CORRIGES

AIX-MARSEILLE

PREMIER VOLET (12 POINTS)

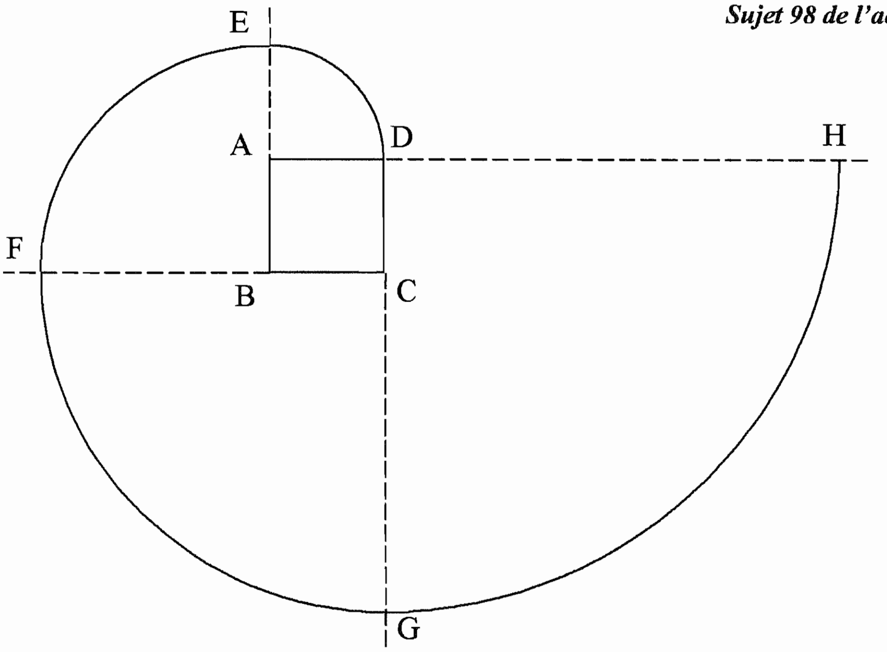
PREMIERE EPREUVE (8 POINTS) MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1 :

Question 1 : On trace successivement les arcs de cercles CD, DE et EF définis par :
- le premier arc a pour centre A, pour rayon a, il va du point C au point D, situé sur le prolongement du segment [AB] du côté de A, et il est dans le demi-plan défini par (AC) ne contenant pas B.
- le deuxième arc a pour centre B, pour rayon 2a (BD = BA + AD et AD = AC = a)
Il va du point D au point E situé sur le prolongement du segment [BC] du côté de B et il est dans le demi-plan défini par (AB) et ne contenant pas C.
- le troisième arc a pour centre C, pour rayon 3a (CE = CB + BE et BE = BD = 2a)
Il va du point E au point F situé sur le prolongement du segment [AC] du côté de C et il est dans le demi-plan défini par (BC) et ne contenant pas A.

Le triangle ABC est équilatéral donc $\widehat{CAB} = 60°$ et, par suite, $\widehat{DAC} = 180° - 60° = 120°$. L'arc de cercle est donc de 120°. Pour le cercle, l'arc est le triple, soit 360°.
On peut donc dire que le premier arc de cercle est « le tiers » du cercle de centre A et de rayon [AC].
Il en est de même pour les deux autres arcs de cercle, puisque les angles au centre correspondants sont toujours de 120° (supplément d'un angle du triangle équilatéral).
Pour les trois arcs on utilise donc « un tiers » de chaque cercle.

Question 2 : Soit un carré ABCD dont les côtés ont pour longueur a'.
- Prolonger le segment [AB] du côté de A : soit d_A cette demi-droite.
- Construire le quart de cercle de centre A, de rayon AD = a', limité par D et d_A.
- Soit E l'extrémité du quart de cercle situé sur d_A .
- Prolonger le segment [BC] du côté de B : soit d_B cette demi-droite.
- Construire le quart de cercle de centre B, de rayon BE = 2a', limité par E et d_B .
- Soit F l'extrémité du quart de cercle situé sur d_B.
- Prolonger [CD] du côté de C : soit d_C cette demi-droite.
- Construire le quart de cercle de centre C, de rayon CF = 3a', limité par F et d_C .
- Soit G l'extrémité du quart de cercle situé sur d_C .
- Prolonger [AD] du côté de D : soit d_D cette demi-droite.
- Construire le quart de cercle de centre D, de rayon DG = 4a' , limité par G et d_D .
- Soit H l'extrémité du quart de cercle situé sur d_D .



<u>Formulation plus courte :</u>

- *Prolonger le segment* [AB] *du côté de* A, *le segment* [BC] *du côté de* B, *le segment* [CD] *du côté de* C *et le segment* [AD] *du côté de* D.
- *Soient* d_A, d_B, d_C *et* d_D *les demi-droites obtenues.*
- *Construire successivement 4 quarts de cercle :* $\overset{\frown}{DE}$, $\overset{\frown}{EF}$, $\overset{\frown}{FG}$ *et* $\overset{\frown}{GH}$ *en tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.*
- *Le premier a pour centre* A *et pour rayon* AD = a, *il est compris entre* D *et* d_A.
- *Le deuxième a pour centre* B *et pour rayon* BE = 2a, *il est compris entre* E *et* d_B.
- *Le troisième a pour centre* C *et pour rayon* CF = 3a, *il est compris entre* F *et* d_C.
- *Le quatrième a pour centre* D *et pour rayon* DG = 4a, *il est compris entre* G *et* d

Question 3 : Longueur de la première spirale : il s'agit de 3 « tiers » de cercles, dont les rayons respectifs ont pour mesure a, 2a et 3a.

D'où la longueur : $\frac{1}{3}(2\pi a) + \frac{1}{3}(2\pi \times 2a) + \frac{1}{3}(2\pi \times 3a)$

Soit : $\frac{1}{3}(2\pi)(a + 2a + 3a) = \frac{2}{3}\pi \times 6a = 4\pi a$

La longueur de la première spirale est $4\pi a$.

- Longueur de la deuxième spirale : il s'agit de 4 quarts de cercle de rayons respectifs a', 2a' 3a', et 4a'.
- D'où la longueur : $\frac{1}{4}(2\pi a') + \frac{1}{4}(2\pi \times 2a') + \frac{1}{4}(2\pi \times 3a') + \frac{1}{4}(2\pi \times 4a')$

Soit $\frac{1}{4} \times 2\pi\,(a + 2a' + 3a' + 4a') = \frac{2\pi}{4} \times 10a' = 5\pi a'$

<u>La longueur de la deuxième spirale est $5\pi a'$, avec a' mesure du côté.</u>

Question 4 : si a = 10 cm, d'après 3), la longueur de la spirale est : $4\pi \times 10$ cm soit 40π cm.

Pour que la spirale construite sur le carré, a' étant la longueur du côté, ait la même longueur, il faut que :
$5\pi a' = 40\pi$ cm d'où a' = 8 cm.
Le côté du carré doit avoir pour longueur 8 cm.

Question 5 : l'observation des deux résultats précédents :
pour $n = 3$, la longueur de la spirale est $4\pi a$
pour $n = 4$, la longueur de la spirale est $5\pi a$
permet de faire les conjectures :
- pour $n = 5$, la longueur de la spirale est $6\pi a$
-pour un polygone à n côtés, la longueur de la spirale est : $(n + 1)\,\pi a$.

Solution plus développée (mais non demandée) :

On peut conjecturer que pour le pentagone de côté a, la spirale est composée de $\frac{1}{5}$ de cercle, de rayons respectifs a, 2a, 3a, 4a et 5a.
La longueur de la spirale est alors :

$$\frac{1}{5}(2\pi a) + \frac{1}{5}(2\pi \times 2a) + \frac{1}{5}(2\pi \times 3a) + \frac{1}{5}(2\pi \times 4a) + \frac{1}{5}(2\pi \times 5a)$$

soit : $\frac{1}{5} \times 2\pi a\,(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = \frac{2\pi a}{5} \times 15 = \mathbf{6\pi a.}$

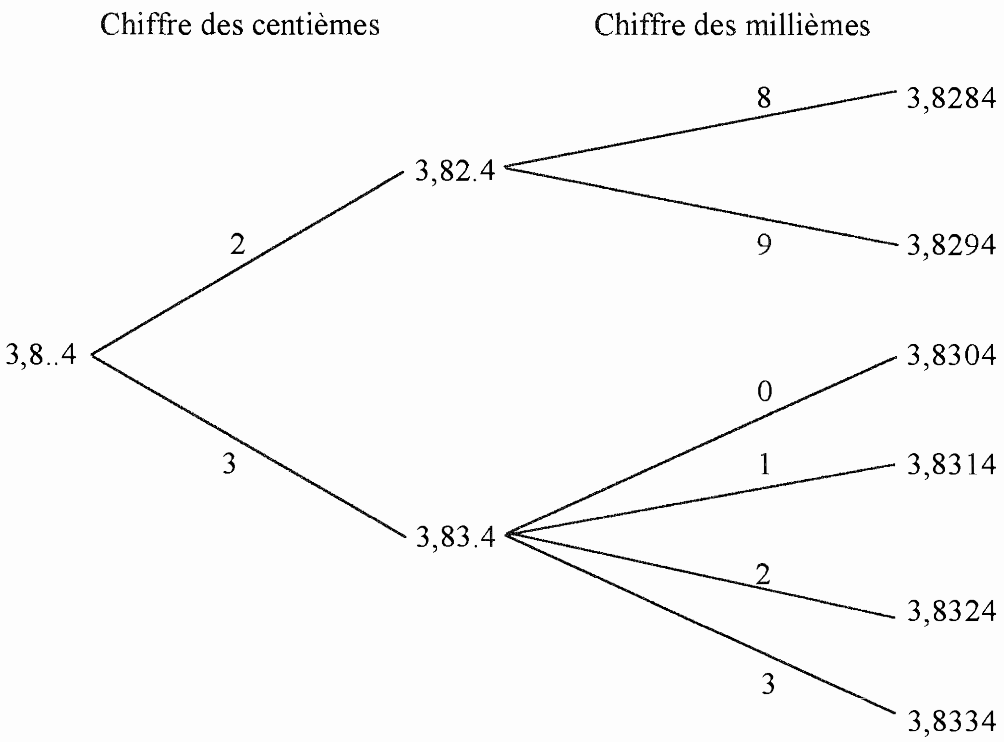
On peut conjecturer que pour un polygone de n côté, les n arcs de cercle seront des $\frac{1}{n}$ de cercle, de rayons respectifs a, 2a, 3a, …, na.
D'où la longueur de la spirale :

$$\frac{1}{n}(2\pi a) + \frac{1}{n}(2\pi \times 2a) + \ldots + \frac{1}{n}(2\pi \times na)$$

soit : $\frac{2\pi a}{n}(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \frac{2\pi a}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \mathbf{(n + 1)\,\pi\, a.}$

EXERCICE 2 :

Question 1a : arbre de choix



Il y a donc 6 réponses possibles.

Question 1b : $3{,}8276 < 3{,}8cm4 \leq 3{,}834$
En multipliant par 1000 nous obtenons les inégalités :
$3827{,}6 < 38cm{,}4 \leq 3834$
En retranchant 3800 : $27{,}6 < cm{,}4 \leq 34$
En retranchant 0,4 : $27{,}2 < \overline{cm} \leq 33{,}6$

$\overline{cm}$ étant un nombre entier, on en déduit :

$\boxed{28 \leq \overline{cm} \leq 33}$

On retrouve les 6 valeurs possibles précédentes (pour $\overline{cm}$ = 28, 29, 30, 31, 32, 33).

