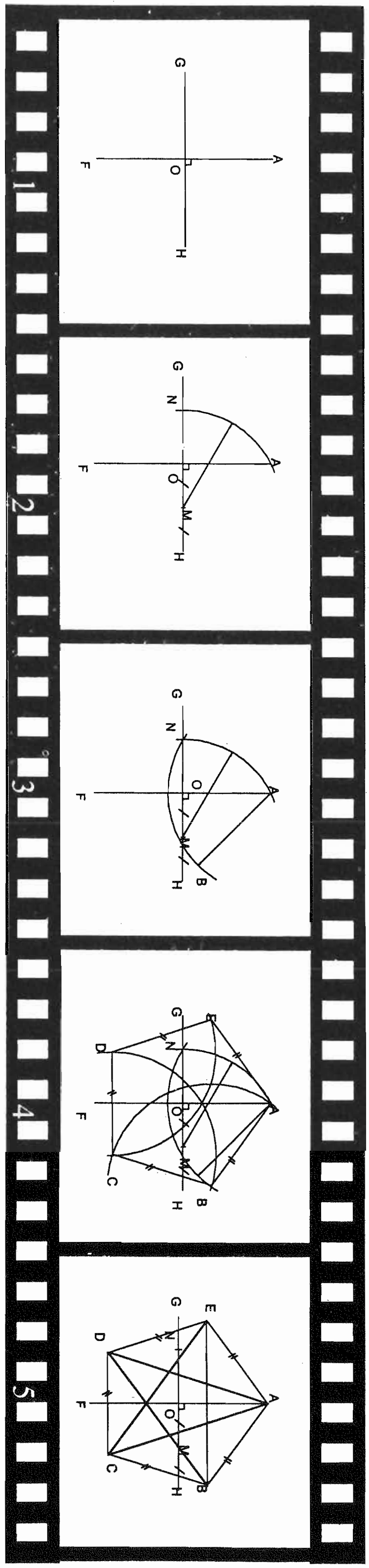
1/ Ces trois documents commencent par une première partie introduite par les mots : « découverte », « je découvre », « découvrir ».
En analysant ces premières parties, montrez en quoi l'appellation «découverte » est justifiée ou non.

2/ Résolvez la question 3 de la partie «découverte» du document 2 (annexe 4).

3/ Que proposeriez-vous comme contenu de l'aide-mémoire du document 2 (annexe 4) ?

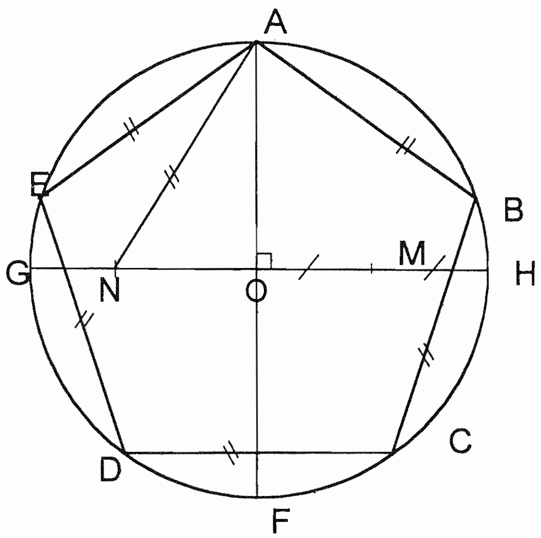
4/ Vous paraît-il possible de proposer un aide-mémoire à la suite de la partie « découvrir » du document 1 (annexe 3) ? Si oui, lequel ? Sinon, pourquoi ?

5/ Quels sont les rôles des exercices proposés dans la rubrique « s'exercer » du document 1 (annexe3) et des exercices et problème du document 2 (annexe 4) ?

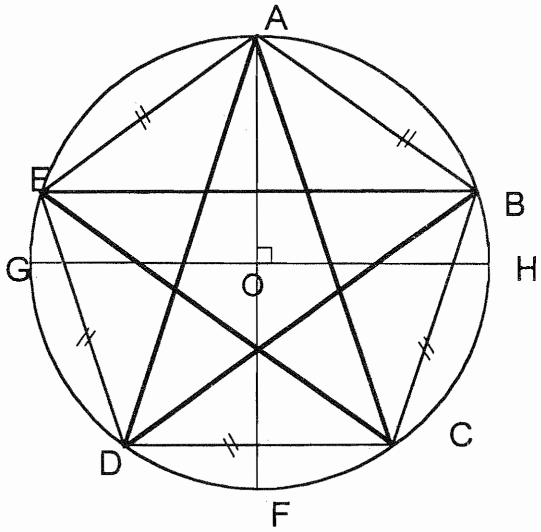


Annexe 1

Le pentagone convexe (figure 1)



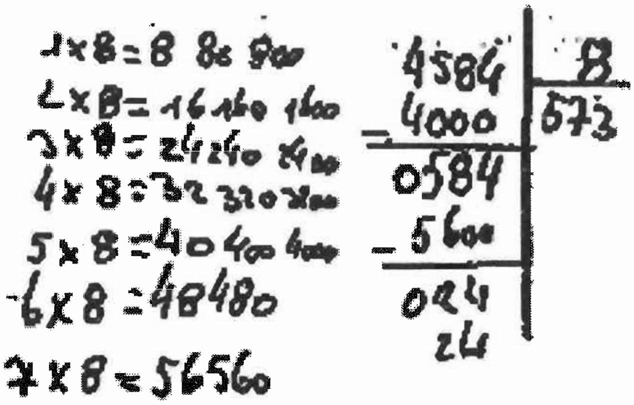
Le pentagone étoilé (figure 2)



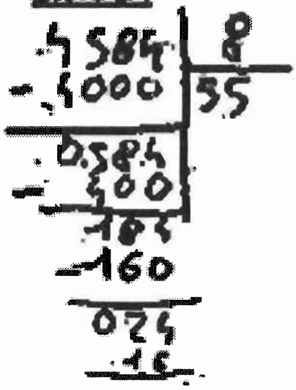
Ces deux figures ne sont pas en vraie grandeur.

Annexe 2

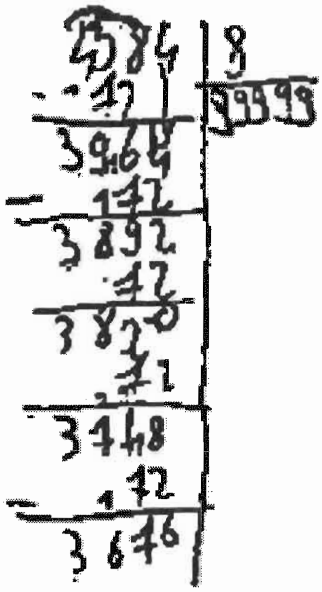
Elève A:



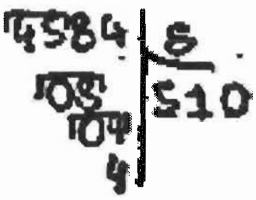
Elève B :



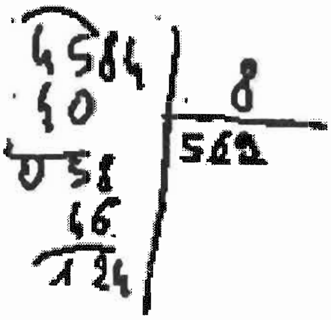
Elève C :



Elève D :



Elève E :



Annexe 3

Document 1
Maths outils CM2 Edition Magnard (1997)

COMPÉTENCE 5

CONNAISSANCE DES NOMBRES

Divisibilité par 2, 5 et 10

1 Découvrir

1 Une classe de CM2 compte 30 élèves. Le maître veut constituer des équipes composées de 2 élèves pour le tennis, de 5 élèves pour le basket et de 10 élèves pour le relais.
Indique si, pour chaque sport, tous les élèves de la classe feront partie d'une équipe.

Pour t'aider

	quotient	reste
30 — : 2 →	......	......
30 — : 5 →	......	......
30 — : 10 →	......	......

2 La maîtresse de la classe de CM1 veut, avec ses 25 élèves, procéder comme le maître du CM2.
Les élèves pourront-ils tous faire partie d'une équipe pour chaque sport ?

Pour t'aider

	quotient	reste
25 — : 2 →	......	......
25 — : 5 →	......	......
25 — : 10 →	......	......

3 Que se passerait-il pour la classe de CE2 qui compte 27 élèves ?

2 S'exercer

1 Recopie la liste et souligne les nombres divisibles par 2.
10 - 14 - 16 - 21 - 38 - 49 - 52

2 Recopie la liste et souligne les nombres divisibles par 5.
10 - 29 - 36 - 40 - 55 - 75 - 83

3 Recopie la liste et souligne les nombres divisibles par 10.
20 - 25 - 37 - 50 - 68 - 100 - 290

4 Écris les nombres suivants puis souligne d'un trait rouge ceux qui sont divisibles par 2 et d'un trait bleu ceux qui sont divisibles par 5. Que remarques-tu ?
14 ; 28 ; 37 ; 50 ; 66 ; 75 ; 110 ; 123 ; 525 ; 1 240 ; 37 919 ; 50 162.

5 Reproduis le tableau et complète-le.

	: 2	reste
nombres pairs	2	
	16	
	48	
	64	
	100	
nombres impairs	3	
	11	
	25	
	47	
	79	

Quels sont les nombres divisibles par 2 ? Quels sont les restes possibles ?

Annexe 4

21 Multiples et diviseurs d'un nombre (1)

Utiliser les notions de multiples et de diviseurs dans des problèmes. Retenir quelques critères de divisibilité, notamment pour développer des stratégies de calcul rapide ou pour vérifier qu'un résultat est possible.

Découverte

Voici comment Arthur a commencé à remplir un tableau de nombres.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16	17
18								

1. Reproduis et complète quelques lignes de ce tableau.
2. Dans quelle colonne va-t-on écrire : 36 ? 50 ? 75 ? 100 ? 175 ?
3. Dans quelle colonne va-t-on écrire : 571 ? 1 000 ? 10 000 ? 10^5 ? 3 527 ? 5 324 ?

Écris le message qui explique ta méthode pour répondre à cette question.

AIDE-MÉMOIRE N° 5 PAGE 213.

Exercices et problèmes

1 Reproduis et complète quelques lignes des tableaux suivants. Puis, pour chacun d'eux, réponds aux questions :

- Quelle est la propriété commune aux nombres de la 1re colonne ?
- Que peut-on dire des nombres de chacune des autres ? Calcule leur reste dans la division par 2 pour le tableau **a**, par 3 pour le tableau **b**, par 5 pour le tableau **c**.

a/

0	1
2	3
4	5
6	.....
.....	.....

b/

0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	.....	.....
.....	.....	.....

c/

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....

2 Place correctement les nombres suivants dans les colonnes de chacun des tableaux **a**, **b**, **c** de l'exercice n° **1** :

39 ; 67 ; 129 ; 450 ; 1 248.

Annexe 5

8 Multiples et diviseurs

Je découvre

25		16		12	
	30		40		56
33		28		61	
	9		17		75
27		10		6	
	60		64		63

Observe, puis recopie la grille de loto : tous les nombres entourés en rouge sont des multiples de 2.

16 est multiple de 2, car 16 = 2 x 8.
On peut aussi dire que 16
est divisible par 2 ou par 8.
2 et 8 sont des diviseurs du nombre 16.

a Par quels chiffres se terminent les multiples de 2 ?

Un nombre pair est un multiple de 2.

b Recherche dans la grille, puis entoure en bleu tous les multiples de 5.
Par quels chiffres se terminent tous ces nombres ?

c Recherche dans la grille, puis entoure en vert tous les multiples de 10.
Par quel chiffre se terminent ces nombres ?

Tous les multiples de 5 se terminent par 5 ou par 0.
Les multiples de 10 se terminent par 0.

d Complète :

33 = ■■ x 3 27 = ■ x 3 30 = ■■ x 3 63 = ■■ x 3

- Que peux-tu dire des nombres 33, 27, 30 et 63 ?
- Fais la somme des chiffres qui composent chacun de ces nombres.
  Que remarques-tu ?
- Entoure maintenant en noir tous les multiples de 3 de la grille de loto.

Un nombre est un multiple de 3
si la somme de ses chiffres
est elle-même un multiple de 3.

e Que peux-tu dire des nombres qui sont entourés en rouge et en bleu ?

f Que peux-tu dire des nombres entourés à la fois en rouge, en bleu, en vert et en noir ?

g Que peux-tu dire des autres nombres de la grille de loto ?

ACADEMIE DE TOULOUSE

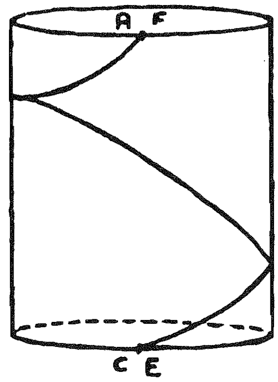
PREMIER VOLET

Première Partie (8 points)

Exercice 1 (5 points)

ABCD est un rectangle tel que AB = 24 cm, BC = 16 cm, E est le milieu de [AB], F est le milieu de [CD], G est le projeté orthogonal de E sur la droite (AF).

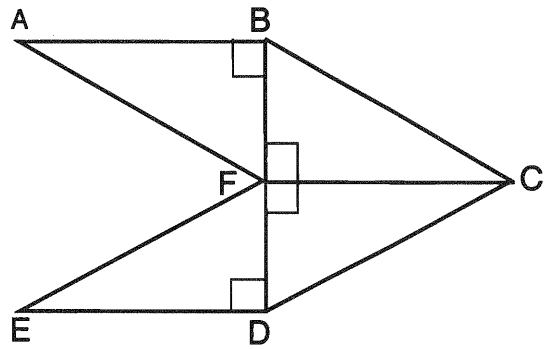
1. **a)** Démontrer que (AECF) est un parallélogramme.
b) Déterminer l'aire du parallélogramme.
c) Calculer la longueur AF.
d) En déduire la longueur EG.



2. On découpe le parallélogramme AECF et on l'enroule sur lui-même de telle sorte que A vienne sur F et E sur C. On forme ainsi la face latérale d'un cylindre de révolution (voir figure ci-contre).
a) Calculer la valeur exacte du rayon de la base, puis en donner une valeur approchée à 1 mm près par défaut.
b) Calculer la valeur exacte de son volume, puis en donner l'arrondi à 1 mm^3 près.

Exercice 2 (3 points)

On veut réaliser la figure ci contre. Les quatre triangles rectangles (ABF), (BFC), (FCD), (FDE), sont superposables. On pose AB = x et BF = y.



1. On veut que l'aire de la figure soit 96 cm^2, que $x > y$ et que x et y soient des entiers. Donner toutes les valeurs du couple (x,y).

2. Les conditions précédentes étant vérifiées, montrer qu'il existe un seul couple (x,y) tel que le périmètre du polygone (ABCDEF) soit 56 cm.
Faire la figure, sur papier blanc non quadrillé, à la règle graduée et au compas, en laissant visibles les traits de construction.

Deuxième Partie (4 points)

Analyse de travaux d'élèves

Ce document a été distribué à des élèves. On remarque que la photocopie distribuée ne respecte pas les dimensions réelles.

Les triangles A, B, C et D sont identiques. L'aire de chacun est 6 cm²

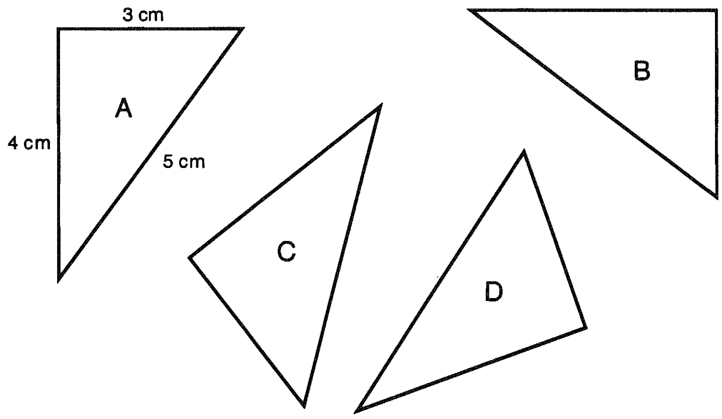


Figure 1

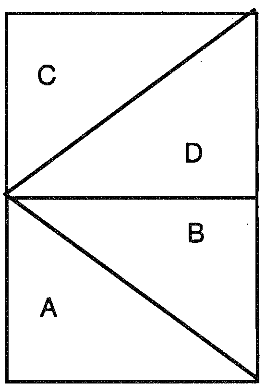
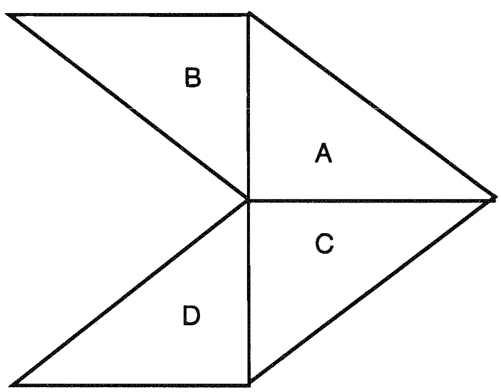


Figure 2



Ecrire les calculs permettant de trouver :

a) Le périmètre de la figure 1

b) L'aire de la figure 1

c) Le périmètre de la figure 2

d) L'aire de la figure 2

Voici les réponses de cinq élèves :

Imane	a/ (3+5+4) x 4 = 42 cm	
Dorian	a/ (3,2 + 4,8) x 2 = 16 b/ 3,2 x 4,8 = 15,36	c/ 3,2 + 4 + 4 + 3,2 + 4 + 4 = 22,4 D/ A et C on le met dans le trou entre B et D on obtiendra la même figure que la précédente, alors c'est la même aire = 15,36
Léna	b) 6 x 4 = 24	d) je ne sais pas calculer
Charlotte	b) 6x 4 = 24	d) 6x 4 = 24
Jennifer	a) (3,2 x 2) + (4,8 x 2) = 6,4 + 9,6 = 16	b) 9,6 x 6,4 = 61,44

QUESTIONS:

1. Quelle est la règle implicite utilisée par Imane ?

2. Explicitez les connaissances sur lesquelles s'appuie Dorian pour répondre aux questions a) et c), puis celles qu'elle utilise pour répondre aux questions b) et d).

3. Interpréter la non-réponse en d) de Léna.

4. Donner deux interprétations possibles pour chacune des réponses b) et d) de Charlotte.

5. Au vu des productions de Jennifer, quelles connaissances a-t-elle des notions de périmètre et d'aire ?

DEUXIEME VOLET

En annexe, trois documents tirés du livre de l'élève MATH EN FLECHE (CM I) Collection DIAGONALE Editions NATHAN.

Annexe 1 pages 94 et 95
Annexe 2 pages 98 et 99
Annexe 3 pages 100 et 101

NB : les pages 96 et 97 du livre, non données, n'ont rien à voir avec la progression étudiée.

1. ETUDE RAPIDE DE LA PROGRESSION.

1. Préciser en quelques lignes l'articulation recherchée par les auteurs entre les trois chapitres.
2. Quels sont les pré-requis nécessaires pour commencer ce travail ?

2. ANALYSE DE LA DEMARCHE PROPOSEE.

1. Annexe 1 :
1. Citer trois notions mathématiques utilisées dans cette page.
2.Quels sont les exercices de cette page qui permettent de résoudre l'exercice 3 de la page 98 (reproduite en ANNEXE 2). Justifier votre réponse.

2. Annexe 2 :
1. Quelle rupture dans la progression amène l'activité 1 ?
2. A partir de quel exercice fait-on le lien avec l'activité 1 ?
3. A quelle notion fait appel le tableau de l'exercice 4 de la page 99 ?

3. Annexe 3 :
1. Quel est l'objectif poursuivi dans l'activité 1 ?
2. Quel est l'objectif poursuivi dans l'exercice 1 ?
3. Quelle est la notion mise en œuvre dans l'exercice 3 ?
4. Quel exercice peut-on relier à l'activité 1 de la page 98 (ANNEXE 2) ?
5. On trouve, dans l'exercice 5, l'écriture 1 m 45 mm. Comparer les systèmes d'écritures 1 m 45 mm et 1 h 45 min. Donner pour chacune des grandeurs une écriture sous la forme : "partie entière + partie décimale".
6. Résoudre l'exercice 6. Préciser l'intérêt d'un tel exercice.

3. SYNTHESE.

1. Quels sont les savoirs que l'élève devrait avoir acquis à la fin de la progression ?
2. Un peu plus tard, un élève effectue l'opération suivante

$$\begin{array}{r} 12,82 \\ +\underline{13,64} \\ 25,146 \end{array}$$

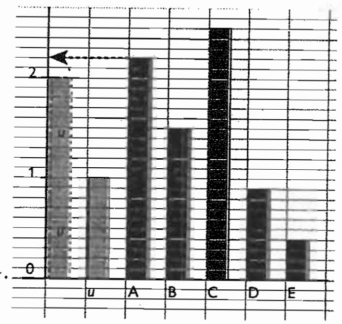
Qu'a-t-il retenu de ces 3 chapitres ?
3. Faites une proposition pour compléter le résumé "JE RETIENS BIEN".

Les fractions sur la droite numérique

Avec les nombres... Compléter 3 x ☐ = 2 x 3 x 6 16 : ☐ = 2 x 4 ☐ : 2 = 2 x 5

1 Activités

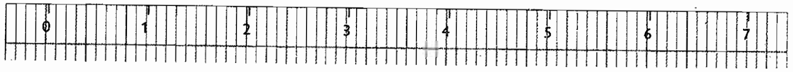
Pour mesurer facilement des longueurs avec la bande *u* comme unité, on a commencé à graduer régulièrement la droite rouge en reportant plusieurs fois de suite cette unité *u*.



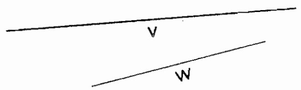
a Recherche et écris la mesure de chaque bande du graphique. Donne deux écritures pour les bandes dont la mesure est plus grande que 1.

b Reproduis cette graduation sur ton cahier et construis trois bandes dont voici les mesures :
- F mesure $1 + \frac{7}{10}$ et G mesure $3 + \frac{5}{10}$.
- La mesure de H est comprise entre $2 + \frac{4}{10}$ et $2 + \frac{5}{10}$.

c Découpe une bande sur le bord d'une feuille de cahier pour te fabriquer une règle graduée comme ci-dessous :

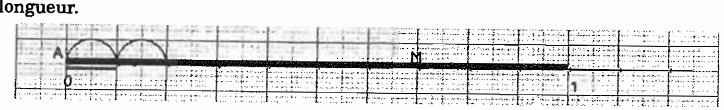


Utilise cette règle pour mesurer les segments V et W.
Trace en rouge un segment ayant pour mesure $6 + \frac{7}{10}$, en bleu un segment ayant pour mesure 4, en noir un segment ayant pour mesure $\frac{31}{10}$.



2

Unités, dixièmes de l'unité, centièmes de l'unité,...
Le segment, tracé en bleu sur ce morceau de papier millimétré, est choisi comme unité de longueur.



Reproduis ce segment sur une feuille de papier millimétré.

a Le segment vert mesure 1 cm. Combien de fois doit-on le reporter pour obtenir l'unité de longueur ? Quelle fraction de l'unité représente 1 cm ?

b Avec l'unité de longueur choisie, quelle est la mesure de AM ? Quelle est la fraction qui code le point M sur la droite numérique ?

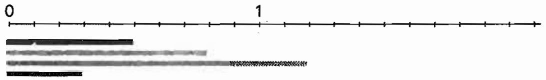
c Marque le point P pour que AP mesure $\frac{9}{10}$, puis un point N pour que PN mesure $\frac{3}{10}$. Code chacun de ces points avec une fraction.

d Trace un segment AR mesurant entre $\frac{7}{10}$ et $\frac{8}{10}$ en plaçant ce point R sur une graduation fine. Comment peux-tu coder ce point R ? Quelle fraction de l'unité représente un intervalle de 1 mm ?

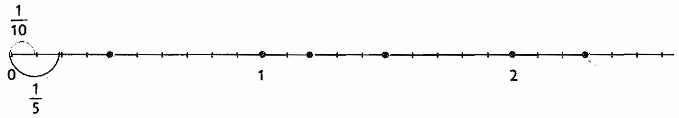
Exercices

1

a Trouve la fraction représentée par la longueur de chaque bande.



b Complète par une écriture qui convient pour repérer la position de chaque point rouge.



c Sur cette même droite, marque en vert les points qui sont repérés par les écritures suivantes :

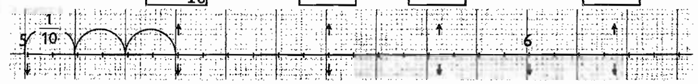
$2 + \frac{2}{10}$ $\frac{4}{5}$ $1 + \frac{4}{5}$ $\frac{21}{10}$ $2 + \frac{5}{10}$

Trouve d'autres écritures pour ces points.

2

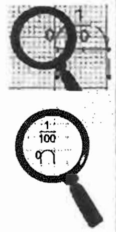
Comme sur l'exemple, complète les étiquettes par des écritures qui conviennent pour repérer la position des points.

$\boxed{5 + \frac{3}{10}}$ ☐ ☐ ☐



$\frac{50}{10}$ $\boxed{\frac{53}{10}}$ ☐ $\frac{60}{10}$

$\frac{500}{100}$ $\boxed{\frac{530}{100}}$ ☐ ☐ $\frac{600}{100}$ ☐



3

Regroupe les écritures qui désignent le même nombre.

$\boxed{1}$ $\boxed{100 \times \frac{1}{10}}$ $\boxed{100 \times \frac{1}{100}}$ $\boxed{10 \times \frac{1}{10}}$

$\boxed{\frac{100}{100}}$ $\boxed{10}$ $\boxed{\frac{1}{10}}$ $\boxed{10 \times \frac{1}{100}}$

4

a Écris en toutes lettres.

$\frac{1}{10}$ $\frac{3}{100}$ $\frac{45}{1\,000}$ $\frac{25}{10}$ $\frac{345}{100}$

b Écris sous forme d'une fraction.

deux *centièmes* vingt *dixièmes*
dix-sept *millièmes* onze *centièmes*

Je retiens bien

Les fractions décimales

1 unité
ou 10 dixièmes
ou 100 centièmes
ou 1000 millièmes

centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes
100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1\,000}$
		3	0	2	

302 centièmes $= \frac{302}{100}$ = 3 unités et 2 centièmes $= 3 + \frac{2}{100}$

ANNEXE 2

Les nombres décimaux (1)

Trouver $\frac{1}{2}$ parmi $\frac{3}{6}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{10}$ Avec les nombres...

1 Activités

Une convention d'écriture.

Les nombres qui s'écrivent avec des fractions décimales s'écrivent aussi sous une autre forme : on utilise une virgule pour repérer où se situe l'unité. Par exemple, pour écrire les nombres $34 + \frac{8}{10}$ et $3 + \frac{2}{100}$, on utilise le tableau :

dizaines 10	*unités* 1	*dixièmes* $\frac{1}{10}$	*centièmes* $\frac{1}{100}$	*millièmes* $\frac{1}{1000}$
3	4	8		
	3	0	2	

3 unités et 2 centièmes
$3 + \frac{2}{100}$
3,02

Dans **34,8** : **3** est le chiffre des dizaines.
4 est le chiffre des unités.
8 est le chiffre des dixièmes.

Dans **3,02** : **3** est le chiffre des unités.
0 est le chiffre des dixièmes.
2 est le chiffre des centièmes.

a Explique pourquoi on a besoin d'utiliser le chiffre 0 dans l'écriture à virgule du nombre 3 unités et 2 centièmes.
Écris les nombres suivants sous la forme de nombres à virgule :

$45 + \frac{3}{100}$ $\quad 6 + \frac{4}{10}$ $\quad 400 + \frac{18}{1000}$ $\quad \frac{3}{100}$

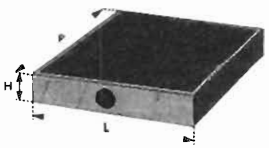
b Recopie ces nombres et entoure d'une même couleur ceux qui sont égaux.

5,4	$\frac{45}{100}$	4,5	$\frac{450}{100}$	45
$\frac{450}{1000}$	0,45	$\frac{450}{10}$	$\frac{45}{10}$	$\frac{54}{10}$

2

a Observe cette publicité.
Que désignent les quatre nombres qui figurent sur le document ?
Que représente le chiffre 5 dans chacun de ces nombres ?

Tiroir de rangement



L/H/P 50,4 x 8,5 x 25 cm
Prix : 18,45 F

b *Utiliser des nombres à virgule pour écrire des prix...*
Complète ces égalités avec des nombres à virgule
(c est l'abréviation de centime) :

1c = ... F $\qquad$ 50 c = ... F
12 F 5 c = ... F $\qquad$ 7F 85 c = ... F

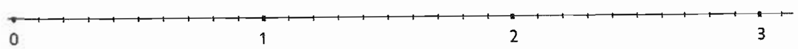
c *Utiliser des nombres à virgule pour écrire des mesures de longueur...*
Complète ces égalités avec des nombres à virgule :
1dm = ... m $\qquad$ 1 cm = ... m $\qquad$ 1 cm = ... dm $\qquad$ 1 mm = ... m

Exercices

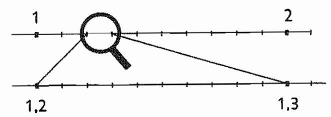
1

a Les nombres 0 ; 1 ; 2 et 3 ont été placés sur la droite numérique. Place correctement les nombres décimaux suivants sur cette droite :

0,8 $\quad$ 1,8 $\quad$ 2,3 $\quad$ 1,2 $\quad$ 0,6 $\quad$ 1,7 $\quad$ 2,1



b Comme la graduation n'est pas assez précise pour placer le nombre **1,23**, on a fait un agrandissement de la partie comprise entre 1,2 et 1,3. Place alors 1,23 et 1,24.



c Que dois-tu faire pour placer **1,237** ?
Place le nombre sur la droite.

2

a 24,53 s'écrit également **24** *unités* **53** *centièmes* ou $24 + \frac{53}{100}$.
Écris de la même façon :

1,45	5,67	1,07
6,123	56,7	41,03

b Regroupe les écritures qui désignent le même nombre.

23,07	23 unités 7 centièmes
23 unités 7 dixièmes	23,7
237 dixièmes	2 dizaines 307 centièmes
230 dixièmes 7 centièmes	2 dizaines 370 centièmes

3

Recopie ces nombres en supprimant tous les zéros inutiles.
Explique pourquoi tu conserves certains d'entre eux.

2,03	08,5	0067,89
0,010	12,001	02,20
20,030	020,010	40,04

4

4 est le *chiffre des dixièmes* de 21,49

dizaines	unités	dixièmes	centièmes
2	1	4	9

214 est le *nombre de dixièmes* de 21,49

a Pour chaque nombre A, B, C et D, écris le chiffre des dixièmes et le nombre de dixièmes.

A	759 centièmes	B	3 unités 25 centièmes
C	2 dizaines 27 centièmes	D	60,451

b Pour ces mêmes nombres, écris le chiffre des centièmes et le nombre de centièmes.

5

Écris les fractions suivantes sous forme de nombres à virgule.

$\frac{1}{10}$	$\frac{45}{10}$	$\frac{234}{10}$
$\frac{1}{100}$	$\frac{76}{100}$	$\frac{794}{100}$
$\frac{1}{1000}$	$\frac{95}{1000}$	$\frac{875}{1000}$

ANNEXE 3

Les fractions décimales ; les nombres décimaux (2)

Avec les nombres...
Écrire en dixièmes $2 + \frac{7}{10}$ $3 + \frac{1}{10}$ $9 + \frac{9}{10}$

1 Activité

• Fais afficher à l'écran de ta calculette le nombre 506,72
À l'aide des touches chiffres et des touches [.] [+] [−] et [=]
il est possible de transformer ce nombre et d'obtenir 516,72
en tapant successivement les touches [+] [1] [0] [=]

Attention ! le [.] remplace la virgule

[506.72] — [+10=] → [516.72]

• Fais afficher le nombre 125,25.
Quel programme de calcul tapes-tu pour obtenir le nombre 125,15 ?

[125.25] — [???] → [125.15]

• Écris et tape les programmes de calcul pour transformer ensuite :

125,15	en	130,05	130,05	en	135
135	en	135,56	135,56	en	0,56

Exercices

1 Complète le tableau.

	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes	
43,521		4	3	5	2	1	$40+3+\frac{5}{10}+\frac{2}{100}+\frac{1}{1000}$
	1	0	7	0	9		
							$20+3+\frac{9}{1000}$
0,106							

2 Recopie tous ces nombres,

a en entourant le *chiffre des dixièmes* :
84,25 — 163,7
6,32 — 13,01
245,08 — 23

b en entourant le *chiffre des centièmes* :
1,245 — 101,101
400,25 — 6,001
12,45 — 48,5

c en indiquant le *nombre de centièmes* :
8,456 — 6,75
11,07 — 48,53
0,457 — 0,004

3 En choisissant le *mètre* pour unité, écris les mesures de longueur suivantes :

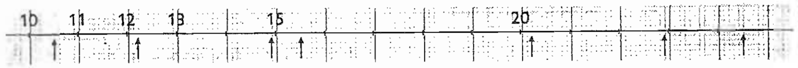
4 750 cm — 1 234 mm — 1 m 45 mm — 142 dm
42 mm — 143 m — 502 cm — $\frac{435}{100}$ m

...	km	hm	dam	m	dm	cm	mm	...
				0	1	0	5	

Exemple : 1 dm 5 mm = 0,105 m

4

a Écris les nombres décimaux correspondant à chaque flèche rouge.
Marque les points correspondant à 17,2 et à 23,9.



b Écris les nombres décimaux correspondant à chaque flèche rouge.
Marque les points correspondant à 20,75 20,89 21,21.

5 Recopie les nombres des étiquettes en regroupant ceux qui sont des écritures différentes d'un même nombre.

[4,850] [48,5] [$(4 \times 10) + 8 + 0,5$]
[$\frac{485}{10}$] [0485,0] [$4 + 0,8 + 0,05$]
[$48 + \frac{5}{10}$] [$\frac{4\,850}{10}$] [$\frac{485}{100}$] [$40 + \frac{85}{10}$]
[$4 + \frac{8}{10} + \frac{5}{100}$] [48,500]
[485] [$\frac{48\,500}{100}$] [4,85] [$4 + \frac{85}{100}$]

6 Écris les nombres suivants sous forme décimale :

15 *millièmes* — 4 *unités* et 7 *centièmes*
50 *centièmes* — 4 *unités* et 16 *millièmes*
34 *dixièmes* — 6 *centièmes* et 1 *millième*

7 On recherche un nombre...
• il a 123 *dixièmes* ;
• le chiffre des *millièmes* est 5.
Ce nombre peut-il être parmi les étiquettes suivantes ?

[312,376] [112,35] [12,235] [12,305] [12,2305]

Je retiens bien

Différentes écritures d'un nombre décimal

	écritures fractionnaires	écriture à virgule
12 unités et 82 centièmes	$12 + \frac{82}{100}$; $\frac{1282}{100}$; $12 + \frac{8}{10} + \frac{2}{100}$	**12,82**
7 unités et 12 millièmes	$7 + \frac{12}{1000}$	**7,012**

....	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	....
	1	2	8	2	
	partie entière		partie décimale		

ACADEMIES DU GROUPEMENT II (BORDEAUX, CLERMONT, NANTES, POITIERS, ILE de la REUNION)

PREMIER VOLET

Première Partie (8 points)

Exercice 1

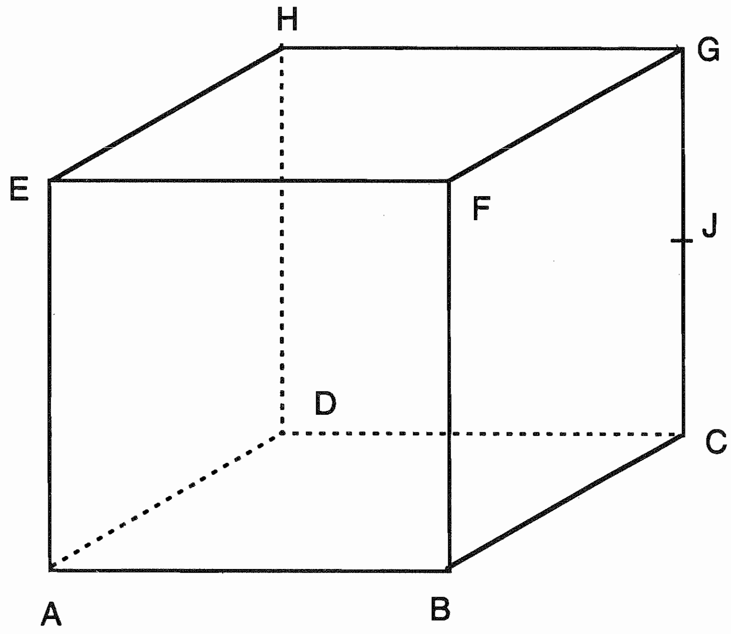
Le 7 avril 1795 (18 Germinal An III), le système métrique devient légal ; il remplace d'anciennes mesures telles que la toise, le pied et le pouce.

1. Dans ces anciennes mesures, 3 toises et 2 pieds sont équivalents à 240 pouces ; 5 toises et 1 pied sont équivalents à 372 pouces.
Combien de pieds vaut une toise ? Justifier la réponse.

2. a) Sachant qu'un pouce correspond à 0,027 m, calculer la mesure en mètres d'un pied.
b) Un soldat de l'an II mesure 1,70 m ; donner sa taille en utilisant à la fois le pied et le pouce comme unités de mesure.

Exercice 2

La figure ci-contre représente un cube de 10 cm d'arête.



A. Le point J est le milieu du segment [CG].

1. a) Reproduire sur votre copie le tableau ci-dessous et le compléter en répondant par oui ou par non.

Pour la dernière ligne, on nommera un triangle autre que ceux qui figurent dans le tableau.

Le triangle	est-il rectangle ?	est-il isocèle ?	est-il équilatéral ?
DJH			
ACG			
AFC			
EHG			
	oui	non	non

1. b. Justifier vos affirmations concernant la nature des triangles AFC et EHG.

B. On considère que la figure ci-dessus représente un cube en bois (de 10 cm d'arête). On le partage en deux morceaux à l'aide d'une scie, qu'on suppose sans épaisseur réalisant une coupe plane passant par les trois points R, S et T :

le point R est à 6 cm du sommet E, sur l'arête [EH],
le point S est à 3 cm du sommet E, sur l'arête [EA],
le point T est à 6 cm du sommet E, sur l'arête [EF].

On applique une des deux surfaces obtenues sur un tampon encreur et on imprime cette section RST sur une feuille.

1. a. Sans faire de calculs, dessiner en taille réelle à la règle et au compas le contour de la surface imprimée. On utilisera des constructions géométriques annexes (les faire figurer sur la copie).

1. b. Expliquer succintement la construction géométrique.

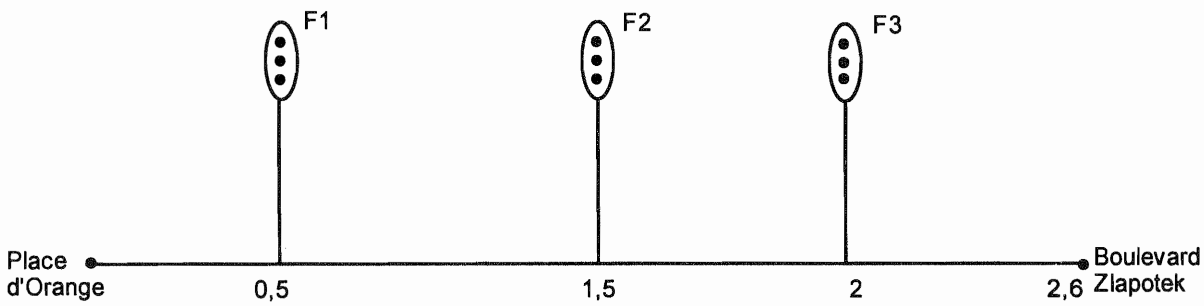
2. Calculer la dimension exacte de la longueur TR.

3. Calculer l'aire exacte en cm^2 de la section obtenue.

Exercice 3

Sur certaines avenues, les feux tricolores sont synchronisés. Dans le problème qui suit, les réglages ont été prévus pour qu'une automobile roulant à la vitesse constante de 60 km/h et passant le premier feu au vert, passe tous les autres feux au vert.

L'avenue qui nous intéresse comporte trois feux selon le schéma ci-dessous



Pour chaque feu, on a indiqué la distance en kilomètres depuis la place d'Orange.

On règle les feux de façon que chacun d'eux devienne vert quinze secondes avant le passage d'une automobile partie à l'instant t = 0 de la place d'Orange et roulant à la vitesse constante de 60 km/h.

Chaque feu suit un cycle d'une minute qui se décompose en trente secondes au vert et en trente secondes au rouge (on assimile feu orange et feu rouge).

1. Calculer en mètres la distance parcourue par l'automobile en trente secondes.

2. On appelle $d(t)$ la distance en mètres parcourue par l'automobile en fonction du temps t.. Exprimer $d(t)$ en fonction de t.. Tracer la courbe représentative de la fonction d dans un repère orthogonal où 1 cm vaut trente secondes sur l'axe des abscisses et deux cents mètres sur l'axe des ordonnées. On utilisera la feuille de papier millimétré.

3. Trouver les cycles des trois feux en recopiant le tableau ci-dessous sur votre copie et en mettant dans chacune des cases un V ou un R selon que le feu soit vert ou rouge pendant la période considérée.

Feux \ t	0s 15s	45s	75s	105s	135s	165s
F1						
F2						
F3						

4. Un cyclomoteur part de la place d'Orange quinze secondes après l'automobile et roule à la vitesse constante de 45 km/h entre chaque feu.

a) Tracer dans le repère de la question 2, la courbe représentant la distance parcourue par le cyclomoteur en fonction du temps.

b) Donner graphiquement et par le calcul le temps mis par le cyclomoteur pour parcourir l'avenue.

Deuxième Partie (4 points)

Cet énoncé de problème a été proposé à des élèves sortant de l'école primaire.

" Un fleuriste fait des bouquets avec des roses et des iris Une rose coûte 10 F et un iris coûte 4 F. Il doit y avoir 15 fleurs par bouquet et le prix d'un bouquet ne doit pas dépasser 100 F ".

Trois propositions de réponses sont faites aux élèves : " le fleuriste peut-il mettre x roses et y oeillets ? ", x et y correspondant à des nombres déterminés. On demande aux élèves :
1) de dire si oui ou non, chacune des propositions est acceptable ;
2) d'expliquer leur réponse pour chaque proposition.

PRODUCTIONS D'ELEVES :

JOHNNY	MAXIME	GAËLLE
a) Le fleuriste peut-il mettre 8 roses et 5 iris ? Réponds par oui ou par non : *oui* Explique ta réponse: *8 roses = 80* *5 iris = 20* +____ *100 F*	a) Le fleuriste peut-il mettre 8 roses et 5 iris ? Réponds par oui ou par non : *non* Explique ta réponse: *Non, il ne peut pas car 8 + 5, ça fait 13 et pas 15*	a) Le fleuriste peut-il mettre 8 roses et 5 iris ? Réponds par oui ou par non : *non* Explique ta réponse : *8 x 10 fait 80 F + 4 x 5 fait 40 F donc ça dépasse 100 F.* *8 x 10 + 4 x 5 = 100 F*
b) Le fleuriste peut-il mettre 5 roses et 10 iris ? Réponds par oui ou par non : *oui* Explique ta réponse: *5 roses = 50* *10 iris = 40* +____ *90 F*	b) Le fleuriste peut-il mettre 5 roses et 10 iris ? Réponds par oui ou par non : *oui* Explique ta réponse: *Oui car 5 + 10 = 15 et (5 x 10) + (10 x 4) = 90 F*	b) Le fleuriste peut-il mettre 5 roses et 10 iris ? Réponds par oui ou par non : *oui* Explique ta réponse: *5 x 10 fait 50 F + 10 x 4 fait 40 F donc ça ne dépasse pas 100 F.* *5 x 10 + 10 x 4 = 90 F*
c) Le fleuriste peut-il mettre 8 roses et 7 iris ? Réponds par oui ou par non : *non* Explique ta réponse: *8 roses = 80* *7 iris = 28* +____ *108 F*	c) Le fleuriste peut-il mettre 8 roses et 7 iris ? Réponds par oui ou par non : *non* Explique ta réponse: *Non, car (8 x 10) + (7 x 4) = 108 et ça dépasse 100 F*	c) Le fleuriste peut-il mettre 8 roses et 7 iris ? Réponds par oui ou par non : *non* Explique ta réponse: *8 x 10 fait 80 F + 7 x 4 fait 24 F donc ça dépasse 100 F.* *8 x 10 + 7 x 4 = 104 F*

N. B. : Les écritures en italique correspondent aux réponses écrites des élèves.

I - Faire l'analyse des réponses qui sont données par les 3 élèves en indiquant :

1. La pertinence des procédures utilisées et des réponses données.

2. Les compétences et connaissances dont ils paraissent disposer et les causes possibles des erreurs, le cas échéant.

II - A partir de l'analyse des réponses de ces élèves, pouvez-vous dégager les notions mathématiques sous-jacentes à ce problème ?

DEUXIEME VOLET

On trouvera en annexe quatre exercices proposés successivement par un maître de CM1 sous les paragraphes " Revoir, Découvrir, Appliquer ". Les exercices 1 et 2 sont empruntés au manuel Optimath CM1, Hachette Éducation, 1997.

1. Réaliser l'exercice 2, en justifiant vos réponses puis la question c) de l'exercice 3.

2. Quelles sont les notions mathématiques sous-jacentes à ces quatre exercices ? Préciser les objectifs visés par les exercices 1, 2 et 3.

Comparaison des phases I, II et III :

3. **a)** Leurs résolutions nécessitent-elles les mêmes connaissances et les mêmes compétences mathématiques ?

b) Donner deux procédures utilisables par les élèves de CM_1 pour répondre à la question c) de l'exercice 3.