Question 2 : D'après la première inégalité, le chiffre des dizaines est au moins égal à 5 et d'après le deuxième, il est au plus égal à 5.

La seule valeur possible pour le chiffre des dizaines est 5.

Il s'agit donc de trouver le nombre de solutions de la double inégalité :
$43{,}8276 < 53{,}5..4 \leq 53{,}834$

Nous constatons qu'elle est vérifiée quels que soient les chiffres mis à la place des points .
Il y a donc 10 valeurs possibles pour le premier chiffre (0 à 9)
et encore 10 valeurs possibles pour le deuxième
soit 10×10 valeurs possibles pour le couple des deux chiffres.
Il y a donc 100 solutions à la double inégalité.

Autre justification possible :
La double inégalité peut s'écrire $43{,}8276 < 53{,}5\text{cm}4 \leq 53{,}834$
Le nombre $\overline{\text{cm}}$ *peut prendre toutes les valeurs possibles, donc de* 0 *à* 99, *soit* 100 *valeurs possibles.*

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1 : la notion mathématique sous-jacente est la proportionnalité : les nombres qui mesurent la quantité utilisée pour chaque ingrédient sont proportionnels aux nombres de personnes.

Question 2 :
Elève 1 :
a) Pour chaque ingrédient, il passe de la première colonne à la deuxième en multipliant par 20 ; et on peut supposer qu'il passe de la première à la troisième en multipliant par 10.
Pour cette troisième colonne, on pourrait faire aussi l'hypothèse qu'il a divisé la deuxième colonne par 2 (procédure juste).
b) Il n'a sans doute pas compris que les quantités de la première colonne sont pour 4 personnes ; il fait comme s'il s'agissait des quantités pour une personne.
Ou bien il ne sait pas comment traiter cette information « pour 4 personnes » (il ne sait pas comment passer de 4 à 20) et il résout le problème comme un problème multiplicatif simple.

Elève 2 :
a) Pour chaque ingrédient, il passe de la première colonne à la troisième en multipliant par 6, qu'il obtient en faisant 10 - 4 ; et on peut supposer qu'il passe de la première à la deuxième en multipliant par 16 (20 - 4), mais en faisant une erreur d'opération à la première ligne.
b) On peut penser qu'il a remarqué que l'on passe de 4 à 20 en ajoutant 16, et de 4 à 10 en ajoutant 6 ; il en déduit que « pour 16 personnes de plus, il faut multiplier par 16 ; et pour 6 personnes de plus il faut multiplier par 6 » ; il fait une confusion entre situations additives et situations multiplicatives : il confond « 16 personnes de plus » et « 16 fois plus de personnes ».

Elève 3 :
a) Pour chaque ingrédient, il passe de la première colonne à la deuxième en ajoutant 20 ; et de la première à la troisième en ajoutant 10.
b) L'élève ne reconnaît pas du tout une situation multiplicative, mais il ne se situe pas non plus dans un cadre additif « pour 16 personnes de plus, il faut 16 de plus » puisqu'il se contente d'ajouter aux nombres de la première colonne le nombre qui est en haut de la colonne traitée, sans prendre en compte la donnée « pour 4 personnes ». Il ne semble pas donner de sens aux calculs qu'il effectue.

<u>Elève 4</u> :
a) Pour chaque ingrédient, il passe de la première colonne à la deuxième en multipliant par 4, et de la première à la troisième en multipliant par 2 (ou bien de la deuxième à la troisième en divisant par 2).
b) Pour la troisième colonne, on ne voit pas quel sens on pourrait donner à la multiplication par 2 de la première colonne ; l'élève a probablement divisé la deuxième par 2, en raisonnant correctement (2 fois moins de personnes).
Pour la deuxième colonne :
* première interprétation : l'élève a cherché par quoi multiplier 4 pour obtenir 20, il s'est dit « 4 fois 5, 20 » et il a perdu le fil : il a cru que c'était le « 4 » qu'il cherchait et non le « 5 » : il a donc multiplié par 4 ; dans ce cas sa démarche serait correcte au départ (recherche du coefficient de proportionnalité).
* deuxième interprétation : il sait qu'il faut multiplier par un nombre (coefficient de proportionnalité), mais il ne sait pas comment le trouver et il multiplie par le nombre qu'il voit en haut de la première colonne.
*troisième interprétation, (peu probable) : l'élève a commencé par calculer « 20 - 4 » et il a ensuite calculé les quantités pour 16 personnes (en multipliant par 4).
Remarque : le tableau d'évaluation (0,5 à cette colonne) montre que le professeur n'a pas retenu la première interprétation (après peut-être avoir interrogé l'élève ?)

Question 3 :
a) Les élèves 1 et 4 obtiennent 1,5 à la colonne 3, car nous avons vu qu'ils peuvent avoir rempli cette colonne avec une procédure juste : « il faut deux fois moins d'ingrédients pour deux fois moins de personnes » ; pour l'élève 4, cette procédure est très probable, pour l'élève 1, une autre procédure (fausse celle-là) est envisageable, mais sans doute le maître a-t-il interrogé cet élève sur sa procédure pour s'assurer qu'il avait bien divisé la deuxième colonne par 2.
b) les critères pour remplir le tableau d'évaluation ont pu être les suivants :
- « démarche » : nous avons vu qu'aucun élève n'a eu une démarche correcte pour résoudre ce problème ; pourtant 3 sur 4 ont 2/2 pour la démarche. Nous pouvons supposer que le critère retenu porte sur le choix de l'opération : ont 2/2 ceux qui ont effectué des calculs multiplicatifs et 0 ceux qui ont effectué des calculs additifs.
- « colonne 2 » et « colonne 3 » : nous pouvons supposer que ces deux colonnes utilisent le même critère : 1,5 pour une procédure juste (il n'y en a pas pour la colonne 2) ; 0,5 pour une procédure multiplicative fausse ; 0 pour une procédure additive.
- « TOTAL » : cette colonne pourrait être remplie en faisant la somme des trois précédentes, et en retranchant éventuellement 0,5 s'il y a des erreurs d'opérations (ou bien 0,5 par opération fausse ?) : c'est le cas de l'élève 2 ($800 \times 16 = 12\ 800$).

Remarque : d'autres critères pouvaient être proposés, pourvu qu'ils soient justifiés.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

Question 1 : Un polygone est une figure fermée, formée seulement de segments, appelés « côtés du polygone » ; les extrémités de ces segments sont « les sommets du polygones ».
Remarque : c'est une définition pour les élèves du cycle 3 ; il faudrait ajouter que les segments sont consécutifs.

Question 2 :
- l'objectif de la première phase est de décrire et reconnaître des polygones en utilisant à bon escient le vocabulaire : angles du polygone, angles droits, côtés du polygone, côtés parallèles, côtés perpendiculaires.
- l'objectif de la deuxième phase est d'élargir la recherche précédente (angles droits, parallélisme) aux angles formés par les droites obtenues en prolongeant les côtés des polygones.

Question 3 :
réponses à la consigne 1 :
a) D, H ou G. b) D. c) F. d) G.

Question 4 :
Pour reconnaître un polygone parmi d'autres, il faut donner suffisamment d'informations. Ces informations peuvent porter sur le nombre de côtés ou d'angles, sur le nombre d'angles droits ou la présence de côtés parallèles. Pour savoir si un angle est droit, on peut utiliser l'équerre.

Question 5 :
La figure évoquée est la D.
On voit maintenant que certains côtés non consécutifs sont perpendiculaires.
On perçoit aussi mieux le parallélisme de certains côtés.

Question 6 :
Pour vérifier que deux segments sont perpendiculaires, on peut les prolonger jusqu'à ce que les droites se coupent. On peut alors utiliser l'équerre.

Question 7 :
C'est l'exercice 2 qui permet le réinvestissement de la phase 2, puisqu'il s'agit de prolonger des segments pour voir s'ils sont perpendiculaires.
Dans l'exercice 1, il s'agit aussi d'angles droits, mais à l'intérieur de figures : il n'y a pas à prolonger.
Dans l'exercice 3, pour trouver toutes les lignes perpendiculaires au filet, on pourrait prolonger un peu celui-ci, mais comme le parallélisme des lignes de couloir est évident, ce n'est pas vraiment nécessaire.
Dans les exercices 4 et 5, l'équerre est utilisée pour des constructions, et non pour reconnaître des angles droits.

AMIENS

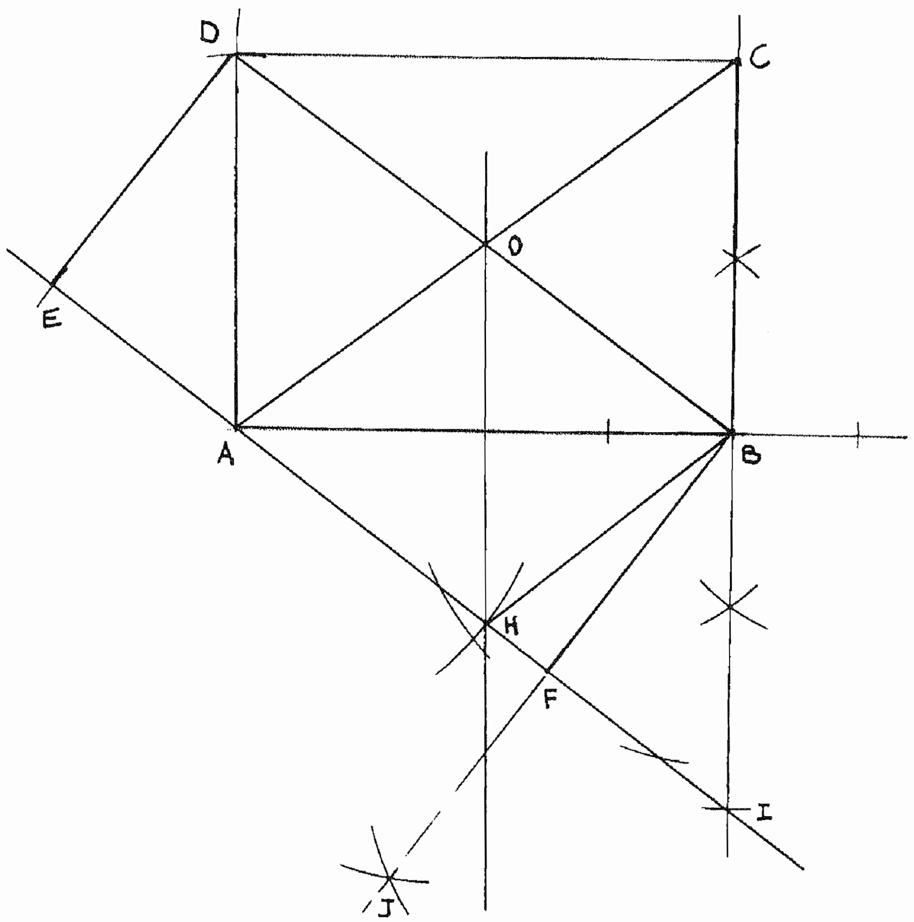
(Corrigé effectué à partir d'indications fournies par notre correspondant de l'académie).

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE N° 1 :

Question 1 : Construction de la figure demandée (voir page suivante) : (l'échelle n'est pas tout à fait 1/1)



Question 2 : Le triangle ABD est un triangle rectangle en A, dans lequel on peut appliquer le théorème de Pythagore : $BD^2 = AB^2 + AD^2$. L'unité de mesure étant étant le centimètre : Soit b la mesure de BD alors $b^2 = 8^2 + 6^2 = 100$, donc BD = 10 cm.

Question 3 : L'aire du triangle ABD est égale à $\frac{AB.AD}{2}$. Exprimée en cm², sa mesure est égale à 24. L'aire du triangle ABD est aussi égale à $\frac{BD.ED}{2}$, en considérant le segment [BD] comme base et ED la mesure de la hauteur relative à cette base. On en déduit la mesure de la hauteur : ED $= \frac{48\text{ cm}^2}{10\text{ cm}}$ donc ED = 4,8 cm. Les aires des deux quadrilatères ABCD et BDEF sont égales à 48 cm². (On peut bien sûr calculer leur aire respective, mais il suffit de remarquer que le triangle ABD représente la moitié de chacun de ces quadrilatères)

Question 4 : BDEF étant un rectangle, les droites (DO) et (AH) sont parallèles. De même, par hypothèse, (OH) est parallèle à (AD). A et H étant situés dans le même demi-plan de frontière (BD), le quadrilatère AHOD est convexe avec des côtés deux à deux parallèles. C'est donc un parallélogramme.

Question 5 : De la question précédente on peut déduire l'égalité des longueurs AH = DO. Le quadrilatère ABCD étant un rectangle, ses diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur. Donc AH = BO. Le quadrilatère AHBO est un parallélogramme puisqu'il possède deux côtés parallèles et de même longueur. De plus, AO = OB. Ayant deux côtés consécutifs égaux, ce parallélogramme est donc un losange. Le quadrilatère AHBO est un losange.

EXERCICE 2 :

Question a : Considérons la fraction $\frac{29}{55}$

$55 = 5 \times 11$ or 11 ne divise pas 29 pas plus que 5 d'ailleurs. La fraction $\frac{29}{55}$ est donc irréductible.

Son dénominateur étant divisible par un autre nombre que 2 ou 5, la fraction $\frac{29}{55}$ n'est pas un nombre décimal.

Considérons la fraction $\frac{39}{75}$.

$39 = 13 \times 3$ et $75 = 25 \times 3$. On peut donc simplifier cette fraction. On obtient : $\frac{39}{75} = \frac{13}{25}$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par 4, on obtient la forme décimale $\frac{39}{75} = \frac{52}{100}$.

Réponse : La fraction $\frac{39}{75}$ est un nombre décimal, et son écriture décimale usuelle est 0,52.

Question b : $\frac{39}{75} = 0{,}52$ et $\frac{29}{55} = 0{,}527\underline{27}...$ suite décimale illimitée périodique. Par conséquent, $\frac{29}{55} > \frac{39}{75}$.

Question c : $\frac{29}{55} > 0{,}527$. Tout nombre décimal compris entre 0,52 et 0,527 convient. Prenons O,525 par exemple ; alors : $\frac{39}{75} < 0{,}525 < \frac{29}{55}$.

Question d : La moyenne arithmétique des deux nombres $\frac{39}{75}$ et $\frac{29}{55}$ n'est pas un nombre décimal et elle est nécessairement comprise entre ces deux nombres.

$$\frac{\frac{39}{75} + \frac{29}{55}}{2} = \frac{432}{825} = \frac{144}{275}.$$

$\frac{144}{275}$ est une fraction non décimale et est comprise entre les deux nombres $\frac{39}{75}$ et $\frac{29}{55}$.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1 :

Production A	Aucune information ne manque, qui empêche de construire le triangle donné.	La connaissance de l'existence d'un angle droit est superflue. Les trois mesures des côtés suffisent.
Production B	Aucune information ne manque.	La remarque " B est le sommet " est inutile et non pertinente.
Production C	Il manque les mesures des trois côtés ou bien la mesure de deux côtés et la connaissance de la présence d'un angle droit.	La remarque sur l'inégalité des mesures des côtés est parfaitement inutile.
Production D	Aucune information ne manque	Aucune information n'est inutile.

Remarque : La chronologie des informations de la production " D " ne permet pas de construire le triangle donné si l'on exécute les consignes à la lettre, dans cet ordre, à moins de savoir qu'il faut utiliser un compas pour pouvoir situer le point C à l'intersection de deux arcs de cercle dont les centres sont A et B et dont les mesures respectives des rayons sont indiquées.

Question 2 :
Premier programme de construction : Les instruments utilisés sont une règle graduée et une équerre. Tracer un segment [AC] de longueur 4 cm. Tracer la droite perpendiculaire en A au segment [AC]. Sur cette droite placer un point B tel que AB = 3 cm. Joindre les points B et C ; le triangle ABC est construit.
Second programme de construction : Les instruments utilisés sont une règle graduée et un compas. . Tracer un segment [AC] de longueur 4 cm. Tracer un cercle de centre A et de rayon 3 cm. Tracer un cercle de centre C et de rayon 5 cm. Ces deux cercles se coupent en deux points. L'un d'eux est le point B. Joindre les points A et B. Joindre les points C et B ; le triangle ABC est construit.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

Question 1a : Les objectifs visés sont principalement de proposer une situation de proportionnalité nouvelle par le fait qu'elle se situe dans un cadre géométrique différent des situations habituelles. De faire rejeter un modèle additif comme modèle erroné qui ne permet pas de résoudre le problème posé de l'agrandissement d'une figure. De donner du sens à la notion de coefficient de proportionnalité puisque l'utilisation des seules propriétés de linéarité ne permet pas de déterminer aisément toutes les mesures nécessaires à la construction de la figure agrandie.
Question 1b : Les compétences transversales sont liées au travail collectif demandé : respecter des consignes, se mettre d'accord sur une procédure commune d'agrandissement (elle doit être la même pour chacune des pièces du puzzle), convaincre que cette procédure est valable.
Question 1c : Les compétences disciplinaires sont d'ordre géométrique et numérique : Savoir analyser et identifier une figure géométrique, savoir mesurer et construire des figures telles que des triangles rectangles ou des trapèzes. Savoir additionner et multiplier des nombres entiers naturels ou décimaux (le coefficient de proportionnalité choisi est égal à 1,5).

Question 2a : Les variables didactiques qui peuvent être repérées en premier sont la valeur du coefficient de proportionnalité, la nature des figures et la valeur des mesures de leurs côtés :
- le coefficient de proportionnalité : Pour la situation A, il est égal à 1,5 ou à $1 + \frac{1}{2}$. Cela permet d'envisager une procédure du type " c'est une fois et demi plus grand " , ou encore, " à chaque mesure on ajoute sa moitié ". Pour la situation B, le coefficient égal à $\frac{7}{4}$ est un nombre rationnel, décimal également, mais qui ne permet pas des calculs aussi aisés.
- la nature des quadrilatères : en effet des rectangles poseraient probablement moins de difficultés pour être agrandis que des trapèzes ayant des mesures de côtés à valeur non entière.

- les mesures des côtés des pièces du puzzle : Elles ont été choisies entières aussi souvent que possible. En effet, des mesures décimales nécessitent des calculs de produits de nombres décimaux et écartent pratiquement la possibilité d'utiliser simplement les propriétés de linéarité.

Question 2b :
L'enseignant ayant proposé la situation B peut s'attendre à voir proposer des stratégies d'agrandissement telles que :
- ajouter 3 cm à chacune des mesures du puzzle à agrandir, puisque 7 = 4 + 3. Cette procédure est bien sûr erronée et ne permet pas de reconstituer un puzzle.
- doubler chacune des dimensions et enlever 1 cm, puisque $7 = (4 \times 2) - 1$. Cette stratégie est également erronée.
- doubler chacune des mesures : Cette stratégie « de facilité » permet de reconstituer un puzzle agrandi, mais ne satisfait pas à la consigne de départ : 4 cm$\rightarrow$ 7cm.

Question 3a : Rappel de la question : " Quelles compétences peuvent être évaluées par l'emploi de chacun des exercices proposés ? "
Commentaire préalable : Il va de soi que les compétences concernent avant tout des élèves et qu'une évaluation dépend nécessairement du travail qui a été accompli en classe dans l'apprentissage concerné. Notre réponse s'attachera simplement aux savoirs et aux savoir faire en jeu pour résoudre ces exercices.

Exercice 1.a : Savoir reconnaître un tableau de proportionnalité et détecter un tableau qui ne satisfait pas aux propriétés requises.
Commentaire : Une réponse plus fine peut être donnée : Pour le premier tableau il faut savoir reconnaître que chaque nombre entier naturel ou décimal a pour image le nombre égal à sa moitié, et que le nombre 0 a pour image 0. Le nombre 0 est bien sûr égal à la moitié de 0 ! Pour le second tableau, seule l'image de 0, différente de 0, échappe à une règle valable pour les quatre autres nombres. En effet, ils ont pour image leur double. Il semble donc que ce qui peut être évalué pour ces deux premiers tableaux, c'est la vigilance relative à la propriété de l'image de 0 par une fonction linéaire. Pour le troisième tableau, le choix d'un coefficient de proportionnalité égal à $\frac{3}{4}$, son inverse étant $\frac{4}{3}$, ne pousse pas à l'exploitation d'un coefficient de proportionnalité entre les deux suites proportionnelles, mais les nombres choisis sont tous entiers naturels et favorisent l'utilisation des propriétés de linéarité. Cette utilisation pourrait donc être la compétence effectivement visée.

Exercice 1.b : Savoir multiplier un nombre décimal par 100 ou par 10, diviser un nombre entier par 100, diviser un nombre entier naturel ou décimal par 10, afin de compléter un tableau de nombres. La notion de proportionnalité n'est absolument pas en cause dans cette tâche. En effet, le fait que les suites obtenues par les calculs demandés soient des suites proportionnelles ne découle que du respect de la consigne, indépendamment de tout sens ainsi que des propriétés de linéarité totalement inexploitables ici.
Exercice 2.a : Savoir, à partir d'un tableau de nombres exprimant des mesures, construire un graphique en respectant une échelle : Il faut représenter des nombres par des rectangles de largeur

constante, dont la longueur est donc proportionnelle à ces nombres. Ces constructions doivent être faites sur ce qui semble être l'agrandissement (à une échelle 1,1) d'un morceau de papier millimétré. L'usage d'un double décimètre est donc compromis...

Exercice 2.b : Savoir retrouver la bonne page d'un manuel dont on suppose qu'il a été produit par le même éditeur !
Exercice 3 : Savoir localiser les étapes d'un trajet sur une carte ; puis, après avoir admis que les hirondelles volaient en ligne droite (ce qu'elles font toutes, comme chacun a pu l'observer), tracer ce trajet sur la carte ; mesurer les traits tracés, exprimer ces mesures de préférence en cm ; résoudre ensuite le problème d'échelle pour déterminer une mesure approchée du parcours « réel ».

Exercice 9.a) : Savoir lire des données inscrites en complément sur un graphique.

Exercice 9.b) : Savoir utiliser la valeur d'un pourcentage d'une grandeur, pour calculer celle correspondant à 100%.