4. **a)** En vous référant aux caractéristiques des situations didactiques, analyser la progression choisie par l'enseignant.

b) Indiquer les éléments essentiels que le maître peut retenir dans un bilan à la fin de l'exercice 3.

5. Faire une analyse critique de l'exercice 4, en précisant l'objectif visé au regard de la progression choisie.

ANNEXE

I – Revoir

Exercice 1 : *complète les tableaux*

× 156

10	
5	
	156
	312

× ?

7	70
11	
	250
10 000	

Exercice 2 : *vérifie si on peut passer des nombres de la colonne de gauche à ceux de la colonne de droite en multipliant par un même nombre.*

× ?

12	36
29	87
2	6
14	42
100	300

× ?

50	750
7	105
13	195
25	325
5	65

II - Découvrir

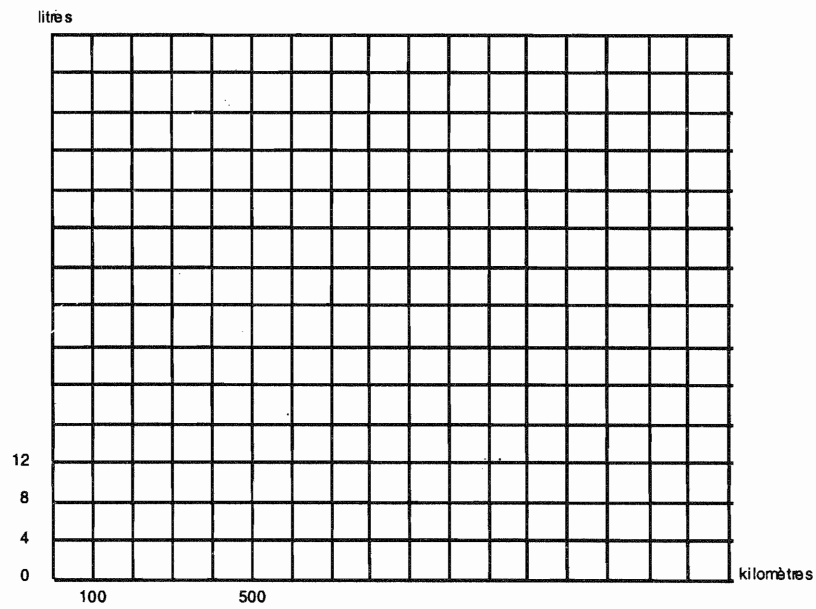
Exercice 3 : *la voiture de Monsieur Durand consomme en moyenne huit litres aux 100 km.*

a) Complète le tableau et donne la consommation pour 300 km.

b) Complète le graphique et en l'utilisant, donne la distance parcourue pour vingt litres.

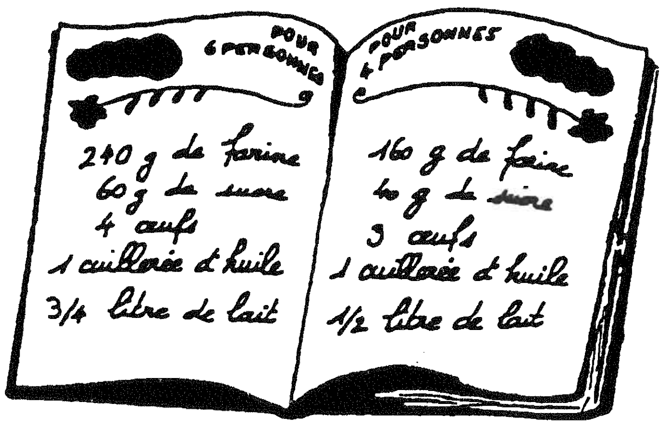
c) Calcule en posant à chaque fois une ou plusieurs opérations, la consommation pour un parcours de 1 200 km, de 320 km, de 10 km.

Nombre de kilomètres	100	200	300	500	700
Consommation en litres					



III - Appliquer

Exercice 4 : *voici deux recettes de crêpes, l'une pour six personnes et l'autre pour quatre personnes*



a) Compare les deux recettes.

b) La maîtresse désire faire des crêpes pour les 30 élèves de la classe.
Quelles quantités doit-elle prévoir ?

AIX-MARSEILLE, MONTPELLIER, NICE, CORSE

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

Réponse :

	Voix obtenues	Pourcentages
Liste A	2362	**22,47**
Liste B	**2628**	25%
Liste C	5522	**52,53%**

Les nombres demandés sont écrits en gras.

Justifications :
La liste B obtient 25% des voix, donc les listes A et C obtiennent ensemble 75% des voix, donc trois fois plus que la liste B.
Or les listes A et C obtiennent ensemble 7884 voix ;
d'où le nombre de voix de la liste B : 7884 : 3 =2628
Ce nombre représente 25% du nombre total des voix, soit le quart
d'où le nombre total de voix : $2628 \times 4 = \underline{10\,512}$

pourcentage de la liste A : $\dfrac{2362 \times 100}{10512} \approx 22{,}47\%$

pourcentage de la liste B : $\dfrac{5522 \times 100}{10512} \approx 52{,}53\%$

Remarque : on peut aussi calculer le nombre total des voix par : $7884 \times \dfrac{4}{3}$ puisque 7884 représente 75% des voix, soit les trois quarts. Les trois réponses s'en déduisent alors immédiatement.

EXERCICE 2

Soit x le nombre de deux chiffres obtenu en enlevant le chiffre des centaines au nombre de départ ; ce dernier s'écrit donc : $400+x$
D'où l'équation : $400+x = 26x$ d'où $25x=400$ $x = 16$
Le nombre cherché est 416.

Autre rédaction possible :

Ecrivons le nombre inconnu n sous la forme $\overline{cdu}$ où c représente le chiffre des centaines, d celui des dizaines , et u celui des unités. Donc $n = 100c + 10d + u$. Les hypothèses se traduisent par : $c = 4$ et $n = 26(10d + u)$ (1).
$c = 4$ entraîne $n = 400 + 10d + u$ d'où $10d + u = n - 400$. D'après (1) $n = 26 \times (n - 400)$ donc $25n = 26 \times 400$ et enfin $n = 26 \times 16 = 416$.

EXERCICE 3 (1 point)

Dire que le quotient du nombre n cherché par 21 est 33 signifie que l'on a :
$n = 21 \times 33 + r = 693 + r$ avec $0 \leq r < 21$.
D'autre part, le nombre cherché est multiple de 9 ainsi que 693 (dont la somme des chiffres est multiple de 9).
Il en résulte donc que r doit aussi être multiple de 9. Or , $0 \leq r < 21$. Il y a donc trois possibilités pour r : 0, 9 et 18, ce qui donne pour n, les trois valeurs :

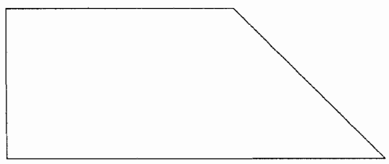
n = 693, n = 702, n = 711.

EXERCICE 4

1°)

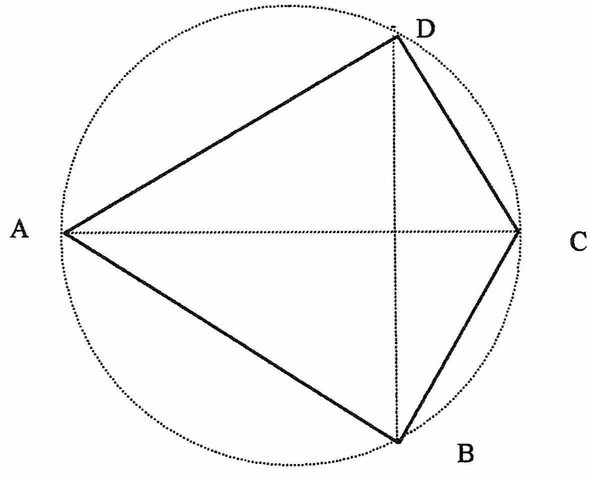
a) Vrai : un rectangle est un quadrilatère convexe, il a 4 angles droits donc a fortiori il a deux angles opposés droits.

b) Faux : les trapèzes rectangles qui ne sont pas aussi des rectangles, n'ont pas deux angles opposés droits (leurs deux angles droits sont consécutifs).



c) Vrai : les carrés sont des rectangles, donc des « Amandins » (cf. a) et ce sont aussi des losanges.

d) Faux : la figure ci-dessous, constituée de deux triangles rectangles non isocèles symétriques l'un de l'autre (appelée parfois « cerf-volant ») est bien un « Amandin » (deux angles opposés droits), ses diagonales sont bien perpendiculaires, et ce n'est pourtant pas un losange.



e) Vrai : en utilisant les notations de la figure donnée dans le sujet :

- les triangles ADC et ABC étant rectangles respectivement en D et B, les points D et B sont sur le cercle de diamètre [AC].
- Si les diagonales sont de même longueur : AC=BD, donc [BD] est un diamètre du cercle, donc [AC] et [BD] se coupent en leur milieu ;
- le quadrilatère ABCD dont les diagonales se coupent en leur milieu et sont de même longueur est un rectangle.

2°)

a) • Analyse de la figure : On l'a déjà dit, l' « Amandin » est inscrit dans un cercle de diamètre [AC], donc de rayon 3 cm. La hauteur du triangle ABC mesurant 2 cm, le point B est situé sur une parallèle à (AC) située à 2 cm (Il y a deux tels parallèles, on choisira l'une des deux). Enfin, le triangle ADC étant isocèle, le point D est situé sur la médiatrice de [AC]. Enfin, en raison de la convexité, les points D et B sont de part et d'autre de (AC).

• Programme de construction :

Tracer un segment [AC] de 6 cm.

Tracer le médiatrice de [AC]. Pour cela, tracer deux cercles centrés en A et en C et de même rayon, assez grand, pour que les deux cercles se coupent.. La droite qui joint les deux points d'intersection de ces cercles est la médiatrice cherchée.

Marquer le point O intersection de cette médiatrice et de (AC). C'est le milieu de [AC]. Marquer, sur la médiatrice un point I situé à 2 cm de O et un point J situé à 4 cm de O et du même côté que I.

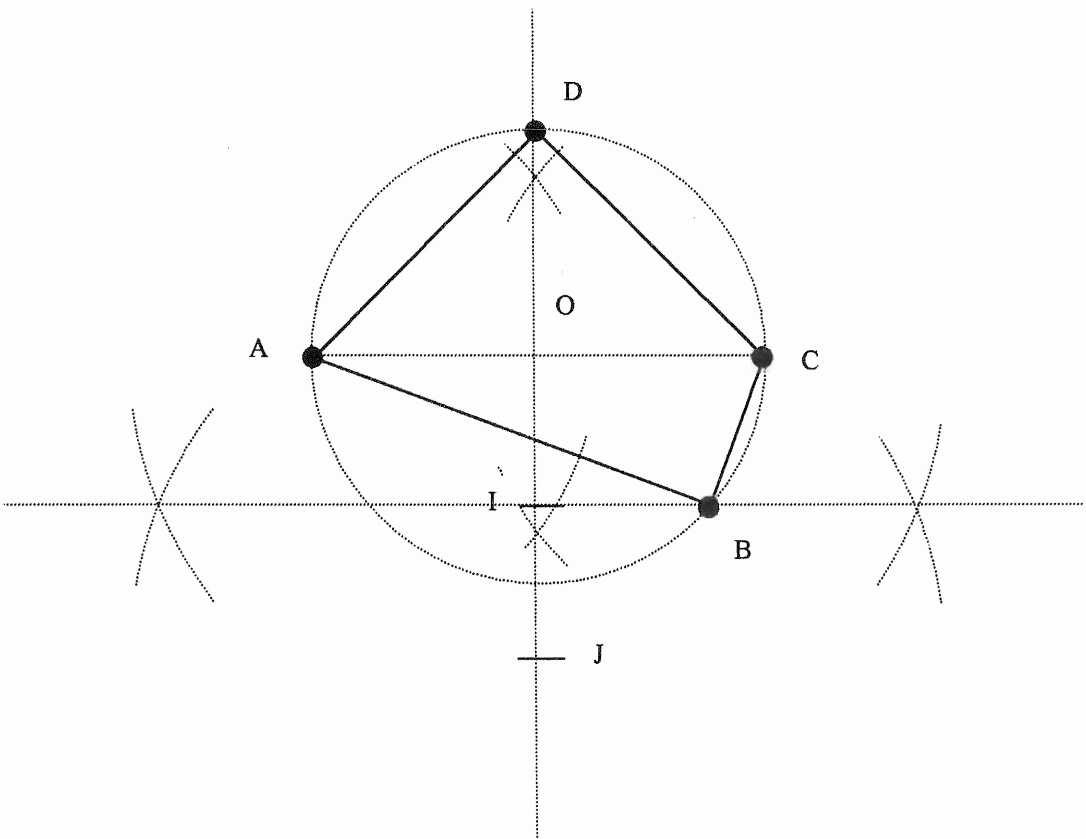
Tracer, par la méthode vue précédemment, la médiatrice de [OJ].

Tracer le cercle de diamètre [AC] (il est centré en O et passe par A).

Marquer B l'un des points d'intersection de la médiatrice de [OJ] avec ce cercle.

Marquer D, point d'intersection de la médiatrice de [AC] avec le cercle centré en O, en choisissant D dans demi-plan limité par (AC) et ne contenant pas B.

• Construction : les traits de construction sont en pointillés.



b) (DO) est la hauteur issue de D dans le triangle ADC et DO=3cm puisque D est sur le cercle de diamètre [AC], d'où :

aire (ADC)=$\frac{1}{2} \times AC \times DO = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$ (en cm²)

la hauteur issue de B dans le triangle ABC mesure 2cm, d'où

aire (ABC)=$\frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$ (en cm²)

aire (ABCD)=aire(ADC)+aire(ACB) d'où **aire (ABCD)=15cm²**

c) Appliquons le théorème de Pythagore au triangle ADO rectangle en 0 :
$AD^2=AO^2+OD^2=3^2+3^2=2\times 3^2$ d'où AD=$3\sqrt{2}$ cm. La machine affiche, pour ce dernier nombre : 4,24264

Donc [AD] mesure 4,2 cm à 1 mm près par défaut.

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

1°) et 2°)

Production et élève	Analyse des productions	Pertinence des arguments
Samia : 23,450	<u>résultat faux</u> - Applique la règle du produit par dix dans les entiers en ajoutant un zéro à droite. - Ne tient pas compte du fait que 23,45 est un décimal.	<u>Léa :</u> Réponse très pertinente, puisque - elle se réfère au statut particulier des nombres à virgule. - elle donne le bon résultat obtenu avec la règle juste. - d'autre part elle explique pourquoi la réponse proposée ne convient pas puisque cette réponse est égale au nombre de départ.
Julien : 230,450	<u>résultat faux</u> - Considère le décimal comme la juxtaposition de deux entiers et - applique à chacun d'eux la règle du produit par dix dans les entiers	<u>Guillaume</u> : Argument pertinent qui mériterait d'être explicité ; il se réfère implicitement non pas à la démarche effective de Julien mais à la procédure juste suivante : 23,45=23+(45centièmes) donc $23{,}45 \times 10 = 23 \times 10$ + (45centièmes) $\times 10$ = 230+(450 centièmes) or la réponse de Julien est égale à 230+(450 millièmes)
Laetitia 234,50	<u>résultat juste</u> - N'utilise pas de règle de calcul de produit par dix ; - revient au sens de la multiplication (somme de termes égaux) et - utilise l'addition en colonne pour calculer la somme, après avoir coché les différents termes pour ne pas en oublier.	<u>Évelyne</u> : Argument pertinent basé sur la procédure juste évoquée ci-dessus ; elle explique comment elle transforme les 450 centièmes en 4 unités et 50 centièmes Elle n'a pas relevé cependant l'inutilité du dernier zéro ;
Damien 230,45	<u>résultat faux</u> - Applique la règle du produit par dix dans les entiers à la seule partie entière du nombre et il énonce la règle.	<u>Vincent :</u> Argument pertinent pour la règle juste du décalage de la virgule ; mais faux pour la position du zéro.

Remarque générale : La plupart des élèves se réfèrent à des règles, sauf Laeticia, qui revient au sens de la multiplication.

SECOND VOLET (8 POINTS)

DIDACTIQUE

Etude de l'extrait 1

QUESTION 1

Les compétences mathématiques sont :

- savoir utiliser la multiplication pour trouver le prix de n objets connaissant le prix d'un objet, dans le cas où le prix ne varie pas ;
- savoir calculer des produits de nombres entiers ;
- dans l'exercice 1, comprendre que si le prix ne varie pas, les prix de deux collections d'objets s'ajoutent, et que s'il y a dix fois plus d'objets, le prix est multiplié par dix.
- Dans l'exercice 2, savoir convertir des centimes en francs en utilisant les nombres décimaux.

QUESTION 2

La définition implique que l'on multiplie tous les nombres d'objets par un même nombre pour obtenir les prix correspondants ; elle s'appuie sur le fait que les situations de proportionnalité mettent en jeu une fonction linéaire [c'est à dire du type $f(x)=ax$ où $a=f(1)$].
La méthode de résolution proposée consiste à ajouter les prix de 5 et de 8 objets pour trouver le prix de 13 objets : elle s'appuie sur la propriété additive de linéarité $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

QUESTION 3

Etude des exercices 3 et 4 :

	Procédures	Influence des nombres choisis.
Café	• L'élève peut calculer le prix unitaire correspondant à chaque achat et les comparer pour conclure • Il peut calculer prix unitaire correspondant à un achat, calculer le prix correspondant au nombre de paquets de l'autre achat et comparer ce résultat au prix annoncé dans l'énoncé.	L'élève, en utilisant la table de 9, voit facilement $3x9=27$ et $7x9=63$; il est donc difficile de distinguer les deux procédures les nombres ne permettent pas d'autre procédure (pas de relation simple entre 3 et 7).
Cinéma	Calcul des prix unitaires dans les deux cas et comparaison : $258:6=43$ et $585:15=39$ $43 \neq 39$ le calcul du prix unitaire dans le cas des six places et le calcul de 15 places à ce prix-là : $258:6=43$ et $43 \times 15=645$ si le prix était proportionnel au nombre d'objets achetés, la carte pour 15 places coûterait 645F. l'utilisation des propriétés de linéarité : si le prix était proportionnel, 3 places coûteraient $258:2=129$; comme	les nombres induisent plutôt la dernière procédure, qui nécessite seulement une division par deux et des additions (ou multiplications).

	15=6+6+3, 15 places coûteraient 258+258+129=645 (ou $15=5\times3$ d'où $5\times129=645$).	
Eau	1) comparaison des prix unitaires : 2)utilisation des propriétés de linéarité en remarquant que 10=4+4+(4:2) donc si les prix étaient proportionnels, le prix de 10 litres serait 17+17+(17:2) 3) calcul du prix d'un litre dans le lot de 10 litres : 40:10=4 et calcul du prix de 4 litres à ce prix unitaire : $4\times4=16$	la première procédure n'est pas facile car il faut diviser 17 par 4 et utiliser des nombres décimaux. - la deuxième procédure est possible mais pas très facile car il faut diviser 17 par 2 et utiliser là aussi des nombres décimaux. ; - pour la troisième procédure, les calculs sont très faciles : les nombres induisent donc plutôt cette procédure
Chaises	1) l'utilisation des propriétés de linéarité (14 chaises valent deux fois plus que 7 chaises) 2) 2)calcul du prix unitaire	La première procédure est de loin la plus facile car 14 est visiblement le double de 7 alors que la deuxième procédure nécessite la division de 1092 par 7.
Fauteuils	• Seul le passage par l'unité est envisageable.	Il n'y a aucune relation numérique simple entre 13 et 8.

<u>En conclusion :</u>

<u>Les procédures utilisant les prix unitaires seront favorisées si :</u>

- Ces prix sont très faciles à calculer (pour le café et pour le lot de 10 litres d'eau)
- Il n'y a pas de relation simple entre les nombres d'objets (8 et 13 pour les fauteuils).

<u>Les procédures utilisant les propriétés de linéarité sont favorisées si :</u>

- Les prix unitaires ne sont pas très faciles à calculer (nécessité d'effectuer les divisions de 258 par 6 et de 585 par 15 pour le cinéma)
- Il y a une relation simple entre les nombres d'objets [15=6+6+(6:2) pour le cinéma et $14=7\times2$ pour les chaises].

Remarque : Nous avons parlé de « passage par l'unité » pour désigner les procédures où les élèves calculent le prix d'un objet. On pourrait aussi parler de « coefficient de proportionnalité » : c'est le nombre par lequel il faut multiplier le nombre d'objets pour obtenir le prix. Il est clair qu'il s'agit du même nombre. Mais si ces deux nombres sont égaux ils diffèrent du point de vue du sens : l'un est un prix, l'autre un prix par objet. Il n'est pas tout à fait équivalent, du point de vue du sens, de dire : "cet objet vaut 8 F » ou de dire : « le prix est 8 F par objet ».

Étude de l'extrait n° 2

QUESTION 4

<u>Avantages des tableaux</u> :

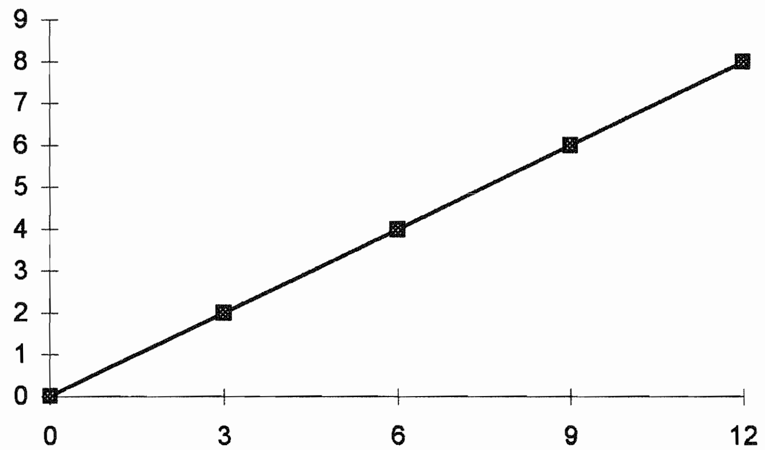
- quand il s'agit d'un problème (« tarte aux pommes », « yaourts »), possibilité de bien se représenter la situation, en structurant les informations de l'énoncé et en focalisant son attention sur les relations numériques entre lignes et/ou colonnes.
- visualisation possible des propriétés additive et multiplicative de linéarité.

- visualisation des deux fonctions réciproques (multiplication et division) dans le 2 de « je m'entraîne »
- aide pour concevoir l'idée de fonction : une même règle qui s'applique à toute une liste de nombres.

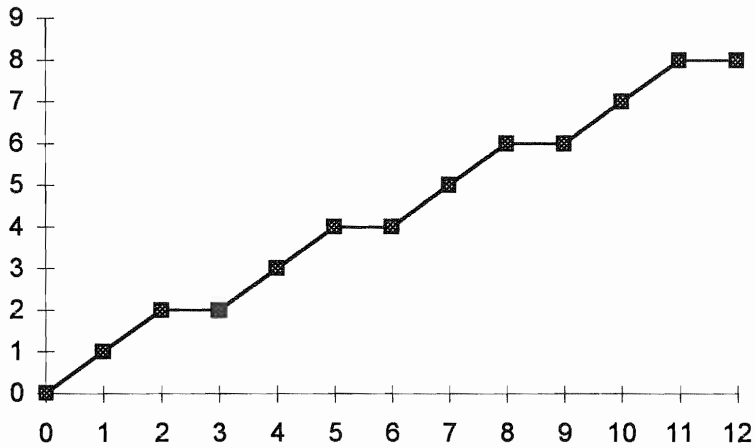
Inconvénients des tableaux présentés ici :
- Quand le tableau est donné (dans le 1 de « je découvre » ou dans le 1 de « je m'entraîne »), tout est indiqué et l'élève n'a plus qu'à le compléter, comme s'il s'agissait d'un tableau purement numérique (comme le 2 de « je m'entraîne ») ; rien ne l'oblige à faire le lien avec le problème posé.
- Quand la réalisation du tableau est imposée par la consigne (yaourts), il est peu probable qu'elle apparaisse pour la plupart des élèves comme un moyen de résoudre le problème posé, elle va plutôt constituer pour eux un autre problème.
- Dans les deux cas, la réalisation ou l'utilisation du tableau risque de priver l'élève de sa propre réflexion pour résoudre le problème posé.

QUESTION 5

On peut clairement obtenir un graphique correspondant au tableau suggéré par l'auteur, en achetant 0, 3, 6, 9 boîtes etc... On obtiendra donc les points de coordonnées : (0,0) ; (3,2) ; (6,4) ; (9,6) ; (12 ;8), en se bornant aux points qui peuvent être marqués sur la feuille proposée.



Mais on peut désirer acheter un nombre de boîtes qui n'est pas multiple de 3, une boîte par exemple, et cela donne un tableau et donc un graphique différent. On obtient les points de coordonnées : (0,0) ; (1,1) ; (2,2) ; (3,2) ; (4,3) ; (5,4) ; (6,4) ; (7,5) etc... Ce graphique est tout à fait différent : d'une part il y a plus de points, et d'autre part, leur répartition est différente : dans le premier cas, les points sont alignés avec l'origine, et dans celui-ci, ils « montent par paliers ».



<u>Ce n'était sans doute pas l'intention de l'auteur</u> et nous pouvons avancer plusieurs arguments :

- La consigne « place les points correspondants » vient après la consigne « complète le tableau », tableau qui porte sur les seuls multiples de trois.
- L'exemple de point donné correspond au premier couple du tableau.
- L'auteur pose la question « comment sont disposés les points ? » or il n'est pas facile de décrire la disposition des points du deuxième graphique, alors que dans le premier ils sont alignés.
- l'utilisation de la fonction associée au 2ème graphique ne correspondrait pas à l'objectif de cette leçon.
- le raisonnement fait ci-dessus pour trouver l'image de 10 est difficile pour des élèves de CM1 et ressort d'un problème de recherche qui n'a pas sa place dans un exercice d'entraînement.

Remarque : un seul argument suffit pour le concours !

Étude comparative des deux extraits

QUESTION 6

<table>
<tr><th></th><th>Extrait N°1</th><th>Extrait N°2</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Objectifs</td><td colspan="2">Objectif commun
Apprendre à résoudre des problèmes de proportionnalité en utilisant le coefficient de proportionnalité ou les propriétés de linéarités.</td></tr>
<tr><td>Apprendre à reconnaître des situations de proportionnalité et de non-proportionnalité : en effet l'auteur propose, dans un même contexte (prix), les deux types de situations.

Apprendre à choisir la méthode de résolution en fonction des nombres proposés (consigne de l'exercice 4)</td><td>Cet objectif est absent ici puisque l'auteur propose uniquement des situations de proportionnalité.

Cet objectif n'apparaît pas explicitement dans les consignes.

Dégager le concept de proportionnalité en rencontrant des situations dans différents contextes ; visualiser l'alignement des points (cf. exercice 3).
Apprendre à remplir un tableau de proportionnalité.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Méthodes de résolution</td><td colspan="2">Utilisation du coefficient de proportionnalité ou des propriétés de linéarités.</td></tr>
<tr><td>Choisir la méthode selon les nombres de la situation.</td><td>Utilisation de tableaux.
L'utilisation du coefficient de proportionnalité est favorisée.
Un graphique est proposé mais on ne peut pas dire qu'il intervienne comme méthode de résolution.</td></tr>
<tr><td>Initiative laissée à l'élève</td><td>L'élève peut résoudre les problèmes posés en utilisant la ou les méthodes de son choix.
Cependant, les questions B et C du 2 ne sont pas très claires et devront sans doute être résolues collectivement.</td><td>Nous avons vu que les tableaux privent l'élève de l'initiative d'une procédure personnelle de résolution
L'élève est placé seul devant les problèmes seulement en 4, 5 et 6 ; encore faut-il noter que ces exercices venant en fin de leçons, le contrat didactique habituel engagera les élèves à appliquer ce qui précède (construire des tableaux puis les remplir) plutôt qu'à se poser vraiment les problèmes.</td></tr>
</table>

AMIENS

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS) MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

Dans tout cet exercice, les longueurs sont exprimées en cm, les aires en cm².

Question 1 :

Voir figure page suivante

Proposition de construction :

AB = 4 : à l'aide de la règle graduée, on trace une droite (D) en position "horizontale" et sur cette droite un segment [BA] de longueur 4 cm.

A l'aide du compas, on note sur la droite (D) le point N symétrique de B par rapport à A.

On construis à la règle et au compas la droite (D') médiatrice[1] du segment [BN].

BC = 8 et ABC rectangle en A : le point C appartient donc à l'intersection du cercle ***C1*** de centre B et de rayon 8 cm et de la droite (D')

Le point C est à l'une des intersections de ce cercle avec la droite (D').

Il y a deux points solutions, l'on note C l'un de ces 2 points : le triangle ABC est bien rectangle en A en effet, (AC) = (D') et (D') médiatrice de [BN] est perpendiculaire à [AB]), BA = 4 et BC= 8 .

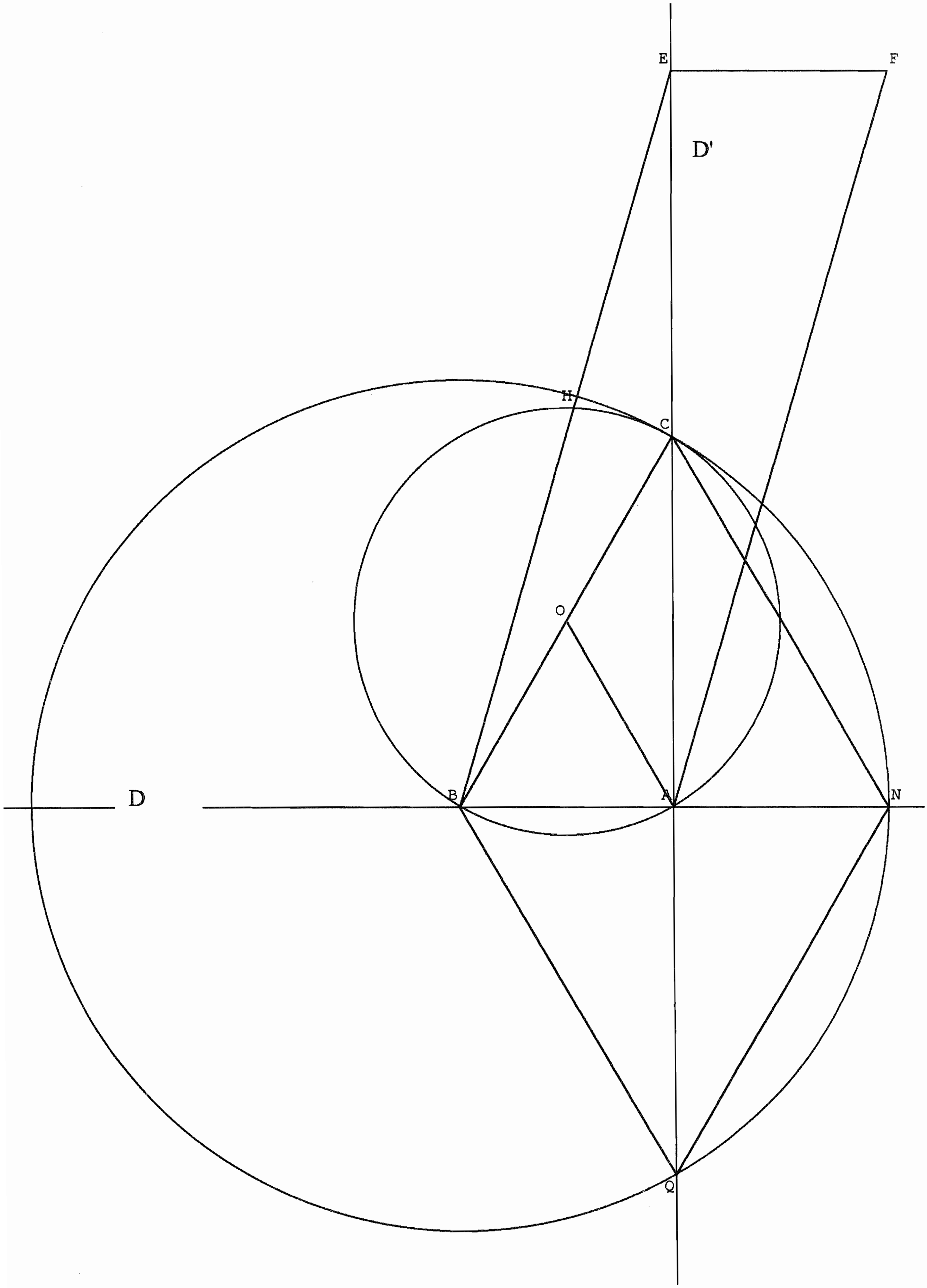
Question 2 :

O est le milieu de [BC], ABC en rectangle en A et donc le cercle ***C2*** de diamètre [BC] de centre O et de rayon OA est circonscrit à ce triangle.

$$OA = OB = OC = \frac{BC}{2}$$

$$\boxed{OA = \frac{BC}{2}}$$

[1] Il peut être conseillé de laisser les arcs de cercle de construction de la médiatrice sur la figure, bien que le texte ne le demande pas.


E
F
D'
H
C
O
D
B
A
N
Q

Question 3 :

aire ABC $= \frac{1}{2}$ (AB x AC) (demi-rectangle)

Calcul de AC en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABC :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ de plus, comme BC = 8 et AB = 4, on a BC = 2 AB

d'où $AC^2 = (2\ AB)^2 - AB$

$AC^2 = 3\ AB^2 \quad AC = \sqrt{3}\ AB$

et aire ABC $= \frac{\sqrt{3}}{2}\ AB^2$ soit en cm^2 aire ABC $= 8\sqrt{3}$

une valeur approchée à 0,1 cm^2 :

$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$

$13{,}856 <$ aire ABC $< 13{,}864$

et $\boxed{\text{aire ABC} = 13{,}8}$ à 0,1 cm^2 près par défaut.

Question 4 :

E est sur la droite (D'), il est placé à l'aide du compas de telle sorte que CE = AC (car E est le symétrique de A par rapport à C).

(D') est perpendiculaire à [AB] et $\boxed{\text{ABE est donc un triangle rectangle en A.}}$

Question 5 :

$$\frac{\text{AireABE}}{\text{Aire ABC}} = ?$$

Les 2 triangles considérés sont rectangles donc

Aire ABE $= \frac{1}{2}$ AB x AE

Aire ABC $= \frac{1}{2}$ AB x AC

et comme AE = 2 AC (C milieu de AE)

$$\boxed{\frac{\text{AireABE}}{\text{Aire ABC}} = 2}$$

Question 6 :

Aire ABE = Aire ABC + Aire BCE (les deux triangles ABC et BCE pavent le triangle ABE) et en utilisant le résultat de la question précédente

2 Aire ABC = Aire ABC + Aire BCE d'où Aire ABC = Aire BCE et

$\boxed{\text{Aire BCE} = 8\sqrt{3}}$ (voir la question 3)

Question 7 :

H appartient au cercle ***C2*** de diamètre [BC] donc le triangle BHC est rectangle en H.

Et CH est perpendiculaire à BE, soit $\boxed{\text{[CH] est la hauteur issue du sommet C du triangle BCE}}$

Question 8 :

F symétrique de B par rapport à C est placé à l'aide du compas sur la droite (BC) de telle sorte que CF = BC.

E symétrique de A par rapport à C et donc AC = CE.

Dans le quadrilatère AFEB, C est le milieu commun des deux diagonales [AE] et [BF]. C'est une propriété caractéristique d'un parallélogramme.

$\boxed{\text{Le quadrilatère AFEB est donc un parallélogramme.}}$

Aire AFEB = 4 Aire ABC (car AFEB est un parallélogramme avec C centre de symétrie) et donc[2] Aire AFE = Aire ABE soit Aire AFEB = 2 Aire ABE et de plus Aire ABE = 2 Aire ABC résultat de la question 5))

Donc Aire AFEB = $4 \times 8\sqrt{3}$ $\boxed{\text{Aire AFEB} = 32\sqrt{3}}$

Question 9 :

Un losange est un parallélogramme particulier ayant ses diagonales perpendiculaires.

Ses deux diagonales déterminent 4 triangles rectangles isométriques dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs respectives $\frac{d_1}{2}$ et $\frac{d_2}{2}$ (avec d_1 et d_2 longueurs respectives des 2 diagonales du losange)

Ainsi Aire losange = $4 \times \frac{1}{2} \times \frac{d_1}{2} \times \frac{d_2}{2}$ $\boxed{\text{Aire losange} = \frac{d_1 x d_2}{2}}$

Question 10 : .

Les choix sont multiples.

Nous nous appuyons sur le fait que les diagonales d'un losange déterminent 4 triangles rectangles isométriques.

Comme Aire MNPQ = Aire AFEB, Aire AFEB = 4 Aire BAC et que le triangle BAC est droit ses côtés de l'angle droit (les deux segments [AB] et [AC]) sont donc deux demi-diagonales possibles.

Un losange MPNQ peut maintenant être construit :

On reconstruit à la règle et au compas un triangle isométrique au triangle rectangle BAC que l'on nomme MIP (il est rectangle en I) et l'on construit N symétrique de M par rapport à I et Q symétrique de P par rapport à I.

Remarque : il n'est pas nécessaire de reconstruire un triangle MIP isométrique au triangle BAC, il suffit de renommer M le point B et P le point C. Les constructions sont alors simplifiées : Q est le symétrique de P par rapport à A et N est le symétrique de M par rapport à A.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1 :

Explication de la procédure : Pauline a bien calculé que le chien gagne, à chacun de ses bonds, 50 cm sur le renard. (Différence entre la distance parcourue par le chien à chaque bond - 2 m - et celle parcourue dans le même temps par le renard - 1,50m - en trois bonds de 0,50m.)
Comme au départ la distance les séparant est de 30 m, la division posée de 30 par 0,50 permettra effectivement de trouver le nombre de bonds que devra accomplir le chien pour rejoindre le renard.
Sa procédure n'a pas abouti car l'on peut supposer que Pauline ne connaît pas la technique opératoire d'une division d'un entier par un décimal. En effet, ce n'est pas une compétence à acquérir au cycle 3, niveau probable de cet élève.

Question 2:

Explication de la procédure : Mathieu indiqué par 2 points notés chien et renard la position des 2 animaux au départ puis, il a représenté les bonds du chien et du renard sans vraiment respecter la régularité de la longueur de leurs bonds et la proportion : 1 bond du chien = 3 bonds du renard.
La graduation 30 a été placée et l'on peut supposer que l'origine de la graduation se situe au point noté chien : cela détermine implicitement un axe gradué.
Dans ce contexte, la graduation 30 devrait être atteinte en 15 bonds du chien au lieu des 10 bonds représentés.
A partir de cette représentation erronée, qui s'arrête apparemment lorsque le renard est rejoint, l'élève compte les bonds du chien qu'il a représenté : c'est effectivement 33 bonds, ce qui explique sa conclusion.
Les causes de sa non-réussite sont donc dues à son impossibilité à effectuer une représentation conservant l'échelle imposée par le choix des deux points initiaux.
De plus, pour réussir sur une représentation juste, il faudrait alors que l'élève numérote successivement 1 bond du chien pour 3 bonds du renard, jusqu'à ce qu'un $n^{\text{ième}}$ bond du chien corresponde à un $n^{\text{ième}}$ groupement de trois bonds du renard.

Question 3:

N	15	11	8	6	5	3	3	3	2	1	1	somme des bonds : 58
dc	30	22	16	12	10	6	6	6	4	2		
dr	22,5	16,5	12	9	7,5	4,5	4,5	4,5	3	1,5		
bc	*30*	*52*	*68*	*80*	*90*	*96*	*102*	*108*	*112*	*114*		
br	*52,5*	*69*	*81*	*90*	*97,5*	*102*	*106,5*	*111*	*114*	*115,5*		
E	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*		

Calculs intermédiaires	0,5			1,5				1,5		

Légende :

N est un nombre entier de bonds effectués par le chien.
dc est la distance en mètres ajoutée pour le chien.
dr est la distance en mètres ajoutée pour le renard.
bc : bilan du chien depuis le départ
br : bilan du renard depuis le départ.
E est le numéro de l'étape des calculs de l'élève.

Explicitation de la procédure :
Mickaël étudie tour à tour les positions du chien et du renard :

étape 1 : le choix de 15 comme premier nombre de bonds du chien correspond, pour lui, à parcourir une distance de 30 m (distance initiale qui le sépare du renard).
étape 2 : le choix de 11 comme deuxième nombre de bonds du chien correspond pour lui à parcourir une distance approchée des 22,5 m parcourus par le renard à l'étape 1.
ensuite :
Etape i : le choix du nombre pour les bonds du chien correspond à approcher la distance parcourue alors par lui à celle parcourue par le renard à l'étape précédente i -1. Cette approximation s'effectue soit par excès (étape 5), soit par défaut (étape 6).
Calculs intermédiaires (explications probables):
Etape 3 : les 50 cm correspondent à la différence entre les 22,5 m du renard à l'étape 1 et les 22 m du chien à l'étape 2.
Etape 6 : les 1,5 m correspondent à la différence entre les 7,5 m du renard à l'étape 5 et les 6 m du chien à l'étape 6; ils sont ajoutés aux 4,5 m du renard à l'étape 6 pour obtenir 6 m
Etape 10 : les 1,5 m sont ajoutés pour approcher les 2 m du chien.
La procédure s'arrête lorsque le chien fait un bond de 1 pour la deuxième fois.
Il n'a pas tout à fait terminé.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

Question 1

Réponse d'Audrey : "*Ils ne se rattraperont jamais*"
Cette affirmation de l'élève peut s'expliquer par les faits suivants :
- le renard a 30 m d'avance sur le chien.
- à première vue, sur le dessin du manuel, le renard semble faire des bonds plus longs que le chien.
- l'énoncé indique que pendant que le chien fait un bond, le renard en fait trois.

Dans ces conditions, l'on peut donc supposer que l'écart entre les 2 animaux ne fera que croître.

Réponse de Vincent : "*Le chien devra faire 15 bonds* "
L'explication est la suivante :
Le renard est à 30 m du chien qui fait des bonds de 2 m.
Le chien atteindra donc le renard après 15 bonds de 2m (2 m x 15 = 30 m).

Question 2

Premier type de questions : vers une résolution par division euclidienne de 3000 cm par 50 cm
L'objectif serait de conduire l'élève à calculer de quelle longueur se rapproche le chien du renard à chacun de ses bonds.
Les questions pourraient alors être plus ou moins fermées :
exemple de question ouverte : que se passe-t-il à chaque bond du chien?
exemple de questions fermées :
calculer la distance parcourue par le renard en trois bonds
calculer alors de quelle distance se rapproche le chien du renard à chacun de ses bonds

ou bien
Lorsque Bobi a parcouru les 30 mètres, où est Rousqueue *? (Rousqueue est 15x1,5 mètres plus loin, c'est à dire à 22,5 mètres*). Bobi s'est-il rapproché de Rousqueue *? (Oui, puisqu'il n'est plus qu'à 22,5 mètres).* Trouve en combien de bonds le chien aura rattrapé le renard.
On voit de suite que ces questions peuvent induire des stratégies : par exemple : le chien gagne 7,5 mètres à chaque fois qu'il fait 15 bons. Donc il lui faut gagner 3x7,5 mètres, donc il lui faut faire 45 bonds, soit 60 bonds en tout.

Second type de questions : vers une résolution utilisant une présentation en tableau (en s'inspirant de ce que fait l'auteur du manuel)
L'objectif serait de conduire l'élève à calculer l'écart entre les 2 animaux en fonction du nombre de bonds de ceux-ci.
Les questions pourraient alors être:
Calcule l'écart qui reste entre les deux animaux après :
- le premier bond du chien
- les deux premiers bonds du chien
- les trois premiers bonds du chien.

Continue...

Troisième type possible de questions :
Sur une droite, dessine la position de Bobi après son premier bond et de Rousqueue après les 3 bonds effectués en même temps. Continue en utilisant des couleurs différentes.

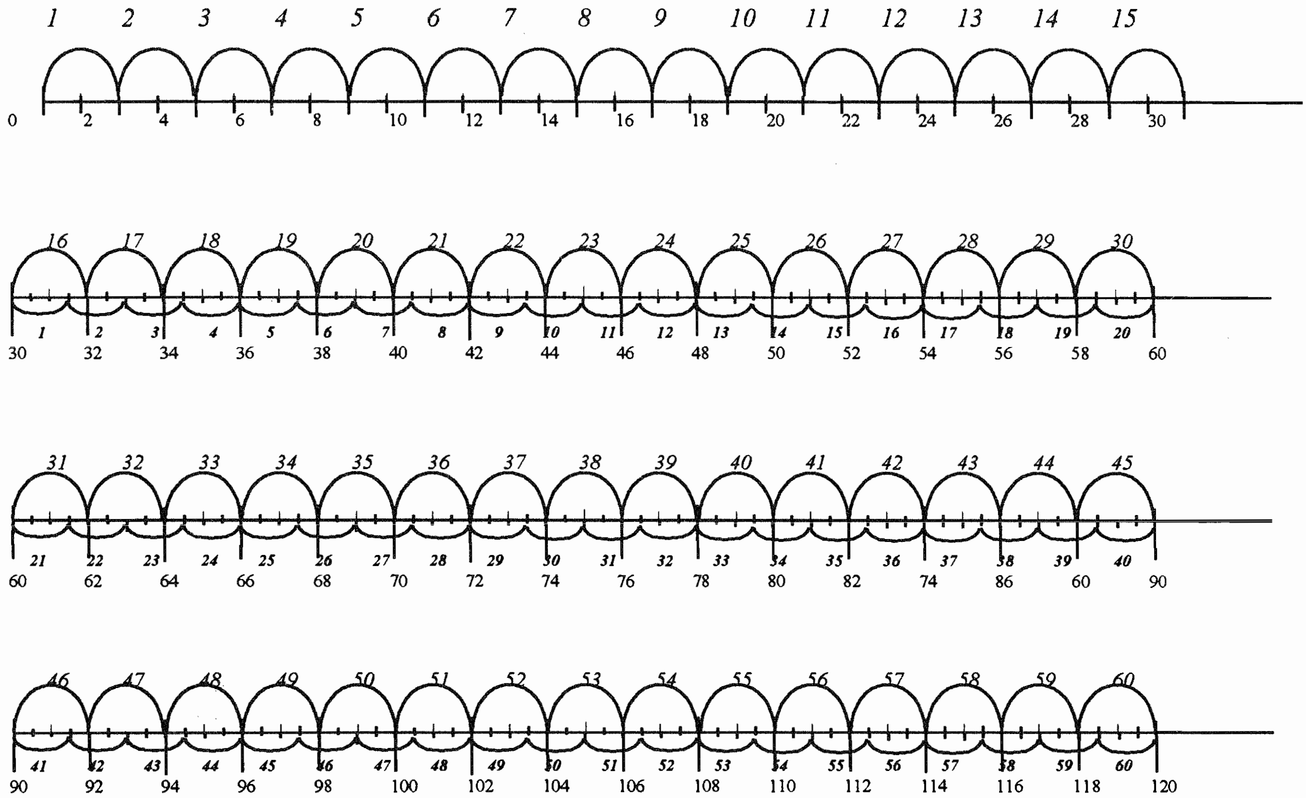
Des calculs peuvent s'installer sur la droite.