Question 3b : Dans le premier tableau, seuls la reconnaissance et/ou le calcul du coefficient de proportionnalité permettent de prouver aisément qu'il s'agit d'un tableau de proportionnalité.
Dans le second, la solution passe par la reconnaissance du fait que le couple $(0 ; f(0))$ est intrus. En effet $f(0) \neq 0$.
Dans le troisième tableau, les propriétés de linéarité permettent facilement de conclure, compte tenu des rapports entre les nombres de chaque suite :
Par exemple, $3 = f(4)$ et $6 = (8)$, puisque $12 = 4 + 8$ alors $f(12) = 3 + 6 = 9$
$40 = 4 \times 10$ et $f(40) = f(4) \times 10 = 30$ etc.

BESANÇON

(Corrigé effectué à partir d'indications fournies par notre correspondant de l'académie).

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1 :

Soient a et b les deux entiers naturels cherchés, et a le plus grand d'entre eux, donc $b \leq a$.

$a^2 - b^2 = 255$ $\qquad\qquad$ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Le problème revient donc à déterminer les entiers naturels a et b tels que $(a + b)(a - b) = 255$.

$a + b$ et $a - b$ sont des nombres entiers naturels, il faut donc chercher les décompositions de 255 en produit de deux nombres entiers naturels.

$255 = 1 \times 3 \times 5 \times 17$ donc $255 = 1 \times 255$

$255 = 3 \times 85$

$255 = 5 \times 51$

$255 = 15 \times 17$

a et b étant deux entiers naturels, $a - b \leq a + b$.

Le problème se ramène donc à la résolution de quatre systèmes d'équations distincts :

$a + b = 255$	$a + b = 85$	$a + b = 51$	$a + b = 17$
$a - b = 1$	$a - b = 3$	$a - b = 5$	$a - b = 15$

Résolvons le premier système : $\quad a + b = 255$

$a - b = 1$

En additionnant membre à membre les termes des deux équations, on obtient $2a = 255 + 1$.

Donc $a = 128$. On en déduit $b = 127$.

Le couple solution est $(a ; b) = (128 ; 127)$. On procède de même pour les trois autres systèmes.

Les solutions de ces quatre systèmes sont respectivement égales aux quatre couples (a ; b) suivants :

(a ; b) = (128 ; 127)

(a ; b) = (44 ; 41)

(a ; b) = (28 ; 23)

(a ; b) = (16 ; 1)

EXERCICE 2 :

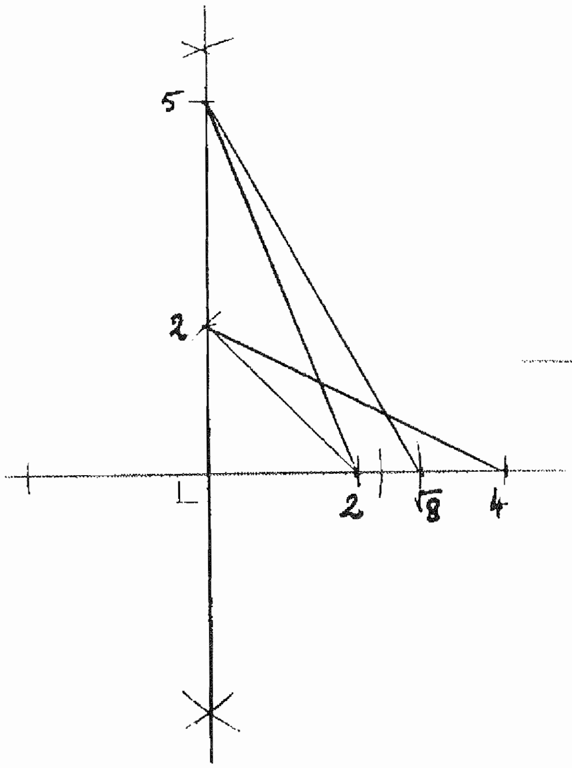
Question 1 : Dans le trapèze ABCD, appelons M le milieu de [BC]. Les segments [BM] et [MC] ont pour longueur 6 cm. Le quadrilatère ABMD est don c un rectangle, et même un carré (il possède deux côtés parallèles de même longueur, deux angles droits consécutifs et, de plus, AB = AD).
Le triangle DMC est donc un triangle rectangle en M. Les côtés de l'angle droit [MD] et [MC] ont leur longueur égale à 6 cm.
Appliquons le théorème de Pythagore dans ce triangle : $DM^2 + MC^2 = DC^2$
Notons b la mesure en cm de DC. $b^2 = 36 + 36$ $b^2 = 72$ donc, $\mathbf{DC = 6\sqrt{2}}$ **cm.**
Note : $6\sqrt{2}$ est une expression de la mesure exacte de [DC].

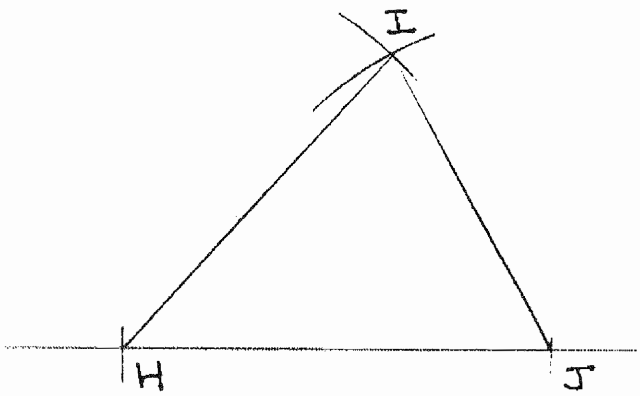
Question 2 : Pour la face DIJ, la longueur DI est donnée par l'énoncé : **DI = 2 cm.**
Puisque $DJ = \frac{1}{3}DC$, d'après la question 1 on obtient : $\mathbf{DJ = 2\sqrt{2}}$ **cm.**

Calcul de IJ : Dans le triangle ACD, les points A, I et D sont alignés, DI = 2cm et DA = 6cm. Par conséquent $\frac{DI}{DA} = \frac{1}{3}$. De même, les points C, J et D sont alignés et $\frac{DJ}{DC} = \frac{1}{3}$. On applique la réciproque du théorème de Thalès dans le triangle ACD : La droite (IJ) est parallèle à (AC) et IJ $= \frac{1}{3}AC$.
Il faut alors calculer AC. Le segment [AC] est l'hypoténuse du triangle ABC, rectangle en B. Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$
Soit c la mesure en cm de AC : $c^2 = 36 + 144 = 180 = 36 \times 5$ $AC = 6\sqrt{5}$ cm.
Conclusion : $\mathbf{IJ = 2\sqrt{5}}$ **cm.**
Remarque : Sur la figure de l'énoncé, le point J est manifestement proche du milieu de [CD] alors que le texte indique DJ=1/3DC.

Les deux faces IDH et HDJ sont deux triangles rectangles d'angle droit situé au sommet D. La longueur DH est donnée par l'énoncé (DH = 5 cm). Nous connaissons désormais DI et DJ. Il reste à calculer chacune des hypoténuses de ces deux triangles rectangles en appliquant le théorème de Pythagore à chacun d'eux :
Soit i la mesure de IH, alors : $i^2 = DI^2 + DH^2 = 4 + 25$ $\mathbf{IH} = \sqrt{29}$ cm.
Soit j la mesure de JH, alors : $j^2 = DJ^2 + DH^2 = 8 + 25$ $\mathbf{JH} = \sqrt{33}$ cm.

Question 3 : Il faut construire des segments de mesures (en cm) égales respectivement à $2\sqrt{5}$ (c'est à dire $\sqrt{20}$), $\sqrt{29}$ et $\sqrt{33}$. Dans la construction suivante, ces segments sont les hypoténuses de triangles rectangles que l'on trace à la règle et au compas.





Question 4 : Choisissant le côté [AD] pour base du triangle ACD, la hauteur issue du sommet C et relative à ce côté est isométrique à [BA].

Par conséquent l'aire du triangle ACD est égale à $\frac{1}{2}$ AD.AB   aire(ACD) = $\frac{1}{2}$ 36 cm²

aire(ACD) = 18 cm²

On peut déduire l'aire du triangle IJD de la connaissance de l'aire précédente : En effet le triangle IJD est une réduction à l'échelle $\frac{1}{3}$ du triangle ACD.

(On peut l'exprimer aussi en disant que le triangle IJD est l'image du triangle ACD par une homothétie de rapport $\frac{1}{3}$.)

De ce fait l'aire du triangle IJD est égale à $\frac{1}{9}$ de celle du triangle ACD.

Aire(IJD) = 2 cm².

Question 5 : Le solide DIJH est un tétraèdre, c'est à dire une pyramide à base triangulaire. Choisissons le triangle IJD pour base. La hauteur relative à cette base est alors le segment [HD]. En effet, H est le sommet de cette pyramide et [HD] est perpendiculaire à la face IJD selon les hypothèses de l'énoncé. L'aire de la base est connue et égale à 2 cm². La hauteur est égale à 5 cm.

Le volume V de la pyramide DIJH est donc égal à $\frac{1}{3} \times 2 \times 5$

soit $\mathbf{V} = \frac{10}{3}$ cm³.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1 : Ce problème peut être donné à des élèves de troisième année de cycle 3, donc de CM2, en fin d'année scolaire, si l'on se réfère aux programmes. Au niveau des connaissances mathématiques, sa résolution nécessite une bonne maîtrise des problèmes d'échelles, donc de la proportionnalité, des calculs avec des nombres décimaux, et, enfin, de la notion d'aire et du calcul de l'aire de rectangles.

Résolution :

Cuisine	dimensions réduites.	4 cm.	2 cm .
Cuisine	dimensions réelles.	4 m.	2 m.
Appartement	dimensions réduites.	12,4 cm.	7 cm.
Appartement	dimensions réelles.	12,4 m.	7 m.

La mesure de l'aire de l'appartement en m² est égale à $12{,}4 \times 7$, donc cette aire est 86,8 m²

La mesure de l'aire du dessin de l'appartement en cm² est égale à $12{,}4 \times 7$, donc cette aire est 86,8 cm².

Note : Ces réponses sont établies d'après la copie du sujet qui nous a été transmise : nos mesures en dépendent naturellement.

Question 2 : Pour résoudre ce problème, les élèves doivent :

- comprendre le plan ;
- comprendre les questions de l'énoncé , en particulier le sens des mots « dimensions » et « aire » ;
- maîtriser la notion d'échelle ;
- savoir mesurer avec une règle graduée ;
- connaître les unités de longueur et d'aire et leurs conversions ;
- connaître le calcul de l'aire d'un rectangle ;
- savoir calculer le produit d'un nombre décimal par un entier naturel ;
- maîtriser la multiplication ou division par 100 ;
- pouvoir s'assurer que la réponse proposée est plausible ...

Cela constitue une somme de compétences importante, et on constate qu'aucune des productions ne donne de réponse correcte.

Question 3 :

Production A : Cet élève n'a tenté de répondre qu'à la première question relative aux dimensions de la cuisine et de l'appartement. Il calcule d'abord le produit de 12 par 100, et sa réponse est exprimée en cm. Le nombre 12 semble donc correspondre aux « dimensions » de la cuisine. Or 12 cm est le périmètre du dessin de la cuisine. On peut donc penser que le terme « dimensions » a été compris et confondu avec celui de périmètre, notion que cet élève devait connaître. La réponse proposée est donc erronée. Le second calcul montre le produit de 100 par 38. D'où vient 38 ? En remarquant que 38 = 7 + 12 + 7 + 12 on peut faire l'hypothèse que 38 représente de nouveau un périmètre, celui de l'appartement (reproduction du même procédé que pour la question précédente, ce qui est fréquent et plausible). Dans ce cas cet élève ne maîtrise guère l'usage d'un double décimètre ou bien il s'en tient à des valeurs approchées en n'utilisant que des mesures entières (en centimètres). Notons également que cette dernière opération est fausse, du fait d'une erreur de calcul ($100 \times 3 = 133$) qu'il serait imprudent d'interpréter.

Production B : Cet élève calcule correctement la somme 40 + 20 + 40 + 20 et propose 120 m. comme réponse. Les nombres additionnés représentent donc probablement pour lui les dimensions réelles de la cuisine. Sa réponse écrite traduit la même confusion entre « dimensions » et périmètre, confusion rencontrée précédemment. Il aurait alors fait une autre erreur de conversion et d'échelle, à moins qu'il n'ait effectué ses mesures en mm et que sa réponse ne soit exprimée en mètres que par simple respect de la consigne.
Le second calcul 19 + 7 + 19 + 7 laisse à penser qu'il s'agit encore du calcul d'un périmètre. En effet 7 correspond bien à la largeur du rectangle dessiné, mais 19 n'en est pas sa longueur ! D'où 19 provient-il ? Peut-être de la somme 12 + 7, mesure approchée correspondant au demi-périmètre... L'unité m^2 indiquée par cet élève n'a pas été comprise et son emploi ne doit sa présence qu'au respect de la consigne donnée. Notons enfin que cette somme, égale à 52, devient 520 : Ainsi l'élève B a multiplié par 10 la somme obtenue pour tenter de résoudre le problème d'échelle.
Le troisième calcul correspond une fois de plus à un calcul de périmètre, celui du rectangle dessiné. L'opération posée en colonne est fausse puisque les parties décimales de deux termes sont additionnées avec des parties entières d'autres nombres. La notion d'aire et son calcul ne sont pas maîtrisés, pas plus que l'addition des nombres décimaux.

Production C : La première addition effectuée en ligne est correctement effectuée. Elle correspond au périmètre de la cuisine réelle, et pas aux « dimensions » demandées. Le passage à une réponse exprimée en mètres se fait en supprimant un zéro à chacun des termes de cette somme. La réponse 110 m est donc fausse et non vraisemblable. Le terme 30∅ correspond sans doute à la mesure du mur contenant la porte de la cuisine ! Le second calcul est un calcul de périmètre et non d'aire, ce que corrobore la phrase de conclusion « Le tour de l'appartement... ».
On relève la même erreur concernant le passage des dimensions réduites aux dimensions réelles, qui donne la même invraisemblance pour la réponse 380 mètres. De plus, le nombre 120,2 doit provenir du calcul effectué mentalement : $12{,}2 \times 10 = 120{,}2$. Cela signifierait que le calcul du produit d'un nombre décimal par 10 n'est pas maîtrisé, à la différence de l'addition. Enfin, aucune référence à l'aire n'est présente dans cette production.

Production D : Le premier calcul $100 \times 4 = 400$ (en cm) laisse penser que l'expression «dimensions réelles de la cuisine» a été traduite par « longueur réelle de la cuisine », qui est bien égale à 400 cm. Le second calcul traduit une fois encore un calcul de périmètre et non d'aire. De plus, aucune conversion consécutive au passage aux dimensions réelles n'a été effectuée, ce qui produit une réponse totalement invraisemblable indépendamment des autres erreurs suivantes : le codage erroné 12,03 pour 12 cm et 3 mm et le calcul incorrect de 24,06 + 14 . L'élève a ajouté le second nombre entier à la partie décimale du premier pour donner 24,20 comme réponse. Il a aligné en colonne par la droite les nombres comme il l'aurait fait pour des entiers, abaissant ensuite la virgule : L'addition des nombres décimaux n'est donc pas maîtrisée.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

Question 1 : Si (a ; b ; c ; d) = (3 ; 4 ; 5 ; 1), il faudra placer au moins 5 jetons dans chaque gobelet : Il est donc nécessaire qu'il y en ait (2 + 1 + 4) dans la boîte. Si A est égal à 2, ou est égal à un nombre inférieur à 7, il sera impossible de résoudre cette situation.

Question 2 : Si (a ; b ; c ; d) = (15 ; 12 ; 18 ; 11), le nombre minimum commun aux contenus de chaque gobelet après répartition est égal à 18. Le nombre total de jetons doit donc être au moins égal à 18×4 et être multiple de 4. Le nombre total de jetons doit donc être égal à $18 \times 4 + 4k$ où k désigne un nombre entier naturel quelconque. Par ailleurs, il y a déjà (15 + 12 + 18 + 11) jetons dans les gobelets. Donc $A = 72 - 56 + 4k$ avec $k \in N$

$$\mathbf{A = 16 + 4k \quad avec\ k \in N}$$

Question 3 : Le nombre total N de jetons ne peut être quelconque. Il doit nécessairement être un nombre entier naturel non nul et multiple de 4. Le nombre de jetons se trouvant initialement dans chaque gobelet et inscrit sur ceux-ci doit donc être inférieur ou égal au quart du nombre total de jetons, ce qui se traduit par les conditions : $\mathbf{a} \leq \frac{N}{4}$ $\mathbf{b} \leq \frac{N}{4}$ $\mathbf{c} \leq \frac{N}{4}$ **et** $\mathbf{d} \leq \frac{N}{4}$.

Question 4 : Etude du cas général :
a désignant le plus grand des nombres a, b, c et d, il faut, pour rendre le contenu de chaque gobelet égal au nombre a, les compléter avec (a - b) + (a - c) + (a - d) jetons. S'il reste des jetons dans la boîte, le nombre de ces jetons doit être multiple de 4, donc égal à 4k (où k désigne un nombre entier naturel quelconque)
En conclusion : $\mathbf{A = (a - b) + (a - c) + (a - d) + 4k \quad (k \in N)}$
ou encore : $\mathbf{A = 3a - (b + c + d) + 4k \quad (k \in N)}$

Question 5 : Etude des compétences en jeu :
a) dans le domaine de la résolution de problèmes : reconnaître et traiter les données utiles à la résolution d'un problème de recherche ; formuler et communiquer clairement sa démarche et ses résultats ;
b) dans le domaine de la connaissance des nombres : savoir lire et comprendre l'écriture en chiffres de nombres entiers ; connaître la suite des nombres entiers ;
c) dans le domaine du calcul : savoir compléter des écritures additives du type a = ... + b.

Question 6 : Les informations indispensables à la compréhension de cette situation :

- Ce que représentent les étiquettes (les nombres de jetons placés initialement dans les gobelets et dans la boîte),
- Le but visé (vider la boîte, avoir autant de jetons dans chaque gobelet sans échanger des jetons d'un gobelet à un autre),
- Trouver un moyen de formuler, de fournir une trace écrite des différentes manipulations effectuées (les élèves ne peuvent se limiter à une résolution implicite).

Question 7 :

a) Première procédure ne requérant pas l'usage d'un véritable calcul et exploitant la représentation des jetons, la comptine et/ou le surcomptage : l'élève dessine des jetons (et même des gobelets !) et compte en même temps au fur et à mesure qu'il les dessine, pour qu'il y en ait 25 partout. Il raye les jetons qu'il répartit. Il distribue de même les 16 jetons non rayés.

Boîte (A)	Situation initiale	25	14	19	21
∅∅∅∅∅ ∅∅∅∅∅ ∅∅∅∅∅ ∅∅∅∅∅ ∅ oooo ooooo ooooo oo	Ajout dans chaque gobelet pour égaliser		o o o o o o o o o o o	o o o o o o	o o o o
	Répartition des 16 jetons restants	o o o o	o o o o	o o o o	o o o o
	situation finale	29	29	29	29

b) Seconde procédure « experte » utilisant le calcul autant que possible :

Le plus grand des quatre nombres de jetons dans les gobelets est 25. Il faut donc commencer par compléter les contenus de trois gobelets pour que tous contiennent 25 jetons. Pour cela, il faut :
- ajouter 11 jetons dans le second gobelet car $14 + 11 = 25$;
- ajouter 6 jetons dans le troisième gobelet car $19 + 6 = 25$;
- ajouter 4 jetons dans le quatrième gobelet car $21 + 4 = 25$.

Il reste donc $37 - (11 + 6 + 4) = 16$ jetons dans la boîte. On place donc un jeton dans chaque gobelet. On peut le faire quatre fois car $4 + 4 + 4 + 4 = 16$. Il y a donc $25 + 4 = 29$ jetons dans chaque gobelet et il n'en reste plus dans la boîte.

Question 8 : Les variables didactiques principales de la situation sont :
- la possibilité de résoudre concrètement la situation, de manipuler réellement les jetons ;
- le nombre de gobelets (avec deux gobelets, le problème est plus simple) ;
- le nombre de jetons dans chaque gobelet (domaine numérique plus ou moins familier, ainsi que les écarts entre ces nombres) ;
- le nombre de jetons dans la boîte (juste assez, ou beaucoup plus important) ;

Toutes ces variables influent sur les procédures que peuvent mettre en œuvre plus ou moins spontanément les élèves, car telle qu'elle est présentée sur la fiche, la situation est réellement complexe pour des enfants de C.P.

Question 9 : Exploitation en grande section de l'école maternelle : La présence réelle des jetons paraît indispensable pour permettre aux élèves de les manipuler effectivement et leur fournir la possibilité d'un contrôle permanent des actions entreprises. De plus, le domaine numérique doit être adapté avec la connaissance effective de la comptine pour des élèves de ce niveau. Enfin la situation doit être moins complexe et pouvoir être résolue dans un temps assez limité. On peut donc réduire le nombre de gobelets à deux et ne laisser qu'un nombre limité de jetons dans la boîte. Par exemple a = 5 , b = 3 et A = 6. Le nombre final de jetons dans chacun des deux gobelets est alors égal à 7.

Exploitation en fin de cycle des approfondissements : l'énoncé écrit peut correspondre au cas suivant : (a , b , c , d) = (57 , 68 , 82 , 45) et A = 128. Il s'agit de répartir tous les jetons de manière équitable dans chacun des gobelets afin qu'il n'en reste aucun dans la boîte. Une procédure experte serait la suivante :

Calcul du nombre total de jetons :

N = 57 + 68 + 82 + 45 + 128 = 380. Répartir équitablement ces jetons dans quatre gobelets : on divise N par 4, soit 380 : 4 = 95 .

Conclusion : Il faut placer 95 jetons dans chaque gobelet. Il n'en reste plus dans la boîte (Il s'agit d'un problème de division euclidienne).

BORDEAUX–CAEN-CLERMONT-POITIERS - NANTES - REUNION

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS) MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1 : A,B,E. (Aucune justification n'est demandée.)