Remarque 1 : la question est un peu floue (que signifient s'approprier le problème? s'engager dans ***une*** *procédure ?, que dire de "2 types de questions" ? : s'agit-il de questions de type différent? Ou conduisant à des procédures différentes utilisant des calculs ?). Elle suggère vraisemblablement de construire des questions intermédiaires permettant de mettre l'élève sur la piste.*

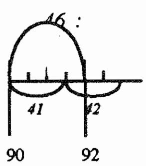
Remarque 2 : s'approprier un problème en répondant à des questions dites "intermédiaires" est souvent illusoire. Toute question intermédiaire influe sur le choix d'une stratégie, donc d'une procédure. La réelle appropriation d'un problème est d'une autre nature. Ils s'agit de s'assurer que l'élève a bien compris la mise en scène proposée, qu'il a fait sien le problème (on parlera de dévolution), même si celui-ci ne dispose pas encore des moyens mathématiques pour résoudre le problème posé.

Question 3

le schéma pourrait être le suivant :



Légende :



désigne le 46 ième bond du chien

désignent les 41 ième et 42 ième groupements de trois bonds du renard

graduations de l'axe sur lequel se déplacent les deux animaux .

Sur la représentation, à l'issue du $60^{ième}$ bond du chien qui correspond au $60^{ième}$ groupement de trois bonds du renard, les deux animaux se sont rencontrés.

Les savoirs[3] mathématiques possibles sont les suivants :
- savoir graduer une droite en choisissant une échelle convenable (graduations et sous-graduations : intervalle initial partagé en deux puis encore en deux)
- être capable de retrouver la relation qui existe entre 0,50 m et 2m :

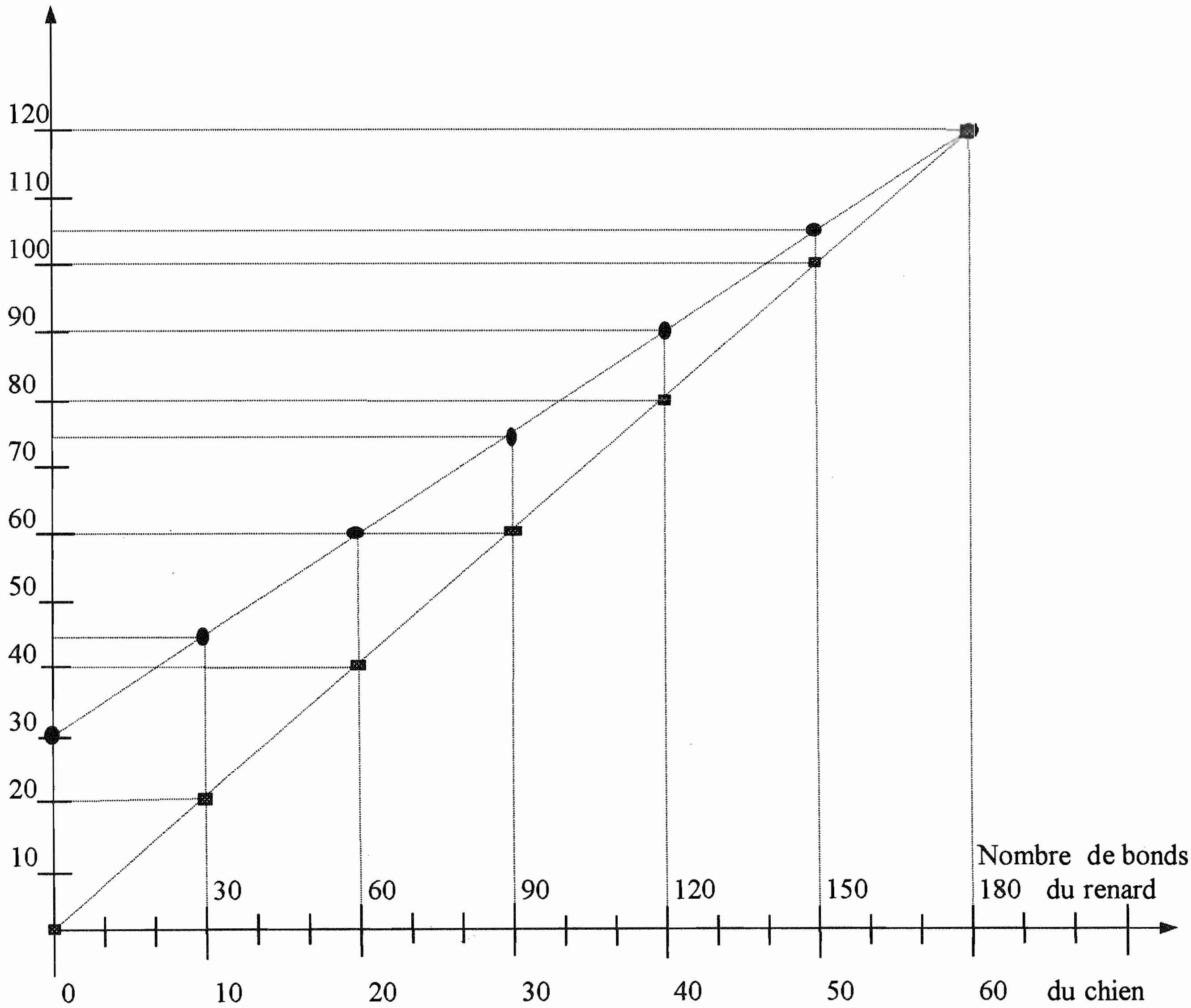
savoir que $2 \text{ m} = 4 \times 0{,}50 \text{ m}$

pour représenter les bonds des deux animaux.

Question 4

Résolution graphique :

distance en mètres par rapport au point du départ du chien



---

[3] savoirs et savoir-faire.

Le chien a rattrapé le renard lorsque pour une abscisse donnée la distance des deux animaux par rapport au point de départ du chien est identique.
Ceci est réalisé pour 60 bonds du chien correspondant à 180 bonds du renard, et pour une distance de 120 m parcourue par le chien (solution obtenue par lecture de la représentation graphique.)

Les savoirs mathématiques utilisés sont les suivants :
- savoirs relatifs aux représentations graphiques.
  * savoir choisir et construire une représentation graphique adaptée à une situation.
    - choix d'un repère orthogonal unique et d'une double graduation sur l'axe des abscisses.
    - choix d'une échelle appropriée sur chacun des deux axes.
    - placement de points dans un repère orthogonal.

  * savoir interpréter des représentations graphiques discrètes : signification d'un point commun.
    - anticiper l'alignement des points (sur la droite $y = 0{,}5\,x + 30$ -fonction affine - pour le renard; sur la droite $y = 2\,x$ - fonction linéaire - pour le chien).
    - anticiper le point de concours des deux droites support.
    - lire les coordonnées entières du point d'intersection.

- savoirs élémentaires sur le calcul
    - effectuer des multiplications (d'un entier par 2, d'un entier par 0,5).

Question 5

Nous supposerons que le maître a explicité le libellé des 3 colonnes et au moins les 2 premières lignes du tableau : ceci devrait permettre à l'élève de comprendre le tableau proposé et son lien avec la résolution du problème.
Les difficultés alors envisageables pour compléter le tableau sont les suivantes :
- difficulté à remplir la deuxième colonne
  à percevoir la relation qui existe entre le nombre de bonds du chien et le nombre de bonds du renard (le renard fait trois fois plus de bonds que le chien et il suffit donc de multiplier par 3 chaque élément correspondant de la première colonne)
- difficulté à remplir la troisième colonne car des calculs intermédiaires semblent indispensables
  soit n_c le nombre de bonds du chien et n_r le nombre de bonds du renard l'écart est calculable par l'une des relations
  (1) $e = (30 + 0{,}5\, n_r) - 2\, n_c$
  (2) $e = 30 - 0{,}5\, n_c$
  L'une ou l'autre des deux relations est hors de portée d'un élève de cycle 3, l'apport du maître semble dans les deux cas indispensable. Celui ci devra très certainement s'appuyer sur les représentations des bonds des animaux. Il semble donc que pour remplir ce tableau, les élèves rempliront un autre tableau qui est celui de toutes les étapes, c'est à dire un tableau dans lequel la première colonne serait constituée de 100 lignes…

(1) Dans le premier cas, il faudrait que le maître impose à l'élève de rajouter, avant la troisième colonne, deux colonnes intermédiaires:
dans la première figurerait la distance du renard par rapport au lieu du départ du chien ($30 + 0{,}5\, n_r$)
dans la seconde la distance parcourue par le chien ($2\, n_c$)

(2) Dans le second cas, ce sera très certainement au maître de suggérer à l'élève que 0,5 m sont gagnés à chaque bond du chien sur la distance qui le sépare du renard.

- dans les deux cas l'élève sera confronté à la multiplication du décimal 0,5 par un entier.

- difficulté à remplir la ligne correspondant à 100 bonds du chien :

  Si, pour nous, un écart est positif, l'élève sera conduit à calculer la différence de 2 nombres dont le second est supérieur au premier ce qui lui est impossible à réaliser.

Conclusion : ce tableau tel quel paraît impossible à remplir sans des apports décisifs du professeur.

BESANÇON

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

Soit m le traitement mensuel au 1er janvier 1997 ; de mars à septembre le traitement est donc égal à $m\times 1{,}005$; et d'octobre à décembre il est égal à $(m\times 1{,}005)\times 1{,}005$,

d'où le gain annuel en 1997 $\quad g = 2m+7(m\times 1{,}005)+3(m\times 1{,}005\times 1{,}005)$

soit $\quad g = (2+7{,}035+3{,}030075)\times m = \underline{12{,}065075\times m}$

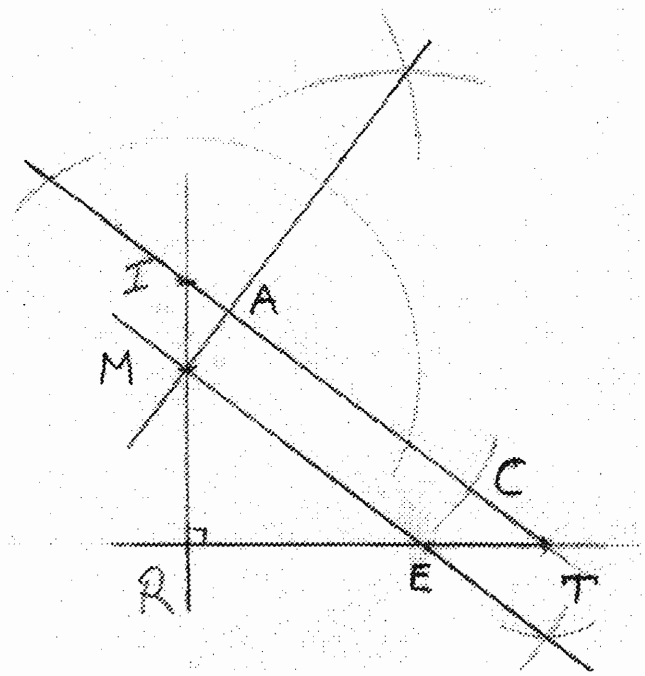
Appelons m' le traitement fictif (déjà augmenté au 1er janvier) qui aurait donné le même gain annuel en 1997 ; alors 12m' = g

D'où $\quad m' = \dfrac{g}{12} = \dfrac{12{,}065075}{12}m$

$m' = 1{,}00542291\ldots\times m$

Il aurait fallu une augmentation au premier janvier de <u>0,54%</u>

EXERCICE 2



RI = 3 $\qquad$ TR = 4 $\qquad$ RM = x

Remarque : la construction est jugée correcte si on voit distinctement les arcs de cercles nécessaires à la construction de perpendiculaires, et/ou de parallèles.

1) a) M est placé sur le segment [RI]. On construit la parallèle à (IT) passant par M, elle coupe (RT) en E ; puis la perpendiculaire à (IT) passant par M, elle coupe (IT) en A. On trace alors un arc de cercle de centre A et de rayon ME, qui coupe [IT] en C.

D'autres constructions sont possibles :

- **(i)** On construit les points E et A comme ci-dessus ; puis la perpendiculaire à (IT) passant par E, qui coupe (IT) au point C
- **(ii)**On construit la droite (Δ_1) perpendiculaire à (TI) passant par M. Cette droite (Δ_1) coupe le segment [TI] en A. Puis on construit la perpendiculaire (Δ_2) à (MA) passant par M. Cette droite (Δ_2) coupe [TR] en E.
  On construit alors le point C par intersection de [TI] et du cercle de centre A et de rayon ME.
- **(iii)** On construit la droite (D_1) parallèle à (TI) passant par M (en construisant par exemple un parallélogramme). Cette droite (D_1) coupe [RT] en E. Puis on construit la perpendiculaire (D_2) à (ME) passant par E. Cette droite (D_2) coupe [TI] en C.
  On construit alors le point A par intersection de [TI] et du cercle de centre C et de rayon ME.

b) le quadrilatère MECA a, par construction, deux côtés opposés ([AC] et [ME]) parallèles et de même longueur : c'est donc un parallélogramme ; comme il a en outre un angle droit [(MA) perpendiculaire à (IT)], c'est un rectangle.

Pour la construction i) : les droites (MA) et (EC) perpendiculaires à une même droite (IT) sont parallèles entre elles ; le quadrilatère MECA a donc par construction ses côtés opposés parallèles deux à deux : c'est donc un parallélogramme ; comme il a en outre un angle droit [(MA) perpendiculaire à (IT)], c'est un rectangle.
Justifications analogues pour les deux autres constructions.

2) a)

On peut calculer l'aire A du triangle RTI de 2 façons :

C'est la moitié d'u*n* rectangle de largeur 3 et de longueur 4 donc A = (3×4) :2 = 6

C'est un triangle qui admet pour base [TI] et pour hauteur [RH], donc A $= \frac{1}{2} TI \times h$

On calcule TI dans le triangle rectangle TIR par le théorème de Pythagore :

$$TI^2 = 3^2+4^2 = 25,\text{ donc } TI = 5,\text{ et } \frac{5h}{2} = 6 \quad h = \frac{12}{5}$$

b) Dans le triangle TIR, les droites (ME) et (TI) sont parallèles ; on peut donc appliquer le théorème de Thalès :

$$\frac{ME}{TI} = \frac{RM}{RI} \text{ soit } \frac{ME}{5} = \frac{x}{3} \text{ et } \quad ME = \frac{5x}{3}$$

c) Dans le rectangle MECA, on a EC=MA

On calcule MA en appliquant le théorème de Thalès dans le triangle IRH (les droites (MA) et (RH), toutes les deux perpendiculaires à (IT) sont parallèles entre elles) :

$$\frac{MA}{RH} = \frac{IM}{IR} d'où\ MA = RH \times \frac{IM}{IR} = \frac{12}{5} \times \frac{3-x}{3} = \frac{4}{5}(3-x)$$

$$EC = \frac{4}{5}(3-x)$$

Remarque : une autre solution consiste à calculer directement EC mais elle est beaucoup plus longue.

3) Le rectangle MECA est carré <u>si et seulement si</u> ME=EC

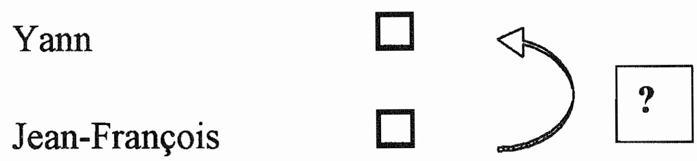
soit $\frac{5x}{3} = \frac{12-4x}{5}$ 25x = 36-12x 37x = 36

Il est carré <u>si et seulement si</u> $\boxed{x = \frac{36}{37}}$

on vérifie qu'on a bien x < 3 ; donc <u>il existe une position de M et une seule pour laquelle le rectangle MECA est un carré.</u>

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

1) Ce problème ne pourrait être proposé qu'au cycle des approfondissements (cycle 3), ou même au collège. En effet le raisonnement attendu ici est trop difficile pour des élèves de cycle 2 (et pour beaucoup d'élèves de cycle 3). Bien qu'il ne mette en jeu que la structure additive, il s'agit ici d'un problème très complexe de comparaison , dans une situation de transformation de deux quantités :



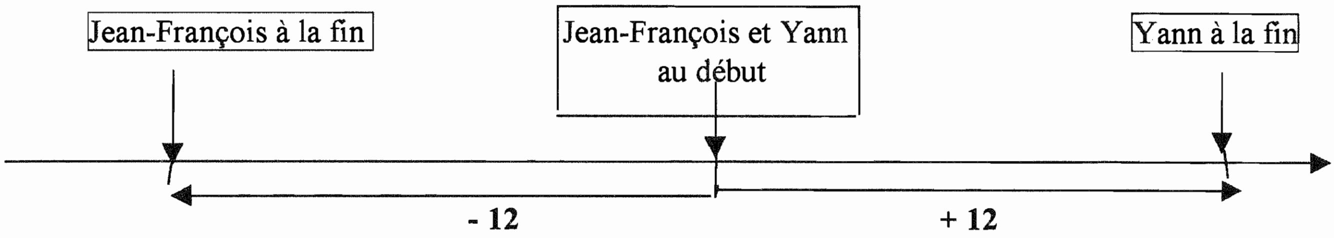
et où les quantités en jeu (les nombres de billes des deux enfants avant et après le jeu) restent inconnues, même après la résolution du problème. De plus, une des transformations est donnée (Yann gagne 12 billes) mais les élèves doivent en déduire l'autre (Jean-François a perdu 12 billes) ce qui ajoute à la complexité de la situation.

Ce problème peut être vu comme la transformation d'une relation : à partir de la relation de départ entre les deux quantités de billes (égalité) et des deux transformations, il faut en déduire la relation à la fin. Même au collège, ce problème est loin d'être maîtrisé !

2) Il faut d'abord bien expliquer que si Yann a gagné 12 billes, c'est que Jean François a perdu 12 billes. On propose ensuite plusieurs exemples de résolution en se donnant le nombre de billes au départ, et en donnant à chaque fois la réponse au problème :

nombre de billes	au départ	à la fin	conclusion
Yann	20	20+12 = 32	8+24 = 32 Yann a 24 billes de plus que Jean-François
Jean-François	20	20-12 = 8	

Quand les élèves ont bien compris la situation avec un nombre de billes donné, et sont convaincus, après plusieurs exemples, que « ce sera toujours pareil », on pourra proposer une représentation sur la droite numérique :



On peut aussi proposer le schéma suivant :

	Avant la partie	**Après la partie**
Yann		12
Jean-François		12

écart : 12 12 $\boxed{12+12=24}$

<u>Yann a donc 24 billes de plus que Jean-François.</u>

3)

<u>Johann</u> : il schématise les collections de billes en fixant l'état initial à 20 billes (en organisant les billes en tableau structuré en 4 colonnes). Sur son schéma, il représente convenablement le transfert pour les 12 billes, les ajoute correctement à Yann (écrit 32 à la place de 20) mais oublie de retrancher les 12 billes au stock initial de Jean-François.
Sa conclusion est donc fausse.

<u>Clément</u> : il se donne lui aussi un nombre de billes au départ (36) et il utilise une représentation figurative qui montre chaque enfant et son sac de 36 billes. Entre les deux, il représente le gain de 12 billes qu'il partage en 2 parties égales, et il ajoute une des parties de 6 au stock de Yann. Cette erreur est difficile à interpréter : on peut dire qu'il ne comprend pas bien ce qui s'est passé pendant la partie.

<u>Mohamed</u> : Sa solution est bien structurée en 2 colonnes : raisonnement avec schémas, et calculs avec rédaction.
Son schéma représente 2 collections initiales fixées à 20 billes, et les 2 collections finales avec le nombre exact de billes représentées 8 et 32. Ici les 2 transformations simultanées :gain de 12 billes pour Yann, donc perte de 12 billes pour Jean-François sont envisagées et schématisées par une écriture mathématique.
Ses phrases de conclusion sont cependant incorrectes : il n'a pas su envisager la relation de comparaison entre les deux états finaux bien calculés 8 et 32. Il y a eu peut-être perte du sens du problème, mêlée à une non-maîtrise de la syntaxe de comparaison.

SECOND VOLET (8 POINTS)

DIDACTIQUE

Les nombres pour prévoir et vérifier (extrait du "Nouvel Objectif Calcul CE1")

QUESTION 1 :

Ces 3 situations sont données au cycle des apprentissages fondamentaux, et probablement en 3°année (CE1).

En effet si des calculs additifs sont effectués sur des nombres inférieurs à 100, ce qui pourrait faire penser à la $2^{ème}$ année du cycle 2 (CP), les élèves doivent utiliser aussi des décompositions soustractives (situation A), soustractives et multiplicatives (situation B) ; et dans la situation C, après avoir additionné les nombres écrits sur trois cartes, ils doivent trouver l'écart avec 30, ce qui relève de la soustraction. Or la multiplication, et, en général, la soustraction, ne sont introduites qu'en CE1.

<u>Autre réponse possible :</u>

La situation B qui fait intervenir la multiplication ne peut être proposée qu'en CE1 ; la situation C peut être proposée en CP (addition des nombres sur les cartes ; et s'il faut comparer les écarts les élèves peuvent utiliser la bande numérique) ; la situations A pourrait être proposée en CP, dans les classes où la soustraction est introduite, et en utilisant éventuellement la calculette.

> <u>Complément :</u> certains auteurs (ERMEL ; OPTIMATH) pensent que les problèmes additifs et soustractifs, qui relèvent des mêmes situations, doivent être proposés dès le CP, voire la grande section, et le signe – introduit en CP, les calculs pouvant être effectués à l'aide de la calculette.

QUESTION 2 :

L'ordre est C, A puis B.

<u>*C étape 16*</u> : seules des sommes sont travaillées, avec des nombres familiers.

<u>*A étape 32*</u> : utilisation de sommes et de différences, avec des dizaines entières (multiples de 10).

<u>*B étape 85*</u> : même si les joueurs n'ont que 2 cartes à combiner, ils peuvent utiliser ici les trois opérations, sommes, différences et aussi produits.

QUESTION 3 :

A	B	C
50+20+10	40-4	21+5+4
40+30+10	6×6	13+12+5
60+30-10	4×9	
50+40-10	30+6	
60+40-20		
50+60-30		

QUESTION 4 :

À chacune de ces 3 étapes, il est demandé : "écris toutes les solutions trouvées dans la classe". Ceci implique que la mise en œuvre de chacune des 3 étapes débouche sur une mise en commun des solutions et donc une confrontation des méthodes et démarches utilisées. Le maître peut avoir pour objectifs :

- validation ou invalidation des solutions trouvées, en vérifiant les calculs et le respect des contraintes de la situation (règle du jeu, nombre de cartes choisies)
- prise de conscience de l'existence de plusieurs solutions et découverte d'autres calculs, conduisant à des écritures différentes du même nombre.
- avoir une trace écrite du travail effectué.

QUESTION 5 :

Les variables didactiques (choix et valeurs) sont bien sûr dépendantes des objectifs du maître pour la mise en œuvre de chaque situation.

On peut repérer :

- la possibilité d'utiliser ou non la calculette ou des tables ; cela change la nature de la tâche, et aussi sa difficulté.
- le nombre de cartes proposées par le maître (ici six) ; cela affecte directement les capacités de gestion de l'information ; la difficulté augmente avec l'étendue des possibilités.
- le nombre de cartes à choisir par l'élève (ici 3 ou 2); il joue sur la maîtrise du sens et de la technique des opérations (somme et différence de 3 nombres, produit de 3 nombres, ...) ; ce nombre pourrait aussi ne pas être fixé, ce qui rendrait la situation plus ouverte.
- la taille des nombres sur les cartes-nombres joue directement sur les compétences nécessaires en calcul (dans le cas où il n'y a pas de calculette).
- le nombre des opérations utilisables et leur nature joue aussi directement sur les compétences des élèves relatives au sens et à la technique des opérations, ainsi qu'à leur combinaison.
- le nombre de solutions (qui dépend à la fois du choix de la cible, des cartes-nombres, et des opérations à utiliser) affecte directement la quantité de travail à effectuer, s'il n'y a qu'une solution, l'élève pourra avoir à effectuer beaucoup d'essais avant de la trouver.

Remarque : il suffisait bien sûr de citer deux des variables ci-dessus.

QUESTION 6 :

On peut citer :

- la numération décimale : comprendre qu'il s'agit de nombres entiers de dizaines.
- la table d'addition : pour effectuer mentalement les calculs additifs et soustractifs sur les nombres de dizaines.

QUESTION 7 :

L'objectif évalué peut être : trouver des décompositions additives et soustractives d'un nombre multiple de 10 inférieur à 100, en utilisant des multiples de dix.

Exercice : (extrait de l'exercice 1 page 56 du "Nouvel Objectif Calcul CE1")

On joue en utilisant deux cartes

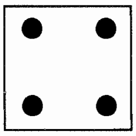
70 | 60 | 30 | 80 | 10 | 40 | 100

Écris toutes les solutions que tu trouves pour atteindre 70.

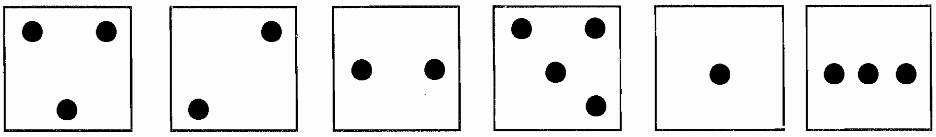
Autres exercices possibles:
1) Complète les écritures : 20+50+...... = 90 100-..... = 50
2) Parmi les écritures suivantes, entoure celles du nombre 80 :
$\boxed{40+30+10}$ $\boxed{90-20}$ $\boxed{50+40-10}$ $\boxed{20+20+20+20}$

QUESTION 8 :
On pouvait répondre en donnant soit une situation pour le cycle 1, soit pour le cycle 3.
Réponse 1 en M.S (cycle 1) :

carte-cible :



6 cartes- collections:



Jeu avec des cartes réelles ; et des jetons pour vérifier.
Consigne : choisir une ou deux cartes ; pour gagner, il faut avoir juste autant de points que sur la carte-cible
Objectif : identifier différentes décompositions (ou représentations) du nombre 4.

Réponse 2 en cycle 3 (2$^{\text{ème}}$ année ou CM1) :

Nombre-cible : $\boxed{729}$

6 cartes-nombres : $\boxed{3}$ $\boxed{9}$ $\boxed{27}$ $\boxed{81}$ $\boxed{243}$ $\boxed{1458}$

On peut additionner, soustraire, multiplier, diviser ; on doit prendre 3 cartes.
Exemples de solutions : $3\times9\times27$ $27\times81:3$ $(27\times81)-1458$
$243\times9:3$ $(243\times9)-1458$.

CRETEIL

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE PARTIE (8 POINTS)
CONNAISSANCES MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 (2 points)

1) Si un croissant vaut 2,70 F, son prix *exact* en tops sera $\frac{2,70}{6,54321}$ la machine affichant, pour ce nombre : 0,4126415016. Le prix arrondi en tops sera donc de 0,41.

2) Le prix *exact* de l'automobile en tops sera donc $\frac{80\,500}{6,54321}$, le nombre affiché par la machine étant : 12302,82996, le prix arrondi en tops sera 12302,83.

3) Le prix *exact* de la place de cinéma, en francs est de $5,04 \times 6,54321$, soit, affichage machine : 32,9777784. Le prix en francs sera donc de 33 F.

EXERCICE 2 (2 points)

1) Pour connaître le nombre de chiffres de A, il suffit de le situer entre deux puissances successives de 10. Or, on a $90\,000\,000 < 92\,865\,317 < 100\,000\,000$ et de même : $800\,000 < 814\,975 < 900\,000$ donc $9 \times 8 \times 10^{12} < A < 9 \times 10^{13}$ (car il y a compatibilité de l'ordre et de la multiplication d'une part, et d'autre part, le nombre de zéros est égal à la puissance de 10). Les inégalités suivantes permettent alors de conclure : $10^{13} < 7 \times 10^{13} < 70 \times 10^{12} < 72 \times 10^{12} < A < 9 \times 10^{13} < A < 10^{14}$ donc A a 14 chiffres.

2) Décomposons chaque facteur en somme et utilisons les règles de distributivité, associativité et commutativité. Il vient :

$A = (928\,653 \times 100 + 10 + 7) \times (8\,149 \times 100 + 7 \times 10 + 5)$

$A = 928\,653 \times 8149 \times 10\,000 + 928\,653 \times 7 \times 1\,000 + 928\,653 \times 5 \times 100 + 8\,149 \times 1\,000 + 7 \times 100 + 5 \times 10 + 8\,149 \times 7 \times 100 + 7 \times 7 \times 10 + 7 \times 5$.

Il faut maintenant décomposer cette écriture selon les puissances de 10, et l'on peut ne pas tenir compte des nombres qui sont multipliés par 100, 1000 etc... Il reste donc :

$5 \times 10 + 7 \times 7 \times 10 + 7 \times 5$

soit : $5 \times 10 + (4 \times 100 + 9 \times 10) +(3 \times 10 + 5) = 4 \times 100 + 17 \times 10 + 5$

soit : $5 \times 100 + 7 \times 10 + 5$.

Le chiffre des unités est bien 5, celui des dizaines7.

3) Dire que la machine affiche 10 chiffres revient à dire qu'elle écrit les nombres inférieurs (strictement) à 10^{10} donc, elle donne les chiffres d'un produit d'un nombre de 5 chiffres par un nombre de 5 chiffres. Cette remarque étant faite, nous allons proposer une méthode pour obtenir les chiffres du nombre A, méthode basée sur les propriétés déjà utilisées

lors du 2, mais rendues plus performantes.
On a
$A = (928 \times 10^5 + 65\,317) \times (8 \times 10^5 + 14\,975) = 928 \times 8 \times 10^{10} + 65\,317 \times 8 \times 10^5 + 928 \times 14\,975 \times 10^5 + 65\,317 \times 14\,975$.
Pour le dernier produit, la machine affiche : 978 122 075. Puisque tous les autres produits sont supérieurs à 10^5, les cinq derniers chiffres de ce nombre sont aussi ceux de A.

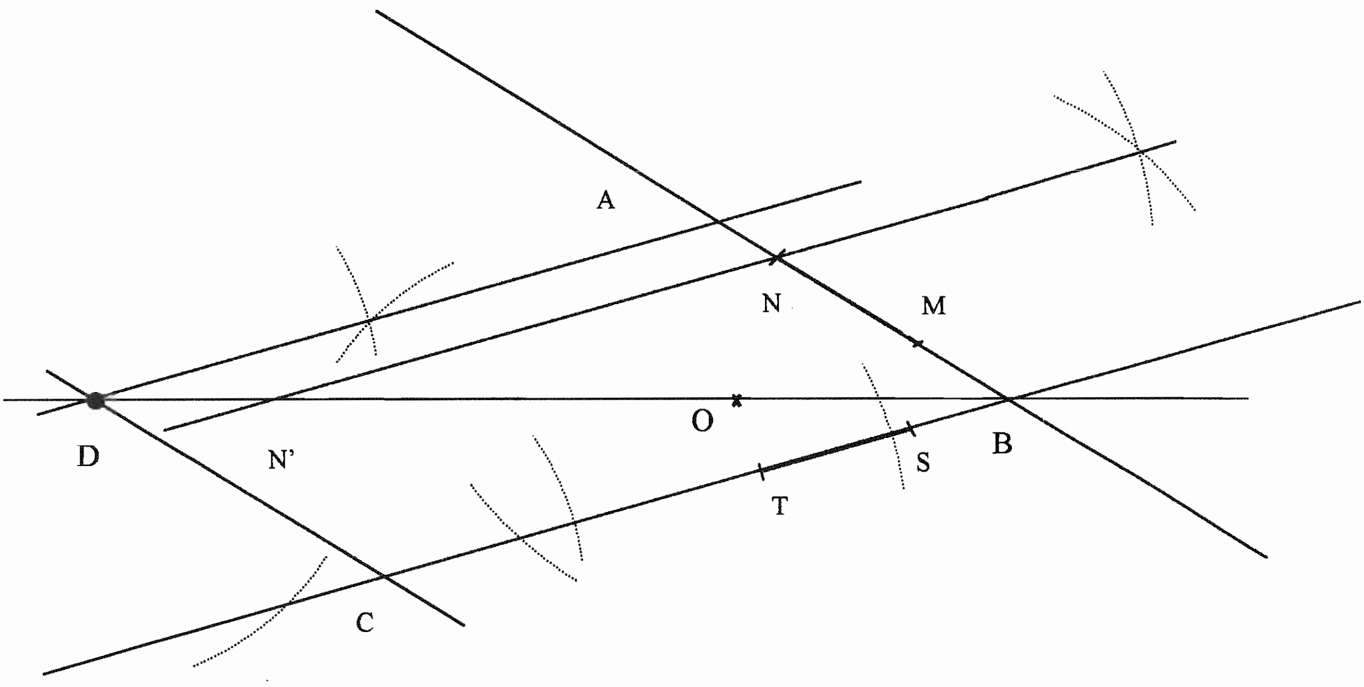
Enfin, on peut écrire $978\,122\,075 = 9\,781 \times 10^5 + 22\,075$, ce qui donne pour A, l'écriture : $A = 928 \times 8 \times 10^{10} + 65\,317 \times 8 \times 10^5 + 928 \times 14\,975 \times 10^5 + 9\,781 \times 10^5 + 22\,075$, donc les chiffres qui précèdent 22 075 correspondent au nombre $928 \times 8 \times 10^5 + 65\,317 \times 8 + 928 \times 14\,975 + 9\,781$ (on a divisé par 10^5). La machine affiche : 756 829 117. Le nombre A est donc : 75 682 911 722 075. (Ce nombre a bien 14 chiffres, comme prévu au 1).

EXERCICE 3 (4 points)

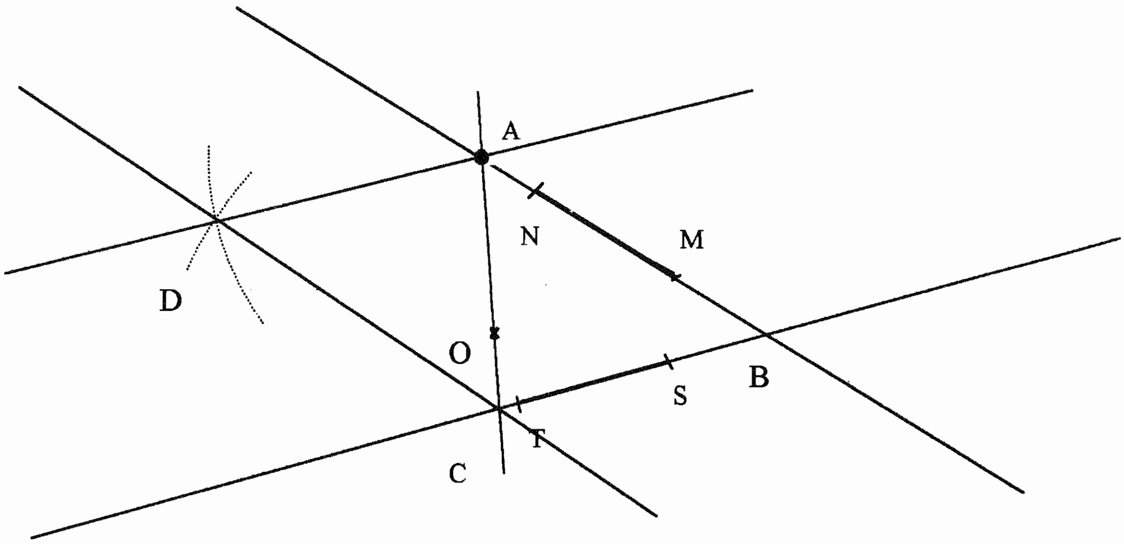
Pour les explications des constructions du 1, on se reportera au 3. On se contentera de faire remarquer ici, que B est l'intersection de (MN) et (ST).

1) a) Il existe de nombreux parallélogrammes possibles. Il y a en particulier deux grandes classes selon que O appartient à la diagonale issue de B ou à celle issue de A (ou par hasard aux deux). Nous donnons un exemple de chaque cas, avec traits de construction apparents. Pour signaler qu'un point est choisi arbitrairement, nous le représentons par un « gros » point noir. (La figure est à l'échelle $\times 1,5$; les traits de construction sont en pointillés)

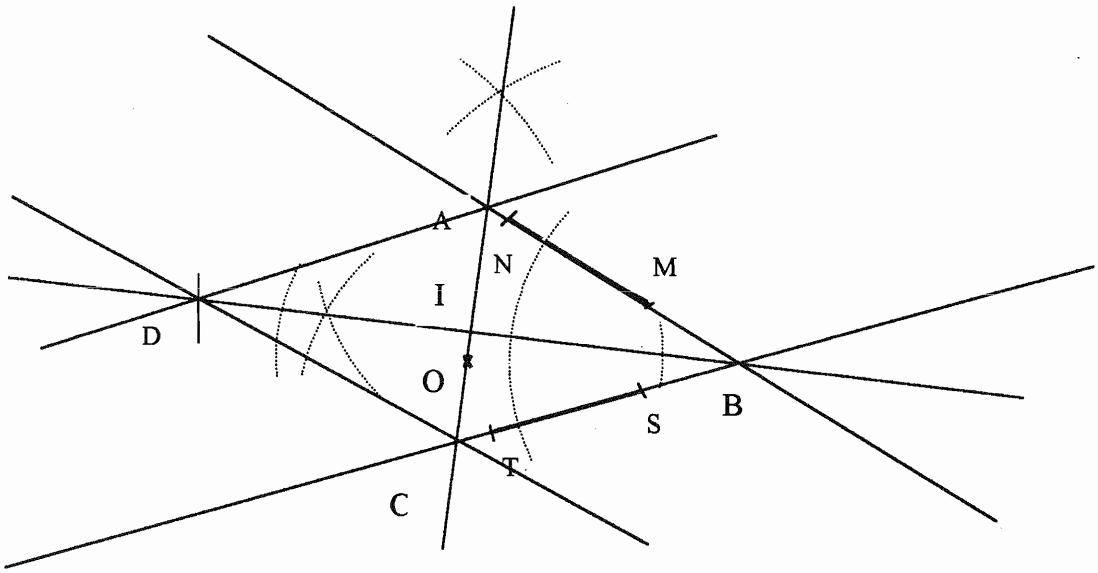
• 1^{er} cas : O appartient à la diagonale issue de B.



• 2ème cas : O appartient à la diagonale (AC).



b) Il n'existe qu'un losange possible (cf. 3) dont voici une construction :



2) Programmes de construction :

a) Construction du parallélogramme :

• 1er cas : O appartient à la diagonale issue de B :

Tracer (BO), puis la parallèle à (ST) issue de N et celle à (MN) issue de T.

Ne conserver que la parallèle dont l'intersection avec (BO) est située le plus loin de B. Il s'agit de celle issue de N. Soit N' l'intersection de cette droite avec (BO).

Choisir un point D sur (BO) tel que N' soit intérieur au segment [BD].
Tracer la parallèle à (ST) passant par D. Nommer A son point d'intersection avec (MN)
Déterminer enfin le point C sur (ST) tel que BC = AD et que C et D soient dans le même demi-plan limité par (MN).
Le quadrilatère ABCD répond à la question.

• 2$^{\text{ème}}$ cas : O appartient à la diagonale (AC) :
Choisir sur (MN), un point A, tel que : M et N soient intérieurs au segment [AB] ; et, C désignant l'intersection de (AO) avec (ST), les points S et T soient intérieurs au segment [BC].
Construire alors le point D, intersection des cercles de centre A et de rayon BC et de centre C et de rayon AB. Le quadrilatère ABCD répond à la question.

b) Construction du losange :
Tracer la bissectrice de l'angle formé par les demi-droites [BN) et [BT). Pour cela, tracer un cercle de centre B et de rayon donné. Il coupe chacune de ces demi-droites en un point. Tracer enfin deux cercles de même rayon ayant pour centre chacun de ces points. Joindre enfin B à l'un des points d'intersection (autre que B) de ces cercles.
Tracer la perpendiculaire issue de O à cette bissectrice.
Marquer les points A et C d'intersection de cette perpendiculaire avec (MN) et (ST). A est sur (MN), C sur (ST).
Marquer le point I d'intersection de la bissectrice et de la perpendiculaire.
Placer le point D sur la bissectrice tel que IB = ID, D distinct de B bien évidemment. Le quadrilatère ABCD répond à la question.

3) Justifications :

a) Le parallélogramme :
• 1$^{\text{er}}$ cas : O appartient à la diagonale issue de B :
On sait que le parallélisme conserve la relation « est entre », par suite, dés que N' est entre B et D, N et M sont aussi situés entre A et B et appartiennent bien au côté [AB]. De même pour S et T par rapport à B et C. D'autre part, pour effectuer la construction du point A, on a utilisé le fait qu'un parallélogramme avait ses côtés opposés parallèles (ou, plus rigoureusement : les supports de ses côtés sont parallèles). Pour construire le point C, nous avons utilisé le fait qu'un parallélogramme avait ses côtés opposés isométriques.

• 2$^{\text{ème}}$ cas : O appartient à la diagonale (AC) :
La possibilité de choisir une droite passant par O et coupant les droites (ST) et (MN) extérieurement aux segments [ST] et [MN] résulte de la donnée du point O extérieur au triangle NBT et intérieur à l'angle en B de ce même triangle. On a ensuite construit le point D en utilisant l'isométrie des côtés du parallélogramme.

b) Le losange :

On sait que les diagonales d'un losange sont axes de symétrie du losange, et donc bissectrices des angles au sommet de ce losange. Il en résulte donc, (BO) n'étant pas bissectrice de l'angle en B, qu'elle ne peut pas être une diagonale. Le point O appartient donc à la diagonale (AC). La diagonale issue de B étant la bissectrice de l'angle en B. D'autre part, les diagonales d'un losange sont perpendiculaires, la diagonale (AC) passe donc par O et est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle en B. D'où la construction des points A et C. On constate, sur la figure, que ces points conviennent, c'est à dire que les points M et N sont bien intérieurs au segment [AB] et les points S et T intérieurs au segment [CB]. Enfin on a construit le point D en utilisant le fait que les diagonales d'un parallélogramme (et donc d'un losange) se coupent en leur milieu.

Remarque : Retour sur le a : Le texte précise que le parallélogramme construit ne doit être ni losange, ni rectangle. Il est clair qu'il ne saurait en aucun cas être rectangle, puisque (MN) et (ST) ne sont pas perpendiculaires. Dans le premier cas, il ne saurait non plus être losange, puisqu'on vient de voir que (BO) ne peut pas être une diagonale d'un losange. Par contre, dans le deuxième cas, il pourrait se faire, avec un peu de malchance, que le choix arbitraire du point A conduise à un losange. Donc, par rapport au problème posé, c'est la construction du premier cas qu'il faut retenir.

DEUXIEME PARTIE (4 POINTS)
TRAVAUX D'ELEVES

Précisons tout d'abord, que le type de problème auquel les élèves sont confrontés est un problème de « comparaison de proportions ». Toutefois, il peut être perçu par les élèves comme un problème de division (et de comparaison de prix unitaires) ou comme un problème de proportionnalité. Nous ferons une analyse des productions à l'aide d'un tableau.

	Type de procédure	Réussite	Rédaction	Erreurs, difficultés, hypothèses
Sylvain	Effectue un « passage à l'unité », c'est-à-dire qu'il calcule combien on peut avoir de fruits pour 1F. Il pose les divisions	Ne répond pas au problème posé. Les indications qu'il donne laissent penser que sa réponse serait fausse.	Pratiquement pas de rédaction de sa démarche. Seuls sont donnés les résultats des calculs. Il répond implicitement pour le fruit le plus cher à cause du petit 1 entouré	Il n'interprète pas correctement le sens de ses calculs. Il pense au contraire, avoir calculé le prix de chaque fruit. On peut penser que le choix des calculs est lié aux nombres en présence : il a cherché à faire les divisions qui étaient les plus simples (dividende supérieur au diviseur)

Bruno	Effectue la même démarche que Sylvain : passage à l'unité : calcul du nombre de fruits pour 1 F. Par contre, il ne pose pas de façon apparente les divisions	Comme Sylvain il ne répond pas au problème posé, et son éventuelle réponse serait probablement fausse.	Aucune rédaction : les calculs ne sont pas présents, seuls les résultats sont énoncés.	Même erreur que Sylvain quant à l'interprétation des calculs. Noter l'erreur de calcul dans 3 ÷ 2, peut-être provient-elle de 2 ÷ 3, suivi d'un arrondissement de 0,66…
Cyril	Il détermine le prix à payer pour un même nombre de fruits de chaque catégorie (20 fruits). Il utilise pour cela les propriétés de linéarité de la proportionnalité.	Sa réponse est correcte et argumentée.	Il rédige sa réponse et la justifie. On pourra remarquer les multiples fautes d'orthographe	Cyril a rencontré une difficulté pour déterminer le prix de 20 citrons. Il a calculé le prix de 21 citrons et a déterminé le prix de 20 citrons : - soit en utilisant une approximation, qui ici, n'engendre pas d'erreur finale - soit en faisant un raisonnement erroné (schème additif : comme 20 = 21 – 1 le prix correspondant est : 14 – 1 = 13 F)
Alexis	Alexis multiplie le prix d'un plateau par le nombre de fruits.	Il ne répond pas au problème posé, et s'il y répondait, ce serait probablement d'une manière erronée.	Il rédige et justifie sa réponse, en accord avec son interprétation.	Il a confondu le prix d'un fruit et celui d'un plateau. Moyennant cette confusion, il calcule donc le prix de chaque plateau. Il a reconnu une situation multiplicative et applique une procédure typique : faire des multiplications.