EXERCICE 2 :
- La longueur est constituée de $(512)^{1/3}$ cubes, soit 8cubes. ($8 \times 8 \times 8=512$ est une justification acceptée.)
La mesure d'une arête du grand cube est donc $8 \times 2=16$ (en cm)
- Son volume est $16 \times 16 \times 16 = 4096$ (en cm^3) soit 4,096 litres
- La mesure de l'aire du cube est $(16 \times 16) \times 6 = 1536$ (en cm^2), soit une aire de 15,36 dm^2

EXERCICE 3 :
1°) Si l'on s'en tient à la figure, le nombre est 22.
2°) - Une procédure experte : on peut voir dans cette double graduation une fonction affine : $y = ax+b$. On peut prendre alors les couples $x = 3$ $y = 18$ et $x = 8$ $y = 20$, on obtient le système suivant :

$$18 = 3a + b \text{ et } 20 = 8a + b, \text{ ce qui donne } a = 2/5 \text{ et } b = 84/5 = 16{,}8.$$

Lorsque $y = 13$ alors $13 = x(2/5) + 84/5$, donc $x = -9{,}5$
- Autre procédure : pour deux graduations du bas (de 18 à 20) on a 5 graduations du haut (de 3 à 8). Pour 13 il faut décaler de 5 vers la gauche à partir de 18 (en bas), ce qui fait décaler de 5 puis 5 puis la moitié de 5, c'est à dire 12,5. On est parti de 3, donc aboutit à - 9,5.
- Autre procédure : Une représentation analogue à celle-ci est acceptable :

-9,5	$\xrightarrow{-2,5}$	-7	$\xrightarrow{-5}$	-2	$\xrightarrow{-5}$	3	$\xrightarrow{-5}$	8
13		14		16		18		20

- Une approche graphique argumentée est acceptée.
- La procédure qui consiste à continuer le <u>dessin des graduations sur sa copie</u> et à l'utiliser pour conclure est acceptée.

3°)
- Une procédure experte : y = x donc x = 2x/5 + 84/5 d'où x = 28.
- Le nombre N qui repère, sur les deux règles, un même point du fil noir vérifie l'équation suivante : 2,5(N - 18) = N - 3, soit N = 28.
- Un tableau est accepté :

Haut	8	$\xrightarrow{+5}$	13	$\xrightarrow{+5}$	18	$\xrightarrow{+5}$	23	$\xrightarrow{+5}$	28
Bas	20	$\xrightarrow{+2}$	22	$\xrightarrow{+2}$	24	$\xrightarrow{+2}$	26	$\xrightarrow{+2}$	28

EXERCICE 4 :

Pour qu'aucun candidat ne puisse accéder au second tour, il suffit qu'aucun n'obtienne 12,5% sur les 8 000, soit : 1 000 voix.

Le nombre de votes exprimés est : 8 000 - 1 920 - 85, soit 5 995.

- un des six candidats a eu au moins 1000 voix. En effet, 5 995 = $6 \times 999 + 1$. Donc au moins un candidat accédera au second tour.
- Par contre, il n'est pas possible que tous les candidats puissent se présenter. Cela supposerait au moins 6 000 voix. Or 5 995 < 6 000.

EXERCICE 5 :

1- Le théorème de Thalès appliqué aux triangles MBN et ABC permet d'écrire :

$$\frac{AB}{MB} = \frac{AC}{MN}$$

$$\frac{a}{a-x} = \frac{a\sqrt{2}}{2x}$$

$$x = a\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = a(\sqrt{2}-1)$$

Autre méthode :

MBN est isocèle. MN mesure $(a\text{-}x)\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté de côté a -x). Il suffit de poser $2x = (a\text{-}x)\sqrt{2}$ d'où $x = a(\sqrt{2}-1)$.

Une autre démarche correctement justifiée sera prise en compte. (Théorème de Pythagore par exemple).

2- longueur du côté de l'octogone :

On reconnaît sur la figure le carré ABCD et le segment MN. a est la moitié de la largeur de la feuille c'est à dire a = 105 mm.

Les calculs précédents donnent $x = 105(\sqrt{2}-1)$ mm, d'où :

$MN = 210(\sqrt{2}-1)\text{mm} \approx 87$ mm.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1 : D'après l'énoncé, Paul a 68F de moins que Luc , soit : 213-68=145 Paul a 145F (dans son porte-monnaie)

Question 2a : Camille et Eric manifestent une compréhension correcte de l'énoncé par les calculs qu'ils effectuent.
Camille pose une "addition à trou" correcte ; c'est à dire une équation dans laquelle le "?" désigne l'avoir de Paul. Camille perd le fil du problème, interprète mal sa dernière égalité et oublie que la recherche porte sur le premier nombre.
Eric pose la bonne soustraction (213-68)
Question 2b : André a fait une addition ; on peut penser que la formulation "68F de plus" a induit cette opération ; alors que si l'énoncé avait été formulé par "Paul a 68F de moins qu'Eric", il n'aurait pas fait cette erreur.

Question 3a :
Première interprétation : il "oublie" les retenues :"8 pour aller à 3 ; impossible ; 8 pour aller à 13 : 5 ; 6 pour aller à 1 ; impossible ; 6 pour aller à 11 : 5 ; 0 pour aller à 2 : 2"
Deuxième interprétation : à chaque rang, il retranche le plus petit chiffre du plus grand, qu'il soit en haut ou en bas : "8 pour aller à 3 ; impossible ; 3 pour aller à 8 : 5
6 pour aller à 1 ; impossible ; 1 pour aller à 6 : 5 ; 0 pour aller à 2 : 2"

Question 3b : Il suffit de proposer l'exemple suivant 213 - 89. Avec la première méthode l'élève trouverait : 234. Avec la deuxième méthode il trouverait : 276.

SECOND VOLET (8 POINTS).
DIDACTIQUE

Question 1a :
Le tableau :

Surfaces	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Nombre de triangles	4	14	18	16	26	24
Nombre de carrés	2	7	9	8	13	12

Argument pour justifier les objectifs. Pour compléter ce tableau, l'élève doit :
- pour dénombrer directement les triangles, envisager un pavage de chaque figure par des triangles et dénombrer, soit un à un, soit deux par deux pour les carrés ;
- pour dénombrer directement les carrés, compter les carrés qui sont à l'intérieur des figures, et ajouter les carrés obtenus en associant mentalement deux triangles ;
- ou bien se servir du nombre de triangles pour trouver le nombre de carrés, le diviser par 2 en remarquant qu'un carré se décompose en deux triangles ;

Pour produire le rangement, l'élève doit comprendre (deviner ? savoir ?) que, plus il y a de triangles, plus l'aire est grande.

Les objectifs visés dans cet exercice sont donc :
Savoirs : savoir ce qu'est une surface, une aire, un carré, un triangle (dans un cas particulier).
Savoir faire : savoir paver une surface en se servant des repères d'un quadrillage.
L'objectif est donc de commencer à donner du sens à la notion d'aire en montrant comment on peut mesurer en choisissant une unité, et comment on utilise ces mesures pour ranger les surfaces.

Question 1b : Analyse de l'exercice 2 :
La première question vise à préciser le sens du mot surface. Dès que l'élève a compris qu'il s'agit de portions de plan, la réponse est triviale. Si un élève venait à répondre oui, c'est que, vraisemblablement, il aurait interprété « surface » comme « aire ».
Les deux surfaces ne sont pas superposables mais elles ont même aires.
Pour montrer que les deux figures ont même aire, on peut imaginer les procédures suivantes :
- Dans la première surface, l'élève voit deux « quart de cercle » et deux « carrés de 4 petits carrés », ce qui se retrouve dans la deuxième surface. On peut dire qu'il mesure les surfaces en utilisant deux unités.
- On peut aussi prévoir que l'élève réalise mentalement un découpage de la deuxième figure, et un recollage permettant d'obtenir une figure superposable à la première.

La deuxième procédure pour la première partie étant la plus probable, <u>on peut noter que l'exercice 2 (avec deux questions et une question de consolidation) introduit le concept d'aire par comparaison directe des surfaces, sans utiliser de nombres</u>.

Remarque : cet exercice apparaît plus difficile pour des raisons annexes : les surfaces étudiées ne sont pas hachurées et ne sont pas très visibles ; en outre, les quarts de disques, non séparés, ne seront pas repérés facilement par les élèves.

Question 2a : Les figures A,B,C,E,H ont le même périmètre. (Aucune justification n'est demandée.)

Question 2b :
- La somme des longueurs des cotés horizontaux de A, D et G est la même pour les trois : 12c. Il s'agit donc de comparer leurs cotés non horizontaux :
on peut utiliser la comparaison des segments entre deux droites parallèles : plus ils s'écartent de la perpendiculaire, plus ils sont longs.
- On peut aussi utiliser le théorème de Pythagore : Soit x, y, z les mesures respectives des côtés non horizontaux de A,D et G. Pour A : $x^2=6^2$; pour D : $y^2=6^2+6^2$; pour G : $z^2=6^2+4^2$. D'où $x<z<y$. Donc le périmètre de A est plus petit que le périmètre de G, qui est plus petit que le périmètre de D.

Question 2c :
Même aire que A :
- On admettra une justification se fondant sur les formules d'aires ; par exemple : D a même aire que A (même base, même hauteur). G a même aire que A (trapèze : demi somme des bases qui vaut 6 cm, et même hauteur).
- On peut aussi affirmer que les trois figures A, D, G sont des trapèzes qui ont même demi-somme des bases et mêmes hauteurs.

- En découpant D et G on peut reconstituer le carré A. Dans la mesure ou cette démarche est bien explicitée, elle est recevable.

Même aire que H :
B et E ont même aire que H (5 cm²).

Même aire que I :
- (on prendra comme unité de mesure de l'aire, l'aire du petit carré).
L'aire de I est calculable en décomposant en deux triangles (de mesure 9 et de mesure 18). La mesure de l'aire est donc de 27. Dans C et F on voit facilement trois carrés de 3×3, soit 27.

Remarque : en découpant I on peut reconstituer soit C soit F. Si cette démarche est bien explicitée, elle est recevable.

Question 2d :
Procédures possibles que des élèves de CM1 peuvent mettre en œuvre :
- Le découpage collage bien conduit permet de comparer, deux à deux, toutes les figures. Par exemple, la figure A peut être reconstituée dans les figures D et G, la figure I et la figure F, par découpage permettent de reconstituer C.
- Le comptage de carrés permet de trouver des figures de même aire. Par exemple, H, E et B se comparent de cette façon.

Il s'agit des procédures devant être enseignées à la suite ou à l'occasion des activités préparatoires (exercices 1 et 2).

Question 2e :
La situation est elle une situation problème au sens didactique ?
Remarque : le terme situation-problème[1] n'a pas, ici, de statut théorique très précis. En conséquence, les candidats peuvent répondre différemment. L'essentiel est l'argumentation. Un élément caractéristique des situations-problèmes est la question de la validation, c'est à dire la possibilité, pour l'élève, de contrôler lui-même l'exactitude de ses réponses (sans intervention du maître).
Réponses possibles : ce n'est pas une situation problème car :
- la connaissance visée pourrait être la distinction aire-périmètre. Le concept d'aire n'étant pas bien défini, la situation n'est pas une situation problème pertinente par rapport à cet objectif.
- il n'y a pas de rétro-action ; les élèves n'ont pas la possibilité de se rendre compte tout seuls de la validité de leur réponse ; même s'ils sont autorisés à découper les figures pour vérifier leur réponse sur les aires, il ne s'agit pas ici d'une procédure de contrôle vraiment différente, ni plus fiable, que leur procédure de résolution.

Par ailleurs, aucune définition de l'aire n'a été communiquée.
Certains candidats peuvent toutefois avancer l'hypothèse contraire, avec de bons arguments : par exemple, si les bonnes réponses sont validées rapidement par l'enseignant, les élèves ne pourront pas prendre conscience, tout seuls, de leurs erreurs. Dans ce cas il ne s'agit pas d'une situation problème. Mais, si l'enseignant organise un véritable débat scientifique, en conservant une neutralité cognitive, alors chaque élève va essayer d'argumenter pour prouver sa réponse, l'enseignant n'intervenant que pour faire préciser la signification de "avoir la même aire" ou "avoir le même périmètre". Dans ces conditions, la validation nécessitera une preuve, et la situation est

[1] Pour une information précise, on pourra se référer à l'article de R.Douady dans RDM vol. 7-2.

une situation-problème. Les étudiants peuvent parler de conflit socio-cognitif, c'est à dire émergence d'une contradiction entre ce que l'élève a perçu de la situation, et les arguments avancés par ses pairs.

Question 2f :
Quelle logique conduit l'enseignant à proposer cette progression ?
- Les exercices préparatoires introduisent la notion d'aire, en enseignant les procédures de comparaison, soit en mesurant à l'aide d'une unité (exercice 1), soit par comparaison directe (exercice 2).
- La situation de recherche permet de réinvestir les procédures de comparaison d'aires enseignées dans les exercices préparatoires dans une situation plus complexe. En faisant comparer aussi les périmètres, elle donne l'occasion de bien distinguer ces deux concepts : aire et périmètre.

Analyse :
1) L'introduction des aires directement à partir de mesures, (imposé par l'exercice 1 préparatoire) ne permet pas de bien concevoir la grandeur que l'on mesure (et qui existe, indépendamment des nombres). Le choix des exercices préparatoires ne conduit pas à une définition claire de la notion d'aire. L'exercice 2 aurait pu être placé en 1. Ainsi, l'enseignant pourrait s'appuyer dessus pour expliciter le critère : deux figures ont la même aire « si on peut constituer à partir de l'une une figure superposable à l'autre. »
La notion de mesure d'aire s'appuie ensuite sur cette définition ; on voit d'ailleurs que dans l'exercice 1 , c'est cette définition de l'aire qui permet de comprendre pourquoi la mesure de la figure A est "2 carrés". Sauter cette étape conduit les élèves à une conception de l'aire comme un nombre, conception fausse qu'ils auront du mal à abandonner ensuite.
2) Les figures de la situation de recherche ne sont pas bien choisies : B, E et H sont les figures les plus simples ayant la même aire, (pas d'obliques) or justement elles ont aussi le même périmètre! le risque est grand de voir s'installer l'idée que c'est la présence des obliques qui "gâche tout".
3) Autres critiques :
- les figures qui ont même aire sont sur les mêmes lignes.
- dans l'exercice 1, le travail est morcelé. L'enfant exécute des tâches sans voir la finalité.
- Le terme « étendue » pour définir l'aire est pour le moins malheureux.
- Le tableau à remplir oblige l'élève à être répétitif.
-Toutes les surfaces sont sur quadrillage. (A lier avec l'introduction directe à partir des mesures).

Question 2g : Envisager une exploitation des réponses possibles des élèves.
Etudions d'abord le traitement possible des erreurs :
Un tel tableau en cycle trois génère habituellement des erreurs classiques :
- Pour le périmètre, les élèves utilisent les carrés en bordure et, donc, ne comptent pas deux fois le carré en coin. Il s'en suit des erreurs dans le périmètre.
- La comptabilisation des triangles et des carrés engendrera sûrement des erreurs.
- Ayant trouvé que les figures avaient le même périmètre, certains élèves auront pu déduire que ces figures avaient même aire.

Au delà du traitement des erreurs, le professeur peut instituer les savoirs suivants (en faisant écrire) :
- des figures de même aire peuvent avoir des périmètres différents (A et D par exemple),
- des figures de même périmètre peuvent avoir des aires différentes (A et H par exemple).

CORSE

(Corrigé effectué à partir d'indications fournies par notre correspondant de l'académie).

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS) MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1 : (5points)

Question 1 : Nature du triangle HBC
Le triangle HBC est rectangle en C. En effet, (BC) est perpendiculaire au plan HGCD, donc à toutes les droites de ce plan, en particulier à (HC).

Question 2a : Étude du triangle HDB
HDB est un triangle rectangle en D car (HD) est perpendiculaire au plan ABCD, et donc à toutes les droites du plan.

$DB = 6\sqrt{2}$ cm.

Justification : appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle DBC : $DB^2=BC^2 + CD^2$

$HB = 6\sqrt{3}$ cm

Justification : appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle HBD : $HB^2=DB^2 + HD^2$; en prenant les mesures en cm on obtient : $6^2 + (6\sqrt{2})^2 = 36 \times 3$

Question 2b : La droite (KI) est en position de droite des milieux du triangle HDB.

(KI) est donc parallèle à (HB) et $KI = \frac{1}{2}\ HB = \frac{6\sqrt{3}}{2}$ cm $= 3\sqrt{3}$ cm

Question 2c : Tracé du triangle HDB en vraie grandeur : voir figure 1

Question 3 : Développement de la pyramide : voir figure 2

Le volume de la pyramide est égal à $v = \frac{1}{3}(\text{aire BCD}) \times HD$

Aire (BCD) = ½ aire ABCD = 18 cm² ; HD = 6 cm

$v = (6 \times 18) : 3 = 36$ (en cm^3)

EXERCICE 2 (3 points)

Question 1 : complément vertical

3	3	4	5
6		0	1
	1	0	5
7	3		1

I- La solution positive de l'équation $x^2 = 1296$ est 36 : en effet,
$(a+2)^2 = a^2 + 32$; $a^2 + 4a + 4 = a^2 + 32$; $4a + 4 = 32$; $a = 7$

II- Pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut que l'un au moins de ses facteurs soit nul. D'où $x = 3$ ou $x = 13$

III- Le nombre est 400.

IV- Le chiffre des unités est 1 ; $\dfrac{5+1+1+d}{4} = 3$; $d = 5$

Question 2 : Identification des lignes :

$R1 = (2-\frac{3}{2}) : \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \times 12 = 6$. Ligne B

$R2 = 73$. Ligne D

$R3 = 105$. Il suffit de lister les multiples de 15... Ligne C

$R4 = 5 \times 1{,}5 \times 4{,}46 \times 10^{-3} \times 10^{5} = 33{,}45 \times 10^{2}$. Ligne A

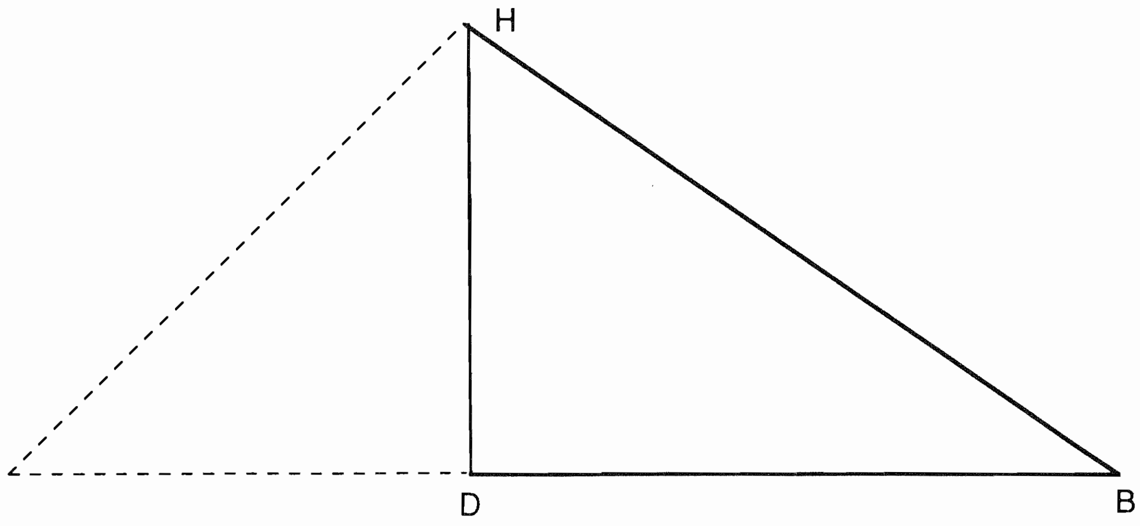


Figure 1

(DB est la longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle isocèle dessiné en pointillé).

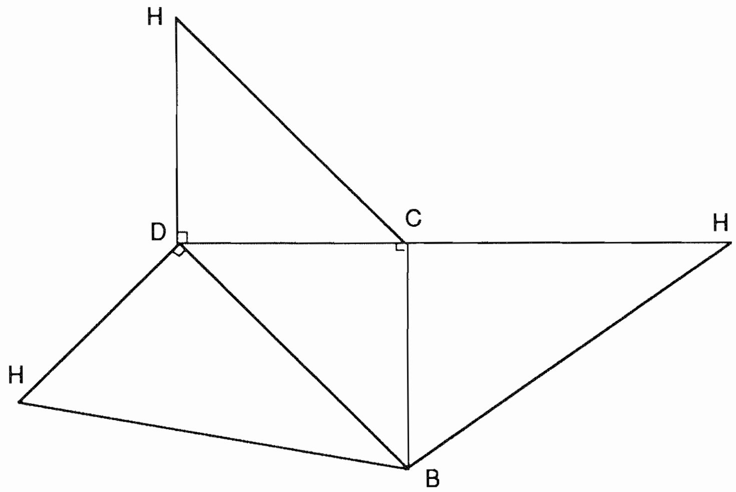


Figure 2

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1a : Réponse du candidat
On peut imaginer plusieurs types de messages conventionnels :

- une suite d'instructions de tracé à respecter, ou
- une description d'éléments géométriques en relation suffisantes pour déterminer la figure.

Trace un carré de 4 cm de côté. par un sommet, trace un cercle de 4cm de rayon ou bien
Trace un cercle de rayon 4 cm. Trace un carré de 4cm de côté dont un sommet est le centre du cercle.
Exemples de message décrivant les propriétés suffisantes de la figure :
Il y a un cercle de 4cm de rayon et un carré de 4cm de côté. Un sommet du carré est le centre du cercle.

Question 1b : Termes de vocabulaire
En donnant cette tâche à des élèves de CM2, le maître peut vouloir faire apparaître les termes de

carré, cercle, rayon, centre, sommet, côté, longueur, mesurer
ou bien
cercle, rayon, segments, angles droits, cm
et peut-être le nom des instruments servant à réaliser les constructions : compas, équerre, règle.

Question 2a : Les critères d'évaluation peuvent être :

- la validité ou non des informations
- le caractère suffisant ou non de ces informations pour exécuter une construction avec les connaissances des élèves
- le caractère géométrique ou non des termes utilisés
- la présence ou l'absence de symboles dans la description de la figure

Question 2b : production de Patrice

Patrice n'a pas reconnu le carré, il n'a vu que quatre segments. Il est par ailleurs le seul à indiquer les instruments à utiliser.

Question 2c : Commentaires destiné aux élèves
Rédiger des commentaires est une tâche plus difficile qu'il n'y paraît. En effet, il faut encourager les élèves, et donc bien souligner les points positifs. Il faut ensuite indiquer les points à améliorer, en donnant une vraie raison, à la portée de l'enfant.
Exemples

Pauline :

Toutes tes informations sont justes.
Tu as bien choisi le mot de rayon. En géométrie, un rond se dit cercle.
Mais quelqu'un qui n'a pas vu la figure ne sait pas comment tracer le cercle, car il ne sait pas où est son centre. Cherche à compléter ton message, en le corrigeant.

Géraldine :

Toutes tes informations sont justes.
Tu as bien choisi le mot cercle et le mot rayon.
Mais quelqu'un qui n'a pas vu la figure ne sait pas du tout comment placer les deux figures : loin l'une de l'autre ? près ? avec des éléments communs ? Complète ton message.