DEUXIEME VOLET (8 POINTS)

PARTIE DIDACTIQUE

1) L'apprentissage des nombres décimaux appartient au cycle 3. Plus précisément, leur introduction a lieu au CM1 et l'enfant doit acquérir progressivement une maîtrise de l'ordre des décimaux. On peut donc situer les activités proposées en CM1, plus certainement en CM2.

2) Les élèves peuvent recourir aux règles de comparaison sur les entiers de trois façons différentes au moins :
- convertir en cm chaque nombre et se ramener à des comparaisons de mesures exprimées uniquement avec des entiers
- lire et comparer tous les nombres (sauf 3m) sans tenir compte de la virgule
- comparer les parties décimales de chaque nombre (elles comportent toutes 2 chiffres sauf pour 3m) comme des entiers (règle implicite de comparaison des décimaux « de parties entières égales »).

Seul l'exemple de 3m (Johan, 4ème essai) fait exception, toutefois, les élèves peuvent aisément régler le problème sans faire réellement appel aux nombres décimaux, en comparant 3m et 3,19m : il est clair que 3,19m, c'est 3m et un petit peu plus... donc c'est plus grand que 3m.

3)a) Les variables principales portent sur le choix des nombres et leur écriture :

• Ecriture à virgule ou écriture fractionnaire ($5 + \frac{959}{1000}$)

• Nombres de chiffres écrits après la virgule (Le document 3 ne propose que des nombres à deux chiffres après la virgule, y compris 2,50 et non 2,5. Le document 2 propose différents « longueurs de la parties décimales)

• choix des chiffres de la partie décimale (en particulier la présence de zéros)

• Taille de la partie entière : le document 3 ne propose que deux parties entières 2 et 3. Le document 2 en propose plus.

• Taille de la partie décimale « utile » : 6,1 et 6,11 par exemple.

En dehors de ces variables, portant sur les nombres proprement dit, il y a aussi des variables portant sur le sens que l'élève peut leur donner et les représentations qu'il peut utiliser. Pour le document 3, le sens sous-jacent est celui de la mesure, avec la notion de conversion. Dans le document 2, l'élève est incité à faire appel à la graduation d'une droite numérique (aide à la résolution ou moyen de contrôle).

b) On connaît un certain nombre de règles, fausses, utilisées par les élèves dans la comparaison des décimaux. Ces règles reposent toutes sur une assimilation de la partie décimale à un entier auquel on applique les règles de comparaison usuelles. On voit que dans les exemples proposés, ceci va conduire à des contradictions : ainsi 6,21 < 6,101 puisque 21 est plus petit que 101 ; pour la même raison 6,1 < 6,21, mais lorsqu'on essaie de placer les nombres sur la droite numérique, 6,101 et 6,1 sont confondus... Et c'est encore plus visible avec 6,8. La comparaison des nombres $5 + \frac{3}{100}$ et $\frac{3}{1000}$ mène au même genre de contradiction : les parties décimales sont 03 et 003, la plus longue est 003 et elle ne correspond pas au plus grand nombre. Le contexte du problème n'étant pas celui des mesures de longueurs, le recours à des conversions (ramenant les comparaisons à la comparaison de nombres entiers) est peu vraisemblable.

4) Le document le plus adapté est manifestement le document 2. On peut donner trois raisons principales :

- Les variables y prennent beaucoup plus de valeurs et obligent donc l'élève à varier ses procédures, à les choisir pertinemment par rapport aux nombres proposés. L'élève peut même être amené à régler des contradictions issues de deux procédures distinctes.
- L'élève peut avoir recours à différentes représentations des nombres décimaux, ce qui peut constituer un moyen de contrôle.
- L'élève peut répondre au problème en utilisant des transformations d'écriture : écriture à virgule ↔ écriture fractionnaire.

5) Les interventions du maître peuvent être de différents types :

- aides relatives l'organisation de la classe : nouvelle lecture de l'énoncé pour souligner la présence de certains indicateurs d'aide (droite numérique...), répartition des tâches entre élèves, confrontation de points de vue...
- aides relatives à l'organisation de la recherche des élèves, par exemple : planifier les tâches (répartir les nombres en sous-groupes, comparer les nombres qui ont même partie entière...)

- aides relatives à la mobilisation d'outils mathématique : représenter les nombres décimaux sur la droite numérique, transformer les écritures à virgule en écritures fractionnaires et comparer les écritures fractionnaires, rechercher d'autres d'écritures à virgule d'un même nombre (4,40 = 4,4 par exemple), utiliser le tableau « canonique » de numération.

6)a) • Analyse des méthodes proposées par « diagonale » :
Dans l'énoncé, les méthodes proposées sont correctes, la première méthode proposée est probablement la méthode « expert » (rappelons que l'ordre utilisé pour comparer les parties décimales, s'appelle l'ordre lexicographique). Toutefois, il y a une ambiguïté : que doit-on faire avec 7,25 et 7,2 ?.. Faut-il dire que 5 est plus grand que rien ou bien, que s'il n'y a rien, c'est comme s'il y avait 0 ? L'auteur a probablement conscience de cette ambiguïté, puisqu'il propose une deuxième méthode, avec « mise au format ». L'ambiguïté est cette fois levée, mais la méthode ne vaut que si les parties entières sont égales (puisqu'on compare chiffre à chiffre les deux nombres). De plus, elle peut, si elle est utilisée seule ou de manière privilégiée, conforter certaines conceptions erronées (décimal comme couple d'entiers notamment) car elle ramène la comparaison des parties décimales à la comparaison d'entiers.

• Analyse des méthodes proposées par « Apprentissages mathématiques » :
La méthode proposée présente le même inconvénient que la première méthode proposée par « diagonale » : il faut comparer les chiffres des dixièmes, puis des centièmes... Etc. Mais si l'un d'eux manque à l'appel ? On peut d'ailleurs remarquer que l'auteur n'a pas de problème de « mise au format » car tous les nombres qu'il prend pour exemple sont au même format. Notons toutefois, l'algorithme de comparaison est présenté entièrement et traite le cas de deux nombres avec des parties entières différentes, la formulation du « je retiens bien » est assez claire et rigoureuse bien que l'algorithme ne soit pas prolongé après les millièmes.

b) On pourrait proposer la règle suivante :
POUR COMPARER DES NOMBRES DECIMAUX :

- On compare les parties entières. Le plus grand est celui qui a la plus grande partie entière.
- Si les parties entières sont égales, on compare les chiffres de la partie décimale, rang par rang, à partir des dixièmes, jusqu'à ce que deux d'entre eux soient différents. Le plus grand nombre est celui dont le chiffre de ce rang est le plus « grand ». L'absence de chiffre d'un rang donné correspond à la présence d'un 0.

Remarque pour le candidat : Nous avons mis des guillemets autour de « grand » par souci de rigueur, en effet, stricto sensu, ce n'est pas le chiffre qui est le plus grand, mais le nombre représenté par ce chiffre : ainsi 3 est plus grand que 5 en tant que chiffre (signe), mais le nombre qu'il représente est plus petit que celui représenté par 5. Une phrase totalement rigoureuse sur ce point aurait été très lourde.

7) a) La propriété des nombres décimaux mise en évidence dans cet exercice porte sur la notion « d'intercalation » : il existe toujours un nombre décimal strictement compris entre deux autres. Il s'agit d'une propriété « topologique » liée à l'ordre des décimaux : on dit que cet ensemble est « dense ».

b) Le choix des valeurs numériques peut permettre à l'élève de répondre en utilisant le modèle des entiers et donc sans prendre conscience des phénomènes de densité : par exemple : 6 est compris entre 4 et 7, donc 8,6 est compris entre 4 et 7. Ce modèle est mis en défaut par l'exemple 10,1 et 10,2 : il n'y a pas d'entier entre 1 et 2, pourtant il y a des décimaux entre 10,1 et 10,2. Les exemples numériques comme 25 et 25,1 obligent en outre à transformer l'écriture de 25 en 25,0, puis, comme ci-dessus, à passer aux centièmes. C'est les structures même des décimales, dans lesquels les divisions par 10 sont toujours possibles qui est en jeu.

DIJON

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

1) Somme détenue par le fainéant : x initialement ;
- après le premier passage du pont : 2x   après avoir payé le diable : 2x-24
- après le deuxième passage : 2(2x-24) = 4x-48   après avoir payé le diable : 4x-48-24 = 4x-72
- après le troisième passage : 2(4x-72) = 8x-144   il a alors 24F d'où l'équation :

8x-144 = 24   8x = 168   x = 21   <u>le fainéant avait 21F au départ.</u>

2) Calculons la somme détenue par le fainéant aux différentes étapes, en partant de la dernière :
- juste après le troisième passage du pont : 24F ; juste avant le passage, 24:2 = 12 donc 12F
- juste après le deuxième passage, avant de payer le diable : 12+24 = 36 donc 36F
- avant le deuxième passage : 36:2 = 18 donc 18F
- juste après le premier passage : 18+24 = 42 donc 42F. Donc au départ : 42:2 = 21 Soit <u>21F</u>

<u>Autres démarches possibles :</u>
Pour le 1) on peut écrire directement l'équation : 2[2(2x-24)-24] = 24 et développer le premier terme.
Pour le 2), on peut utiliser la représentation suivante :

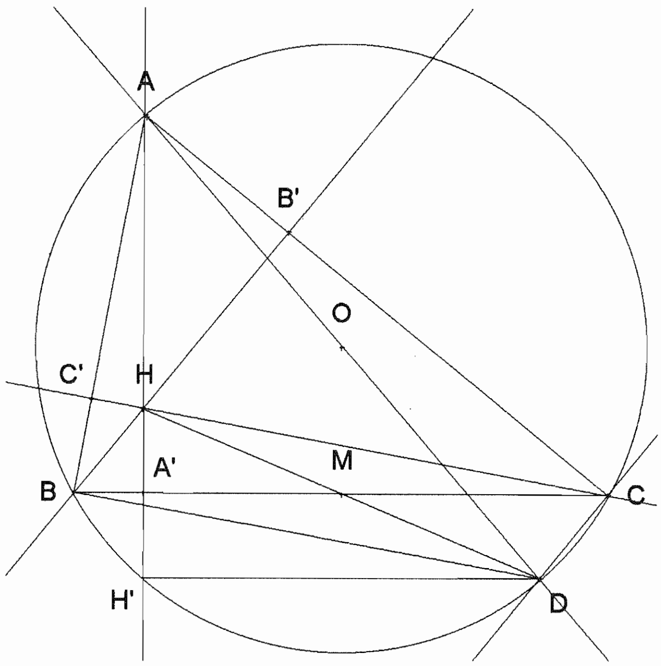
$$\text{Somme au départ.} \xrightarrow{\times 2} \ldots\ldots \xrightarrow{-24} \ldots\ldots \xrightarrow{\times 2} \ldots\ldots \xrightarrow{-24} \ldots\ldots \xrightarrow{\times 2} 24$$

Il suffit d'effectuer le parcours à l'envers, en utilisant les fonctions réciproques :

$$? \xleftarrow[:2]{} \ldots\ldots \xleftarrow[+24]{} \ldots\ldots \xleftarrow[:2]{} \ldots\ldots \xleftarrow[+24]{} \ldots\ldots \xleftarrow[:2]{} 24$$

EXERCICE 2

1) Les points D et A sont diamétralement opposés ; le triangle ADC est inscrit dans le cercle et son côté [AD] est un diamètre du cercle ; il est donc rectangle en C ; donc les droites (DC) et (AC) sont perpendiculaires.
[BB'] est une hauteur du triangle ABC, donc la droite (BB') est perpendiculaire à la droite (AC).
Les droites (BB') et (DC) qui sont toutes les deux perpendiculaires à une même droite (AC) sont donc parallèles.



2) On démontre de la même façon que les droites (CC') et (BD) sont parallèles : en effet, le triangle ADB est rectangle en B ; les droites (CC') et (BD) sont donc toutes les deux perpendiculaires à la droite (AB).
Le quadrilatère BHCD a donc ses côtés parallèles deux à deux, c'est un parallélogramme.

3) **a)** par construction, le triangle AH'D est inscrit dans le cercle, et un de ses côtés [AD] est un diamètre du cercle : il est donc rectangle en H'. Donc le triangle HH'D est rectangle en H'.

b) M est le point d'intersection des diagonales du parallélogramme BHCD, c'est donc le milieu de [HD] ; or le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de son hypoténuse ; donc M est le centre du cercle circonscrit au triangle HH'D.

4) On appelle A' le point intersection des droites (BC) et (AH), [AA'] est une hauteur du triangle ABC puisqu'elle passe par l'orthocentre ; les droites (AA') et (BC) sont donc perpendiculaires. D'autre part, d'après 3), les droites (AA') et (H'D) sont aussi perpendiculaires puisque le triangle HH'D est rectangle en H' ; les droites (BC) et (H'D), toutes les deux perpendiculaires à la droite (AA') sont donc parallèles.
Nous pouvons donc appliquer le théorème de Thalès dans le triangle HH'D, où la droite (A'M) est parallèle à (H'D) : $\dfrac{MH}{MD} = \dfrac{A'H}{A'H'}$

M étant le milieu de [HD], A' est donc le milieu de [HH'] (le rapport ci-dessus est égal à 1).
Nous avons finalement : (HH') perpendiculaire à (BC) et A' milieu de [HH'] : H' est donc le symétrique de H par rapport à la droite (BC).

5) On pourrait montrer d'une façon tout à fait analogue que l'intersection de (BB') et du cercle est le symétrique du point H par rapport à la droite (AC) et que l'intersection de (CC') et du cercle est le symétrique de H par rapport à la droite (AB). Nous pouvons donc dire que les symétriques du point H par rapport aux droites (AB) et (AC) sont sur le cercle.
Énoncé : les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport à ses trois côtés sont sur le cercle circonscrit au triangle.

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

1) On peut distinguer trois groupes d'élèves :

Les élèves A et D : ils mesurent la longueur du segment [EB] sur le dessin donné.

Les élèves B et C : ils ont constaté sur le dessin donné que AE=AD (en vérifiant par mesure) ; d'autre part, ils ont déduit du fait que ABCD est un rectangle que AB=DC=10cm (à moins qu'ils l'aient seulement constaté ?) ; et comme ils lisent sur le dessin que AD=4cm, ils en déduisent que EB=AB-AE=10cm-4cm=6cm.

L'élève E : sa production est difficile à interpréter ; il n'a pas compris la question et a pensé qu'il fallait appliquer une formule (il donne celle du demi périmètre) ; on peut supposer que le 3,4 a été trouvé en mesurant [EB] sur le dessin, et il aurait ensuite fait comme s'il s'agissait de la longueur ? ; le 7,6 qui est barré pourrait laisser penser qu'il a d'abord calculé le périmètre mais que la longueur de [EB] constatée sur le dessin l'aurait incité à diviser par 2 et à prendre le demi périmètre ?

2) description des erreurs :

	A	D	B	C	E
Stratégie	Fausse : confondent le dessin donné avec la figure décrite par l'énoncé ; ils n'ont pas compris que les dimensions du dessin n'étaient pas les dimensions réelles.		Pas tout à fait juste car ils ont constaté sur le dessin l'égalité AE=ED alors qu'ils auraient dû le déduire de l'énoncé (cercle de centre A) ; le reste est correct.		Fausse cf. essai d'interprétation plus haut
Mesure	Correcte	Fausse : a bien vu sur sa règle 3 cm et 6 mm, mais il n'a pas su écrire cette mesure sous forme décimale.	Presque juste (2,2 cm au lieu de 2,3 cm)		Erreur probable dans la mesure de [EB] sur le dessin : 3,4 au lieu de 3,6 cm
Calcul	Pas de calcul		Juste (immédiat : 10-4)		Erreur d'addition dans les décimaux : calcule à partir de la droite comme s'il s'agissait de nombres entiers

SECOND VOLET (8 POINTS)

DIDACTIQUE

QUESTION 1 :

a) Nous ne voyons pas quel schéma un élève pourrait faire pour répondre aux questions, sinon de compléter le plan qui lui est fourni : en effet l'ordre dans lequel les informations sont données permet de placer immédiatement Luc, puis Pierre, Julie et Joël ; il n'est pas nécessaire de faire un autre schéma. Il nous semble donc que l'exercice ne permet pas de faire acquérir la stratégie “ faire un schéma pour répondre à une question ”.

Remarque :Un schéma pourrait être utile si les informations n'étaient pas données dans cet ordre.

b) On peut accepter deux réponses à cette question :

- “ On ne sait pas ” puisque aucune information n'est donnée à ce sujet.

- " Non " en considérant que le contrat didactique dans ce type d'exercices est de donner toutes les informations ; donc si aucun autre enfant n'est mentionné, c'est qu'il n'y en a pas.

QUESTION 2 :

a) Solution 1 :

L'élève réalise deux collections de cubes ayant respectivement 12 et 25 éléments, en comptant un à un ; il trouve le nombre d'éléments de la réunion en comptant un à un jusqu'à 37.

Solution 2 :

L'élève sur-compte à partir de 25 (il dit " 26 ; 27 ; 28 ; ....37 "), en utilisant ses doigts pour représenter la collection de 12.

Solution 3 :

L'élève utilise la numération, plus précisément l'équivalence entre l'écriture usuelle et les écritures additives canoniques 10+10+...+n : 10+2+10+10+5=10+10+10+7 = 37.

Solution 4 :

L'élève utilise un calcul réfléchi, basé sur le comptage de dix en dix, et le sur-comptage pour ajouter des petits nombres : 25 + 12 = 25 + 10 + 2 = 35 + 2 = 37.

Solution 5 :

L'élève calcule la somme en ligne ou bien en posant l'addition en colonne, en ajoutant les unités avec les unités et les dizaines avec les dizaines : 2+5 = 7 1+2 = 3 d'où 37.

Il suffit bien sûr de proposer trois solutions.

Remarques :

1) Entre la procédure de base (solution 1) et les procédures que l'on peut considérer comme expertes (solutions 4 et 5), on peut envisager de nombreuses variantes des solutions ci-dessus :
   - pour la solution 1, les collections peuvent être dessinées ; elles peuvent être structurées en paquets de dix et le comptage un à un remplacé par la connaissance de la numération ("3 paquets de dix et 7" s'écrit "37")
   - pour la solution 3, l'élève peut utiliser les écritures 20+5 et 30+7.
2) le mot " solution " ne nous paraît pas bien adapté ici ; celui de " procédure de résolution " conviendrait mieux.

b) <u>les tâches de l'élève pour réaliser les exercices de la fiche 68 :</u>

Exercice 1
Identifier les pièces dessinées
Compléter des écritures additives " à trous " par les nombres obtenus en regroupant les pièces de même type : 40+5+3 ; 20+5+2+1 ; 30+5+6
Ecrire la somme totale (à partir de l'écriture additive ou à partir des pièces)

Exercice 2
Les deux premiers cas : Marie et Jeanne
repérer dans le " catalogue " les trois (ou deux) objets identiques à ceux dessinés et trouver les prix correspondants
Donner l'écriture additive correspondant à la somme des prix des trois (ou deux) objets : 18+20+6 et 20+6
Calculer cette somme
Identifier les opérations à effectuer, sous forme d'addition à trou ou de soustraction. Calculer les différences : 48-44 et 28-26
Le cas de Luc Trouver les objets correspondant aux trois prix et les dessiner

c) <u>Compétences supplémentaires requises par les exercices de la fiche 68 :</u>
- lire des informations sur des dessins, alors que l'on peut supposer que l'énoncé préliminaire était donné oralement.
- résoudre des problèmes additifs portant sur des mesures, qui ne sont pas des nombres d'éléments de collections : le 10 de la pièce de 10F est une valeur, il est plus abstrait que le 10 de " 10 champignons ".
- calculer des sommes de plus de deux nombres .
- calculer des différences, même si l'opération soustraction n'a pas été identifiée ;
- être capable de traiter trois situations dans un même exercice, et pour les deux premières, de répondre à trois questions successives, la dernière utilisant la réponse à la première.

QUESTION 3 : fiche 85

- <u>difficultés pour identifier l'opération à effectuer</u> : dans les trois exercices, il s'agit d'une soustraction, liée à une situation de transformation ; les états initiaux et finaux sont donnés et il s'agit de trouver la transformation ; ce type de problème n'est pas facile pour des élèves de CP.

  Ils peuvent en effet avoir des difficultés pour se représenter ces situations qui font intervenir le temps et où le nombre cherché ne représente pas directement le nombre d'éléments d'une collection, mais est associé à une action.
- <u>difficultés pour effectuer le calcul</u> : dans les trois cas, la taille des nombres proposés, et de leur différence, ne permet pas de trouver immédiatement le résultat par sur-comptage comme dans le cas d'une différence très petite (cas de la fiche 68) ou par décomptage comme dans le cas où un des deux nombres est très petit (par exemple 34-3).

QUESTION 4

1) Il y a une certaine cohérence entre l'évaluation et les exercices proposés :
* dans la fiche 59 : l'apprentissage visé est la lecture d'énoncés et la prise en compte d'informations ; or l'évaluation porte aussi sur des compétences liées à la lecture des énoncés de problèmes : « repérer les données qui manquent » (exercice 1) ou « voir une réponse figurant dans l'énoncé » (exercice 2), et dans les trois premiers exercices, « décider si l'on peut ou non répondre à la question posée ».
* Dans les autres fiches : il s'agit dans tous les cas de situations additives.
En outre, dans l'évaluation, ce sont des situations de transformations , comme dans la fiche 85.

2) Cependant, il y a des différences importantes :
* Dans le type de situations additives proposées : dans l'exercice préliminaire de la fiche 68, il s'agit d'une situation de réunion de collections et, dans la fiche, de situations de composition d'états (sauf la dernière question sur le reste).

* Dans les procédures de calcul mises en jeu : dans l'évaluation, les seuls calculs sont 15-3 et 15+4, qui peuvent être effectués par surcomptage ou décomptage ; alors que les nombres proposés dans les fiches nécessitaient d'autres procédures : additives dans la fiche 68 (18+6+20), soustractives dans la fiche 85 (50-27).

LILLE

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS) MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE N° 1 ***(Première partie)*** **:**

Question 1 : Le triangle CDM est rectangle en D. La mesure de son aire a_1, exprimée en cm^2, est égale à $\frac{1}{2}$(MD × DC). Ce qui donne : $a_1 = \frac{7x}{2}$.

La mesure de l'aire du quadrilatère ABCM est : a_2 = aire(ABCD) - a_1

aire(ABCD) = $\frac{1}{2} \times AD \times (AB + DC)$. Exprimée en cm^2 , aire(ABCD) = 22

Finalement, $a_2 = 22 - \frac{7x}{2}$

Question 2 : La représentation graphique des variations des mesures de ces deux aires comprend deux segments de droites, correspondant respectivement à une fonction linéaire et une fonction affine définies sur le même intervalle [0 ; 4].

Question 3 : Graphiquement : L'égalité des mesures des aires a_1 et a_2 correspond sur la représentation graphique à l'intersection des deux segments. Ce point a une ordonnée égale à 11 et une abscisse proche de 3,125 (*valeur équidistante de 3 et de 3,25*). On peut se contenter de dire que cette valeur est comprise entre 3,1 et 3,2 (*valeurs approchées à 0,1 près*).

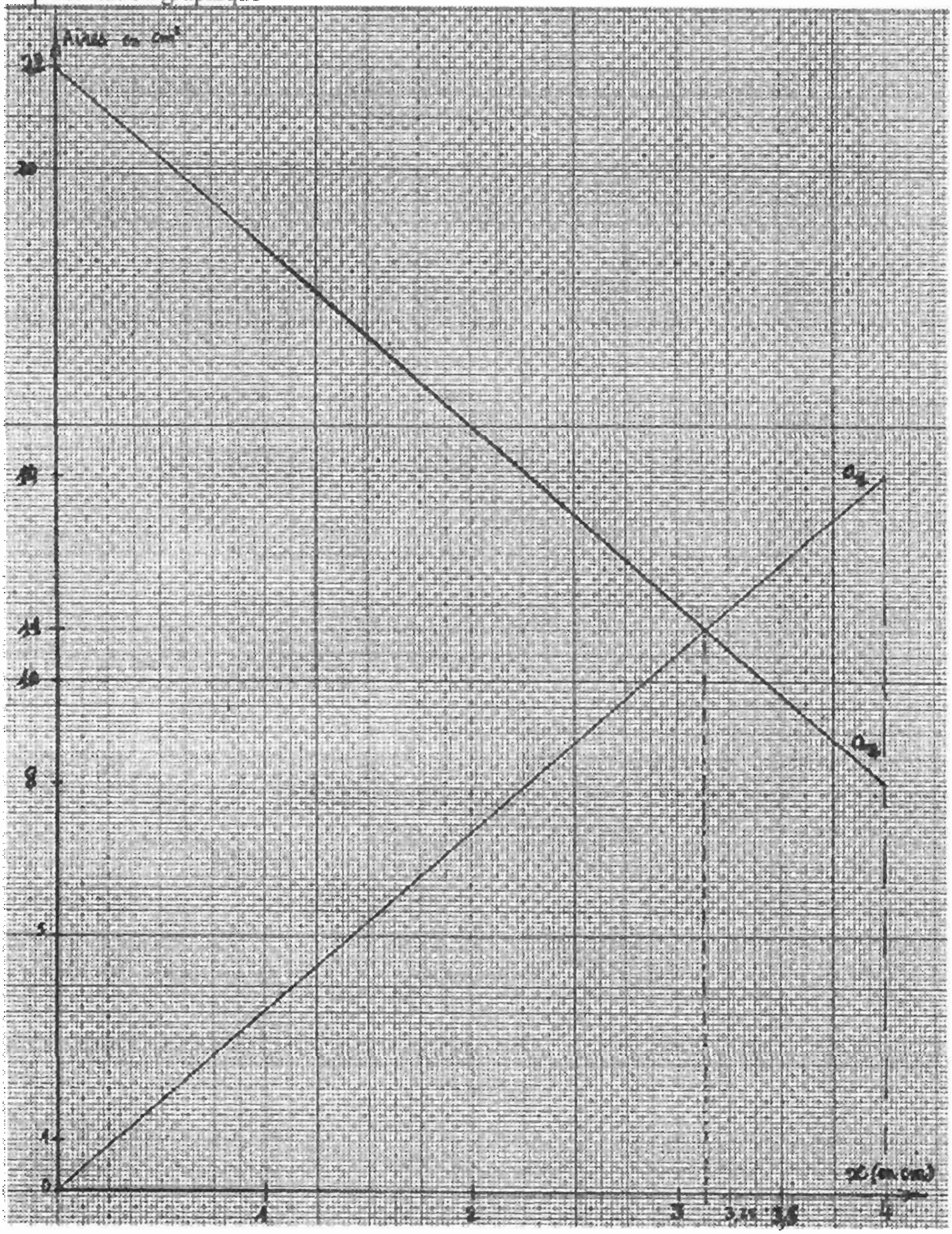
Pour calculer la valeur exacte de x, il suffit de résoudre l'équation $a_1 = a_2$, c'est à dire

$$\frac{7x}{2} = 22 - \frac{7x}{2} .$$

On obtient alors : $x = \frac{22}{7}$.

Autre méthode : On peut faire valoir que lorsque les deux aires sont égales chacune d'elles a pour mesure la moitié de celle du trapèze ABCD, c'est à dire 11cm² Ce qui amène à résoudre l'équation $a_1 = 11$, et permet d'aboutir aussi aisément au même résultat.

Représentation graphique



EXERCICE N° 2 ***(Deuxième partie) :***

Question 1.a : Le problème revient à chercher tous les rectangles ayant 48 mètres de périmètre, dont les mesures des côtés sont des nombres pairs (les intervalles entre deux piquets devant être d'une mesure égale à deux mètres), et, enfin, qui puissent être contenus dans un rectangle de 22 mètres sur 18 mètres. Il y a six solutions différentes, dont on donne la mesure de l'aire dans la troisième colonne du tableau ci-dessous :

largeur en mètres	longueur en mètres	aire (en m²)
2	22	44
4	20	80
6	18	108
8	16	128
10	14	140
12	12	144

Question 1.b : Parmi tous ces enclos le rectangle qui a la plus grande aire est le carré de 12 mètres de côté.

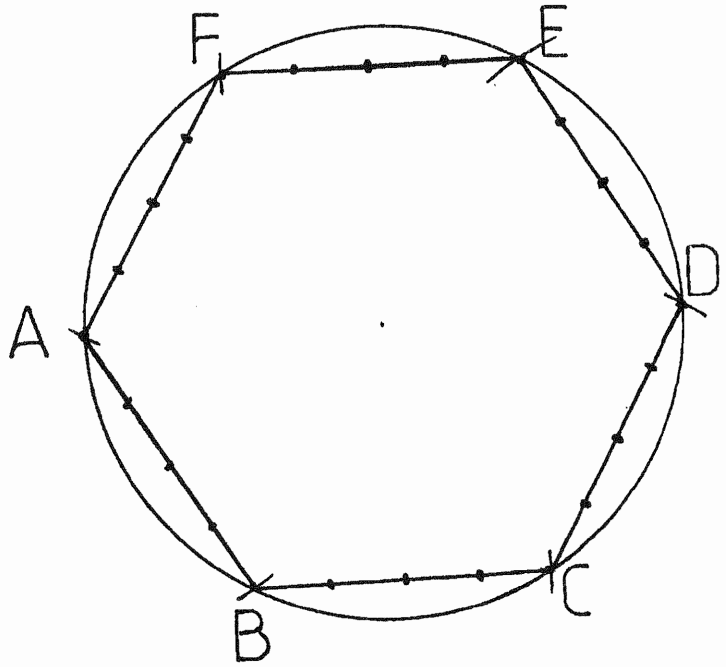
Question 2.a : La première contrainte à respecter concerne le périmètre de l'enclos : Chaque côté de l'hexagone devra mesurer 8 mètres, ce qui est réalisable car cette mesure correspond à quatre intervalles de 2 mètres et $48 = 8 \times 6$. Il reste à vérifier qu'un tel hexagone régulier peut être construit dans le terrain rectangulaire. Or un tel hexagone régulier est inscrit dans un cercle ayant un diamètre de 16 mètres, mesure inférieure à la largeur du terrain rectangulaire. Jacques peut donc construire un enclos ayant la forme d'un hexagone régulier.
L'aire de cet hexagone est équivalente à celle de six triangles équilatéraux de 8 mètres de côté. La hauteur d'un tel triangle équilatéral ayant pour mesure $8\frac{\sqrt{3}}{2}$, l'aire de l'hexagone aura pour mesure (en m²) : $6 \times (\frac{1}{2} \times 8 \times 4\sqrt{3})$

L'aire de l'hexagone, exprimée en m², a pour mesure $96\sqrt{3}$. Une valeur approchée, par défaut, est 166. La mesure de l'aire de l'hexagone est donc supérieure à celle des rectangles précédents.

Question 2.b : A l'échelle 1/200, 8 mètres sur le terrain seront représentés par 4 centimètres. Le côté de l'hexagone mesure 4 cm, ce qui est aussi la mesure du cercle circonscrit à l'hexagone. (La distance entre deux piquets est représentée par 1 cm).
Programme de construction : Placer un point A sur un cercle **C** de rayon 4 cm.
En gardant un rayon égal à 4 cm :

- tracer un arc de cercle de centre A qui coupe le cercle **C** en un point B ;
- tracer un arc de cercle de centre B qui recoupe le cercle **C** en un point C, distinct de A ;
- tracer un arc de cercle de centre C qui recoupe le cercle **C** en un point D, distinct de B ;
- tracer un arc de cercle de centre D qui recoupe le cercle **C** en un point E, distinct de C ;
- tracer un arc de cercle de centre E qui recoupe le cercle **C** en un point F, distinct de D ;
- tracer un arc de cercle de centre F, et vérifier qu'il passe par le point A.
- Construire les segments [AB] , [BC] , [CD] , [DE] , [EF] et [FA] : ce sont les côtés de l'hexagone régulier demandé.

Construction :



Question 3.a : Un tel dodécagone aurait un côté de mesure exactement égale à 4 mètres puisque $48 = 4 \times 12$. Cette mesure est un nombre pair, ce qui satisfait à la condition d'espacement des piquets. En utilisant la formule donnant le rapport entre les mesures de longueur d'un côté d'un dodécagone régulier et du rayon du cercle qui lui est circonscrit, on obtient $r = 4\sqrt{2+\sqrt{3}}$, dont une valeur approchée est 7,728.
La meilleure approximation de la mesure du rayon, au centimètre près, est 7,73 mètres.
Le diamètre du cercle circonscrit mesure donc approximativement 15,46 mètres. Cette mesure étant inférieure à la largeur du terrain rectangulaire, un tel polygone peut être tracé à l'intérieur du terrain. La solution « dodécagonale » est donc possible.

Question 3.b : En m^2 , la mesure de l'aire de l'enclos correspondant serait égale à $(6+3\sqrt{3}) \times 16$, soit environ à 179,136. Cette aire est donc supérieure à celle de l'hexagone.

Question 4. Jacques a envisagé la construction d'enclos ayant des formes de polygones réguliers (carré , hexagone, dodécagone) ayant un nombre croissant de côtés. Les aires de ces enclos sont elles aussi en ordre croissant. Il est donc naturel d'imaginer d'essayer de construire un enclos ayant la forme d'un polygone régulier ayant le plus grand nombre de côtés possible. Il y a une solution : En choisissant de construire un polygone régulier ayant 24 côtés (utilisant ainsi tous les piquets disponibles), chaque côté mesurant deux mètres (le périmètre est bien de 48 mètres), Jacques aura la meilleure solution.

On peut démontrer en les calculant que le diamètre du cercle circonscrit à ce polygone régulier serait d'environ 14,33 mètres et que son aire serait proche de 182,3 m², mais il est bien clair que cela n'était pas demandé dans cette épreuve !

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES.

Question 1. La différence de réussite tient principalement au fait qu'il est plus difficile de placer correctement les chiffres zéro dans l'écriture des chiffres du second nombre que dans celle du premier : Quand on oralise l'écriture en lettres du premier nombre, on entend les nombres constituant les tranches de trois chiffres (trois cent quarante, cent cinq). Il suffit dans ce cas de savoir écrire les nombres de trois chiffres. La lecture seule du second nombre n'indique pas qu'il faut placer des zéros en début de tranche pour obtenir trois chiffres (à l'exception de la première) : On entend « deux mille » et il faut écrire 002, on entend « cinquante-huit » et il faut écrire 058. (Ces zéros sont inutiles pour écrire un nombre ayant moins de trois chiffres).

Question 2. On peut imaginer que les six élèves ayant répondu 2 340 500 ont simplement inversé les mots cinq et cent en fin de nombre, écrivant 500 au lieu de 105. En effet la structure du nombre a été correctement perçue et seuls les trois derniers chiffres ne sont pas ceux attendus.
Pour la réponse 200003004015015, on peut faire l'hypothèse qu'elle ait été produite en accolant les écritures successives de chacun des nombres « deux millions », « trois cents », « quarante » et « mille cent cinq », avec quelque incertitude d'ailleurs puisque le nombre obtenu selon ce principe aurait du être 2000000300401105. Cet élève tente de transcrire ce qui est dit oralement, et n'utilise pas les règles d'écriture.

Question 3. Pour la réponse 17 200 058, les élèves ont respecté la convention d'écriture par tranches de trois chiffres (à l'exception de la première) séparées par un espace remplaçant les mots millions et mille. Cependant, la position des chiffres de la seconde tranche n'est pas correcte. On y voit 200 au lieu de 002 : Il est possible que ces élèves aient d'abord écrit la suite des chiffres correspondant à 17, 2000 et 58, puis aient placé les espaces pour séparer des tranches de trois chiffres.
Pour la réponse 17 2 58, les élèves ont appliqué à la lettre la conclusion des leçons précédentes en remplaçant les mots millions et mille par des espaces ! Cependant ils n'ont pas respecté la convention d'écriture par tranches de trois chiffres.

Question 4. La simple lecture de la réponse 17 200 058 fait entendre la différence avec le nombre donné : On entend « deux cent mille » et non « deux mille ». Ce qui n'est pas le cas pour l7 2 58. En remplaçant à la lecture les espaces par les mots millions et mille, on lirait bien dix-sept millions deux mille cinquante-huit ! La lecture seule ne permet donc pas de faire rejeter cette réponse.

Question 5. En restant dans le contexte de l'exercice et en gardant les mêmes chiffres, on peut proposer à ces élèves de comparer les écritures de dix-sept millions cinquante huit et de dix-sept mille cinquante huit. On pourrait aussi leur demander d'écrire deux mille un en appliquant le même principe...

SECOND VOLET (8 POINTS)

DIDACTIQUE

Question 1.a : On peut envisager plusieurs stratégies possibles :

- Perception visuelle, dans le cas où l'écart entre les cardinaux des collections est suffisamment important et les objets à peu près de même taille.
- Comptage, dénombrement : Les élèves peuvent essayer de « compter », de dénombrer les objets de chacune des collections[1].
- Correspondance terme à terme : L'appariement des objets peut être réalisé en déplaçant les objets, en les pointant, en les reliant (par un trait), en les marquant, en réorganisant les collections. (Note : *La présence de la ligne de séparation empêche les élèves de réaliser effectivement ces appariements, associations d'un cube et d'une bûchette.*)
- Correspondance « paquet à paquet » : L'appariement des groupements équipotents peut se réaliser comme pour une correspondance terme à terme. Les groupements d'objets peuvent être réguliers ou non, et matérialisés de différentes façons (paquets nettement séparés, ou entourés, ou encore marqués avec des couleurs distinctes...) Cette stratégie permet d'accélérer la comparaison tout en permettant un contrôle visuel de l'équipotence des quantités gérées (« *Ici il y en a cinq, et là aussi* »). C'est la procédure que le maître espère.
- Réalisation de groupements équipotents suivie d'un comptage des groupements et des objets restants.

Question 1.b : Parmi les variables didactiques de la situation, on peut relever :

- La taille relative des collections. Pour empêcher que la comparaison puisse résulter d'une évidence visuelle, le maître a choisi deux collections « ayant à peu près le même nombre d'objets ».
- Le nombre d'objets de chacune des collections. Pour rendre plus coûteuses et moins fiables les stratégies de dénombrement et de correspondance terme à terme, le maître a fixé des quantités d'objets importantes (une soixantaine d'objets). Il essaie ainsi d'obliger les élèves à effectuer des groupements.
- la mobilité des objets : Le fait de pouvoir déplacer les objets favorise la réalisation effective des groupements dans chaque région.
- La possibilité de manipuler simultanément les deux collections et leur proximité favorisent l'appariement des groupements.
- La présence de la ligne de séparation entre les deux collections et l'interdiction de déplacer les objets au delà de cette ligne empêchent l'appariement effectif des objets ou de leurs groupements.
- Le caractère homogène de chacune des collections n'induit pas de regroupements particuliers.

L'énoncé demande d'identifier trois variables didactiques.

[1] Cette stratégie risque d'échouer, soit parce que l'élève ne maîtrise pas la comptine pour des nombres de cette taille, soit parce qu'il se trompe dans l'énumération de chacune des collections.

Question 1.c : Exemple de proposition de séance.
Première phase : Compréhension du problème, de la consigne et des contraintes à respecter. Le maître doit accorder aux élèves le temps nécessaire pour qu'ils comprennent le problème nouveau qui leur est posé.
Deuxième phase : Situation d'action, par groupes de quatre : Il s'agit pour les élèves de concevoir des stratégies et de les mettre à l'épreuve, et pour le maître de s'assurer que toutes les consignes sont comprises et respectées, d'éviter les situations de blocage, et, enfin, de relever les stratégies mises en oeuvre. En effet, il est possible que des stratégies ébauchées et pertinentes soient abandonnées ou ne soient pas menées à leur terme et il est naturel que les élèves n'aient pas alors l'idée de les mentionner lors du débat qui suivra.
Troisième phase, collective, en deux temps : Le but en est de pouvoir comparer les avantages et les inconvénients des diverses stratégies, de garder une trace des écritures qui leur correspondent pour pouvoir les analyser collectivement et s'y référer. Il faut d'abord que le maître, pour chaque groupe, aide éventuellement les enfants à décrire, à expliciter leur méthode, pour préparer le second temps où, collectivement, on recensera et comparera les différentes méthodes exploitées, leurs inconvénients et leurs avantages compréhensibles de tous.(*Le rôle du maître dans cette phase est important... et délicat, s'il ne veut pas révéler lui-même la solution qu'il attend*)
Une quatrième phase pourrait consister à proposer aux élèves un échange de méthodes, ou l'expérimentation de l'une d'elles, afin de rendre plus probants les arguments évoqués lors du débat précédent. Une trace écrite traduisant des groupements pourrait alors être conservée.

Question 2.a : La différence principale avec l'activité précédente concerne le matériel. Il n'y a plus d'objets réels, que les enfants pourraient déplacer à leur gré, mais des dessins, fixes sur la feuille. Si les élèves utilisent la procédure de correspondance « paquet à paquet » ils devront éventuellement adapter leur stratégie : matérialiser les groupements (en entourant, coloriant...) et représenter la mise en correspondance (traits, marquage...). De plus, le travail écrit sur la feuille demande davantage d'organisation, il oblige l'élève à anticiper sur les résultats de ses actions : choisir le nombre d'objets avant de matérialiser leur groupement, ne pas faire trop de traits...

Question 2.b :
Arguments favorables :
- Comme dans la situation précédente les deux collections sont séparées par une ligne ;
- La disposition spatiale des poissons rend difficile à gérer la correspondance terme à terme ; celle des bocaux suggère la réalisation de paquets (de 10, de 4 ou de 3)
- Les cardinaux des deux collections sont proches (36 et 34).

Arguments défavorables :
- La disposition spatiale des bocaux, par rangées de 10, peut inciter l'élève à dénombrer.
- La formulation de la consigne (« Est-ce que chaque poisson aura son bocal ? ») induit une correspondance terme à terme. Celle de l'activité précédente faisait référence au nombre.
- Les objets ne sont plus réels mais dessinés (voir question précédente).
- Les difficultés de gestion de l'espace et d'habileté motrice peuvent être suffisamment importantes pour que le maître ne puisse pas évaluer si l'objectif est atteint ou pas.

Remarque 1 : *Les tailles des collections, environ 30 objets, peuvent être considérées comme argument favorable en notant que cela facilite la tâche de l'élève (il s'agit d'une évaluation) et que les nombres sont suffisamment grands pour décourager les élèves qui penseraient à compter. Si le comptage des bocaux est facilité par leur organisation en rangées de 10, celui des poissons est difficile à gérer. Elles peuvent aussi être considérées comme un argument défavorable en disant qu'à cette époque de l'année les élèves maîtrisent probablement le dénombrement de collections de 30 à 40 objets.*

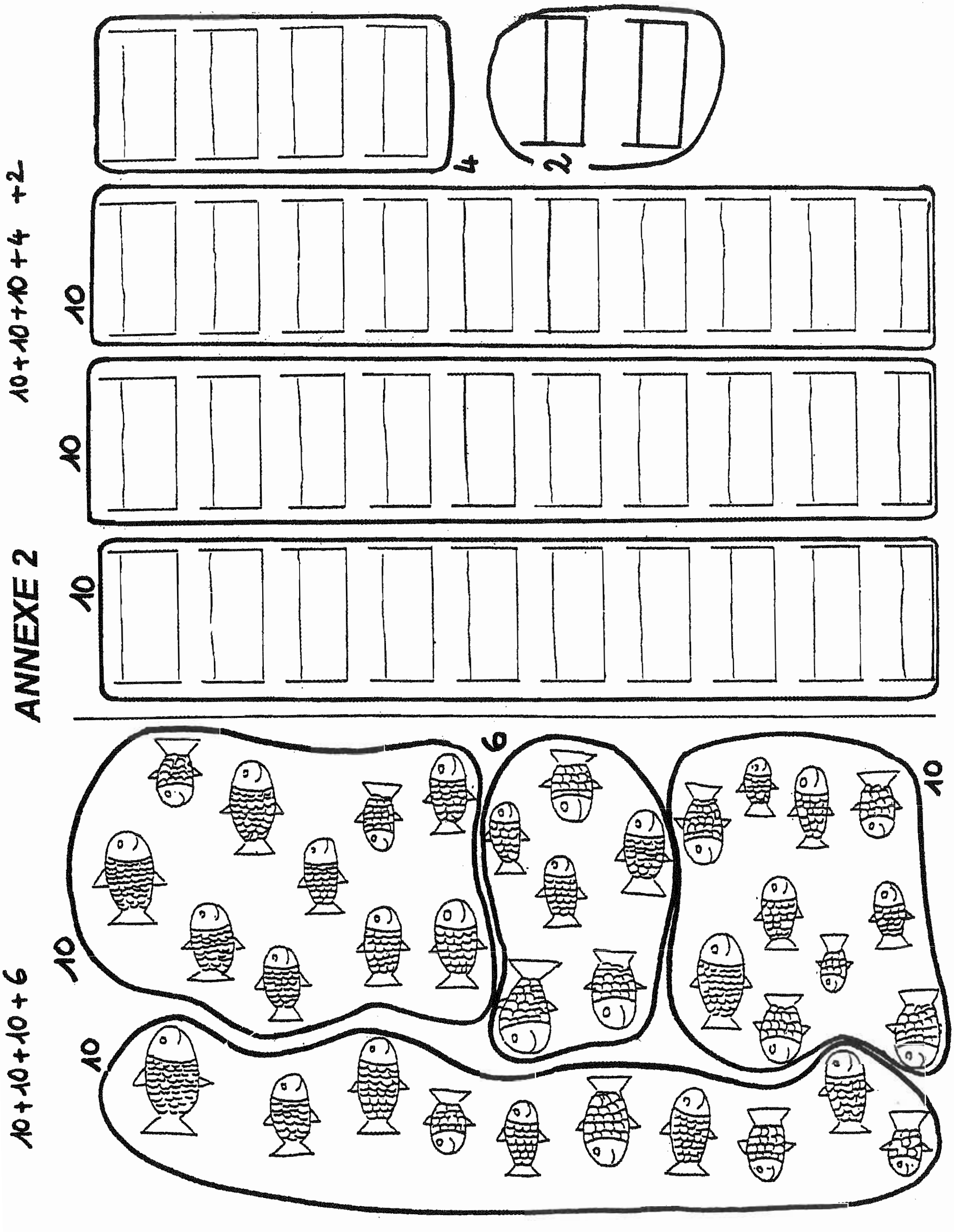
Remarque 2 : *La proximité et l'analogie de l'exercice avec l'activité précédente permettent aux élèves de repérer ce que le maître attend d'eux : faire des paquets et les relier.*

Question 2.c : Les procédures «correspondant aux attentes du maître » doivent montrer la réalisation de paquets, si possible réguliers, et, de préférence encore, utilisant des paquets de 10 ou de 5. La réponse illustre le fait qu'il manque 2 bocaux. Les élèves peuvent aussi faire des paquets de quatre puis de trois bocaux (cette procédure est induite par la disposition en colonnes de 4 ou de 3 bocaux).
Voir feuilles annexes 2 et 3 pages suivantes.

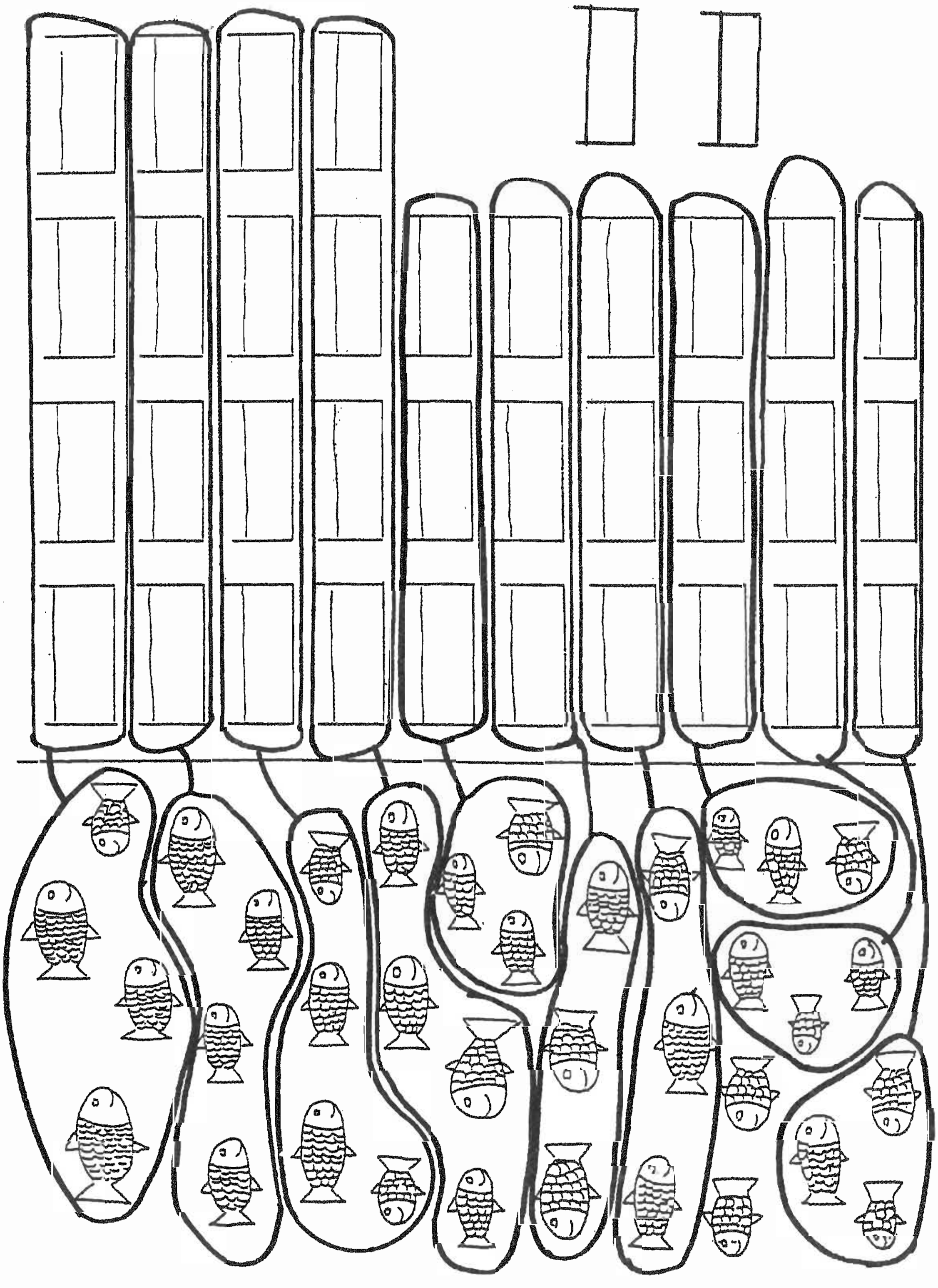
Question 3 .a : Note préalable à la réponse : Les tailles des collections ont été choisies pour obliger les élèves à faire des groupements (leur capacité de comptage a évolué). L'interdiction de manipuler simultanément les deux collections empêche l'appariement et contraint donc les élèves à compter les groupements. De plus, la consigne fait explicitement référence au « nombre d'objets » et le nombre important de cubes et de bûchettes incite à écrire, après les avoir comptées, le nombre de dizaines de chacune des collections.

Réponse proposée : En fin d'année de CP, le maître peut attendre que les élèves utilisent le groupement par dix. Par exemple, les élèves peuvent sortir les cubes de la boîte et faire des groupements de 10 cubes (certains cubes emboîtables peuvent permettre de matérialiser ces groupes de 10, de même longueur), puis noter le nombre final de cubes avant de les replacer dans leur boîte respective. Le codage peut prendre plusieurs formes : pour 135 cubes par exemple, ce pourrait être 13 dizaines et 5,ou bien une centaine trois dizaines et cinq, 13 paquets de 10 et 5, ou, pourquoi pas, 135. La réponse au problème posé devrait pouvoir être donnée d'après la comparaison des codages écrits des deux nombres.

Question 3.b : L'impossibilité de manipuler les deux collections simultanément amène à écrire des nombres, et à raisonner sur les nombres écrits pour comparer les deux quantités. Les compétences « nouvelles » par rapport aux activités précédentes sont donc liées à cet aspect : savoir coder le cardinal d'une collection en utilisant le principe des groupements par 10 et éventuellement, l'écriture positionnelle, savoir comparer des nombres à partir de leurs codages.
Remarque : le fait que dans cette dernière activité la taille des nombres dépasse 100 est secondaire.


ANNEXE 2
10+10+10+4 +2
10
10
10
4
2
10+10+10+6
10
10
6
10

ANNEXE 3



LIMOGES

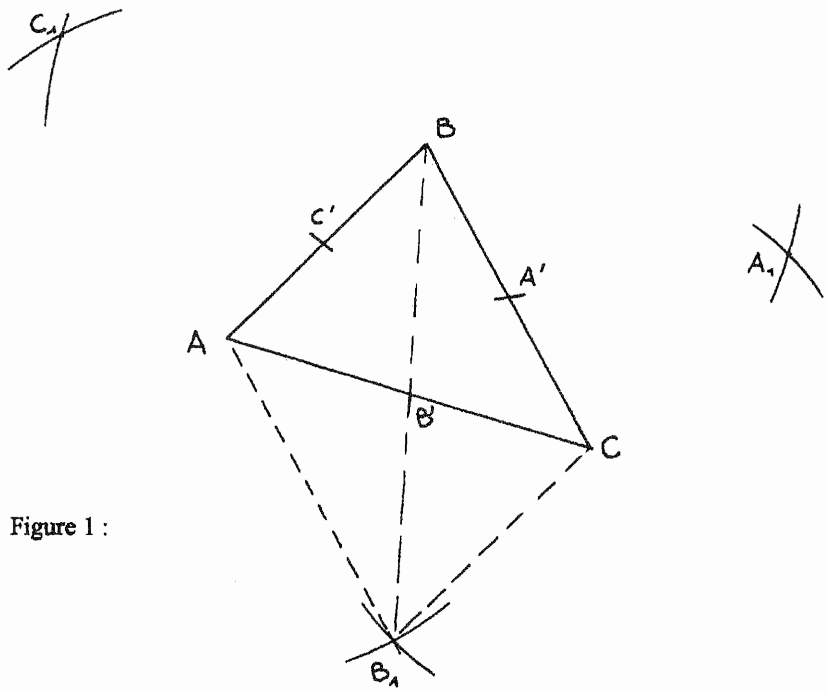
PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

PROBLEME : ***PREMIERE PARTIE***

Question 1 : Voir figure ci-dessous.
Une construction classique du milieu d'un segment consiste à construire la médiatrice de ce segment. Nous proposons ici une autre méthode, demandant de construire moins de points et permettant ainsi d'alléger la figure. Elle s'appuie sur une propriété des diagonales d'un parallélogramme : elles ont le même milieu. On construit au compas le point B_1 tel que $ABCB_1$ soit un parallélogramme. Les cercles, de centre A et de rayon BC, et de centre C et de rayon BA, se coupent en deux points, dont l'un, B_1, est le quatrième sommet d'un parallélogramme.
$ABCB_1$ étant un parallélogramme, le milieu B' de [AC] est l'intersection de $[BB_1]$ et de [AC].
De même, on construit le parallélogramme $BCAC_1$ ($[CC_1]$ et [AB] se coupent en leur milieu commun C'), puis le parallélogramme $CABA_1$ ($[AA_1]$ et [BC] se coupent en leur milieu commun A').

Figure 1 :



Question 2 : La droite passant par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté. A' est le milieu de [BC], B' est le milieu de [AC], donc (A'B') est parallèle à la droite (AB). On montrerait de même que (A'C') est parallèle à (AC) et que (B'C') est parallèle à (BC).

Note : On pouvait également utiliser la réciproque du théorème de Thalès :

A' étant le milieu de [BC], $\frac{CA'}{CB} = \frac{1}{2}$ de même, B' étant le milieu de [AC], $\frac{CB'}{CA} = \frac{1}{2}$

Comme A'∈[BC], B'∈[AC], et $\frac{CA'}{CB} = \frac{CB'}{CA}$, on peut en déduire que la droite (A'B') est parallèle à (AB).

Question 3 : Le quadrilatère BA'B'C' ayant ses côtés opposés parallèles est un parallélogramme. Les triangles A'B'C' et C'BA' sont donc symétriques par rapport au milieu de [A'C']. Par conséquent ils ont la même aire. Un raisonnement analogue montrerait que les triangles AC'B' et B'A'C ont eux aussi la même aire que A'B'C'. L'aire du triangle ABC est égale à la somme des aires des quatre triangles A'B'C', C'BA', AC'B' et B'A'C.

Donc aire(ABC) = 4 × aire(A'B'C'), et **aire(A'B'C') =** $\frac{1}{4}$ **× aire(ABC)**

Question 4.a : Le quadrilatère AC'A'B' est un parallélogramme (d'après la question 2). Ses diagonales [AA'] et [B'C'] ont le même milieu. La droite (A'A) passe donc par le milieu de [B'C']. (AA') est donc la médiane issue de A' du triangle A'B'C'. On montrerait de même que (B'B) et (C'C) sont les médianes issues respectivement de B' et de C' du triangle A'B'C'.

Question 4.b : Les triangles ABC et A'B'C' ayant leurs médianes confondues ont le même centre de gravité.

PROBLEME : *DEUXIEME PARTIE*

Question 1 :

Si r = 0

IK' = 0 : Le point K' est confondu avec I.
JI' = 0 : Le point I' est confondu avec J.
KJ' = 0 : Le point J' est confondu avec K.

Si r= 1

IK' = IJ et comme K' appartient au segment [IJ], K' est confondu avec J.
Par un raisonnement analogue, on obtient I' = K et J' = I.

Question 2.

L'énoncé demande une construction « *à la règle et au compas* » de la figure. On doit interpréter cette condition comme signifiant ***à la règle non graduée et au compas***. Il faut alors utiliser une graduation auxiliaire que l'on projette sur le segment à partager, afin d'obtenir, *à la règle et au compas*, des rapports égaux à $\frac{1}{5}$. La figure que nous donnons suit ce principe. Par exemple, pour obtenir le point K', on trace une demi-droite [Ii) sur laquelle on place cinq points I_1, I_2, I_3, I_4 et I_5 tels que $II_1 = II_2 = II_3 = II_4 = II_5$. D'après le théorème de Thalès, la droite parallèle à (I_5J) et passant par I_1 coupe [IJ] en K' tel que $\frac{IK'}{IJ} = \frac{II_1}{II_5} = \frac{1}{5}$.

Question 3 : Pour tracer les médianes, on peut réutiliser le procédé de la question 1.

Figure 2 :

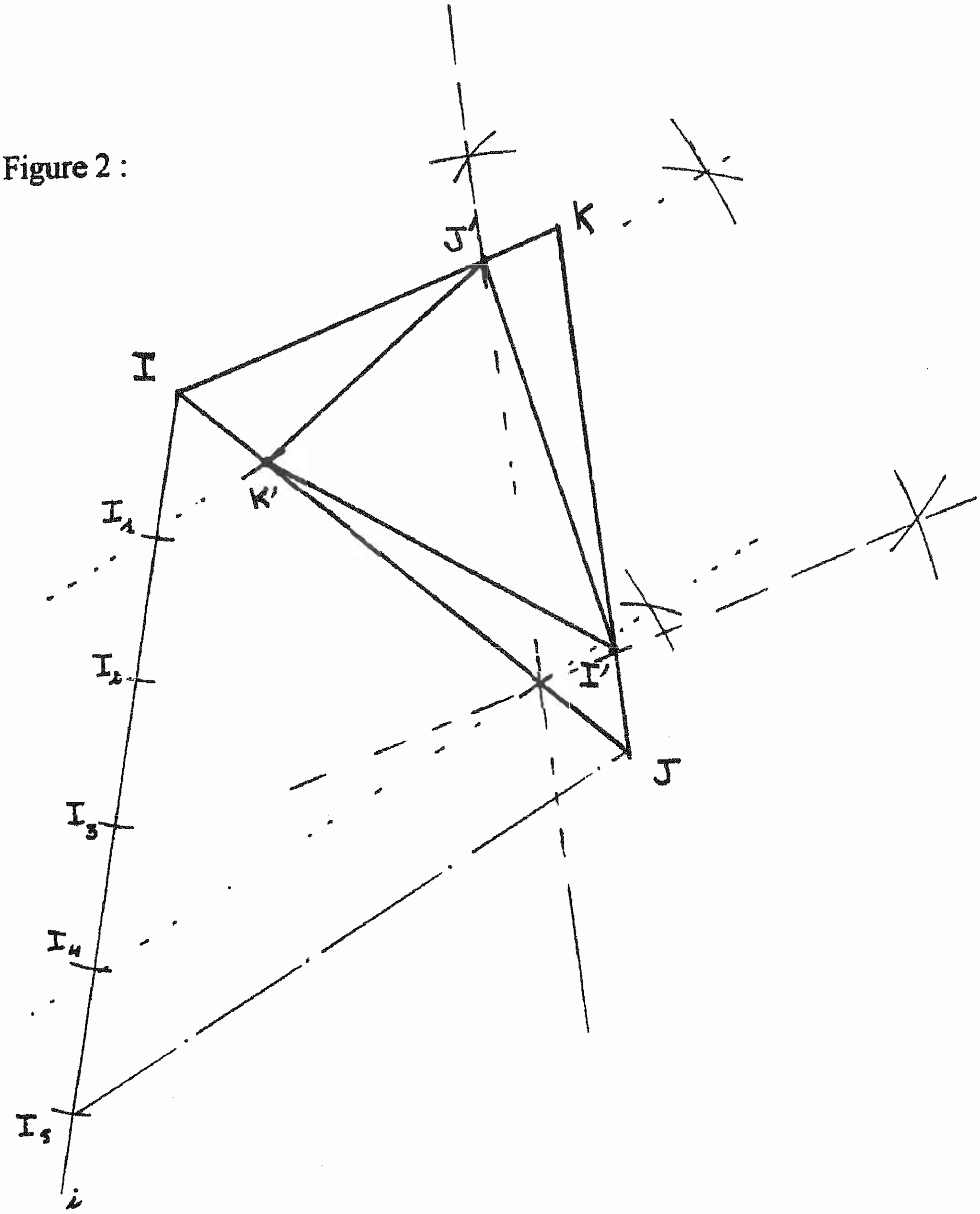
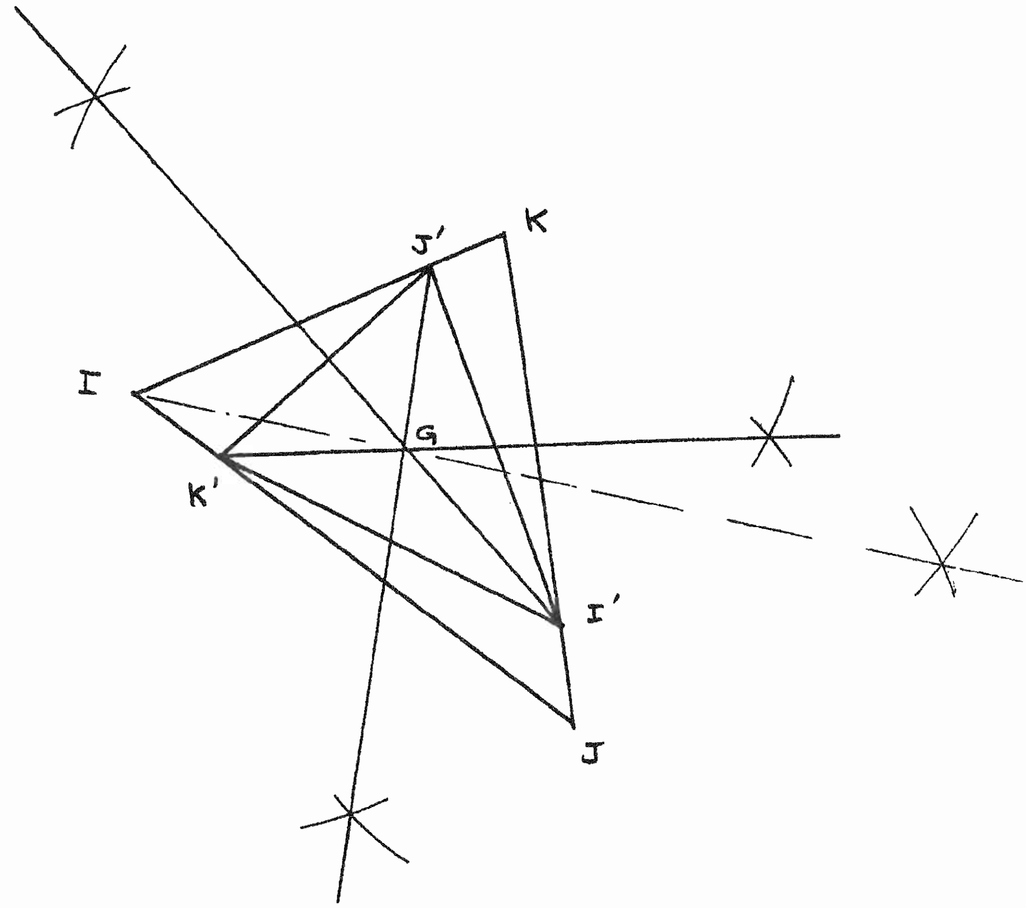


Figure 3 :



Question 4 : Les médianes du triangle I'J'K' sont concourantes au centre de gravité G de I'J'K'. En traçant (IG), (JG) et (KG), on remarque que ces trois droites semblent passer par les milieux des côtés [JK], [IK] et [IJ]. Ces trois droites semblent donc être les médianes du triangle IJK. On peut donc faire la conjecture : **Si r = $\frac{1}{5}$, les triangles IJK et I'J'K' ont le même centre de gravité**. Cette conjecture semble pouvoir être faite indépendamment du rapport r. En effet, pour r = 0, pour r = 1 cette propriété est évidemment vraie. De plus, dans la première partie du problème, les points A', B' et C' sont tels que $\frac{AC'}{AB} = \frac{BA'}{BC} = \frac{CB'}{CA} = \frac{1}{2}$ On y a démontré à la question 4.b que les triangles ABC et A'B'C' avaient le même centre de gravité. Cette propriété est donc également vérifiée pour r = $\frac{1}{2}$ On peut donc énoncer la conjecture générale : **Les triangles IJK et I'J'K' ont le même centre de gravité.**

Note : Cette conjecture est effectivement vraie quelque soit la valeur du rapport r, et peut être démontrée par un calcul vectoriel.

EXERCICE N° 1 :

Question 1 : Exprimé en cm^3 le volume V(30) est égal à celui d'un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont 30 cm, 50 cm et 50 cm, et un litre est égal à 1 dm^3 ou 1000 cm^3. Il faut donc penser à effectuer la conversion demandée : $V(30) = 30 \times 50 \times 50 \times \frac{1}{1000}$.

Soit, exprimé en litres, **V(30) = 75**.

Pour la suite de nos réponses, nous exprimerons toutes les mesures de longueur en décimètres, les mesures de volumes seront obtenues en dm^3, donc directement en litres.

Le volume de liquide V(51) correspond à la somme des volumes de deux parallélépipèdes rectangles, le premier ayant une hauteur de 5 dm, le second de 0,1 dm :

$V(51) = (5 \times 5 \times 5) + (0{,}1 \times 9 \times 9)$

$V(51) = 125 + 8{,}1$ **V(51) = 133,1** (mesure exprimée en litres).

$V(90) = (5 \times 5 \times 5) + ((9 - 5) \times 9 \times 9)$ où 9 - 5 est la hauteur de liquide en dm dans le second cube. $V(90) = 125 + 324$

V(90) = 449 (mesure exprimée en litres).

Question 2 : La fonction V est définie de deux manières différentes selon que la hauteur du liquide est inférieure ou supérieure à 50 centimètres.

Premier cas : **Si** $\mathbf{x \in [0\ ;\ 50]}$, $\mathbf{V(x) = 5 \times 5 \times \frac{x}{10} = 2{,}5\,x}$

Second cas : **Si** $\mathbf{x \in [50\ ;\ 140]}$, $V(x) = (5 \times 5 \times 5) + (\frac{x}{10} - 5) \times 9 \times 9)$

$V(x) = 125 - 405 + 8{,}1\,x$ ce qui donne enfin : $\mathbf{V(x) = 8{,}1\,x - 280}$.

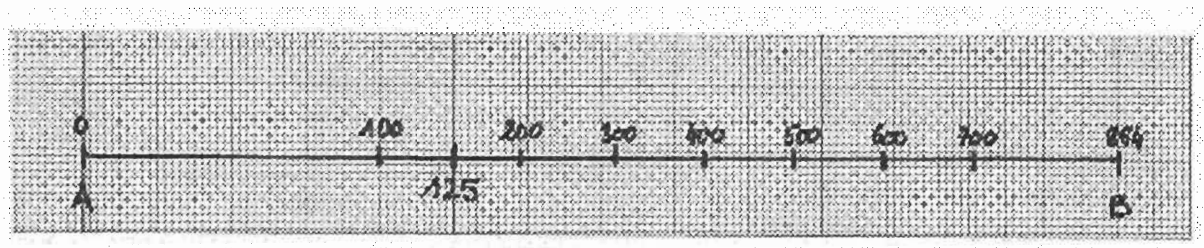
Question 3 : La fonction V est une fonction affine par intervalles.

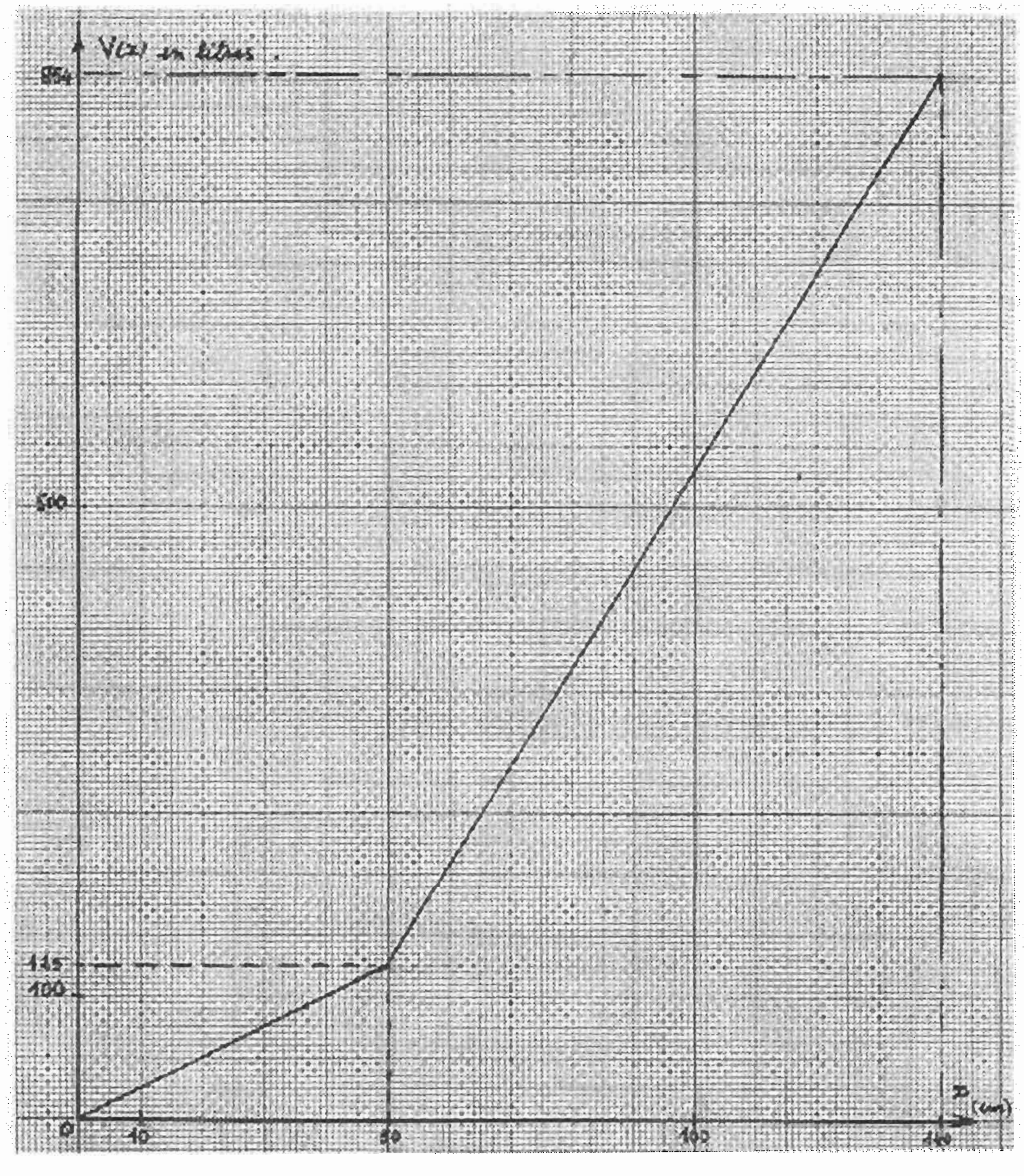
Représentation graphique page suivante.

Question 4 : [AB] a une mesure réelle de 140 cm, à l'échelle $\frac{1}{10}$ cela correspond à un segment de 14 cm de longueur. On peut alors procéder de deux façons :

Soit on note à la place de l'abscisse x de chaque graduation de l'axe des abscisses la valeur du volume V(x) correspondante.

Soit on choisit d'abord les graduations de volume que l'on veut indiquer. Il suffit alors de les situer sur la graduation à la position égale à l'abscisse qui leur correspond.


0
100
200
300
400
500
600
700
854
A
125
B


V(x) en litres
854
500
115
100
0
10
50
100
140
x (cm)

EXERCICE N° 2 :

Question 1 : Les étapes du calcul de 186×31 se retrouvent ci-dessous :

31	186
15	372
7	744
3	1 488
1	2 976
	5766

31 est le premier nombre de la colonne de gauche car $31 < 186$. Tous les nombres de la colonne de gauche étant impairs on ne supprime aucune ligne, et 5 766 est la somme de tous les termes de la colonne de droite.
Remarque : La technique de multiplication étudiée dans cette exercice n'est pas celle que des Egyptiens ont utilisée, mais est ordinairement dénommée « technique à la russe ».

Question 2 :
Première étape :
$25 \times 35 = ((12 \times 2) + 1) \times 35$ (D) : Décomposition, division euclidienne par 2 ;
$25 \times 35 = ((12 \times 2) \times 35) + (1 \times 35)$ (d) : distributivité de $\times$ sur $+$
$25 \times 35 = (12 \times (2 \times 35)) + 35)$ (a) : associativité de la multiplication
$25 \times 35 = (12 \times 70) + 35$

Seconde étape :
$12 \times 70 = (6 \times 2) \times 70$ (D) : Décomposition, division euclidienne par 2 ;
$12 \times 70 = 6 \times (2 \times 70)$ (a) : associativité de la multiplication
$12 \times 70 = 6 \times 140$

Troisième étape :
$6 \times 140 = (3 \times 2) \times 140$ (D) : Décomposition, division euclidienne par 2 ;
$6 \times 140 = 3 \times (2 \times 140)$ (a) : associativité de la multiplication
$6 \times 140 = 3 \times 280$

Quatrième étape :
$3 \times 280 = ((1 \times 2) + 1) \times 280$ (D) : Décomposition, division euclidienne par 2 ;
$3 \times 280 = (2 \times 280) + 280$ (d) : distributivité de $\times$ sur $+$
$2 \times 280 = 1 \times 560 = 560$

Finalement, $25 \times 35 = 560 + 280 + 35$ L'addition de ces trois nombres donne le résultat :
$25 \times 35 = 875$
Les lignes 12×70 et 6×140 sont rayées car $12 \times 70 = 6 \times 140 = 3 \times 280$. Ces deux lignes ne doivent donc pas contribuer à la somme finale.
Les opérations effectuées reposent sur l'utilisation des propriétés de la multiplication et de l'addition des nombres entiers naturels ((D), (d) et (a)) que nous avons relevées, valides quelques soient les nombres entiers naturels choisis . Pour tous les nombres entiers, doubler le nombre de droite est toujours possible, la division euclidienne par 2 de tout entier naturel figurant dans la colonne de gauche est possible. Selon qu'elle produit un reste 1 ou 0, la

conservation ou l'exclusion du nombre de droite est déterminée. Les nombres de gauche étant décroissants, **le processus s'arrête au bout d'un nombre fini de lignes lorsque le nombre 1 apparaît dans la colonne de gauche**. Il s'agit donc bien d'un **algorithme**, **produisant toujours le produit cherché**.

Question 3 : Pour que seule la huitième et dernière ligne soit prise en compte il faut que le premier nombre de la colonne de gauche soit 2^7, égal à 128. D'autre part, comme on a intérêt à diviser par 2 le plus petit des deux termes et à doubler le plus grand pour avoir le moins de lignes possible, le deuxième terme sera donc supérieur à 128. Par exemple : 128×213.

~~128~~	~~213~~
~~64~~	~~426~~
~~32~~	~~852~~
~~16~~	~~1 704~~
~~8~~	~~3 408~~
~~4~~	~~6 816~~
~~2~~	~~13 632~~
1	27 264
	27 264

Ainsi, $128 \times 213 = 27\,264$.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES.

Question 1 : Les objectifs de la maîtresse peuvent concerner des compétences à acquérir ou à réinvestir par les enfants :

Compétences disciplinaires :

- Résoudre un problème (objectif général) ;
- Ranger une collection d'objets selon leur taille (objectif spécifique).

Compétences transversales :

- Imaginer et créer un objet ;
- Fixer son attention et se concentrer sur une tâche ;
- Comprendre et exécuter une consigne ;
- Rechercher le soin et la qualité de la présentation d'un travail ;
- Communiquer oralement sa démarche, comparer différentes productions.

Question 2 : Le critère de rangement défini par la maîtresse ne permet pas de comparer le triangle aux trapèze. Le triangle a une aire inférieure à celle de chaque trapèze mais ne peut être entièrement contenu à l'intérieur de celui-ci sans être découpé en plusieurs morceaux.

Question 3 : Les critères d'analyse des productions des élèves peuvent être choisis en rapport avec certaines des compétences mentionnées à la question précédente.
Par exemple,

a) Les formes sont toutes rangées de la plus grande à la plus petite en partant du bas de la feuille vers le haut ;
b) L'ordre n'est pas totalement respecté mais des sous ensembles de formes sont correctement rangés ;
c) Le triangle (cime du sapin) et le plus grand trapèze sont correctement situés respectivement en haut et en bas de la feuille.
d) Les trapèzes sont tous orientés (grande base en bas) et placés de sorte qu'un axe de symétrie apparaisse, pour évoquer un sapin ;
e) Les formes sont bien collées, avec une belle régularité ;
f) L'explication de l'élève évoque le rangement des formes avec un vocabulaire adapté à la notion d'ordre (plus petit que, plus grand...) ;
g) L'explication de l'élève évoque la disposition des formes avec un vocabulaire spatial adapté (vers le haut, en haut, en bas, dessous...).

	Pierre	**Caroline**	**Elodie**	**Anne**
critère a	oui	oui	non	non (1)
critère b			oui	oui
critère c	oui	oui	oui	oui
critère d	oui	non	oui	non (2)
critère e	oui	non	oui	oui
critère f	oui	oui (3)	oui (3)	non
critère g	oui	oui	oui	non

(1) Une seule forme n'est pas à sa place.
(2) Les trapèzes ne sont pas tous orientés de la même façon (deux classes apparaissent) mais il y a un essai manifeste de symétrie.
(3) L'explication ne concerne que deux formes, la plus petite et la plus grande de toutes, correspondant aux extrémités du sapin.

Question 4 : En n'évoquant pas le savoir mathématique en jeu, la consigne conduit certains élèves à représenter un sapin sans percevoir que la maîtresse souhaitait les faire travailler sur le rangement des formes selon leur taille. Le matériel fourni (la couleur verte du carton) et le moment où a lieu l'activité (en période de Noël) ont renforcé chez ces enfants l'idée qu'il fallait « faire un sapin », tel qu'ils l'imaginaient. On peut repérer au travers de leurs réalisations et explications les élèves qui ont bien identifié les attentes implicites de la maîtresse : Seul Pierre a fait un sapin en sachant qu'il devait utiliser le savoir institutionnalisé lors de la séance précédente (le critère de comparaison des formes).

SECOND VOLET (8 POINTS)

DIDACTIQUE

Question 1.1 : Les élèves répondent à la demande exprimée par la consigne. Ayant déjà manipulé le dispositif expérimental, ils peuvent donner une réponse basée sur une estimation personnelle, éventuellement fondée sur le souvenir de ce qu'ils ont vu auparavant. On peut aussi interpréter l'absence d'une telle réaction comme un effet d'une coutume didactique : d'habitude, en mathématiques, lorsque le maître pose une question, il y a une réponse...

Question 1.2 : Le modèle mathématique permettant de prévoir les dimensions de l'ombre en fonction de celles du carré est la proportionnalité. L'ombre étant elle aussi un carré, elle est l'image du carton par une homothétie ayant la lampe pour centre et pour rapport $\frac{d'}{d}$ (où d désigne la distance entre la source ponctuelle lumineuse et le carton, et d' désigne la distance entre cette source lumineuse et l'écran).
Note : On peut aussi faire référence à l'application du théorème de Thalès.

Question 1.3 : Pour ranger les estimations des élèves, de la moins bonne à la meilleure, il suffit de ranger par ordre croissant les écarts entre les estimations et la bonne mesure, c'est à dire les valeurs absolues des différences entre chacune des estimations et 24.

Question 2.1 : Soit f la fonction qui associe les dimensions de l'ombre à celles du carré de carton. Les élèves qui proposent la réponse fausse 21 peuvent avoir appliqué la propriété des écarts constants : $f(x - 3) = f(x) - 3$, ce qui correspond à un raisonnement tel que « 6, c'est 9 moins 3, donc l'ombre mesure 24 moins 3. »
Ils peuvent également utiliser un modèle additif : Puisque $f(9) = 9 + 15$, $f(x) = x + 15$.
Il en résulte que $f(6) = 6 + 15 = 21$
Les élèves qui proposent la réponse fausse 15 peuvent avoir additionné 9 et 6, ou même soustrait 9 de 24, c'est à dire effectué une opération avec des nombres donnés par le maître, nombres dont ils ont pu éventuellement prendre note, sans identifier clairement ce qu'ils représentent.
Ils ont pu également donner une réponse au hasard, ou grossièrement estimée, mais cette dernière hypothèse est moins probable que les précédentes.

Question 2.2 : Le maître refuse que les élèves discutent des raisons qui ont motivé leur réponse : Soit parce que certains élèves qui ont trouvé la bonne réponse pourraient « tuer » le problème en dévoilant prématurément sa solution mathématique, alors que trop peu d'élèves se sont réellement approprié la situation. Soit parce qu'aucun élève n'a trouvé la solution, et de ce fait, un débat aurait peu de chance de faire progresser les élèves vers la solution. Cette attitude lui permet aussi de ne pas donner lui même des indices quant à la solution.

Question 2.3 : Si les élèves ne savent pas qu'il s'agit d'une situation de proportionnalité, la donnée d'un nombre et de son image ne suffit pas pour reconnaître le modèle. Pour reconnaître une situation de proportionnalité il faut disposer au moins de deux nombres et de leurs images. Les élèves ne pouvaient donc pas « deviner juste ».

Question 2.4 : Les élèves qui essayaient de calculer pour anticiper le résultat et qui ne l'ont pas obtenu peuvent douter de leur stratégie : Leurs calculs ne produisent pas la bonne réponse alors que le hasard a permis de répondre juste. Il s'agit donc peut-être d'une devinette et non d'un problème mathématique.

Question 2.5 : Parmi les décisions possibles pour le maître, plusieurs choix sont possibles :

- Il peut inciter les élèves à renoncer au hasard et à effectuer des calculs, confirmant ainsi que le problème a une solution mathématique. (Il modifie ainsi la situation a-didactique.)
- Il pourrait organiser une discussion entre l'élève qui « devine » et les autres, discussion dont l'issue pourrait être hasardeuse, car il est plus facile de deviner que de chercher une solution mathématique et ce sont justement les élèves qui ont adopté la bonne méthode (chercher le résultat par un calcul) qui ne l'obtiennent pas.
- Il peut enfin ne pas prendre position et refaire une nouvelle expérience en pensant que le hasard a peu de chances de sourire deux fois de suite... Cette dernière attitude semble préférable d'autant plus qu'elle est aussi porteuse de signification pour la majorité des élèves.

Question 3.1 : Les élèves peuvent utiliser :

- la conservation des rapports (propriété multiplicative de linéarité) : « *18, c'est trois fois plus grand que 6, donc l'ombre doit être 3 fois plus grande que 16* » ce qui se traduit mathématiquement par $f(18) = f(3 \times 6) = 3 \times f(6)$, ou bien en utilisant les résultats de la première expérience : « *18, c'est 2 fois 9, donc l'ombre doit être 2 fois plus grande que 24.* », ce qui correspond à $f(18) = f(2 \times 9) = 2 \times f(9)$;
- La propriété additive de linéarité : $f(18) = f(9 + 9) = f(9) + f(9)$, donc $f(18) = 48$;
- Le coefficient de proportionnalité, égal à $\frac{8}{3}$. Cette méthode est cependant peu probable dans une classe de CM1, car $\frac{8}{3}$ est un nombre rationnel non décimal et la multiplication d'un entier naturel par un tel nombre est difficilement accessible à des élèves de ce niveau de classe.
- le passage à l'unité : « *Pour 1 cm, c'est 6 fois moins que pour 6 cm, et pour 18 cm c'est 18 fois plus grand que pour 1 cm* » .Il faut d'abord calculer $f(1)$, puis multiplier le nombre obtenu par 18. Cette dernière procédure pose les mêmes difficultés de calcul et de signification que la précédente méthode car $f(1) = \frac{8}{3}$.

Question 3.2 : Plusieurs hypothèses sont possibles pour expliquer cette différence, conforme d'ailleurs aux hypothèses préalables données dans l'énoncé : Avant toute autre considération il faut rappeler que toute activité de mesurage est sujette à un minimum d'imprécision. Celle-ci peut provenir du mesurage effectué lors de la construction et du découpage du carré de carton, du mesurage effectué lors de l'installation du dispositif expérimental ($\frac{d'}{d} \approx \frac{8}{3}$), ou bien aussi du mesurage effectué par un élève des dimensions de l'ombre projetée. Quant à la prévision exacte donnée par le calcul, elle est, par essence, théorique, et, de ce fait, ne peut que rendre imparfaitement compte de la réalité effectivement constatée, complexe, car dépendante de variables matérielles, physiques. Un modèle n'est qu'un modèle...

Question 3.3 : Le mesurage effectué par un élève était destiné à fournir u
n argument indiscutable, factuel (concret, matériel), pour décider de la validité des procédures de calcul. Cet argument, peu contestable d'ordinaire, ne joue pas son rôle. La difficulté rencontrée par le maître est qu'une procédure correcte et adaptée risque de ne pas apparaître comme telle, puisqu'elle est invalidée par l'expérience.

Question 3.4 : L'élève utilise un « passage à l'unité » pour trouver l'image de 18. Cette procédure correspond à la traditionnelle « règle de trois ».Ce raisonnement repose sur une représentation correcte des relations entre les données. Celles-ci, 9, 24 et 18 sont des nombres entiers. Cet élève pouvait s'attendre à obtenir un résultat entier, comme dans les deux expériences précédentes. Or il n'obtient que des écritures à virgule ! L'utilisation de sa calculatrice le dispense de connaissances plus savantes de calcul dans l'ensemble des nombres rationnels ($\frac{8}{3}$ est un rationnel non décimal), mais les possibilités techniques de sa calculatrice ne lui permettent d'obtenir que des valeurs approchées du résultat. Il n'obtient ni 48, ni 47,9 !

Question 3.5 : La procédure suivie par cet élève est correcte et correspond en fait à un savoir qui devrait être acquis en fin de cycle 3 (Elle correspond au passage à l'unité). Le maître ne peut donc la rejeter. Toutefois elle ne donne pas la valeur entière exacte. Le maître peut se sentir dans l'obligation d'expliquer aux élèves le phénomène rencontré, le problème des valeurs approchées données par des calculatrices (par certaines mais pas par toutes !), ce qui n'était sans doute pas dans son projet initial et correspond à des connaissances qui ne devraient être abordées que plus tard dans la scolarité.

Question 3.6 : Dans de nombreux cas, et en particulier pour des nombres rationnels, le nombre mémorisé et le nombre affiché diffèrent. Certaines calculatrices affichent un résultat arrondi, d'autres un résultat tronqué. D'autre part, sur certaines calculatrices, le fait de taper sur la touche « = » au fur et à mesure de chacune des étapes du calcul leur fait effectuer le calcul sur une valeur approchée moins précise.

Question 3.7 : La présence des calculatrices permet aux élèves de mener à leur terme des raisonnements tels que le passage à l'unité ou l'utilisation du coefficient de proportionnalité tout en évitant l'obstacle de la manipulation des nombres rationnels non décimaux. En privant les élèves de calculatrice, le maître pense les contraindre à trouver et utiliser d'autres méthodes de résolution, exploitant les propriétés de linéarité. Dans le cas présent, les nombres choisis (9,6,18 et leurs images f(9) = 24, f(6) = 16) s'y prêtent : On peut déterminer f(18) en ne calculant « à la main » qu'avec des nombres entiers naturels.

Question 4.1 : Deux réponses sont possibles :

- On peut évoquer la notion de situation-problème en en rappelant les conditions essentielles. (*L'élève doit pouvoir envisager une réponse possible au problème. Ses connaissances sont en principe insuffisantes pour qu'il le résolve immédiatement. La situation-problème doit permettre à l'élève de décider si une réponse trouvée est convenable ou pas. La connaissance visée doit être l'outil le plus adapté pour que l'élève résolve le problème.*)
- On peut également parler de situation a-didactique d'action : La situation donne l'occasion aux élèves de prendre des décisions, d'agir et d'apprécier la pertinence de leur choix pour éventuellement les adapter, modifier, ou confirmer.

Question 4.2 : On peut imaginer qu'à cet instant de la séance une majorité d'élèves dispose de procédures de résolution, correctes ou non, dont celles attendues par le maître. Ce qui explique ainsi la décision du maître de conduire l'inventaire de ces procédures, en espérant que les élèves pourront décider de leur validité et peut-être mettre au jour, en commun, le savoir visé.

Question 4.3 : Une situation de proportionnalité peut être traitée dans différents cadres : numérique, géométrique, fonctionnel, algébrique.

Question 4.4 : Les dimensions du carton et la distance séparant la lampe et l'écran étant constantes, les dimensions de l'ombre et la distance entre le carton et l'écran ne sont pas proportionnelles.

LYON-GRENOBLE

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1 :

Solution 1
La suite étudiée est obtenue en ôtant de la suite de tous les nombres entiers naturels (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,..) les multiples de 7 soit les nombres de forme 7p, p = 1,2,3,4,....
Dans la suite des entiers naturels le rang d'un terme est égal au terme lui-même.
Ce n'est plus le cas pour la suite étudiée. A chaque saut d'un multiple de , il y a un décalage d'une unité sur les rangs des termes suivants :
Suite des entiers naturels

Suite des entiers naturels	nombre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
	rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...

Suite étudiée	nombre	1	2	3	4	5	6	8	9	10	11	12	13	15	16	...
	rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...

Le terme général de la suite est de la forme 7p + k , p = O,1,2,3,..., k = 1,2,3,4,5,6.
Le décalage entre un terme 7p + k et son rang est de p. Ainsi pour déterminer le rang d'un terme m il suffit de faire la division de m par 7, le quotient fournit le décalage.

Solution 2
Etudions la correspondance entre un nombre de la suite et son rang. La définition de la suite oblige à distinguer des tranches successives :

Nombre	1	2	3	4	5	6	
Rang	1	2	3	4	5	6	Rang = Nombre

Nombre	8	9	10	11	12	13	Nombre de la forme 7 + r, r entier variant de 1 à 6
Rang	7	8	9	10	11	12	Rang= Nombre – 1

Nombre	15	16	17	18	19	20	Nombre de la forme 7 % 2 + r.
Rang	13	14	15	16	17	18	Rang = Nombre -2

Nombre	22	23	24	25	26	27	Nombre de la forme 7 % 3 + r.
Rang	19	20	21	22	23	24	Rang = Nombre -3

L'étude du problème est liée à la division euclidienne par 7.
Le décalage entre nombre n et rang r_n varie donc selon le quotient q dans la division euclidienne de n par 7 . Dans la tranche des nombres qui vont de (7 % q + 1) à (7 % q + 6), le rang r_n est égal à (n – q).
Or n – q = (7 % q + r) – q = (6 % q + r).
Le rang du nombre (7 % q + r) est donc (6 % q + r) ;
Cette relation est intéressante car elle permet aussi de trouver le nombre connaissant le rang.

Ces remarques vont être utilisées dans les deux tâches fondamentales qui sont associées à cette suite :

- détermination du rang d'un nombre donné ;
- détermination d'un nombre associé à un rang donné.

1). Déterminer le rang d'un nombre donné :

Rang du terme 47. Ce terme appartient bien à la suite puisqu'il n'est pas un multiple de 7. Le multiple de 7 qui lui immédiatement inférieur est 6 × 7 car 47 = 6 × 7 + 5. Entre 1 et 47, on compte donc 6 multiples de 7 ; on retire du nombre le quotient de 42 par 7, soit 6.
La réponse est : le rang de 47 est **41.**

Rang du terme 741. 741 = 105 × 7 + 6 donc le rang du nombre est 741 - 105 soit **636**.

Plus brièvement :

47 = 6 × 7 + 5 donc 47 se trouve au rang 6 × 6 + 5 = **41**
741 = 105 × 7 + 6 donc 741 se trouve au rang 105 × 6 + 6 = **636**

2) Déterminer un nombre associé à un rang donné : les termes sont regroupés par paquets de 6 et chaque paquet peut être caractérisé par les multiples de 7 entre lesquels il est placé

Terme de rang vingt six : 26 = 4 × 6 + 2, est donc le second terme du paquet compris entre le 4ème et le 5ème paquet de 7 soit entre 28 et 25. C'est donc 28 + 2 soit **30.**

Terme de rang cinquante deux, 52 = 8 × **6** + 4. Il est placé entre 8 7 et 9 7, et c'est le 4ème terme de sa série. Soit 56 + 4 = **60.**

Terme de rang cent trente six, 136 = 22 × 6 + 4. ce terme est donc 22 7 + 4 soit **154.**

Plus brièvement :

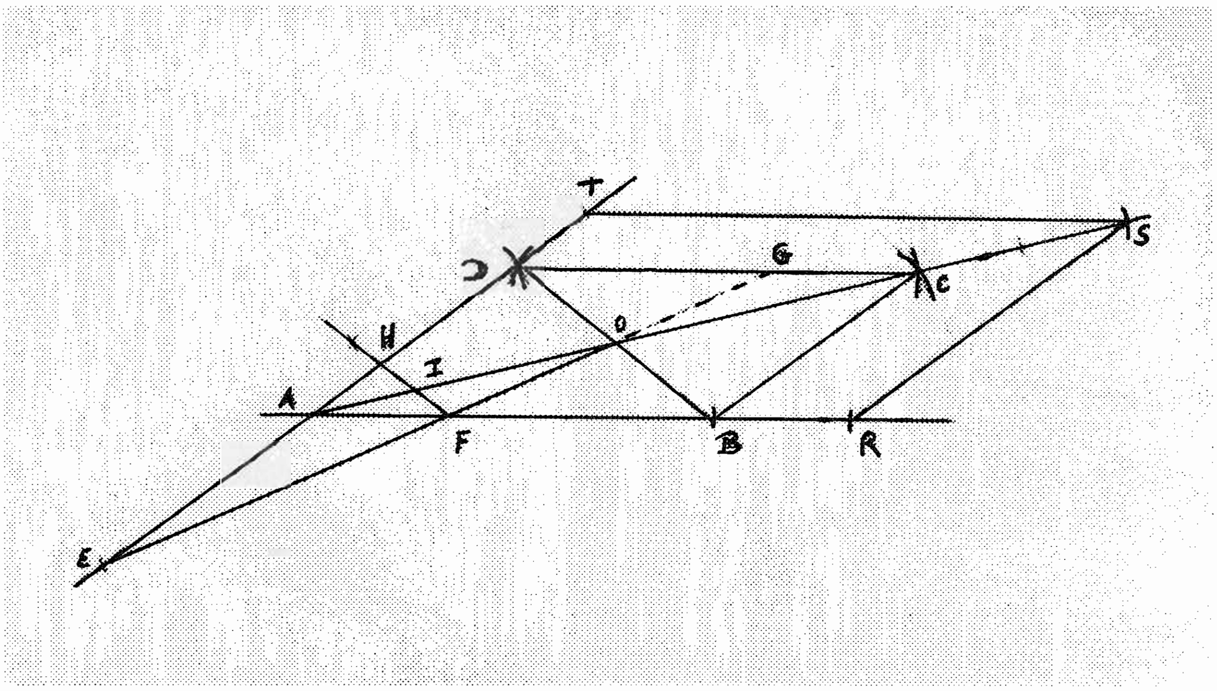
26 est un rang de type $6 \times 4 + 2$, donc il correspond au nombre $7 \times 4 + 2 =$ **30**
52 est un rang de type $6 \times 8 + 4$, donc il correspond au nombre $7 \times 8 + 4 =$ **60**
136 est un rang de type $6 \times 22 + 4$, donc il correspond au nombre $7 \times 22 + 4 =$ **30**

EXERCICE 2 :

1) La figure à l'échelle 1 est réalisée en annexe.
La principale difficulté du tracé vient de la nécessité de reporter non seulement les longueurs des deux côtés du parallélogramme, mais aussi de prendre en compte une troisième contrainte de longueur pour « fixer les angles : par exemple la hauteur entre (AB) et (CD) ou le segment [BD].

Proposition de programme : sur une droite, reporter au compas la longueur AB ; on obtient un segment [A'B'] ; reporter au compas à partir de A' la longueur AD et à partir de B' la longueur BD : le point d'intersection des deux arcs de cercles dans le demi plan au dessus de (AB) est le point D'.
Reporter à partir de D' la longueur AB et à partir de B' la longueur BC : le point d'intersection des arcs de cercle dans le demi plan délimité par (B'D') et ne contenant pas A' est C'.
On obtient un parallélogramme convexe (A'B'C'D' ou A'B'D'C' selon les choix de construction), superposable à ABCD.

2) Figure d'appui :



Solution 1

Dans le triangle BDE :

A est milieu de [DE], car E est symétrique de D par rapport à A.

O est milieu de [BD], car O est le centre du parallélogramme (point d'intersection des diagonales)

Donc les droites (BA) et (OE) sont les médianes de ce triangle.

D'après une propriété liée aux médianes, le point F (point d'intersection de ces médianes) est donc situé au tiers de chaque segment [EO] et [AB] à partir des points O et A, donc : $AF = \frac{1}{3}AB$.

Solution 2

Soit G le point d'intersection de (EF) et (CD).

A est milieu de [DE], car E est symétrique de D par rapport à A ; (AF) est parallèle à (DG) par hypothèse du parallélogramme ; le théorème de Thalès dans le triangle DGE donne AF = $\frac{1}{2}$ DG.

Dans la symétrie centrale de centre O, puisque ABCD est un parallélogramme, on a les correspondances suivantes ($2^{\text{ère}}$ ligne vers $3^{\text{ème}}$ ligne du tableau)

hyp	hyp	donc	donc(1)	donc
C	D	(DG)	F	[AF]
A	B	(AB)	G	[GC]

(1) comme points d'intersection d'une droite passant par O et de deux droites symétriques par rapport à O.

Il vient donc AF = GC = $\frac{1}{2}$ DG. Donc AF = $\frac{1}{3}$ CD = $\frac{1}{3}$ AB ;

3) Dans le triangle ABD, on considère les droites parallèles (FH) et (BD) et on applique le théorème de Thalès, d'où : $\frac{AH}{AD} = \frac{AF}{AB} = \frac{1}{3}$.

Dans le triangle AOB, on considère les droites parallèles (FI) et (BO) qui permettent d'utiliser le théorème de Thalès, d'où $\frac{AI}{AO} = \frac{AF}{AB} = \frac{1}{3}$; or AC = 2AO, donc $\frac{AI}{AC} = \frac{1}{6}$.

4) a) AR = $\frac{4}{3}$ AB = AB + $\frac{1}{3}$AB = AB + AF : il suffit de reporter un segment [BR] de même longueur que [AF] sur la droite (AB) de telle façon que A, B, R soient alignés dans cet ordre.

AS = $\frac{4}{3}$AC = AC + $\frac{1}{3}$AC = AC + 2 AI : il suffit de reporter un segment [CS] de longueur double de [AI] sur la droite (AC) de telle façon que A, C, S soient alignés dans cet ordre.

AT = $\frac{4}{3}$AD = AD + $\frac{1}{3}$AD = AD + AH : il suffit de reporter un segment [DT] de même longueur que [AH] sur la droite (AD) de telle façon que A, D, T soient alignés dans cet ordre.

b)
<u>Solution 1</u>

Dans le triangle ATS, on a : $\frac{AT}{AD} = \frac{AS}{AC} = \frac{4}{3}$ d'après la réciproque du théorème de Thalès : (DC) // (TS). Et comme (DC) // (AB), on a (TS) // (AR).

De la même façon, en considérant le triangle ASR, on montrerait que (RS) // (BC) et donc : (RS) // (AT).

Le quadrilatère ARST a deux paires de côtés parallèles ; c'est donc un parallélogramme.

<u>Solution 2</u>

Dans l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{4}{3}$, on a les correspondances suivantes :

				donc	et
A	B	C	D	(CD)	(BC)
A	R	S	T	(ST)	(RS)

Par propriété de parallélisme entre droite et droite homothétique, on a donc :
(CD) // (ST) donc (ST) // (AR) ; de même (BC) // (RS) donc (RS) // (AT)
Le quadrilatère ARST est donc un parallélogramme.

c) ARST est un agrandissement de ABCD dans le rapport $\frac{4}{3}$; les aires de ces figures sont donc dans le rapport $\frac{16}{9}$. Aire ARST = (aire ABCD) × $\frac{16}{9}$.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

1) Les connaissances et les compétences qui pourront être évaluées à l'aide de ce problème sont de deux ordres :

- des compétences liées à la résolution de problèmes : communiquer sa démarche et ses résultats ;
- des connaissances et compétences liées à la proportionnalité :
  - reconnaître une situation de proportionnalité (référence culturelle : prix et masses sont proportionnelles)
  - traiter cette situation par un moyen de son choix, ce qui passe par l'identification des grandeurs en jeu et les relations qui les lient.

2) Analyse des productions d'élèves :

	élève 1 Gaël	élève 2 Mariem
Procédures	Il utilise la linéarité sous forme additive et multiplicative en calculant des résultats intermédiaires sur une décomposition du nombre donné. si possible en multiples ou diviseurs de 100.	Elle utilise la linéarité additive en décomposant les nombres dont il faut calculer l'image selon un schéma analogue au précédent. Elle commence par utiliser la linéarité multiplicative pour les multiples et aussi les diviseurs de 100, puis change de procédure pour les nombres inférieurs à 100..
Erreurs et Difficultés	-Il ne réussit cette procédure que pour les multiples ou diviseurs de 100 ; - Pour les nombres inférieurs à 100, il fait comme si 1 g coûtait 1 F ; - Il ne semble pas sensible pour la question 3 à l'ordre de grandeur du résultat. En effet, pour 325 g il propose un prix inférieur à celui trouvé pour 250 g. On ne le voit pas utiliser la propriété de monotonie croissante de cette fonction linéaire	- Les images des nombres 25 et 30 sont calculées par rapport à celles de 100 en utilisant mal une procédure soustractive. - Pour les nombres inférieurs à 1 F qu'elle obtient, elle fait comme l'élève précédent "1 g coûte 1 F". Elle inverse aussi des soustractions. - Elle ne paraît pas engager de contrôle sur ses calculs à partir des résultats et de leur vraisemblance éventuelle dans la question 2. Elle ne fait pas référence à la monotonie de la fonction linéaire, dans ce cas monotonie croissante.
Origine	- Il semble qu'il y ait un obstacle dans l'utilisation de la linéarité multiplicative, quand les nombres engagés sont plus petits que le nombre de départ (même s'ils sont des diviseurs).	- L'application de la procédure additive butte sur les nombres inférieur à 100 (sauf 50) : elle retire du prix de 100 g le nombre qui est utilisé pour obtenir la masse qui sera ajouté ultérieurement, ce qui revient à «retirer des nombres de grammes de nombres de francs». Autre hypothèse : elle applique une décomposition soustractive, mais « oublie » de rechercher les images de 75 (question 2) et 70 (question 3) .
Remarques	Le problème inverse n'est pas traité	Le problème inverse est traité correctement sur un mode additif.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

QUESTION 1 : ANALYSE DE L'ACTIVITÉ 1

Question 1.1 :
Connaissances relatives aux quadrilatères : ce sont des connaissances qui vont pouvoir être engagées dans les deux phases du jeu du portrait.

- identification et reconnaissance des quadrilatères à partir des propriétés connues au niveau scolaire considéré ;
- propriétés des figures et utilisation des instruments pour vérifier ces propriétés sur les figures ;
- maîtrise du vocabulaires correspondant aux quadrilatères et à leurs propriétés.

Compétences générales qui paraissent être mise en œuvre au cours de l'activité :

- formuler des questions en utilisant un vocabulaire spécifique et en respectant les contraintes fixées par la consigne ;
- prendre en compte les réponses positives et négatives ;
- prendre en compte les questions de autres (il y a deux façons de le faire, la première consiste à utiliser les informations apportées aux autres, la seconde consiste à ne pas répéter ces questions) ;
- faire des inférences (ou déductions) à partir de la réponse ;
- poser des questions en fonction des informations déjà disponibles.

Question 1.2
Les figures et leur rôle :

- ce sont toutes des quadrilatères, certaines ayant un « nom », d'autres plus « quelconques » ;
- la position standard peut être « standard » ou non : comme les figures ne sont pas manipulables (mais la feuille l'est) il faut reconnaître les figures indépendamment de leur position ;
- plusieurs figures ont les mêmes propriétés, le même nom (par exemple les rectangles) ; il est nécessaire de prendre en compte les dimensions de ces figures pour les différencier ;
- des figures différentes paraissent avoir des côtés de même longueur ; aussi est-il nécessaire d' utiliser d'autres propriétés pour les distinguer ;
- toutes les figures sont convexes, ce facteur ne peut pas être utilisé pour discriminer les figures ;
- certaines figures ont un axe de symétrie, ce qui peut être utilisé pour les discriminer ;
- deux figures n'ont pas de propriétés particulières, quadrilatères quelconques.

Question 1.3 :

Dans cette situation l'élève se trouve en position d'émetteur et de producteur d'un texte. Il dirige son attention vers une figure dont il doit assurer une description. Il doit donc identifier les propriétés de la figure et en donner une liste aussi exhaustive que possible. Il doit s'assurer que les propriétés qu'il a identifiées permettent de reconnaître la figure et elle seule, elle doit être reconnue par le récepteur sans ambiguïté. Enfin, il doit rédiger ce qui, dans le contexte de la situation est un message, donc trouver les éléments de vocabulaire qui permettent de rendre compte des propriétés.

Dans le cas de la figure B (seul parallélogramme « quelconque »), il est possible de proposer :

- côtés opposés parallèles deux à deux, pas d'angle droit, tous les côtés n'ont pas la même longueur ;
- une paire de côtés parallèles et de même longueur, pas d'angle droit, tous les côtés n'ont pas la même longueur ;
- des côtés opposés de même longueur, pas d'angle droit, tous les côtés n'ont pas la même longueur ;
- deux côtés de 2,5 cm, deux côtés de 1,5 cm, pas d'angle droit ;
- etc..

QUESTION 2 : ANALYSE DE L'ACTIVITÉ 2

Question 2.1 :

- La réponse à la question a est R (le quadrilatère désigné par R)
- La réponse à la question b est E, P, F (les quadrilatères désignés par E, P, F).

E peut être omis dans la mesure où le dessin peut être considéré comme non rectangle.

Question 2.2 :

Les instruments que les élèves vont pouvoir utiliser sont des instruments couramment utilisés à l'école primaire pour **effectuer des tracés** et **vérifier des propriétés** :

- la règle graduée et l'équerre vont être utilisées pour tracer les angles droits et vérifier que des angles sont droits, elles auront la même fonction vis à vis du parallélisme, elles seront utilisées dans le tracé d'axes de symétries ;
- le compas sera utilisé pour comparer des longueurs ;
- le papier calque peut être utilisé pour les pliages afin de vérifier des parallélismes te la présence d'axes de symétries.

Question 2.3 :

Les difficultés que peuvent rencontrer les enfants sont de trois ordres :

- des difficultés d'ordre géométrique
    - dans l'attribution de propriétés aux figures proposées : parallélisme confondu avec

"ne coupe pas sur la figure" ; angle droit lié à une position précise, vertical horizontal, axe de symétrie assimilé à diagonale ou reconnu seulement en position particulière, verticale ou horizontale ;
- dans l'utilisation des instruments ;
- dans l'interprétation des dessins qui lui sont proposés : quelle incertitude de lecture se permet-il ? accepte-t-il E comme rectangle ou non ? On trouve ici les difficultés inhérentes à une première approche perceptive et instrumentale de la géométrie.

- des difficultés liées à des compétences générales :
  - hésitation dans le choix d'une stratégie : partir d'une propriété pour parcourir les figures ou partir des figures pour recherche les propriétés ;
  - organisation du travail de parcours de l'ensemble des figures ;
  - gestion simultanée de deux contraintes ;
  - compréhension de termes comme "au moins", "que".

- des difficultés liées à l'interprétation de la tâche :
  - l'élève ne cherche qu'une seule réponse pour chaque description ;
  - l'élève peut penser que les deux conditions sont indépendantes ce qui le conduira à proposer deux réponses pour a et deux réponses pour b .

QUESTION 3 :

On proposera aux élèves huit figures parmi lesquelles :
- deux carrés, l'un en position usuelle (H), l'autre en position "losange" (C) ;
- deux rectangles, l'un en position usuelle (F) , l'autre penché (E ou P) (mais on pourrait aussi proposer E et P) ;
- quatre intrus qui ont partiellement des propriétés des précédents ou bien des ressemblances. C'est le cas de K qui a deux angles droits, de B et G qui peuvent apparaître comme rectangle et carré penché, de R qui a deux côtés parallèles et un axe de symétrie comme le rectangle.

NANCY-METZ

PREMIER VOLET (12 POINTS)

Même sujet qu'à DIJON – Voir le corrigé de DIJON.

SECOND VOLET (8 POINTS)

DIDACTIQUE

QUESTION 1 *Il faut citer trois des variables suivantes :*

1) la taille des nombres a, b et c, inscrits sur la cible :
des très petits nombres (par exemple 1, 2 et 3), pour le premier jeu, ne nécessiteraient pas vraiment de calcul ; pour le deuxième jeu au contraire ils permettraient de calculer le score de chaque équipe et pour le troisième jeu (avec 6 comme nombre-cible ou nombre à atteindre), les écarts seraient souvent très petits, une simple visualisation de la suite des nombres suffirait, un sur-comptage ne serait pas nécessaire.

2) L'éloignement de la cible (relativement à l'adresse moyenne des élèves…) : elle conditionne la taille des nombres sur lesquels les élèves auront à travailler (total proche de 0 si la cible est trop éloignée).

3) le fait de disposer ou non de la suite écrite des nombres, individuellement ou collectivement : dans les deux premiers jeux, elle permet d'ordonner les scores très facilement, au lieu d'être obligé soit de se représenter la suite écrite, soit de réciter la suite orale ; dans le dernier jeu, elle permet de trouver les écarts en comptant les cases.

4) la règle du jeu :
par exemple pour le $3^{ème}$ jeu, essayer d'atteindre le nombre-cible nécessite des anticipations, et des calculs d'écarts.

5) le nombre de lancers et/ou le nombre d'élèves d'une équipe :
influe directement sur le nombre de termes de la somme qui donne le score, et par conséquent sur la procédure utilisée.

6) le matériel mis à disposition pour noter ou non les résultats des lancers : joue sur l'organisation dans l'équipe, et la nécessité ou non de mémoriser.

Remarque :
Il y a en fait trois jeux, avec des procédures différentes dans chaque cas (cf. questions suivantes) ; nous avons donné comme réponse des variables didactiques que l'on peut considérer comme communes à tous les jeux ; mais on peut accepter aussi des variables qui ne concernent qu'un ou deux jeux :

7) la relation entre les trois nombres a, b et c pour le deuxième jeu : nous avons ici a+a=b et b+a=c ; c'est cette relation qui permet d'envisager la procédure décrite en Q3.

8) la relation entre les nombres a, b et c et leur relation avec le nombre cible (18) dans le troisième jeu : 18 pourra être atteint souvent, et les écarts possibles sont les multiples de 3 de 0 à18 (7 possibilités). La situation pourrait être beaucoup plus complexe avec des nombres « quelconques », ainsi qu'en faisant varier le nombre de zones de la cible.

9) le choix de nombres a, b et c en liaison avec la numération décimale (pour le premier et le troisième jeu), par exemple 5,10 et 20 : ils permettraient d'envisager une procédure de calcul basée sur les écritures 10+10+10+...

QUESTION 2

Travail de l'élève	Analyse
Lancer la balle 3 fois et s'organiser pour repérer et mémoriser le résultat de chacun de ses 3 lancers. Calculer son score ou le score de chaque joueur : somme de trois nombres, pris parmi les nombres 0,3,6 et 9.	On peut considérer qu'il s'agit de la somme de petits nombres, donc d'un réinvestissement des acquis, peut-être d'un contrôle (nous n'avons pas d'indications sur les intentions de l'enseignant, ni sur la façon dont le calcul est conduit- individuellement ? collectivement ?)
Ordonner les 24 joueurs : les élèves doivent d'abord mettre ensemble les joueurs qui ont le même score, puis ordonner les nombres-scores trouvés, c'est à dire 10 nombres au maximum, pris parmi les multiples de trois, de 0 à 27.	Les connaissances mathématiques nécessaires sont acquises (suite orale des nombres, comparer deux nombres). Cependant, ordonner une dizaine de nombres nécessite un apprentissage spécifique (s'il n'a pas déjà été fait) : il faut chercher le plus grand dans la liste, le noter, chercher le plus grand parmi ceux qui restent, etc. D'autre part, il faut mettre en place une stratégie au départ pour gérer les 24 nombres : avoir l'idée de classer d'abord les nombres. On peut donc considérer qu'il y a là un réinvestissement d'acquis dans une situation assez complexe.

QUESTION 3

a) Le but de la séance : il s'agit de mettre en place la procédure décrite en c) qui met en jeu, plus ou moins implicitement, la comparaison d'écritures additives avec des termes égaux.
$18+18+18+3 < 18+18+18+6$ parce que $3<6$

Cette comparaison est basée sur la compatibilité de l'addition avec la relation d'ordre : Si $a<b$ alors $a+c < b+c$.

Cette séance propose ainsi aux élèves de travailler sur des nombres qui sont hors de leur domaine familier.

b) Un élève de CE1 pourrait calculer rapidement les scores en utilisant la multiplication : il compte le nombre de 9, multiplie par 9, fait de même pour les 6 et les 3 et ajoute les trois nombres obtenus. Exemple pour la première équipe : $(9\times 3) + (6 \times 5) + (3 \times 2)=27+30+6=63$.
Il pourrait aussi bien sûr utiliser ses connaissances sur l'addition pour calculer des sommes partielles (arbre de calcul par exemple), et arriver progressivement au total.

c) **Procédures de résolution** : (la consigne ne demande pas le total de chaque équipe, mais un rangement.)

- basée sur la représentation : les élèves pourraient utiliser des cubes emboîtables ; pour chaque équipe, ils prennent le nombre de cubes correspondant à chaque lancer et réalisent ainsi un grand « train » en emboîtant tous les cubes ; pour ordonner les équipes, ils rangent les trains du plus long au plus court.

Autres réponses : on peut donner de nombreux exemples, l'idée étant de réaliser pour chaque équipe une collection dont le cardinal est égal au score ; et de comparer directement les collections réalisées ; on pourrait envisager aussi des jetons assez épais que l'on empile, et l'on compare ensuite les hauteurs ; ou bien des jetons de couleurs différentes mais tous de même taille pour chaque équipe que l'on met sur les cases d'une longue piste : on regarde qui va le plus loin. Il peut s'agir aussi de collections dessinées, et même de bandelettes de papier quadrillé à découper.

- basée sur le calcul : pour pouvoir comparer les scores, sans calculer le total qui dépasse leurs possibilités (>50), les élèves font des regroupements, de façon à faire apparaître le même nombre ; ici, il est très facile d'obtenir le nombre 18 ; on a ainsi, pour les trois scores donnés :

équipe 1 : $18+18+18+9$ équipe 2 : $18+18+18+6$ équipe 3 : $18+18+18+3$;
Pour comparer les scores sous cette forme, il suffit d'entourer ce qui est commun (ici les trois termes 18) et de comparer « ce qui reste », c'est à dire 9, 6 et 3.

QUESTION 4

a) L'opération mise en jeu dans le calcul d'écart est la soustraction :
l'écart entre 21 et 18 est 21-18.

b) Pour que les élèves travaillent sur un autre registre de nombres, on pourrait :
- diminuer le nombre de joueurs par équipe (2 joueurs avec une cible de 9) pour travailler sur des nombres plus petits.
- envisager deux (ou trois) lancers par joueur, avec une cible égale à 36 (ou 54) pour travailler sur des nombres plus grands.

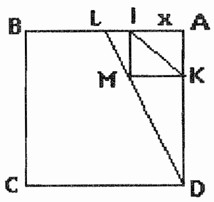
ORLEANS-TOURS

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1 :

A-1.



ATTENTION le dessin fourni dans le sujet par le texte a les droites (IK) et (LD) parallèles, ce qui correspond **uniquement à un cas particulier**, celui où I est lemilieu de [AL].
La figure en accord avec les hypothèses est ci-contre.
Dans le triangle ALD, les droites (LA) et (MK) sont parallèles ; il est possible d'appliquer le théorème de Thalès.

$\frac{KD}{MK} = \frac{AD}{AL}$; comme $KD = 8 - AK$, $MK = x$, $AD = 8$, $AL = 4$, il vient $\frac{8 - AK}{x} = \frac{8}{4}$ soit $8 - AK = 2x$, soit $AK = 8\text{-}2x$.

A-2.
La mesure $A(x)$ de l'aire du triangle AKI est la moitié de celle du rectangle AIMK, soit $A(x) = \frac{1}{2} x \times (8 - 2x) = 4x - x^2 = 4 - (x - 2)^2$

A-3 et 4.
Méthode 1
La mesure de l'aire $A(x)$ dépend de x qui varie de 0 à 3. Plus (x-2) est petit, plus elle est grande.
Elle est donc minimum pour (x-2) nul, soit x = 2. Elle prend alors la valeur 4.
On a donc $A(0) = 0$ $A(2) = 4$ $A(3) = 3$

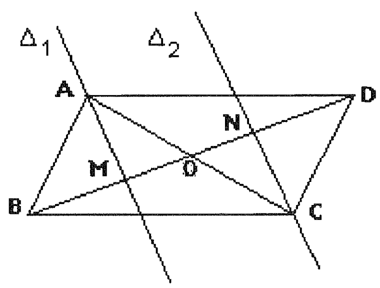
Méthode 2
A(x) est une fonction de x variant de 0 à 3. Sa dérivée est $A'(x) = -2(x-2)$ qui prend de valeurs positives entre 0 et 2, négatives entre 2 et 3. La fonction A(x) admet un maximum en 2 qui vaut 4. Elle croit de $0 = A(0)$ à $4 = A(2)$, puis décroît de $4 = A(2)$ à $3 = A(3)$.

L'énoncé « Si $0 \leq x \leq 3$, alors $A(0) \leq A(x) \leq A(3)$ » est donc faux puisque $A(2) \geq A(3)$.

B-1.
Considérons dans le tétraèdre AIJK la base AIK et la hauteur associée AJ.
La mesure de l'aire de AIK est $\frac{1}{2} x \times x$; la hauteur AJ mesure x.
Nous obtenons d'après la formule donnée: le volume de AIJK mesure $V(x) = .\frac{1}{6}x^3$.

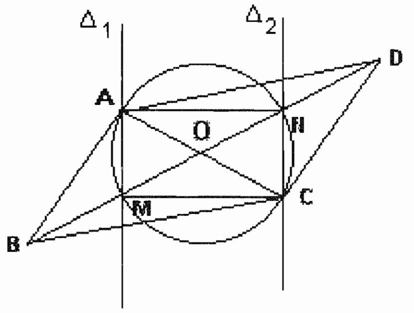
B-2.
X varie entre 0 et 4 ; V(x) est une fonction croissante de x, elle admet une valeur maximale pour $x = 4$; cette valeur est $V(4) = \frac{32}{3}$, soit un volume de $\frac{32}{3}$ cm^3

C-1.

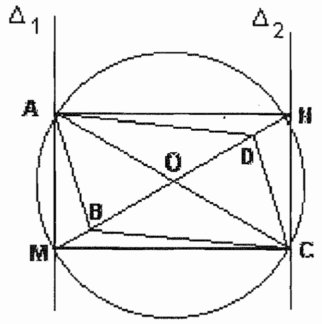


Les côtés [AM] et [NC] du quadrilatère sont parallèles et passent par les points A et C, symétriques par rapport à O.
La configuration de Thalès (droites parallèles Δ_1 et Δ_2 sur droites sécantes (AC) et (BD)) donne $\frac{AO}{OC} = \frac{MO}{ON}$: O est le milieu de [AC] et donc aussi le milieu de [MN].
Les diagonales [AC] et [MN] ont même milieu, ANCM est donc un parallélogramme.

C-2.
AMCN est un parallélogramme, c'est un rectangle si et seulement si ces diagonales sont de même longueur, donc si et seulement si MN=AC. Cette position est atteinte si M et N sont sur le cercle de centre O, rayon OA. Ce cercle a toujours deux points d'intersection avec la droite (BD), à l'intérieur de ABCD si AO < BO, à l'extérieur si AO > BO. Il existe donc toujours un rectangle solution.



Cas AC < BD



Cas AC > BD

C-3.
AMCN est un losange si et seulement si les diagonales sont perpendiculaires.
Or [AC] et [BD] ne sont pas nécessairement perpendiculaires dans le parallélogramme ABCD, sauf s'il est lui-même un losange. Dans ce cas, AMCN est un losange.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Le problème posé est un problème de type multiplicatif. On constate que les stratégies développées par les trois élèves sont de type additif.

1- Démarche de l'élève A

a) Il dessine les euros et les regroupe par deux pour développer un calcul additif (additions réitérées) pour obtenir le résultat.
b) Sans doute pour "matérialiser" la somme demandée.
c) Savoir en acte : le résultat d'une multiplication peut s'obtenir par calcul de doubles : 6, 12, 24, 48
$13 \times 6 = (6 \times \mathbf{2} + 1) \times 6 = 6 \times \mathbf{12} + 6 = 3 \times \mathbf{24} + 6 = 48 + 24 + 6 = 78$

2- Démarche de l'élève B

a) Il additionne les doubles de 6, comme l'élève A. Puis décompose 12 en 10 + 2, et calcule d'une part le total des dizaines, d'autre part les unités : il utilise la décomposition canonique de la somme en base dix pour exécuter son calcul.
b) Même démarche de raisonnement, démarches de calcul additif différentes pour A et B.

3- Démarche de l'élève C
a) L'élève C convertit chaque euro en Francs : il réalise cette conversion sous forme de pièces de 5 F et de 1 F qu'il regroupe ensuite : 13 pièces de 5 F, 13 pièces de 1 F, en optimisant la décomposition d'un euro.
b) Il additionne d'abord les 5, sans doute mentalement 5, 10, 15, 20 puis ajoute le cumul des unités, par un algorithme classique d'addition en ligne.

4- Compétences mises en œuvre
Savoir traiter un problème de conversion de monnaie comme un problème multiplicatif ;
Savoir calculer un produit sous forme d'une addition réitérée
Savoir faire des calculs additifs (décomposition, associativité)

5- Sans doute début de CE1, cycle 1, car le calcul additif semble au point ; il n'y a pas d'ébauche de procédure directement multiplicative.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

QUESTION 1 :
a)Consigne : Vous allez étudier les figures proposées avec vos instruments, notamment les côtés, les diagonales, les angles. Pour chaque figure vous remplirez la carte d'identité qui lui correspond. Repérez les angles droits, les égalités de longueurs, etc. et notez tout ce qui vous paraît important pour chaque figure.
Attention, ce que vous notez doit être vérifiable aux instruments.

b) Les propriétés géométriques classiques sont les suivantes

Nom	Carré	Losange
Famille	Quadrilatère	Quadrilatère
Côtés	Perpendiculaires s'ils sont consécutifs Tous de même longueur. Parallèles s'ils sont opposés.	Tous de même longueur Parallèles 'ils sont opposés
Angles	Tous droits	"Egaux" s'ils sont opposés
Diagonales	De même longueur Se coupent en leur milieu	Perpendiculaires Se coupent en leur milieu

QUESTION 2 :

a) Les mots qui sont utilisés dans le tableau soit : parallèle, perpendiculaire, milieu, opposés, consécutifs

b) Pour vérifier les propriétés du carré, les élèves doivent établir que les quatre angles sont droits, ils utiliseront l'équerre, et que les quatre côtés sont de longueurs égales. Pour cette dernère vérification, ils utiliseront la règle graduée, le gabarit ou le compas.

QUESTION 3 :

1) Construire deux droites perpendiculaires D et Δ à l'équerre. Sur la droite Δ, marquer deux points A et C symétriques par rapport au point de rencontre O, à moins de 4 cm de O. Tracer le cercle de centre A rayon 4 cm : il coupe D en deux points, B et D. le losange ABCD convient.

Propriété de référence : le losange a deux diagonales perpendiculaires et de même milieu.

2) La suite d'instructions proposée page 10 est efficace.

Propriétés de référence : l'hypoténuse d'un triangle rectangle est le plus grand des côtés (tracer IK **inférieure à 8 cm**) ; le losange est constitué de deux triangles isocèles symétriques par rapport à une diagonale qui est leur côté commun.

QUESTION 4 :

Non, puisque cela reviendrait à construire un triangle rectangle d'hypoténuse 5 cm et de côté 6 cm. Or l'hypoténuse reste le plus grand côté dans un triangle rectangle.

<u>Analyse de cet exercice</u>

a) sa résolution appelle la mise en œuvre d'une compétence autre que celles révisées dans les travaux précédents : celle qui a trait à la constructibilité d'un triangle rectangle ;

b) c'est une question à laquelle on peut sensibiliser les élèves à l'école élémentaire ; elle n'est en aucun cas exigible au cycle trois.

REIMS-STRASBOURG

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS)
MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

1) Le champ rectangulaire a pour longueur L et pour largeur l, exprimées en mètres :

$$\begin{cases} L - 80 = l + 40 \\ (L - 60)(l + 20) = L \times l - 400 \end{cases}$$

2) On résout ce système de 2 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} L - l = 120 \\ 20L - 60l - 1200 = -400 \end{cases} \qquad \begin{cases} L - l = 120 \\ L - 3l = 40 \end{cases} \qquad \begin{cases} L - l = 120 \\ 2l = 80 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L = 120 + l \\ l = 40 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} L = 160 \\ l = 40 \end{cases}}$$

Le champ a pour longueur 160 m et pour largeur 40 m.

EXERCICE 2

a) * Les nombres nommés sont de la forme :

n=38+7k avec k entier naturel et $38+7k \leq 365$

d'où $7k \leq 327$ et $k \leq 46,7\ldots$

la plus grande valeur possible pour k est 46

le dernier nombre nommé est donc $38+(7 \times 46) = 38+322 =$ <u>360</u>

<u>Le dernier nombre nommé est 360.</u>

* Le premier nombre nommé est $38+(7 \times 0)$; le dernier est $38+(7 \times 46)$; le nombre entier k prend donc toutes les valeurs de 0 à 46.

On nomme donc <u>47 nombres</u>.

b) Le dernier nombre nommé doit rester 360 ;
Le suivant dans la liste serait : 360+7= 367.
On peut donc remplacer 365 par l'un des nombres suivants : <u>361, 362, 363, 364, 366, 367.</u>
En effet, pour chacun de ces nombres N, 360 est bien strictement inférieur à N et c'est le plus grand nombre de la liste possédant cette propriété.

EXERCICE 3

1) La face EFGH est un carré

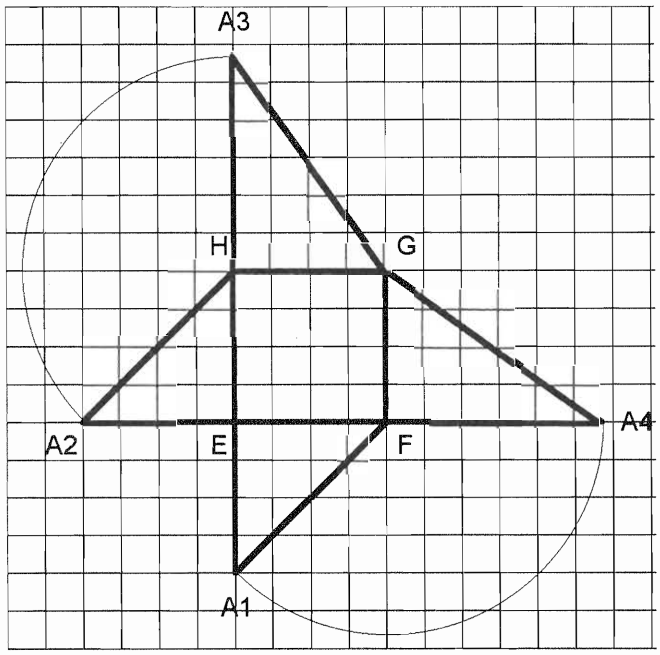
AEF et AEH sont 2 triangles isocèles rectangles en E (moitié de la face carrée)

AHG et AFG sont 2 triangles rectangles, respectivement en H et en F.

2) On suppose que le quadrillage représenté ci-dessous est de 1 cm de longueur de côté :

On place alors les points E,F,G,H, puis les points A1 et A2 sur les nœuds appropriés du quadrillage ; enfin on construit avec le compas les points A3, puis A4.

Ces 4 points A1, A2, A3 et A4 se rejoignent pour donner le sommet A de la pyramide.



1) Soit $\mathbb{A}$ l'aire totale de la pyramide AEFGH en cm². $\mathbb{A}$ est la somme des aires des 5 faces :

L'aire du carré EFGH est : $4 \times 4=16$ (en cm²).

L'aire de chaque triangle rectangle isocèle est la moitié de l'aire du carré de 4cm de côté soit 8 (en cm²).

Les triangles AFG et AHG sont isométriques, ils ont donc la même aire.

$\mathbb{A}(AFG)=\frac{1}{2}AF \times FG$ calculons AF en appliquant le théorème de Pythagore :

$AF^2=4^2+4^2=32$ d'où $AF=4\sqrt{2}$ d'où $\mathbb{A}(AFG)= 8\sqrt{2}$

D'où $\mathbb{A}=16+(2 \times 8)+(2 \times 8\sqrt{2}) = 32+16\sqrt{2}$

La valeur exacte de l'aire, en cm², est donc $\boxed{32+16\sqrt{2}}$

Avec la calculatrice, on obtient :

$$A \approx 54{,}62741696$$

Une valeur approchée de A, en cm², à 0,01 près, est 54,63 (par excès).

On pouvait donner une valeur approchée par défaut à 0,01 près : 54,62.

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

Élève n°	*Erreurs commises*	*Intervention orale possible de l'enseignant*
1	Le total de Muriel est faux: peut-être a-t-elle oublié le 3 et le 5 ; ou, peut-être a-t-elle ajouté les 4 nombres en oubliant la règle du jeu (pour ce seul calcul). - l'égalité sur la première ligne est fausse : simple erreur d'écriture.	« Comment as-tu calculé le total de Muriel ? » Puis dans un $2^{ème}$ temps : « Relis l'égalité que tu as écrite sur la $1^{ère}$ ligne ! »
2	Les deux totaux sont faux : oubli de la règle « doubler les résultats pairs », d'où sa conclusion logique (mais fausse). En effet, avec l'erreur de règle, il faudrait une face "8" sur un dé.	« Quelle est la règle de ce jeu pour calculer le total ? »
3	Même erreur que l'élève n°2, mais de plus sa conclusion n'a pas de sens (perd de vue la situation ?) puisqu'il déclare qu'Anthony devrait faire "8" avec son dé.	« Prends 4 dés et montre les résultats d'Anthony ! » puis même question que pour l'élève n°2.
4	Erreur dans l'addition pour le total de Muriel et pour celui d'Anthony : le mauvais alignement des unités fait que le calcul devient : 40+12+30+50 → Non-maîtrise de la technique d'addition en colonnes. Erreur pour le total d'Anthony : le choix des nombres ajoutés est obscur ! l'élève utilise peut-être les 4 résultats des dés de Muriel ?; La phrase écrite à la place « réponse »ne répond pas du tout à la question posée et la réponse à la question posée (réponse fausse ici) figure à côté.	« Écris et calcule en ligne le total de Muriel ». « Où sont les dés d'Anthony ? » « Écris et calcule en ligne le total correspondant ». « Quelle est la question posée ? Où dois-tu mettre la réponse ? »

SECOND VOLET (8 POINTS).

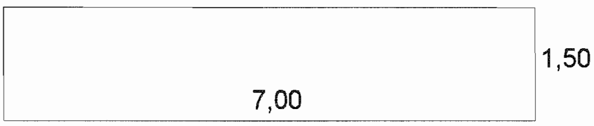
DIDACTIQUE

I

QUESTION I-1 :
Les deux grandeurs à comparer peuvent être le périmètre et l'aire de ces surfaces.
Remarque : la réponse « longueur » est fausse ; la longueur n'est pas une grandeur définie sur les « surfaces ». Par exemple, la relation "avoir même longueur" n'a pas de sens sur les objetx "surfaces".

QUESTION I-2 :
Alain a perçu la grandeur « aire » : si une surface A est contenue dans une autre surface B, l'aire de la surface A est plus petite que l'aire de la surface B.

QUESTION I-3 :
Bernard, en faisant rouler ses pièces sur la table s'est intéressé au périmètre .
Les trois surfaces sont telles qu'elles donnent le même rangement pour le périmètre et l'aire :
Bernard, pour le périmètre : triangle ($\approx$12 cm) ; carré ($\approx$14 cm) ; rectangle ($\approx$22,2 cm)
Alain, pour l'aire : triangle ($\approx$6 cm^2) ; carré ($\approx$12 cm^2) ; rectangle ($\approx$28,7 cm^2)
Pour que les deux rangements soient différents, il faut donc transformer l'une des figures de telle sorte que, pour deux d'entre elles au moins, celle qui a le plus grand périmètre ait l'aire la plus petite.
<u>Il suffit de transformer le rectangle :</u>
Au lieu d'un rectangle d'environ 7cm et 4,1cm de longueurs de côtés , on prend un rectangle de longueurs de côtés 7 cm et 1,5 cm. Le périmètre est alors de 17 cm et l'aire de 10,5 cm^2.
Donc le rangement pour Bernard est encore : triangle ; carré ; rectangle.
Et le rangement pour Alain devient : triangle ; rectangle; carré .



<u>Autres solutions</u>
De nombreuses propositions peuvent être faites, l'énoncé ne précisant pas la nature des transformations permises (qui ne sont donc pas obligatoirement des réductions ou des agrandissements, cf. solution ci-dessus). Exemples :
<u>Solution 1 : agrandir le triangle :</u>
Au lieu d'un triangle rectangle isocèle d'environ 3,5 cm et 5 cm de longueurs de côtés, on prend un triangle rectangle isocèle de longueur de côté 4,5 cm et donc $4,5\sqrt{2}$ cm ($\approx$6,4 cm). Le périmètre est d'environ 15,4 cm et l'aire est environ 10 cm^2.
Donc le rangement pour Bernard devient : carré ; triangle ; rectangle.
Et le rangement pour Alain est encore : triangle ; carré ; rectangle.
<u>Solution 2 : réduire le carré :</u>
Au lieu d'un carré d'environ 3,5 cm de longueur de côté, on prend un carré de longueur de côté 2,5 cm. Le périmètre est alors égal à 10 cm et l'aire égale à 6,25 cm^2.

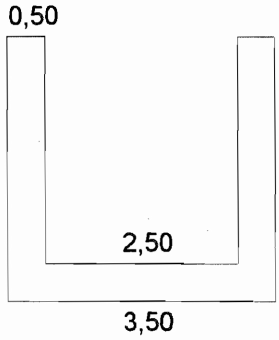
Donc le rangement pour Bernard devient : carré ; triangle ; rectangle.
Et le rangement pour Alain est encore : triangle ; carré ; rectangle.

Solution 3 : agrandir le carré :

On prend un carré de côté 5,4 cm, le périmètre est alors égal à 21,6 cm et son aire à 29,16 cm^2.
Donc le rangement pour Bernard est encore: triangle ; carré ; rectangle.
Et le rangement pour Alain est devient : triangle ; rectangle ; carré .

Remarque : la mise en évidence de la distinction aire-périmètre serait encore plus « spectaculaire » si l'on s'autorisait à prendre une figure concave
Par exemple on peut « transformer » le carré et obtenir la figure ci-dessous :

Le périmètre est alors 20 cm
L'aire est 4,75 cm^2.

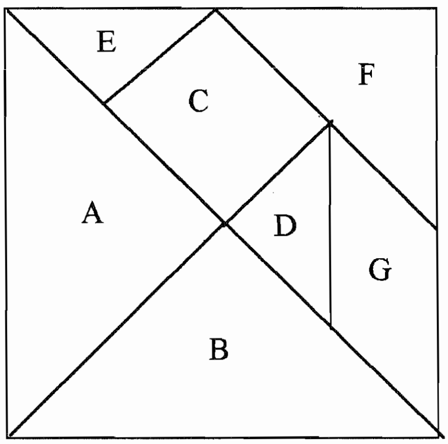


Cependant ces figures concaves ne permettraient pas à Bernard d'utiliser sa procédure de comparaison.

II

QUESTION II-1 :

procédure 1 : les élèves réalisent un pavage du cygne avec les pièces du tangram (cf. annexe 4) puis avec les mêmes pièces, ils essaient de paver le carré : s'ils n'arrivent pas à tout recouvrir, c'est que l'aire du carré est plus grande, s'ils recouvrent exactement, c'est que les aires sont égales.
Pour le pavage du carré, voici un exemple :



procédure 2 : les élèves réalisent un pavage du cygne, puis, avec d'autres pièces (si possible d'une autre couleur) un pavage du carré. Ils comparent alors les pièces terme à terme.

Remarque : la procédure « découpage mental en dessinant les pièces sur les surfaces » ne paraît pas très vraisemblable , car les enfants (et même la plupart des adultes !) ont besoin de faire plusieurs essais avec les pièces avant de trouver le pavage.

QUESTION II-2 :
Le cygne et le chat utilisent les mêmes pièces, les figures ont donc la même aire.
Le château d'eau ne peut pas être recouvert par ces mêmes pièces (il manque un carré) ; son aire est donc plus grande que celle du cygne et du chat.
Pour paver complètement le danseur, seule une partie des pièces est utilisée (il manque E), son aire est donc plus petite que celle du cygne et du chat.

III

QUESTION III-1 :
Oui, le seul examen du tableau suffit pour comparer les aires.
On voit que le chat et le cygne sont constitués des mêmes pièces, que le château d'eau a juste une pièce de plus (le carré) et le danseur juste une pièce de moins (le petit triangle).
On peut ranger ces 4 surfaces selon leur aire dans un ordre croissant :

$$3\ ;\begin{cases}1\\2\end{cases};4$$

QUESTION III-2° :
En ajoutant un carré sur la tête du danseur, on rend impossible la comparaison avec le chat, à partir du tableau , en effet, la nouvelle figure a un carré en plus et un petit triangle en moins ; on ne peut pas conclure si l'on ne connaît pas la relation entre le carré et le petit triangle.

QUESTION III-3 :
Le maître peut proposer encore une situation analogue à la précédente (ranger suivant les aires croissantes des figures réalisées avec les pièces du tangram) mais en choisissant des figures impossibles à comparer à partir du tableau (cf. question III-2°).
Les comparaisons directes de deux figures (cf. question I-1), se révélant vite fastidieuses, l'idée d'imaginer un pavage de toutes les figures à l'aide du seul petit triangle apparaît comme une bonne solution au problème (puisque toutes les pièces du tangram contiennent un nombre entier de petits triangles).
Le maître introduit ainsi la notion de mesure de l'aire d'une surface à l'aide d'un étalon (le petit triangle) : c'est le nombre de petits triangles nécessaires pour paver la surface.
D'où les mesures des aires des différentes surfaces (avec pour unité les petits triangles) :
le château d'eau :18 le cygne et le chat : 16 le danseur : 15

IV

QUESTION IV-1°:
Cette suite de séances se situent au cycle 3, puisque c'est dans le programme du cycle 3 que l'on trouve la notion d'aire.
Elle se situe plutôt en début d'apprentissage, en CM1 : c'est à ce niveau en général que l'on travaille la distinction aire-périmètre, les comparaisons directe ou indirecte (par découpage-

recollage ; ou par pavage) et que sont pratiquées des mesures d'aire par pavage à l'aide d'un étalon non conventionnel ; les unités légales étant introduites plutôt en CM2.

QUESTION IV-2 :

Étape I : le maître veut introduire la notion d'aire d'une surface, à partir de la superposition directe, et en la distinguant de la notion de périmètre.
Il aurait été bien préférable de choisir 3 surfaces qui ne donnent pas le même rangement pour l'aire et le périmètre (cf. question I-3).
Étape II : le maître veut faire la distinction aire / surface (des surfaces bien différentes peuvent avoir la même aire) et introduire la comparaison des aires par un procédé indirect se référant à un découpage/recollement.
Étape III : qui est juste amorcée, on peut penser, selon les questions III-2 et III-3, que le maître veut faire ressentir le besoin d'un 3ème procédé de comparaison des aires : la mesure à l'aide d'un étalon.

QUESTION IV-3 :

Plusieurs directions peuvent être prises pour une 4ème étape au cours de la leçon suivante :

- **Réponse 1 : Introduire la procédure d'encadrements sur quadrillage :** introduire un 4ème procédé pour comparer les aires de surfaces «complexes» c'est à dire qu'on ne puisse pas comparer par un des trois procédés précédents (par exemple un carré et un disque, ou deux surfaces de contours courbes, d'aires assez proches).
  On introduirait alors des quadrillages , sur lesquels on reproduit chaque surface ; on obtient ainsi, pour chacune, un encadrement de la mesure de l'aire, avec comme unité d'aire le petit carreau. En choisissant une maille suffisamment fine, ces encadrements permettent de comparer les aires.

- **Réponse 2 : faire apparaître la nécessité d'un étalon commun à toute la classe :** travailler la comparaison des aires à partir de leur mesure, en prenant différents étalons, donc différentes unités d'aires. Prendre conscience que les mesures dépendent de l'unité choisie mais que le rangement n'en dépend pas.

- Cette activité pourrait déboucher ensuite sur l'introduction des unités usuelles.

RENNES

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1

Question 1 :
Un exemple suffit : la somme des arrondis peut-être supérieure à l'arrondi de la somme totale.
achat 1 : 1109 F , soit 169,07 euros
achat 2 : 109 F , soit 16,62 euros
somme : 1218 F , soit un arrondi de la somme de 185,68 euros
alors que la somme des montants arrondis en euros est : 185,69

Remarque : la question est surprenante, car l'auteur du sujet laisse le choix entre un ou plusieurs exemples. Tous les cas sont possibles :

la somme des arrondis peut être inférieure à l'arrondi de la somme

	Francs	Euros (arrondi)
Achat 1	100	15,24
Achat 2	5	0,76
Somme	105	16,01

Somme des arrondis : 16

la somme des arrondis peut être égale à l'arrondi de la somme

	Francs	Euros
Achat 1	100	15,24
Achat 2	101	15,40
Somme	201	30,64

Somme des arrondis : 30,64

la somme des arrondis peut être supérieure à l'arrondi de la somme

	Francs	Euros
Achat 1	1109	169,07
Achat 2	109	16,62
Somme	1218	185,68

Somme des arrondis : 185,69

Question 2 :

a, Pierre a tort.

Un contre-exemple suffit : (l'expression “ résultat exact ” fait référence à la valeur en euros arrondie, selon la règle de conversion énoncée dans le texte.)

L'exemple qui suit montre que le procédé donne parfois un résultat exact, ce qui contredit l'affirmation : "ce procédé ne donne le résultat exact pour aucune somme "

montant en francs : 1,50
montant exact en euros : 0,23 obtenu par la division de 1,50 par 6,55957
montant en euros, méthode Pierre : 1,5 x 0,15 = 0,225 arrondi à 0,23 euros

Il y a d'autres exemples : le procédé donne la valeur exacte en euros pour les multiples de 20 centimes jusqu'à 2 francs

Francs	Euros	multiplier par 0,15
0,2	0,03	0,03
0,4	0,06	0,06
0,6	0,09	0,09
0,8	0,12	0,12
1	0,15	0,15
1,2	0,18	0,18
1,4	0,21	0,21
1,6	0,24	0,24
1,8	0,27	0,27
2	0,3	0,3

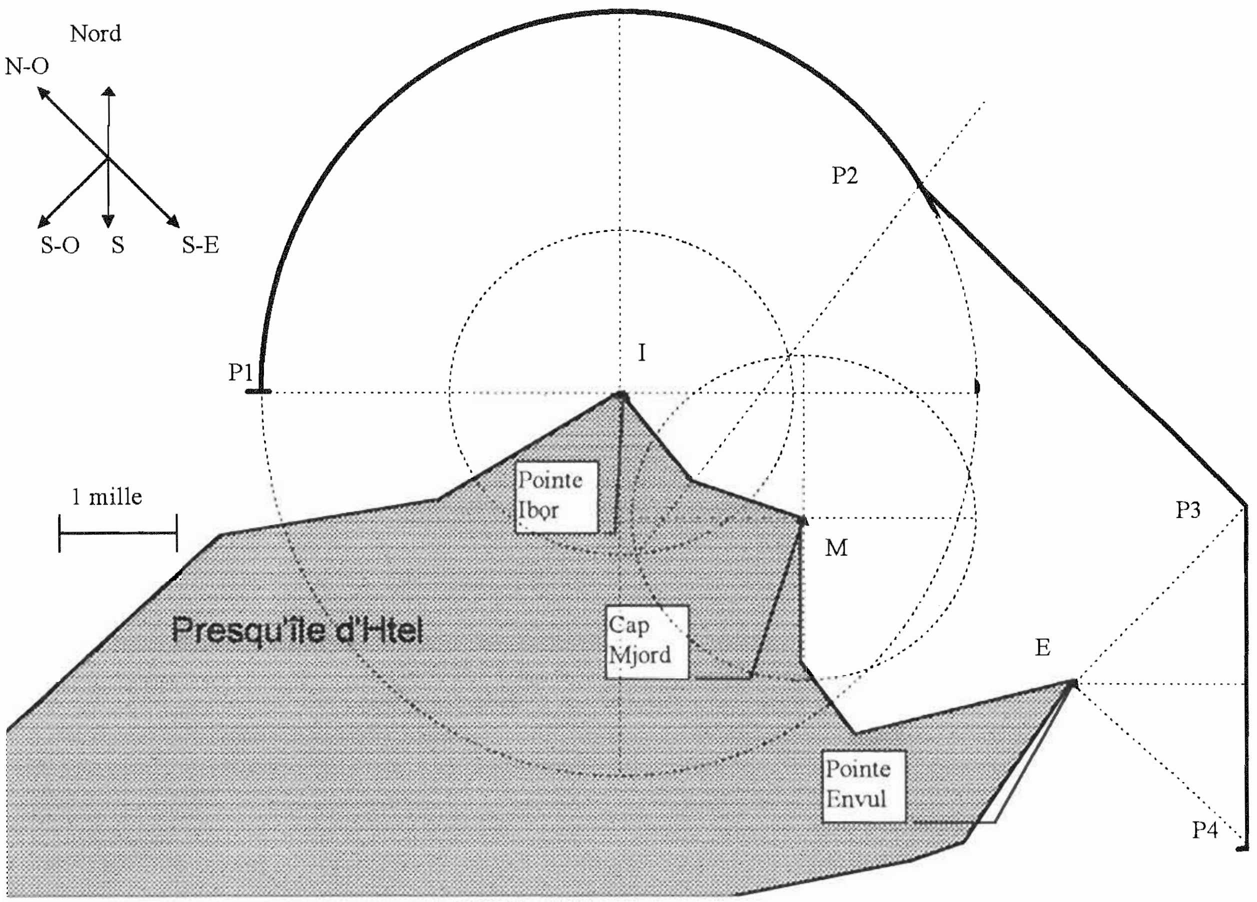
Explication : diviser par 6,55957 revient à multiplier par son inverse $\frac{1}{6,55957}$ peu différent de 0,1525 et donc de 1,15 .

b, Charles a tort.

L'affirmation de Charles n'est pas toujours vraie.
Un contre-exemple suffit : montant en euros : 15
montant exact en francs : 98,39
montant en francs, méthode Charles: (15 - 15/2) x 10 = 75
En fait, le calcul de Charles revient à multiplier par 5 et non par 6,55957.

<u>En effet :</u>
soit m le montant en euros,
le procédé de Charles se traduit par $(m - \frac{m}{2}) \times 10 = \frac{m}{2} \times 10 = m \times 5$.

EXERCICE 2 :



Question 1 a:

Dans le triangle EP_3P_4: mesure de l'angle $EP_3P_4 = 45°$
(référence : rose des vents,)
mesure de l'angle $EP_4P_3 = 45°$
(référence : rose des vents, l'angle entre le N-O et le N)
Un triangle qui a deux angles de 45° est isocèle et rectangle.
Donc, le triangle EP_3P_4 est isocèle et rectangle en E.

Question 1 b: En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle EP_3P_4 avec l'hypoténuse $[P_3P_4]$: $P_3P_4 = 3$. $P_3P_4{}^2 = 2\ EP_4{}^2$ soit $EP_4{}^2 = \frac{9}{2} = 4{,}5$

on trouve $EP_4 = \sqrt{4{,}5}$ (en milles) $EP_4 = 1{,}5\sqrt{2}$ (en milles valeurs exactes)
ou $EP_4 = 2{,}12$ milles (valeur approchée par défaut à 10^{-2} milles près)

A 11 h le navigateur se trouve donc à environ 2,12 milles du point E.

Question 2 :

Voir figure. Le tracé du parcours se fait à rebours.
Le point P_4 peut être situé sur la figure en traçant à partir de E un segment de longueur 2,12 milles dans la direction Sud-est. (La direction sud-est est obtenue à l'aide de la rose des vents par le tracé d'une parallèle au segment correspondant à la direction N-O S-E de la rose des vents passant par E).

La longueur EP_4 s'obtient à l'aide d'une règle graduée lorsque l'on considère la valeur approchée obtenue à la question précédente.
Remarque : il est également possible d'obtenir la longueur EP_4 comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle de côté 1,5 milles que l'on peut construire aisément.
Du point P_4 le point P_3 est obtenu en reportant au compas une longueur de 3 milles dans la direction du nord.
Tracé du point P_2 :il est obtenu comme intersection de la médiatrice de IM (car en P_2 le navigateur était à égale distance de la pointe Ibor et du cap Mjord) avec la droite de direction S-E, N-O passant par P_3..

Tracé du point P_1 :
Le point P_1 est situé sur la droite de direction Est-Ouest passant par I et du cercle de centre I et de rayon IP_2. (de P_1 I située à l'est et de P_1 à P_2 le navigateur à fait route pour rester à égale distante de I)

Le parcours du navigateur de P_1 à P_4 est tracé en gras sur la figure.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Dans cet exercice, hypothèse doit être faite que les cassettes rendues cette semaine ont été louées cette même semaine.

Question 1 :
ELEVE A
- calcule le nombre total de cassettes louées en plaçant le “ plus grand ” nombre en haut de son opération.
- calcule le nombre total de cassettes rendues.(en conservant l'ordre du tableau).
- soustrait le nombre de cassettes rendues au nombre de cassettes louées.
- puis, à partir de la donnée du texte (le nombre total de cassettes), effectue une nouvelle soustraction pour trouver le nombre de cassettes disponibles.

Il donne une réponse juste.

ELEVE B
- commence par calculer le nombre total de cassettes louées.
- commet une erreur dans cette addition qu'il abandonne.
- calcule le nombre total de cassettes rendues.
- commet une erreur dans la dernière retenue.
- à partir de la donnée du texte, soustrait le nombre trouvé précédemment. Il ne tient pas compte du nombre de cassettes louées.

Donc sa réponse est erronée (erreurs : raisonnement et technique opératoire)

ELEVE C
- par catégorie de films, ligne par ligne, il effectue les différences entre les nombres de cassettes louées et les nombres de cassettes rendues.
- calcule le nombre de cassettes indisponibles (sans le mentionner) en effectuant une addition.

Il **donne une réponse erronée** en interprétant son résultat comme le nombre de cassettes disponibles.

ELEVE D
- même démarche que A.
- organise très clairement sa rédaction.

Il donne une réponse juste.

Question 2 a:

Causes possibles :

ELEVE B	ELEVE C
Difficulté de traitement d'un nombre à 4 chiffres, parmi des nombres à 3 chiffres : pose de la retenue. Ne contrôle pas l'ordre de grandeur d'un résultat Difficulté dans la lecture des données (lexique) et la représentation du problème	Elève, " enfermé dans le tableau ", qui oublie ou néglige les données du début de l'exercice. Difficulté dans la lecture des données (lexique) et la représentation du problème

Question 2 b:
Remédiations envisagées:

Les techniques opératoires : élève B
Un temps de travail pour lui apprendre à contrôler ses résultats au niveau du calcul est nécessaire. (travail sur l'ordre de grandeur, utilisation de la calculette, problème de la retenue)

La compréhension de la situation : élèves B et C
Vocabulaire : travail avec le dictionnaire.
Simulation de l'activité en plaçant l'élève dans la situation du commerçant. (les nombres utilisés peuvent être plus petits). Schématisation de l'activité.
Travail sur l'énoncé du problème : demander à l'élève d'introduire des questions intermédiaires .

Remarque : on peut demander à l'élève de modifier le tableau (exemple : ajouter une ligne ou une colonne supplémentaire au tableau initial pour le calcul des totaux).

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

A propos du document annexé au sujet :
- le document provient du manuel de CM1 et non pas de CM2 comme le sujet l'indiquait.
- dans le document de l'annexe 1, il faut lire 1,7 au lieu de 1,8 dans le tableau de la deuxième activité (les éditions plus récentes ont corrigé cette erreur.)

Question 1 a
Traitement de l'information :
- prélever les informations numériques sur les différents supports (textes, graphiques, diagrammes, tableaux).
- construire ou compléter des tableaux de nombres.
- exploiter les données d'un tableau ou d'un graphique pour résoudre un problème.

Approche de la notion de " fonction numérique " dans plusieurs cadres (textes, représentations graphiques, tableaux).

(Remarque : cela paraît toujours gênant de confondre des données mises sous forme de graphique (météo) et une fonction numérique).

Question 1 b :
Lire, construire et interpréter quelques schémas simples, tableaux, diagrammes, graphiques.

Question 1 c :
Outils de traitement de données.
Proportionnalité et autres relations.
Ordre et calculs sur des nombres entiers, décimaux et rationnels (écritures à virgule, écritures fractionnaires).

Question 2 a :
Tableaux, diagrammes, graphiques, textes.

Question 2 b :
Cela permet de visualiser la situation proposée, de la résoudre, de communiquer les résultats.
Cela permet aussi une autre représentation du problème par changement de cadre.
C'est aussi un outil de lecture qui permet de commencer à mettre en évidence des liens entre familles de nombres qui, plus tard dans la scolarité feront partie du savoir : fonction croissante, décroissante, linéaire, etc.

Remarque : le graphique permet aussi d'exploiter, en joignant des points, des relations implicites entre des nombres (passage du discret au continu, interpolation).

Question 3 :

Activités	Intérêts	Inconvénients
Activité 1 :	Forme de présentation des situations. Initiation à la lecture de graphique. Correspondance entre données numériques et graphique. Trans et interdisciplinarité (maths, géographie)	Difficultés de lecture de la représentation proposée : • diagramme en barres et lignes brisées • absence de couleurs (existent dans le livre). • absence de quadrillage (existe dans le livre). • double échelle Complexité de la question b dans sa formulation (problème de vocabulaire). L'élève n'effectue qu'une tâche réduite (répétitive). Remarque : une erreur (30 mm d'eau par jour , en août, à Marseille : c'est impossible)
Activité 2 :	Passage texte / tableau Organisation des données Rapport entre des unités de longueurs Aspect culturel, interdisciplinarité (maths et histoire) Introduction de la notion de fonction numérique.	Enoncé complexe de la situation. Complexité de certains calculs. Erreur de report dans le tableau. (1,7 dans le texte , 1,8 dans le tableau) Un certain nombre de compétences en jeu ne sont pas exigibles en cycle 3 (en particulier celles relatives à la question c)

Remarques:
- Il aurait été souhaitable que les candidats établissent une comparaison de ces deux situations (non demandé dans le texte du sujet).
- Il aurait été utile d'attirer l'attention des candidats sur le fait qu'une telle fiche constitue un travail très lourd dans une seule séance de mathématiques (même en CM2).

Question 4 :

Peu d'autonomie, d'initiatives sont données à l'élève.
Le canevas de travail est fixé d'avance et est très rigide.
L'élève ne peut donc pas construire des stratégies, mettre en œuvre des procédures originales.

Question 5 :

Pour répondre à la question, les variables qui pourraient influer significativement sur les stratégies des élèves seraient :

- les types de supports :différents papiers (blanc, millimétré etc...). Selon le support, l'élève aura à effectuer, ou non des tâches annexes dont il faut voir si elles contribuent à l'acquisition de connaissances connexes sans trop compliquer le travail.
- les différents quadrillages.
- le choix des données numériques. Par exemple un travail sur l'ordre dans les décimaux pourrait être inclus.
- le format de la réponse demandée : nombres entiers, nombres fractionnaires, nombres décimaux.
- la matérialisation des alignements sur le graphique.

Remarque : nous conseillons aux candidats qui traitent des questions relatives aux variables didactiques de justifier en quoi il s'agit d'une variable didactique.

Question 6 a :
La démarche est peu pertinente par rapport aux instructions officielles :
l'on ne perçoit pas, dans le manuel de l'élève, une démarche de résolution de problème.

Question 6 b :
Cet exercice est justifié par le désir de l'auteur du manuel de terminer par l'étude d'une situation où la relation fonctionnelle n'est pas de type affine ou linéaire.
Dans le manuel de l'élève :
On commence par une " situation" où les représentations graphiques ne sont pas des “ droites ”. (voir la remarque ci-dessus).
On poursuit par des représentations graphiques sous forme de “ droites ”.
On termine par une situation où la représentation graphique n'est pas une “ droite ”.

ROUEN

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1 :

PARTIE I

1) Il s'agit de lire le texte et de traduire les informations sous des formes qui permettent un calcul :

$B = 1{,}5\ G \quad R = \frac{1}{3}\ G \quad r = \frac{1}{18} G$ donc $G = 18\ r \quad R = 6\ r \quad B = 27\ r$

Si $r = 6$ cm, $G = 108$ cm et $B = 162$ cm

Les dimensions du drapeau sont 108 cm sur 162 cm.

2) r, R, G et B sont des nombres entiers (de mm) ; le rectangle $G \times B$ est le plus grand rectangle dans la feuille 297×420

On doit donc avoir $G < 297$ et $B < 420$ avec r entier, $G = 18\ r$ et $B = 27\ r$.

r est un diviseur commun à G et B, il doit être le plus grand possible, avec les conditions

18 r] 297 et 27 r] 420 soit r] 16 et r] 15 (en effet $18 \times 16 = 288$ et $27 \times 15 = 405$).

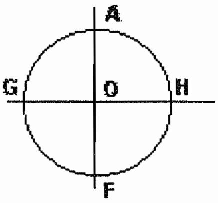
On peut donc choisir $r = 15$; il vient $G = 18 \times 15 = 270$ et $B = 27 \times 15 = 405$.

Le plus grand drapeau mesure 270 mm sur 405 mm.

PARTIE II

Voici un programme de construction qu'il était possible de suivre.
Il fallait laisser les traits de construction.
Voir la figure 1 complète sur l'annexe 1.

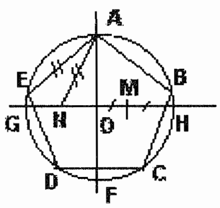
Tracer un cercle C de rayon 6 cm, de centre O. Tracer deux diamètres perpendiculaires [AF] et [GH].



Tracer un cercle de centre M milieu de [OH] passant par A : il coupe [OG] en N.
Tracer le cercle de centre A, passant par N : il coupe l'arc (AH) du cercle initial C en B.
[AB] représente le côté du pentagone convexe. Il s'agit de le reporter quatre fois sur le cercle initial C.
Pour cela, tracer le cercle de centre B, passant par A : il coupe l'arc (HF) du cercle initial C en C.
Puis tracer le cercle de centre C, passant par B : il coupe l'arc (FG) du cercle initial C en D.
Enfin, tracer le cercle de centre D, passant par C : il coupe l'arc (GA) du cercle initial C en E.
Pour obtenir le pentagone étoilé, relier dans l'ordre A, C, E, B, D, A.

PARTIE III

Par construction, ABCDE est un pentagone régulier convexe.
M est le milieu de [OH]. MA=MN. AN=AE mesure le côté du pentagone régulier.



1°) AÔB est un angle au centre du pentagone régulier convexe : sa mesure est donc de $\frac{360°}{5}$ soit 72°

Calcul de la mesure de $\hat{ABO}$:

Méthode 1

Dans le triangle OAB isocèle de sommet O, la mesure de l'angle $\hat{ABO}$ est la moitié de 180°- 72°
Par symétrie axiale par rapport à (OB) dans le pentagone régulier, l'angle $\hat{ABC}$ mesure le double de l'angle $\hat{ABO}$, soit 108°.

Méthode 2

La somme des angles intérieurs d'un polygone convexe de n côtés est (n-2)×180°. Le pentagone régulier a tous ses angles de même mesure. L'angle $\hat{ABO}$ mesure donc $\frac{1}{5}\times$ (5-2) × 180°, soit 108°.

2°) Calcul des longueurs MA et ON :
M est le milieu de [OH], donc OM = 3 cm
AMO est un triangle rectangle en O.
Le théorème de Pythagore donne, pour la longueur MA en cm :
$MA^2 = OM^2 + OA^2 = 6^2 + 3^2 = 45$ donc $MA = \sqrt{45}$ donc $MA = 3\sqrt{5}$ cm.

MA = MN par hypothèse ; $ON = MN - OM = 3\sqrt{5} - 3$
On a donc $ON = 3(\sqrt{5} - 1)$ cm.

3°) Mesure du côté du pentagone régulier AN = AE
ANO est un triangle rectangle en O.
Le théorème de Pythagore donne, pour la longueur AN en cm :
$AN^2 = ON^2 + OA^2 = \quad 6 + 9(\sqrt{5} - 1)^2 \quad = 36 + 9(5+1-2\sqrt{5}) = 90 - 18\sqrt{5}$
On obtient $AN = \sqrt{90 - 18\sqrt{5}} = 3\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ cm
La mesure tronquée à deux décimales est 7,05 cm.

PARTIE IV

1°) ACEBD est un pentagone car polygone à 5 côtés, étoilé car régulier non convexe, il évoque une étoile.

2°) Mesure de l'angle $C\hat{A}D$
La mesure de $C\hat{A}D$ peut s'obtenir comme mes $(E\hat{A}B)$ – 2 mes $(E\hat{A}D)$, par symétrie par rapport à (AF). Or $E\hat{A}D$ est un des angles égaux du triangle isocèle AED, où mes $(A\hat{E}D)$ = mes $(E\hat{A}B)$ = 108° donc mes $E\hat{A}D = \frac{1}{2}(180° - 108°) = 36°$

3°) a) Le texte nous dit que $\frac{AC}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ donc $AC = \frac{3}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \times (1 + \sqrt{5})$
La troncature à une décimale de la mesure de AC est 11,4 cm.

b) Le nombre d'or a de multiples « propriétés », dont certaine très mathématiques. C'est un nombre irrationnel.
Il vérifie les égalités $\Phi^2 = \Phi + 1$ et $\frac{1}{\Phi} + \Phi = \sqrt{5}$ et $\Phi - \frac{1}{\Phi} = 1$
C'est un nombre qui interviendrait dans la construction de certaines pyramides. Il est connu par les architectes comme la divine proportion.
Etc.

EXERCICE 2 :

Le texte peut se traduire par
$a = 7 \times q + r$ où a, q et r sont des nombres entiers tels que $a \neq 0$ et $r < 7$ et $q = 2 \times r$
Il vient $a = 7 \times 2 \times r + r$ soit $a = 15\,r$.
Les nombres solutions pour a sont donc les multiples de 15 strictement inférieurs à 15×7.
Ce qui donne

Dividende a	15	30	45	60	75	90
Quotient q	2	4	6	8	10	12
Reste r	1	2	3	4	5	6

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

1- En fin de CM2, il serait souhaitable qu'un élève connaisse une des trois techniques B ou E ou D. Aucune exigence ne peut être formulée sur la technique D.

2-3-4
L'élève A écrit la liste des multiples de 8 de 1 à 7, en déduit ceux de 80 et de 800.
Ceci lui permet de soustraire le nombre maximum de paquets de centaines de 8 du dividende.
Il poursuit ensuite cette technique soustractive.
Le quotient est exact. Le reste n'apparaît pas explicitement.

L'élève B n'écrit pas les multiples de 8, mais emploie la même technique soustractive que l'élève A. Le chiffre qu'il a choisi pour le chiffre des dizaines du quotient n'est pas maximal. Du coup il ne peut conclure uniquement par un chiffre des unités au quotient, ce qui bloque son calcul. Son calcul n'est donc que partiel.
Aide à lui fournir : lui conseiller de poser la table des multiples de 8, 80, 800 pour optimiser le chiffre choisi des centaines, dizaines, unités.

L'élève C applique une procédure soustractive, mais ne retire que 72 (9 % 8) à la fois. Il juxtapose les quotients partiels au lieu de les additionner. La procédure est donc incorrecte.

Aides à lui fournir :
* l'inciter à chercher le nombre de chiffres du quotient avant tout calcul par essais :
le quotient est-il 10 ? $8 \times 10 = 80$; or $4584 > 80$ donc le quotient est plus grand que 10 ;
le quotient est-il 100 ? $8 \times 100 = 800$; or $4584 > 800$ donc le quotient est plus grand que 100 ;

le quotient est-il 10 ? $8 \times 1000 = 8000$; or $4584 < 8000$ donc le quotient est plus petit que 1000 ; le quotient est donc compris entre 100 et 1000.
* lui conseiller de poser la table des multiples de 800, 80, 8 pour optimiser le chiffre choisi des centaines, dizaines, unités.

L'élève E utilise une technique soustractive sur nombres tronqués en fonction du chiffre du quotient examiné. La procédure est correcte. On décèle une erreur de calcul $6 \times 8 = 46$ au lieu de 48, et un erreur d'optimisation du chiffre des dizaines du quotient (le reste partiel est 12 supérieur à 8 !). Ce qui donne un quotient et un reste erronés.

L'élève D utilise une technique soustractive sur nombres tronqués comme l'élève E, mais sans poser les soustractions intermédiaires. On décèle une erreur de calcul $5 \times 8 = 45$ au lieu de 40, ce qui entraîne quotient et reste erronés.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

QUESTION 1 :
Les expressions « découvrir », « découverte », « je découvre » posent question : on ne peut découvrir que ce qu'on ne connaît pas. Ce qui laisserait supposer que le maître est sûr qu'aucun des élèves ne connaît la propriété visée avant qu'il ne fasse la leçon. Hypothèse peu probable, surtout au CM2.
Cela étant précisé, nous nous plaçons dans la perspective de la « découverte » : nous étudions l'effet a priori de l'exercice du manuel sur des élèves ne connaissant pas les propriétés visées, qui sont les critères de divisibilité par certains entiers (2, 5, 10, 3, 9 selon les documents).

Le document 1 propose de tester l'effet de la division par 2, 5 et 10 seulement sur deux nombres (le texte du problème ne sert à rien puisque le travail est guidé par le tableau juxtaposé) : il semble difficile d'en induire des propriétés générales, dont simultanément dans le contexte, on voit mal l'intérêt. L'utilisation du mot « découvrir » ne se justifie pas.

Le document 2 propose un problème : l'élève doit placer des nombres dans un tableau. Il y a de nombreux nombres à placer. La première consigne place les élèves en situation de réussite (ils peuvent prolonger le tableau), la deuxième demande une anticipation qui va être construite, la troisième amène à formuler une méthode. Les élèves pourraient donc remarquer :

- que les multiples de 9 sont dans la première colonne,
- que la somme des chiffres d'un nombre de cette colonne est dans cette colonne.

Ceci peut déboucher sur l'explicitation du critère de reconnaissance d'un multiple de 9.
L'utilisation du mot "découverte" paraît justifiée.

Le document 3 propose une observation des multiples de 2, puis de 5, puis de 10. Il donne immédiatement le résultat de l'observation ou des indications pour voir ce qu'on attend. Il donne les propriétés et ne permet pas à l'élève de les construire.
L'utilisation de l'expression « je découvre » ne se justifie pas.

QUESTION 2 :
Le problème posé s'interprète comme un problème de division : une première solution consiste à faire la division euclidienne du nombre donné par 9. Le produit par 9 du quotient donne le premier élément de la ligne où se trouve le nombre, le reste de la division donne le premier élément de la colonne.
Par exemple, $75 = 9 \times 8 + 3$: 75 est dans la ligne qui commence par 72, et dans la colonne qui commence par 3..
Une autre solution consiste à s'appuyer sur la remarque : un nombre est dans la même colonne que la somme de ses chiffres, et donc de déduire progressivement le premier élément de la colonne où se trouve le nombre en question.
Par exemple, 75 est dans la même colonne que 12, donc que 3.
On a donc

Nombre	571	1000	10 000	10^5	3527	5324
Colonne qui commence par	4	1	1	1	8	5

Des messages possibles seraient :
1- *Je divise le nombre par 9, je regarde le reste : le nombre est dans la colonne qui commence par le reste.*
2- *Je cherche le multiple de 9 juste avant le nombre donné : je place ce multiple dans la colonne qui commence par O ; puis je complète la ligne jusqu'au nombre donné.*
3- *Je fais la somme des chiffres du nombre, et je recommence jusqu'à obtenir un nombre de la première ligne ; le nombre donné est dans la colonne de ce nombre.*

QUESTION 3 :
Dans la mesure où les deux procédures citées dans la réponse ci-dessus ont été exprimées et mises en comparaison dans la classe, le maître peut donner l'aide mémoire suivant :
Un nombre est multiple de 9 s'il est égal à 9 fois un nombre entier
$72 = 8 \times 9$, donc 72 est un multiple de 9
Pour reconnaître un multiple de 9, je peux faire la somme de ses chiffres et je dois trouver un multiple de 9.

QUESTION 4 :
Si on suit le titre de la leçon, un aide-mémoire cohérent ne pourrait être que lié aux critères de divisibilité d'un nombre entier par 2, 5 ou 10. Or le faible nombre d'exemples proposés (deux), la faiblesse du champ numérique interrogé ne permettront pas aux élèves d'inférer une propriété générique. L'aide-mémoire est donc inapproprié.

QUESTION 5 :

Etude des exercices du document 1
Les trois premiers exercices du « S'exercer » du document 1 ont comme intention déclarée d'**entraîner** sur les propriétés de divisibilité « découvertes » au-dessus. Soit ils supposent connus les critères de divisibilité par 2, 5 et 10 (ce qui semble raisonnable en CM2, mais alors annihile le bénéfice de la leçon) ; soit ils laissent du temps aux élèves pour les induire **sans leur fournir beaucoup de moyens.**
Le quatrième essaie d'induire la propriété suivante *: un nombre divisible par 2 et 5 est divisible par 10*. Notons que la propriété *un nombre divisible par a et par b est divisible par a* $\times$ *b* est fausse dans le cas général. Elle n'est vraie que si a et b sont premiers entre eux (si leur plus grand diviseur commun est 1). Exemples. Les nombres divisibles par 4 et 7 sont tous divisibles par 28. Mais les nombres divisibles par 4 et 6 ne sont pas, en général, divisibles par 24 ; par contre ils le sont tous par 12.
Le cinquième exercice reprend l'exercice 1 et vise à expliciter qu'un nombre non multiple de 2 a 1 comme reste.

Etude des exercices et problèmes du document 2
Ils visent à **réinvestir** des éléments de la recherche menée dans la partie Découverte sur d'autres tableaux, notamment à faire identifier la structure d'un tableau ordonné ainsi selon ***n*** colonnes : dans la colonne qui commence par 0, figurent les multiples de ***(n -1)***, dans les autres colonnes les nombres qui ont comme reste dans la division par ***n*** le premier nombre de la colonne (ce qui justifie qu'il y ait ***n*** colonnes, autant que de restes dans la division euclidienne par ***n***).
Ils peuvent déboucher sur les critères de divisibilité par 2 et 5, et la ressemblance du critère par 3 avec celui par 9.

TOULOUSE

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE N° 1 :

Question 1.a : ABCD étant un rectangle, les droites (AB) et (DC) sont parallèles. Les segments [AE] et [FC] ont la même longueur, égale à la moitié de celle des côtés opposés [AB] et [DC] du rectangle ABCD. AECF est un quadrilatère convexe (non croisé) ayant deux côtés parallèles et de même longueur :
AECF est donc un parallélogramme.

Question 1.b : L'aire du parallélogramme AECF a pour mesure AE $\times$ BC car [BC] est une hauteur relative au côté [FC]. Exprimée en cm^2, cette aire a pour mesure **192 cm^2**
Note : On pouvait également considérer que AECF est une surface équivalente à deux triangles AEF, alors que le rectangle ABCD est équivalent à quatre de ces triangles. L'aire du parallélogramme AECF est donc la moitié de celle du rectangle.

Question 1.c : Le triangle ADF est un triangle rectangle en D, puisque ABCD est un rectangle. On peut donc appliquer le théorème de Pythagore pour calculer AF.
$AF^2 = AD^2 + DF^2$, ce qui nous donne $AF^2 = 16^2 + 12^2$, $AF^2 = 400$ et par conséquent, cette mesure étant exprimée en centimètres, on obtient **AF = 20**

Question 1 .d : L'aire du parallélogramme AECF a aussi pour mesure AF $\times$ EG
En effet [EG] est une hauteur relative au côté [AF]. Connaissant la mesure de l'aire de AECF, on en déduit la mesure de la longueur de [EG].
$192 = 20 \times EG$, donc **EG = 9,6**. Cette mesure est exprimée en centimètres.

Question 2.a : La circonférence de la base de ce cylindre a pour mesure AF. Nous savons que AF = 20 (mesure exprimée en centimètres). Donc le rayon R de la base du cylindre est tel que : $2\pi R = 20$

Cela donne, en centimètres, une valeur exacte du rayon **R** = $\dfrac{10}{\pi}$

La calculatrice donnant $\dfrac{10}{\pi} \approx 3{,}183...$ on peut encadrer R entre deux approximations décimales au dixième près : $3{,}1 < R < 3{,}2$.
Une valeur approchée de R, approchée à 1 mm près par défaut, est 3,1 centimètres.

Question 2.b : La mesure V du volume de ce cylindre, exprimée en centimètres cubes, est donnée par la formule : $V = \pi \times R^2 \times h$, où h désigne la hauteur en centimètres du cylindre et R le rayon de sa base circulaire. La hauteur du cylindre est la distance séparant les deux faces circulaires, c'est donc EG (car [EG] est perpendiculaire à [AF]) . Nous avons calculé EG à la question 1.d et obtenu EG = 9,6 (en centimètres).

$V = \pi \times (\frac{10}{\pi})^2 \times 9{,}6$

La valeur exacte de la mesure en centimètres cubes est : $\mathbf{V} = \frac{960}{\pi}$

La calculatrice nous permet d'encadrer cette valeur : $305{,}5774 < V < 305{,}5775$
On en déduit une valeur arrondie à 1 mm^3 près (c'est à dire un millième de cm^3 près) :

$\mathbf{V \approx 305{,}577}$ (mesure exprimée en cm^3).

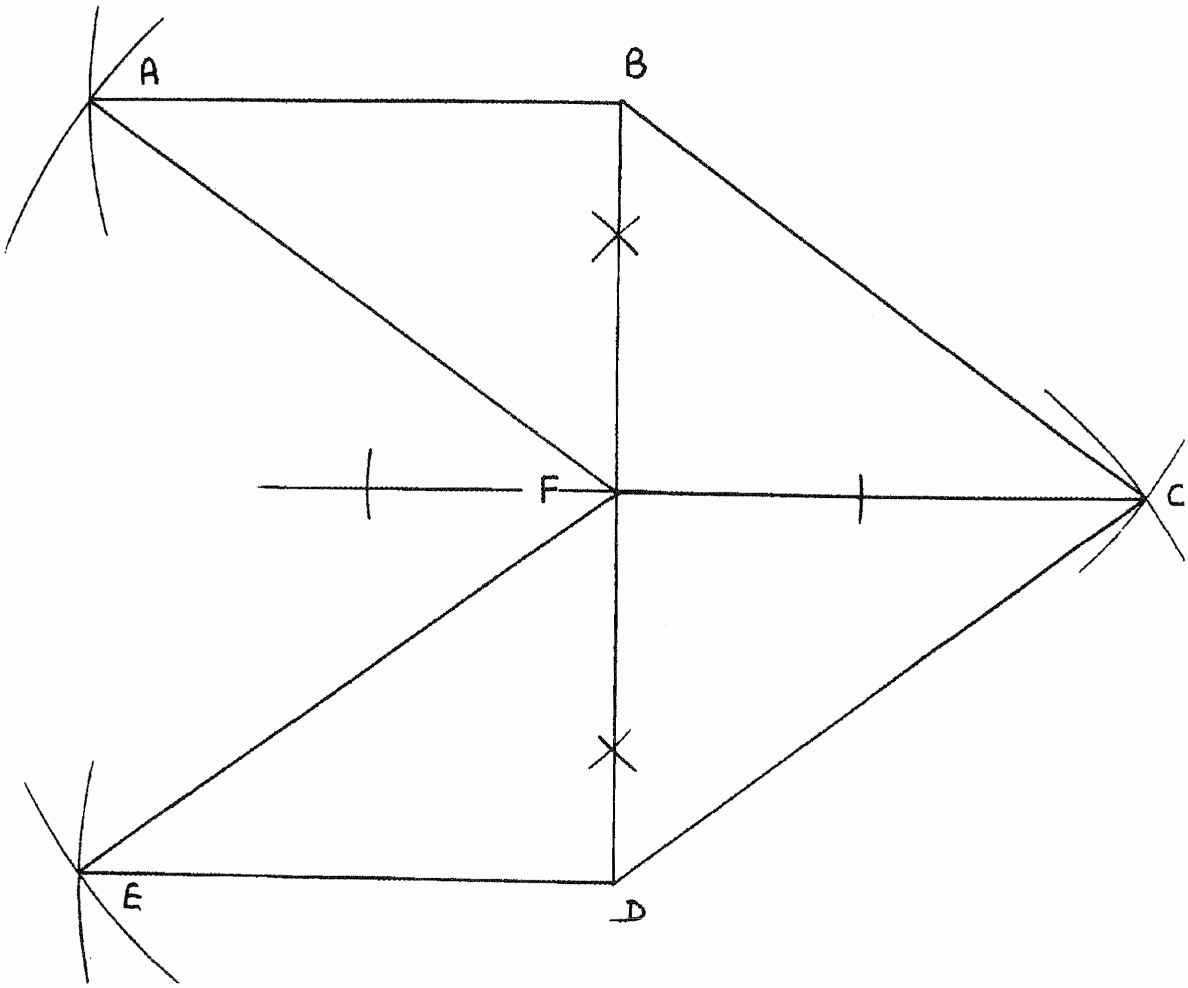
EXERCICE N° 2 :

Question 1. La mesure de l'aire du triangle ABF, rectangle en B, est $\frac{AB \times BF}{2}$, soit $\frac{x\,y}{2}$.
La mesure de l'aire de la figure ABCDEF, composée de quatre triangles superposables à ABF, est donc égale à $4\frac{x\,y}{2}$ soit 2xy.
On veut que la mesure de l'aire de la figure ABCDEF soit 96 cm^2, on doit par conséquent avoir 2xy = 96, soit xy = 48.
Finalement on cherche les couples d'entiers naturels (x ;y) tels que 48 = xy et x > y.
En décomposant 48 en produit de deux entiers, on trouve cinq décompositions $x \times y$ telles que x > y.
$48 = 48 \times 1$; $48 = 24 \times 2$; $48 = 16 \times 3$; $48 = 12 \times 4$; $48 = 8 \times 6$.
Les cinq solutions sont : (48,1) ; (24,2) ; (16,3) ; (12,4) ; (8,6)

Question 2. Le périmètre **p** du polygone ABCDDEF a pour mesure **p** = 2AB + 4AF.
[AF] est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les mesures des côtés de l'angle droit sont respectivement x et y. Sa mesure peut donc s'exprimer ainsi : $AF = \sqrt{x^2+y^2}$
Donc $\mathbf{p} = 2x + 4\sqrt{x^2+y^2}$

Calculons les différentes valeurs possibles de **p** :
Si (x ;y) = (48 ;1), $\mathbf{p} = 96 + 4\sqrt{2305}$ donc p > 56 ;
Si (x ;y) = (24 ;2), $\mathbf{p} = 48 + 4\sqrt{580}$ donc **p** > 56 ;
Si (x ;y) = (16 ;3), $\mathbf{p} = 32 + 4\sqrt{265}$ ce qui donne **p** > 97,1 et donc **p** > 56
Si (x ;y) = (12 ;4), $\mathbf{p} = 24 + 4\sqrt{160}$ ce qui donne **p** > 74,5 et donc **p** > 56
Si (x ;y) = (8 ;6), $\mathbf{p} = 16 + 4\sqrt{100}$ ce qui donne **p = 56**.
Il n'existe donc qu'**une seule solution, (x ;y) = (8 ;6)** pour que le périmètre p soit égal à 56 cm.
Construction page suivante : *(On peut commencer par tracer deux droites perpendiculaires)*

Figure :



DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES.

Question 1. Imane calcule (3 + 5 + 4) × 4 . La somme 3 + 5 + 4 correspond à la mesure du périmètre du triangle A. Imane fait probablement le raisonnement suivant : «*Il y a quatre triangles. Les quatre triangles sont identiques, ils ont donc chacun le même périmètre. Pour trouver le périmètre total, on multiplie le périmètre du triangle A par le nombre de triangles.*
La règle implicite utilisée est : « Le périmètre de la réunion de plusieurs surfaces est égal à la somme des périmètres de chacune des surfaces. ». Imane applique le principe d'additivité propre à la définition d'une mesure de grandeur, comme la longueur ou l'aire, dans un cas où il est illicite.

Question 2. Notons tout d'abord que Dorian n'a pas utilisé les données numériques fournies dans l'énoncé (dimensions de chaque triangle rectangle), mais qu'elle a mesuré sur chaque figure les dimensions utiles à ses calculs. Elle a su mesurer et calculer avec les nombres décimaux obtenus. En effet ses mesures, exprimées en centimètres au millimètre près, sont correctes et les calculs effectués avec des nombres décimaux sont eux aussi exacts.

- Questions a) Dorian a reconnu un rectangle et a su calculer son périmètre en utilisant le demi-périmètre (ce dernier correspond à 3,2 + 4,8).
- Question c) Elle a effectué la somme des mesures des longueurs des six côtés du polygone de la figure 2.Elle a donc su appliquer le principe d'additivité des longueurs.
- Question b) Dorian sait calculer la mesure de l'aire d'un rectangle, comme produit des mesures de ses deux dimensions (avec des unités cohérentes).
- Question d) Dorian imagine le déplacement et la réorganisation spatiale des triangles permettant de reconstruire le rectangle. Elle connaît donc une procédure géométrique (par découpage et réassemblage) s'appuyant sur la conservation des aires.

Question 3. Léna a montré dans sa réponse à la question b) qu'elle savait calculer la mesure de l'aire d'une figure qu'elle connaît bien, un rectangle. La figure 2 ne ressemblant à aucune des figures « usuelles », Léna ne reconnaît pas de figure connue, et donc ne connaît pas de formule qu'elle pourrait utiliser pour « calculer » la mesure de son aire, comme elle l'a fait pour la figure précédente. Pour Léna, calculer une aire consiste à appliquer une formule.

Question 4. La réponse de Charlotte est 6×4 , sans autre indication sur ce que peuvent représenter chacun de ces deux nombres.

- Première interprétation : 6 désigne la mesure de la longueur du rectangle, en centimètres, et 4 désigne la mesure de la largeur du rectangle, en centimètres également. L'aire de ce rectangle a pour mesure en cm^2 le produit des mesures des côtés ; Pour la seconde figure, équivalente à un rectangle, puisque composée des mêmes quatre triangles disposés différemment, l'aire est forcément la même. Charlotte a pu reproduire la réponse précédente, puisqu'on retrouve le même rectangle.
- Seconde interprétation : 6 peut désigner la mesure de l'aire de chaque triangle, en cm^2.En effet cette indication est donnée dans l'énoncé. Puisqu'il y a 4 triangles superposables assemblés dans la figure 1, l'aire de cette figure est égale au produit par 4 de l'aire du triangle A. De même pour la figure 2, où l'on retrouve les mêmes quatre triangles disposés différemment.

Question 5. Jennifer calcule le périmètre du rectangle en effectuant la somme du double de la mesure de la largeur et du double de la mesure de la longueur. Les nombres qu'elle utilise correspondent aux mesures effectives de la figure. Elle a sans doute pris son double décimètre, puis considéré les deux largeurs et les deux longueurs. Sa réponse est conforme aux mesures qu'elle a effectuées. Elle manifeste donc dans cet exercice une bonne connaissance de la notion de périmètre d'un rectangle.

Pour répondre à la question b), elle applique ses connaissances : Le périmètre d'un rectangle s'obtient par une somme de mesures de longueurs (les doubles des côtés). L'aire par contre s'obtient par un produit de mesures de longueurs. Elle effectue donc un produit, mais fait l'erreur de reprendre les doubles des mesures des côtés et non les mesures des côtés eux-mêmes. (Elle calcule $2l \times 2L$ au lieu de $l \times L$). Cette erreur suffit pour que sa réponse soit erronée, mais ne permet cependant pas d'affirmer qu'elle ne connaît pas la formule de l'aire d'un rectangle.

SECOND VOLET (8 POINTS)

DIDACTIQUE

I. Etude rapide de la progression.

Question 1. Les trois chapitres de ce manuel s'articulent autour des notions suivantes :

- Fraction décimale :
  a) fraction décimale correspondant à une mesure de longueur et, surtout, au repérage d'un point sur une droite graduée (annexes 1, 2 et 3) ;
  b) différentes écritures d'un nombre décimal utilisant les fractions décimales :
  Les lettres a, b et c désignent des entiers naturels
  1. $\frac{a}{10^n}$ (annexes 1, 2 et 3),
  2. $a+\frac{b}{10^n}$ avec $\frac{b}{10^n}<1$ (annexes 1, 2, et exercice 8 de l'annexe 3),
  3. $a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}$ avec $b < 10$ et $c < 10$ (exercice 8 de l'annexe 1, annexes 2 et 3)
  4. somme de termes de la forme $a \times 10^n$ et $\frac{b}{10^m}$ (avec a et b inférieurs à 10), décomposition canonique utilisant les fractions décimales (annexes 2 et 3)

c) vocabulaire : unités, dixièmes, centièmes et millièmes (annexes 1,2 et 3).
d) tableau de numération (annexe 2 et mémento de l'annexe 3).

- Ecriture à virgule : passage d'une écriture utilisant les fractions décimales à une écriture « à virgule »

- Ecriture à virgule et mesures de grandeurs (activité 1 de l'annexe 2 et annexe 3).

Note relative à cette question : La séparation entre les deux « chapitres » 2 et 3 n'est due qu'à un découpage dans le temps. On retrouve en effet les mêmes éléments de la progression dans ces deux chapitres. Le chapitre 3 apparaît surtout comme une synthèse des deux précédents.

Question 2. Le point de départ ce cette progression repose sur la connaissance des **fractions**. Ces fractions expriment des mesures de longueurs, ou sont utilisées pour coder la position de points sur une droite graduée. Les fractions désignent des nombres. Une bonne connaissance de la numération de position en usage pour les nombres entiers est aussi requise (unités, dizaines , centaines...), ainsi que, pour un grand nombre des activités proposées, une certaine maîtrise du repérage sur une droite graduée ou du papier millimétré.

II. Analyse de la démarche proposée.

Annexe 1

Question 1.1 La notion de **fraction** (décimale), celle de **repérage et de codage d'un point** sur une graduation régulière portée par une droite, et enfin la **numération** de position pour écrire les nombres entiers sont les trois notions utilisées dans cette page.
Note : on pourrait citer également la notion d'égalité...

Question 1.2 Dans l'exercice 3 de la page 98, il s'agit de recomposer une fraction décimale unique, correspondant à une somme d'entiers et de fractions décimales dont le numérateur est un nombre d'un chiffre et le dénominateur une puissance de 10 (Cela consiste, pour chaque terme, à trouver des écritures équivalentes avec un dénominateur commun et à additionner les numérateurs obtenus). **Les exercices 7 et 8 de la page 95 détaillent ce travail**. Notons que l'exercice 5 de cette même page correspond à la démarche inverse.

Annexe 2

Question 2.1 L'activité 1 de la page 98 amène une « rupture » avec les activités précédentes qui portaient exclusivement sur des fractions décimales : On demande en effet à brûle-pourpoint aux élèves d'expliquer ce que peuvent signifier des écritures à virgule de nombres, représentant des mesures de prix et de longueur (mesures les plus communes dans la vie pratique), écritures d'un usage courant, et probablement déjà rencontrées par les enfants hors de l'école. Il s'agit sans doute de donner une signification « concrète » à l'écriture à virgule introduite formellement dans les exercices 6 et 7.
Notons également que l'on passe d'un travail technique sur écritures fractionnaires à un discours sur des écritures à virgule de nombres décimaux.

Question 2.2 C'est dans l'exercice 6 (page 99) que l'on déclare pour la première fois que les écritures utilisant les fractions décimales sont des désignations de nombres décimaux, ce qu'illustre l'exemple : $600 + 40 + 3 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} + \frac{1}{1000} = 643{,}521$

Question 2.3 Le tableau de l'exercice 4 montre six colonnes. De droite à gauche, on passe d'une colonne à la suivante pour trouver des unités d'ordre supérieur, dix fois plus grandes : millièmes, centièmes, dixièmes, unités, dizaines, centaines... C'est donc à la notion de numération décimale, numération de position et de base 10, que l'on fait appel ici.

Annexe 3

Question 3.1 L'activité 1 demande de transformer un ou quelques chiffres de l'écriture d'un nombre décimal affiché sur une calculatrice, sans les modifier tous. Par exemple de changer seulement le chiffre des dixièmes. Cela vise la maîtrise de la numération, et en particulier la maîtrise de la signification des chiffres de l'écriture à virgule, des expressions « chiffre des dixièmes », « chiffre des centièmes »...

Question 3.2 Il s'agit, dans l'exercice 1, de comprendre le rôle du chiffre zéro dans l'écriture à virgule des nombres décimaux : Par convention, zéro ne s'écrit pas lorsque sa présence n'est pas utile (à gauche de la partie entière et à droite de la partie décimale).

Question 3.3 Pour résoudre les premières questions de l'exercice 3, il faut trouver un nombre décimal correspondant à un point situé sur une droite graduée. Pour cela, dire entre quels entiers naturels se trouve ce repère pour trouver la partie entière, puis compter les dixièmes qui séparent le repère de celle-ci. C'est donc la notion d'ordre sur les décimaux qui est en jeu. Une maîtrise assez fine du repérage est nécessaire également dans la suite de l'exercice.

Question 3.4 L'exercice 5 de la page 101 montre que les nombres décimaux sont particulièrement adaptés pour les mesures de longueur, avec le système métrique, dès lors que l'on a choisi une unité, de même que pour les changements d'unités. On y retrouve donc l'objectif pratique que l'activité 1 de l'annexe 2 fait pressentir, et c'est en effet une des fonctions premières des nombres décimaux.

Question 3.5 La mesure 1 m 45 mm utilise deux unités différentes. Un millimètre est un millième de mètre. On peut donc facilement passer à un codage **décimal** de cette mesure : Traduite en une seule unité, le mètre, la mesure 1 m 45 mm est équivalente à $1 + \frac{45}{1000}$ ou encore à 1,045 m. D'autre part, 1 h 45 mn utilise aussi deux unités (heures et minutes) dans un système **sexagésimal** : Traduite en une seule unité (en heures), cette mesure est équivalente à $1 + \frac{45}{60}$, soit à $1 + \frac{3}{4}$ ou encore à $1 + \frac{75}{100}$ h

Note : Dans les facturations informatisées et actuelles de durées de travaux on utilise le nombre 1,75 (mesure décimale en heures) en lieu et place de 1 heure et 45 minutes.

Question 3.6 On regroupe les quinze écritures en trois classes correspondant à 4,85 , 48,5 et 485

4,85 ; 4,850 ; 4 + 0,8 + 0,05 ; $4+\frac{8}{10}+\frac{5}{100}$; $4+\frac{85}{100}$

48,5 ; $\frac{485}{10}$; $(4 \times 10) + 8 + 0{,}5$; $48 + \frac{5}{10}$; $40 + \frac{85}{10}$; 48,500

485 ; 0485,0 ; $\frac{4850}{10}$; $\frac{48500}{100}$

L'intérêt de cet exercice tient au fait qu'un même nombre, décimal, peut s'écrire sous de multiples formes différentes utilisant des fractions ou un codage décimal avec une virgule. Le but de l'exercice est de reconnaître ces formes, d'être capable de passer d'un type de codage à un autre. Une autre difficulté est ajoutée avec le choix particulier de ces trois nombres qui peuvent s'écrire avec les mêmes chiffres 4, 8 et 5 dans le même ordre, seule la virgule changeant de place ou disparaissant.

III. Synthèse.

Question 1 : L'élève devrait avoir appris que les nombres décimaux, dont l'usage est courant dans la vie pratique principalement sous forme de « nombres à virgule », sont des nombres qui peuvent s'écrire sous différentes formes. Il devrait avoir appris à les lire correctement et à identifier leur partie entière et leur partie décimale (exprimée en dixièmes, centièmes ou millièmes). Il devrait avoir appris à pouvoir passer indifféremment d'un type d'écriture à une autre. Il devrait avoir appris à situer ces nouveaux nombres sur la droite numérique (le travail sur l'ordre, dans ces chapitres, est resté très implicite). Il devrait avoir enfin appris à étendre le champ d'application de la numération décimale de l'ensemble des nombres entiers à celui des nombres décimaux. Il pourrait avoir également senti l'intérêt et la commodité de ces nombres pour coder les mesures de grandeur.

Question 2 :. L'élève qui commet cette erreur considère sans doute un nombre décimal comme un couple de deux nombres entiers. Il traite donc comme des nombres entiers chacune des deux parties de ces nombres, qu'il additionne séparément : Il additionne 12 et 13, les deux parties entières, puis 82 et 64 les deux parties décimales. Cette conception erronée a pu être élaborée lors de la résolution d'exercices de « recollements » d'unités et renforcée par la formulation du mémento (Je retiens bien : « *un nombre décimal est formé d'une partie entière, de la virgule et d'une partie décimale* »).

Dans un tel calcul l'élève oublie que les nombres décimaux sont des fractions décimales : Ainsi $\frac{146}{100} = 1 + \frac{46}{100} \ldots$

Note : *La réponse correcte aurait du être 26,46*

Question 3 : Le paragraphe intitulé « Je retiens bien »ne fait pas référence au fait que 100 centièmes font une unité, de même que dix dixièmes. Il est limité à l'écriture d'un seul nombre décimal. (Le problème de la retenue ne se pose donc pas)
Le principe de la retenue se pose effectivement dès lors que l'on veut additionner deux nombres quelconques écrits dans une même base, et ce qui existe dans l'addition des entiers se prolonge à l'addition des nombres décimaux. : dix unités d'un rang donné font une unité de l'ordre immédiatement supérieur. Cet aspect n'apparaît pas dans le paragraphe en question.

BORDEAUX - CLERMONT - POITIERS - NANTES - LA REUNION

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS) MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1

Question 1 : Soit t la mesure d'une toise, p celle d'un pied, po celle d'un pouce ;
(1) 3t+2p = 240 po
(2) 5t+1p = 372 po
Deux approches possibles :

Raisonnements algébriques :
- On élimine les pouces :
le PPCM de 240 et 372 est 7440 (en utilisant les décompositions en facteurs premiers des 2 nombres) ; en multipliant (1) par 31 et (2) par 20, on peut alors égaler :
93t+62p = 100t+20p, d'où 42p=7t, donc t=6p

- Ou bien on exprime t en fonction de po, puis p en fonction de po, et l'on procède par substitution.
(2) donne 10t+2p=744 po (2)'donc en faisant (2)' - (1) 7t=504po donc t=72po et dans (1) en substituant t par 72 po 3 x 72 po + 2 p = 240 po soit p=12po d'où t=6p.

Une toise vaut 6 pieds.

Raisonnement “ arithmétique ” :
3 toises et 2 pieds équivalent à 240 pouces, 10 toises et 2 pieds équivalent à 744 pouces, donc 7 toises équivalent à la différence soit 504 pouces.
On obtient qu'une **toise vaut 72 pouces**. Comme 5 toises et 1 pied font 372 pouces**, 1 pied** correspond à la différence entre 372 pouces et 5 toises, soit à 372 - 5 x 72 c'est à dire **12 pouces**. **Une toise** vaut donc en pieds 12 fois moins de pieds que de pouces soit 72 : 12 soit **6 pieds.**

Question 2 :
De (1) on en déduit que : 15t+10p = 1200 po ; de (2) que 15t+3p = 1116po d'où 7p=84po donc p=12po ; un pied vaut : 12 $\times$ 0,027 = 0,324 soit **0,324 mètre**. (La deuxième approche algébrique permet d'avoir directement p=12po, donc de conclure).

Question 3 :

Une méthode :
1700=-(62x27)+26. Donc la hauteur est 62 pouces et 26/27 de pouces, ce qui fait sensiblement 63 pouces. 62= (5x12)+3 d'où **5 pieds, 2 pouces et $\frac{26}{27}$ de pouce, soit 5 pieds 3 pouces (par excès).**

Autre méthode :
1 pied vaut 0,324 mètre. Donc 1,7 m contient 5 pieds et il reste (1,70-1,62 = 0,08) soit 0,08m.
0,08 m vaut $\frac{0,08}{0,027}$ (en pouces), soit 2,96 pouces.
Donc la taille est approximativement **5 pieds 3 pouces (par excès).**

Remarques : il y a d'autres méthodes comme 1m70 correspond à 1,70 : 0,027 soit 62,962962... pouces et de plus , les réponses de type 4 pieds 15 pouces, etc. sont acceptables.

EXERCICE 2 :

Partie A :

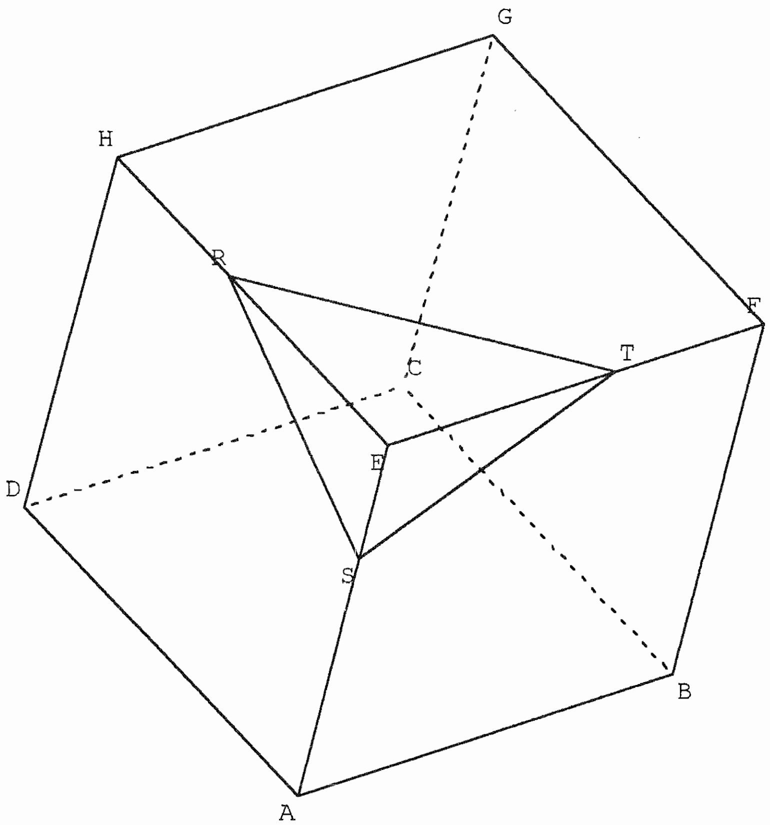
Question 1 a :

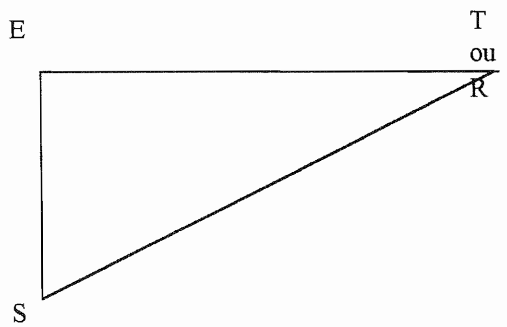
Le triangle...	**Est-il rectangle ?**	**Est-il isocèle ?**	**Est-il équilatéral ?**
DJH	**N**	**O**	**N**
ACG	**O**	**N**	**N**
AFC	**N**	**O**	**O**
EHG	**O**	**O**	**N**
Plusieurs choix possibles **de type AGC** **de type ACJ**	**Oui**	**non**	**non**

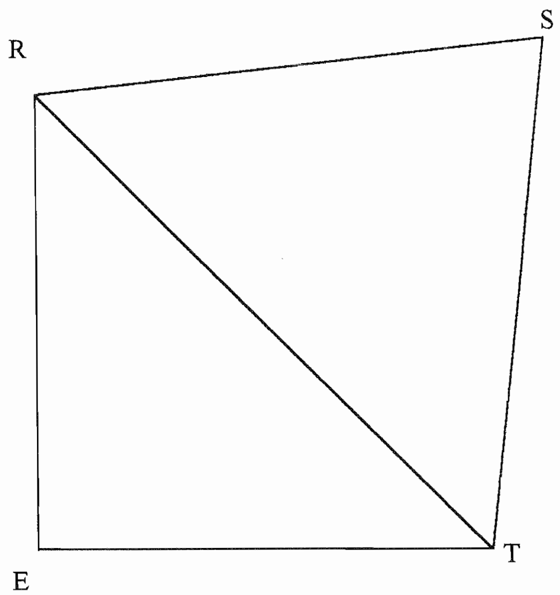
Question 1 b:

(il faut penser à affirmer et réfuter):
AFC : ses côtés sont les diagonales de carrés superposables, ses côtés sont isométriques le triangle est équilatéral, (donc isocèle) et non rectangle (ses angles sont 60°). Autre réponse : avec Pythagore et le calcul de la longueur de la diagonale.
EHG : Dans le carré EHGF, ce triangle est rectangle isocèle (deux côtés de l'angle droit isométriques.). Il est rectangle en H, donc non équilatéral.

Partie B :
Question 1 a :







Question 1 b :
Le triangle ERT est isocèle rectangle (la longueur des 2 côtés isométriques est de 6 cm)

On peut donc le construire pour obtenir la longueur RT.
Les deux triangles rectangles ERS et EST sont isométriques.(les deux côtés de l'angle droit ont pour longueurs respectives 3 cm et 6cm)
On peut donc les construire pour obtenir la longueur commune de ST et SR
Il suffit alors de **construire le triangle isocèle SRT par report des longueurs des côtés à l'aide du compas :** c'est le contour de la surface imprimée dessinée en taille réelle.

Question 2 :
Dans le triangle ERT rectangle en E, appliquons le théorème de Pythagore ,on a : $TR^2 = 6^2 + 6^2$
d'où TR = $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ (en cm) (valeur approchée : 8,485 cm).
Question 3 :
Pour connaître l'aire de la section, il suffit de connaître la longueur de la hauteur SH issue de S dans le triangle SRT.
Nous avons $RS^2 = 36 + 9 = 45$
$RS = 3\sqrt{5}$ (en cm)
Ce qui permet d'obtenir :
$SH^2 = 45 - \frac{72}{4} = 45-18 = 27$; d'où $SH = 3\sqrt{3}$. (en cm).
L'aire est donc $\frac{6\sqrt{2} \times 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{6}$ (en cm²).(valeur approchée : 22,045 cm²)
Remarque :Toute étude faisant intervenir des résultats intermédiaires ou et terminaux sous forme d'écriture à virgule (forcément une approximation dans le cas présent) est pénalisable.

EXERCICE 3 :
Question 1 :
A la vitesse constante de 60 km/h, l'automobiliste parcourt 1 km, en une minute soit 500m en 30 secondes.
Question 2 :
Remarque : La distance est précisée en mètres, mais le temps ne fait l'objet d'aucune indication sur le choix de l'unité. Nous choisissons la seconde conforme à l'esprit du texte.

Soit d(t) la distance parcourue en mètres en fonction du temps exprimé en secondes :

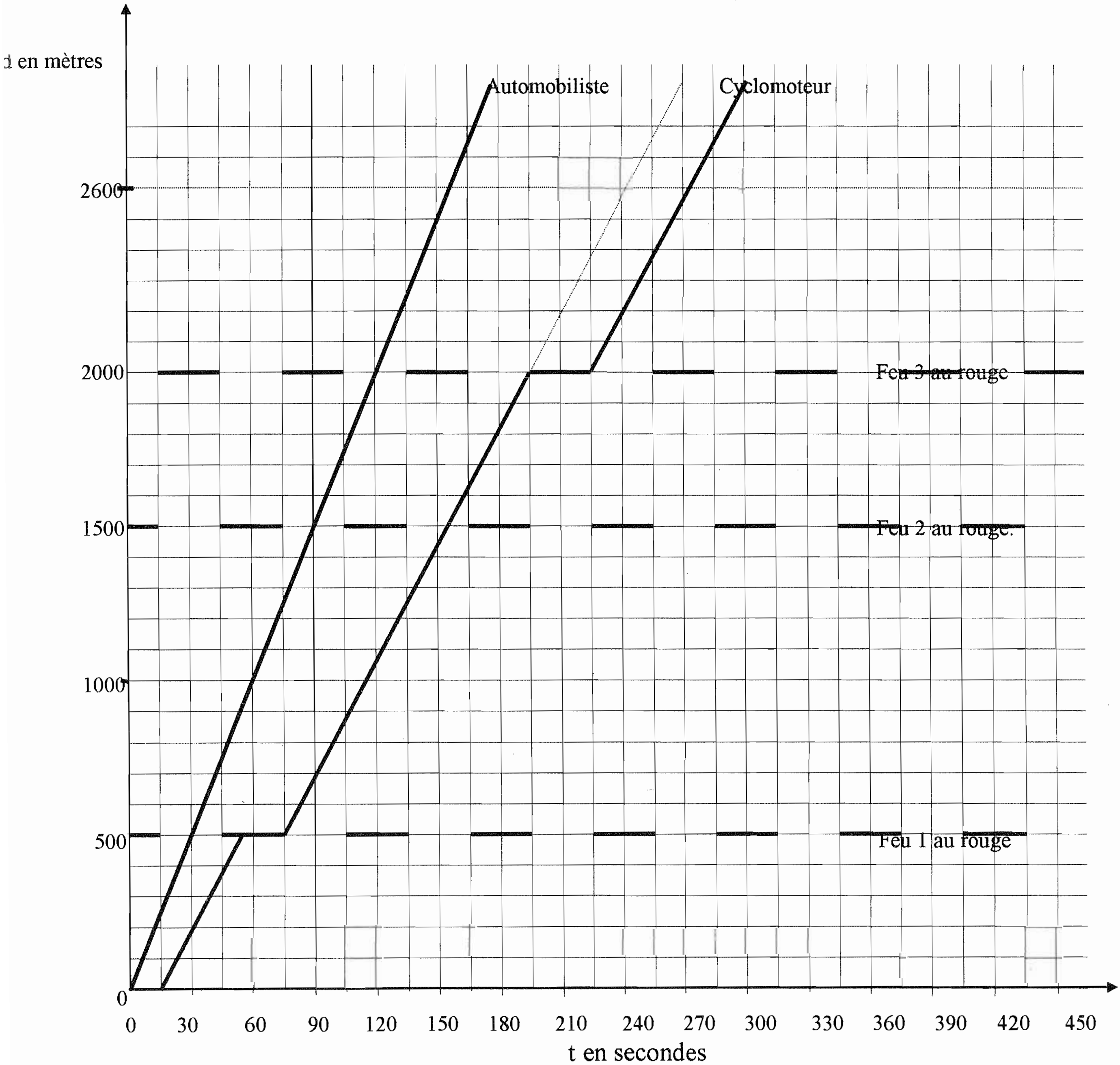
d(t) = v t, v étant la vitesse en m/s et t le temps en secondes.
La vitesse de 60 km/h est en m/s de $\frac{60 \times 1000}{3600}$ soit de $\frac{50}{3}$ m/s

d'où $\boxed{d(t) = \frac{50}{3}t}$ **(Pour le graphique voir page suivante.)**

Question 3 :
Remarque : aucune justification n'est demandée.

Feux	0s 15s 45s 75s 105s 135s 165s					
F1	**R**	**V**	**R**	**V**	**R**	**V**
F2	**R**	**V**	**R**	**V**	**R**	**V**
F3	**V**	**R**	**V**	**R**	**V**	**R**

Représentation graphique



Question 4 a :
Dans cette question, on tient compte du respect des feux.

Méthode graphique :
Contrôle du premier feu : pour parcourir 500 m, le cyclomoteur mettra : $(3600 \times 500)/45000 = 40s$. Ce qui permet de voir qu'il arrive au premier feu au rouge. Il doit donc attendre que ce feu passe au vert.
Il suffit de poursuivre le tracé de la courbe représentative en traçant une parallèle au premier segment déjà construit (le parallélisme est justifié par un coefficient directeur égal - vitesse constante -) partant de la fin du rouge du premier feu au temps t = 75s. Cette parallèle "atteint" le 3° feu au début du rouge. Convenons que le cyclomotoriste s'arrête[i]. On mène ensuite une nouvelle parallèle pour terminer la courbe représentative.
Elle coupe la droite y = 2600 en un point d'abscisse approximative $x_f = 273$.
Le **cyclomotoriste a donc mis** 273 -15 soit **248 secondes pour parcourir l'avenue**.

Méthode par calcul :
Pour effectuer 0,5 km, le cyclomoteur met 40 secondes. Il découvre donc F1 à $t_1=55s$, il est au rouge. Il doit donc s'arrêter. Il repart à $t'_1=75s$. Pour effectuer 1 km il met 80 s donc il arrive à $t_2= 155$ s à F2. Ce feu est alors vert (voir tableau). De F2 à F3 il doit parcourir 0,5 km. Il met 40s. Il est à $t_3 =195s$ à F3. Ce feu passe juste au rouge. Le cyclomotoriste s'arrête. Il repart à $t'_4 = 225$ s. Il lui reste 0,6 km à parcourir. Il mettra alors 48 s.
Le total du temps pour parcourir l'avenue est donc (225+48)-15 soit **258 s.**
(Le 15 vient du départ effectué au temps $t_0 = 15$ s).
Soit 4 mn 18s.

[i] Il y a une ambiguïté éventuelle dans le texte : " on assimile feu orange et feu rouge ".L'on peut donc considérer que le cyclomoteur voit le feu passer à l'orange et qu'il ne s'arrête donc pas (trajet en pointillé)

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Remarque dans l'énoncé, les iris deviennent des œillets....

Question 1 1: Analyse des réponses indiquant - la pertinence des procédures utilisées et des réponses données.

Présentation experte (non demandée) :
il s'agit de contrôler deux contraintes : $x + y = 15$ *et* $10x + 4y \leq 100$
sur des couples (x_0, y_0) *donnés.*

	Johnny	Maxime	Gaelle
a,	s'occupe de la seule deuxième contrainte.	s'occupe de la seule première contrainte et s'en sert comme négation. (Non, ...)	s'occupe de la seule deuxième contrainte.
	Réponse fausse due à la non prise en compte de la deuxième contrainte.	**Réponse juste.**	**Réponse juste.** Mais erreur de calcul $4 \times 5=40$.
b,	s'occupe de la seule deuxième contrainte.	Vérifie les deux contraintes.	s'occupe de la seule deuxième contrainte.
	Réponse juste Mais, en fait, erreur due à la non prise en compte de la deuxième contrainte	**Réponse juste** Vérifie les deux contraintes.	**Réponse juste.** Mais ne contrôle pas la première contrainte.
c,	s'occupe de la seule deuxième contrainte.		s'occupe de la seule deuxième contrainte.
	Réponse juste La première contrainte étudiée seule permet de répondre juste, mais, en fait, elle n'agit pas dans un cadre de logique de négation.	**Réponse juste** : Se sert du non respect de la première contrainte comme négation.	**Réponse juste.** Mais erreur de calcul $7 \times 4=24$
Conclusion	**La procédure** de Johnny consiste à ne s'occuper que de la somme dépensée.	**La procédure** de Maxime consiste à vérifier les deux contraintes pour affirmer, à exhiber une contrainte non vérifier pour réfuter	**La procédure** de Gaelle est celle de Johnny, avec des erreurs de calcul en plus.

Remarque : nous n'avons pas considéré comme erreurs les maladresses de rédaction..

Question 1 2: Analyse des réponses indiquant
- Les compétences et les connaissances et les causes possibles des erreurs.

Les compétences :
- Il faut d'abord savoir lire un énoncé de problème.

Remarque : cette mise en évidence d'une compétence ne doit pas occulter la suite de l'analyse.
- Il s'agit de savoir contrôler simultanément deux contraintes.
- Chacune de ces contraintes nécessite :
    - pour la première : $(x + y = 15)$ savoir effectuer une addition simple.
    - pour la deuxième : $(10x + 4y \leq 100)$ savoir effectuer deux produits, les additionner et comparer le résultat à 100.
- Traiter la logique sous jacente :
    - la négation pour infirmer (une seule contrainte non respectée suffit alors).
    - la preuve par vérification nécessaire sur les deux contraintes.

Les connaissances :
Certaines sont des savoirs reconnus tels que savoir additionner, multiplier, comparer.
D'autres sont moins en usage à l'école élémentaire : preuve et contre-exemple.

Causes possibles des erreurs :
Non prise en compte des deux contraintes :
- mauvaise lecture de l'énoncé de problème.
- impossibilité de prendre en compte les deux contraintes simultanément. Enoncé trop lourd.
- Erreur de logique.
- Activité inhabituelle.

Question 2:
Les notions mathématiques sous jacentes[ii].

Les notions mathématiques sont l'addition dans les entiers, la multiplication dans les entiers, les écritures où sont associées des écritures additives et des écritures multiplicatives, la comparaison dans les entiers, la logique élémentaire implicite.

[ii]: *"le sous-jacent" reste un terme flou qui ignore de quel point de vue cela doit être pris (du côté de l'élève, du côté du professeur ou du côté du système enseignant). Cela a été maintes fois regretté lors de rapports de CRPE en France.*

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

Question1

Exercice2 :

Premier tableau : l'on constate que l'on passe de 12 à 36 en multipliant par 3 ; on calcule ensuite 3x29 ;3x2 ;3x14 ;3x100 et l'on retrouve bien les nombres de la colonne de droite ;
Conclusion : on passe des nombres de la colonne de gauche à ceux de la colonne de droite en multipliant par un même nombre : :3.
Deuxième tableau : on voit que l'on passe de 50 à 750 en multipliant par 15 (15 x 5 = 75} , on calcule 15x7 ;15x13 ;15x25 ;15x5 et l'on constate que l'on retrouve les nombres de la colonne de droite pour les deux premiers, mais pas pour les deux derniers (5x25=375 et 5x15=75)
Conclusion : on ne passe pas des nombres de la colonne de gauche à ceux de la colonne de droite en multipliant par un même nombre.

Autres justifications possibles pour ce deuxième tableau :
- il suffit d'écrire : 750=50x15 et 65=5x13 ou bien 750=50x15 et 5x15=75 (différent de 65)
(idem avec 25)
- on peut justifier aussi avec des propriétés de linéarité *(puisqu'il s'agit de la solution personnelle des candidats) :*
  *si l'on passe des nombres de gauche à ceux de droite en multipliant par un même nombre il s'agit d'un tableau " de proportionnalité " qui vérifie la propriété f(kx) = kf(x) or cette propriété n'est pas vérifiée pour 50 et 5 : f(10x5)=f(50)=750 et 10f(5)=10x65=650
  *même chose avec 50=2x25
  *même chose avec la propriété f(x+y)=f(x)+f(y) et l'une des relations 7+13+5=25 ou 7+13+25+5=50

Exercice 3, c) :

- 1200=100x12,	8x12=96	la consommation pour 1200km est 96 litres
- 320=100x3,2	8x3,2= 25,6	la consommation pour 320km est 25,6 litres
- 10=100 :10	8 :10= 0,8	la consommation pour 10km est 0,8 litres

D'autres procédures sont envisageables ici bien sûr. Une justification n'est pas demandée. Toutefois, l'indication des calculs est au moins nécessaire.

Question 2

Comment faut-il comprendre la question : " sous-jacentes à ***chacun*** *de ces quatre exercices " ? ou " les connaissances sous-jacentes à* ***tous*** *les exercices " ?*

notions mathématiques sous-jacentes communes à tous les exercices :

- la notion de fonction numérique : dans les exercices 1 et 2, une même règle s'applique à toute une liste de nombres ; dans l'exercice 3, au nombre de km on fait correspondre la consommation en litres ; et dans les recettes plusieurs fonctions interviennent (à un nombre de personnes, on fait correspondre chacune des quantités).

- la notion de fonction linéaire. Notion de proportionnalité.
- les propriétés de linéarité.

Objectifs des exercices 1,2 :

- **le titre " revoir "** laisse supposer que les élèves ont déjà travaillé sur des tableaux de nombres avec comme règle " on multiplie tous les nombres de gauche par un même nombre " : il s'agit donc de " revoir " le fonctionnement de tels tableaux :
- savoir trouver le nombre de droite :
- le choix des nombres dans le tableau 1 et dans le tableau 4 laisse supposer que l'objectif est de mettre en œuvre la propriété multiplicative de linéarité (l'image de la moitié est la moitié de l'image, si l'on part d'un nombre 2 fois (ou dix fois) plus petit, l'image est deux fois (ou dix fois) plus petite.
- savoir trouver le nombre de gauche ou la fonction : notion de multiplication à trou, ou d'opération inverse de la multiplication.
- L'image de 1 est égale au nombre par lequel on multiplie.

- Par contre nous ne savons pas si ces tableaux ont été identifiés comme tableau de proportionnalité, ni le vocabulaire utilisé à leur propos la consigne de l'exercice 2 laisse supposer que le vocabulaire de la proportionnalité n'a pas été introduit (situation de proportionnalité, propriété de linéarité)

Objectifs de l'exercice 3 :

Le titre " découvrir " laisse supposer que l'objectif est de proposer pour la première fois une situation de proportionnalité et de mettre en place des procédures pour trouver les nombres images (propriétés de linéarité, peut-être calcul du coefficient) :

- l'objectif est donc de donner du sens aux connaissances purement numériques des ex 1 et 2 en les faisant fonctionner sur des grandeurs pour résoudre un problème.
- l'objectif est aussi d'envisager la proportionnalité dans le cadre graphique. (Droite passant par l'origine).

Comparaison des phases I, II et III :

Il faut noter d'abord que nous disposons seulement de 4 exercices sans aucune indication sur la situation didactique construite à partir de ces exercices ; ni sur la place de ces exercices dans la progression du CM1, ni même sur les objectifs de l'enseignant.

Question 3.a (on traitera ici plutôt les différences entre les phases)

- 1) Les exercices 1 et 2 nécessitent des connaissances purement numériques sur la multiplication alors que dans les exercices 3 et 4 il s'agit aussi de comprendre un énoncé de problème et de le résoudre.
- dans le premier cas la notion de fonction est liée à une même règle que l'on applique à une liste de nombres (on multiplie tout par le même nombre) alors que dans les exercices 2 et 3, les fonctions ont du sens : à un nombre de km parcourus, on fait correspondre la consommation d'essence ; ou bien dans l'exercice 4, à un nombre de

personnes, on fait correspondre la quantité nécessaire de chacun des ingrédients (on peut dégager plusieurs fonctions).
On peut noter que le fait de travailler seulement sur les nombres dans les ex 1 et 2 nécessite de mieux connaître les propriétés de la multiplication que dans les ex 3 et 4 où ces propriétés peuvent être trouvées par les élèves parce qu'elles ont du sens : par exemple dans l'exercice 1, pour trouver l'image de 5 en divisant par 2 l'image de 10, on met en jeu, plus ou moins implicitement, l'associativité de la multiplication : 5x156=(10 :2)x156=(10x156) :2 =1560 :2
alors que dans l'exercice 3, pour trouver la consommation pour 10 l. par exemple, la référence à la situation permet d'établir que " si l'on roule dix fois moins on consomme dix fois moins ".

2) l'exercice 3) est le seul qui nécessite des connaissances sur les représentations graphiques des fonctions (passer d'un tableau à un graphique, lire un résultat sur un graphique). De plus, cet exercice n'incite pas à chercher le coefficient de proportionnalité.
3) Les exercices 1,2 ne nécessitent que des connaissances sur les nombres entiers, alors que dans l'exercice 3 les nombres décimaux interviennent (quotient d'entiers par dix), et dans l'exercice 4 les fractions simples (pour le lait, et éventuellement pour les œufs).
4) A supposé que l'on comprenne la question, cette première question de l'exercice 4 nécessite d'imaginer une solution ; puisque les élèves doivent avoir l'idée de chercher les recettes équivalentes aux recettes données pour un même nombre de personnes (soit 12 ou 24 ou bien 2) et pour ce faire de chercher un multiple commun à deux nombres ; on est bien loin ici des problèmes posés habituellement en CM1 (cf évaluation 6°).

<u>Question 3-b</u>

<u>P1 : procédure basée sur la propriété multiplicative de linéarité</u>
Pour 1200km :
1200= 100x12 (ou bien 200x6, ou bien 300x4)
Si l'on fait un parcours douze fois plus long , on consomme douze fois plus d'essence
8x12= 96 La consommation pour 1200km est 96 litres
Pour 10km : 10=100 :10 8 :10=0,8 l.
Pour 320km : 320=10x32 0,8x32=25,6 l.

<u>P2 procédure basée sur les propriétés additive et multiplicative</u>
Pour 1200km : 1200=700+500 56+40=96
Pour 320km : 320= 300+20 Pour 300km : 24litres. Pour 20km : 20=200 :10
16 :10=1,6 1,6litres. 24+1,6=25,6 la consommation est 25,6litres
Pour 10km : idem P1

<u>P3 basée sur le coefficient de proportionnalité</u>
Pour passer de 100 à 8 on multiplie par 0,08 : 100x0,08= 8l ou bien 8 :100=0,08
Pour 1200km 1200x0,08=96 Pour 320km : 320x0,08=25,6 Pour 10km : 10x0,08=0,8

De notre point de vue, il faudrait exclure cette procédure comme non pertinente en CM1 et même compter un petit plus à ceux qui auront dit pourquoi ils la réfutent (fonction à coefficient décimal, et ce coefficient n'a pas beaucoup de sens – consommation pour 1km) se référer au texte liaison CM2-6° et à l'évaluation 6°.
Sauf ceux qui justifient :
- *le coefficient a du sens dans la situation (cela peut se discuter !)*
- *le produit d'un décimal par un entier est au programme*

P4 utilisation de la représentation graphique : pas assez précise pour 320 et 10.

Question 4a

Nous ne savons rien des situations didactiques construites par l'enseignant autour de ces énoncés, et en particulier sur la façon dont ils seront corrigés : solution apportée par un bon élève, ou bien inventaire des réponses et ouverture d'un débat.

- *Remarque il n'est pas pertinent de commencer un travail sur la proportionnalité en se servant d'une situation se fondant sur la notion de vitesse moyenne difficile pour des élèves de cycle 3.*
-

Analyse de la succession des exercices :

D'abord des exercices purement numériques, dans lesquels les connaissances interviennent comme objets, puis des problèmes dans lesquels les connaissances interviennent comme outils pour résoudre les problèmes.

En l'absence d'informations sur ce qui a été fait avant (les tableaux de nombres sont-ils venus à la suite de situation de proportionnalité?) , et si l'on en juge par le titre “ découvrir ”, on peut penser que l'enseignant a choisi plutôt de donner d'abord les connaissances numériques, de faire “ découvrir ” ensuite aux élèves comment on s'en sert pour résoudre des problèmes, et ensuite de leur faire “ appliquer ” les propriétés découvertes dans une nouvelle situation.

Cette progression s'inscrit donc plutôt dans une démarche d'apprentissage par ostension (ou transmissive) que dans une démarche d'apprentissage par résolution de problèmes; en effet dans cette dernière, on aurait commencé par proposer une situation de proportionnalité. Les tableaux de proportionnalité et leurs propriétés auraient émergés comme outils pour répondre aux questions posées par la situation.

Question 4-b

Bilan à la fin de l'exercice 3 :

1) propriétés de linéarité

Nous avons vu que “ si le parcours est dix fois plus long, on consomme dix fois plus d'essence ” et aussi que “ pour trouver la consommation pour 1200km, on peut ajouter les consommations de 700km et 500km ”, on peut dire que dans cette situation :
à la somme correspond la somme, et au produit par un nombre correspond le produit par le même nombre

2) identification des situations de proportionnalité : des situations qui ont ces propriétés s'appellent des situations de proportionnalité
3) représentation graphique : sur un graphique, les points correspondants sont sur une droite qui passe par l'origine.
4) existence d'un coefficient de proportionnalité (pour les candidats qui auront mis P3 dans la question 3-b ou qui font le bilan des exercices 1 2 et 3)

on passe du nombre de km d'un parcours au nombre de litres consommés en multipliant toujours par le même nombre.

Question 5

Pour le a)

Quelle est la solution attendue à la question a ?

recettes pour 12 personnes équivalentes aux deux recettes proposées :

Pour 12 personnes	Pour 12 personnes
480g de farine 120g de sucre 8 œufs 2 cuillerée d'huile 3/2 litre de lait	480g de farine 120g de sucre 9 œufs 3 cuillerées d'huile 3/2 litre de lait

Donc il ne s'agit pas de " la même recette " : pour un même nombre de personnes, on met plus d'œufs et plus d'huile dans la deuxième recette.

Analyse:

Cette solution paraît difficile à envisager en CM1 : la formulation de l'énoncé ne facilite pas la compréhension du problème : le mot " compare " est très vague

La première phrase peut laisser penser que c'est le fait d'être pour 6 ou pour 4 qui caractérise ces recettes, et non pas la proportion des ingrédients

D'autre part, cette solution, même pour un élève ayant compris la question, demande des compétences qui dépassent beaucoup celles vues dans les exercices précédents (idée de se ramener au même nombre de personnes, travail sur les fractions).

Cette question ne correspond donc pas à l'objectif " appliquer ".

Pour le b)

Plusieurs solutions possibles :

1) 30=6x5 on multiplie par 5 les quantités de la première
2) 30=4x(15/2) ou bien de 4 personnes on passe à deux personnes et on multiplie par 15.
3) on ajoute les quantités des deux recettes : on obtient une recette pour dix personnes que l'on multiplie par 3.

Conclusion : on peut penser qu'une question aussi " ouverte " ne va pas contribuer à une bonne compréhension des situations de proportionnalité en CM1 ! **Il est clair en tout cas qu'elle ne correspond pas à l'objectif " appliquer ".**

Notes

LOUIS-JEAN
avenue d'Embrun, 05003 GAP cedex
Tél. : 04.92.53.17.00
Dépôt légal : 877 — Novembre 1999
Imprimé en France