Hakim :

Toutes tes informations sont justes.
Tu as bien choisi le mot cercle et le mot rayon.
Tu as nommé les sommets de ton carré sur le dessin, mais celui qui reçoit le message ne voit pas ton dessin. Il faut donc dire ce que tu as fait : j'ai nommé par ABCD les sommets de mon carré.
Avec ton message, on peut penser que le cercle passe par les points B, A et C. Pour être plus précis, il faut dire que B est le centre du cercle.

Guillaume :

Toutes tes informations sont justes.
Tu as bien choisi le mot cercle le mot centre et le mot carré.
Le centre du cercle est le sommet de l'angle droit ; et non point sur un côté ou dans l'angle droit, ce que ton texte ne précise pas suffisamment.
Il manque aussi l'indication du rayon du cercle.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

A) ACTIVITE PREPARATOIRE :

Activité 1 :

1) l'objectif du premier exemple

On peut déclarer que l'objectif est de sensibiliser les élèves aux actions que la machine leur permet de contrôler (ce que l'on voit à l'écran) et à celles qu'elle ne permet pas (ce que l'on ne voit pas) et qu'ils devront donc bien contrôler eux-mêmes.
On pourrait aussi déclarer (formellement) que l'un des objectifs de l'activité 1 est de familiariser les élèves avec une forme de tableau qui sera réutilisée dans l'activité 2 et dans les exercices 3 et 4.

2) Explication des résultats 33 et 23 .

L'explication n'est pas simple à donner à des élèves de CM.

Certaines calculatrices exécutent le premier calcul d'addition (ou de soustraction) avec les nombres frappés dès qu'un second signe d'opération est frappé. D'autres attendent, et si le second signe est $\times$, elles effectuent la multiplication entre les nombres qui ont été tapés juste avant et juste après le signe $\times$ avant de faire l'addition (ou la soustraction) du premier nombre avec le résultat de la multiplication.

La seule convention raisonnable que le maître puisse introduire est celle des parenthèses, pour différencier les deux types de calcul.

3) ce que les élèves auront appris

Il est difficile d'affirmer que des élèves ont appris une connaissance identifiable, parce qu'ils n'ont rencontré qu'une fois telle ou telle propriété, même si le maître l'a soulignée.

Ils ont été sensibilisés à une description de l'usage de leur calculatrice, à plusieurs façons de faire les calculs lorsque une multiplication suit une addition, à l'intérêt des parenthèses pour traduire ces différences...

Activité 2 :

Dans la première, il s'agit d'une connaissance de la fonction C ou CE des calculatrices qu'il faudrait peut-être approfondir (faut-il, après CE, taper le dernier chiffre ou tout le nombre ?)

Dans la seconde, il s'agit de connaissances sur la multiplication des nombres où l'on reconnaît certaines techniques de calcul mental, basées sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

B) DECOUVERTE (ANNEXES 2 ET 3)

1) Phases

La première phase est collective, selon le livre du maître. Après une présentation collective du texte, on peut imaginer que l'identification du point de départ se fait aussi collectivement.

> Remarque : Il sera peut-être alors difficile de faire en même temps les calculs et une réflexion sur les différentes façons de faire les calculs selon les calculatrices. Par ailleurs, beaucoup d'élèves auront envie de tout calculer...

- Le premier (chaque) calcul peut alors se faire individuellement, avec un contrôle collectif si peu d'élèves sont familiarisés avec les calculs avec calculatrice.

Il sera utile d'interpréter collectivement le premier résultat pour comprendre la règle du jeu qui associe un mot à un nombre.

- Si le maître veut suivre le déroulement du livre il devra empêcher les élèves de poursuivre les autres calculs, et organiser, sur la base du seul premier calcul, une mise en commun collective pour centrer l'attention des élèves sur les méthodes utilisables selon le type de calculatrice.
- Le maître devra introduire lui-même les méthodes qui ne seront pas familières, comme l'utilisation des mémoires et l'explication de leur fonctionnement.

2) Contraintes

Le maître devra contraindre les élèves à éviter l'écriture des calculs partiels ... et le calcul mental de façon à utiliser les mémoires..

Tout dépend de la prise en compte de la priorité ou non de la multiplication par la calculatrice.

- Si la calculatrice prend en compte la priorité de la multiplication, seul le calcul de chez Lili nécessite une utilisation des mémoires (sauf en cas de calcul mental du diviseur), mais alors, il faut faire ce calcul en premier.

- Si la calculatrice comprend des parenthèses, il suffit de taper tous les signes, au fur et à mesure de leur lecture. L'utilisation des mémoires est inutile.
- Si la calculatrice ne comprend ni priorité ni parenthèses, pour Lise, Bibi et Lili, les mémoires permettent de n'écrire aucun des calculs intermédiaires, mais il faut aussi une bonne organisation

Remarques :

1) Il est toujours possible d'effectuer un calcul en utilisant des touches mémoires, mais cela n'est pas toujours utile. Par ailleurs, noter les manipulations revient à faire un travail d'écriture qui nécessite d'écrire les calculs partiels... ce que le maître voudrait éviter...

2) La conclusion ne paraît pas pertinente pour les élèves qui auront fonctionné avec les calculatrices à priorités.

Qu'apporte la contrainte aux élèves ?

On peut dire qu'elle apporte à tous l'occasion d'utiliser la mémoire de la calculette, ce dont ils auraient pu se passer s'ils ne s'étaient centrés que sur les tâches proposées.

EXERCICES (ANNEXES 2 ET 3)

1) Calculatrice et calcul

Le candidat relèvera pour ce qui concerne le calcul, l'activité de découverte (déjà analysée) et les exercices 2 et 5 qui comportent du calcul machine pour la première et un travail de numération pour les deux derniers.

Pour les exercice 1, 3 et 4 il s'agit plutôt de relier frappe et affichage (avec devinettes pour le 4)

L'exercice 6 pose des problèmes d'organisation (sur papier, ou avec la mémoire) des calculs machine.

2) Notion mathématique travaillée à l'exercice 5

L'exercice 5 fait travailler la numération de position : identification des chiffres des dizaines, centaines ou milliers et leur relation avec une décomposition additive du nombre.

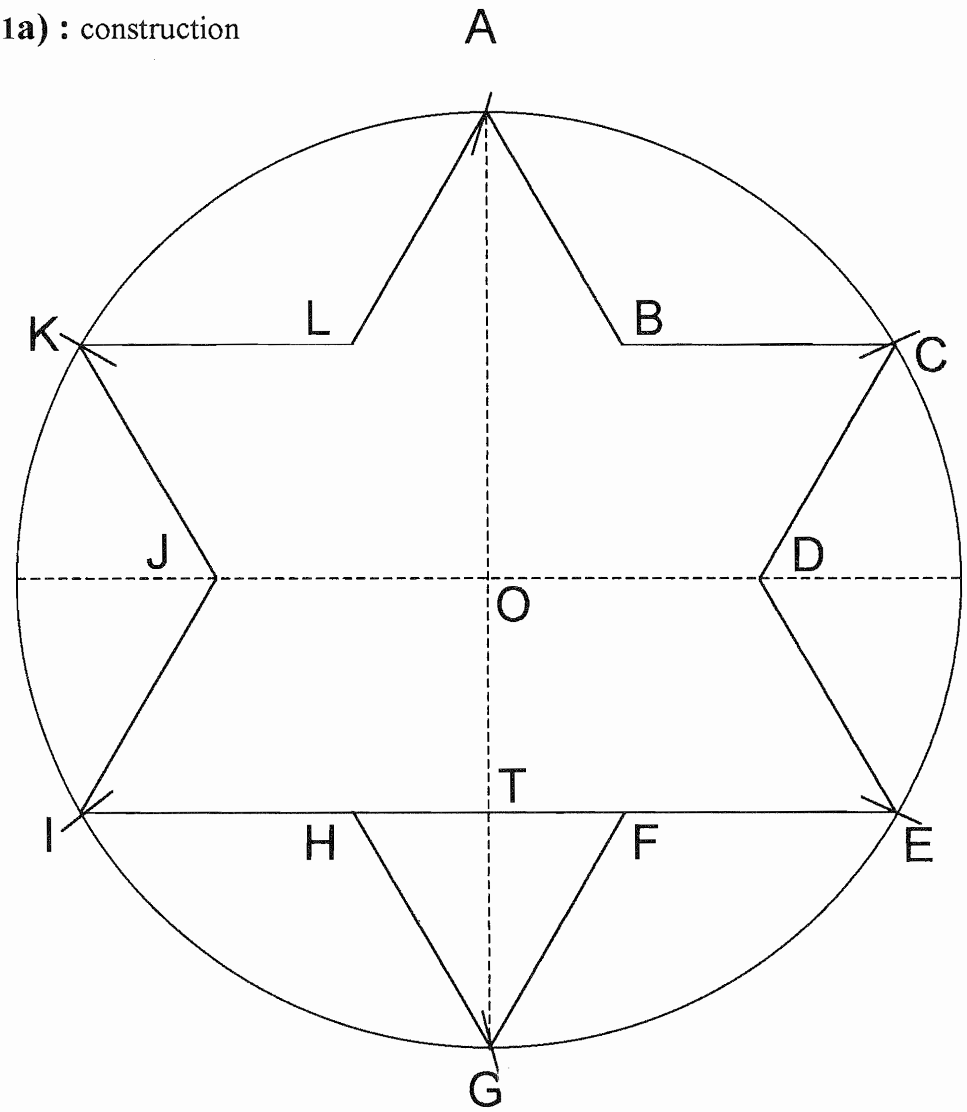
Exemple pour passer de 2547 à 2847, il faut transformer 5 en 8, ajouter 3 au chiffre des centaines, et donc 300 au nombre 2547.

CRETEIL-PARIS-VERSAILLES

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

Question 1a) : construction



Question 1b : un programme de construction
- construire le cercle de centre O et de rayon L
- marquer un point A sur ce cercle
- marquer les points K et C, intersections du cercle (C) et du cercle de centre A et de rayon L
- marquer sur le cercle les points E et I, distincts du point A, et sur les cercles de rayon L et de centres respectifs C et K: le triangle AEI est équilatéral

on peut le montrer en considérant les angles: par construction, les 4 triangles AOC, COE, AOK et KOI sont équilatéraux (côtés de longueur L) ; leurs angles sont donc de 60°. Les angles au centre $\widehat{AOE}$ et $\widehat{AOI}$, égaux chacun à la somme de deux des angles de 60°, sont donc de 120° et donc les angles inscrits correspondants $\widehat{AIE}$ et $\widehat{AEI}$ sont de 60°. Les trois angles du triangle AEI sont donc de 60° et le triangle est équilatéral.

- Placer le point G symétrique du point A par rapport à O. On pourrait montrer que K et C sont les symétriques respectifs des points E et I par rapport au point C ; le triangle KCG est donc équilatéral et symétrique du triangle EIA par rapport au point O.

Question 2 :

a) les axes de symétrie de la figure sont les droites (AG), (CI), (KE), d'une part, et les droites (LF), (BH), (JD) d'autre part.

b) le triangle HFG est équilatéral. En effet, par symétrie par rapport à (AG) : HG = FG (les symétries sont des isométries). Le triangle est donc isocèle, les angles FHG et HFG sont égaux. D'autre part, l'angle HGF = 60° (angle du triangle équilatéral KCG). La somme des angles du triangle étant 180°, tous les angles sont égaux à 60° et le triangle est équilatéral.

c) Par symétrie par rapport aux différents axes, on voit que tous les "petits triangles" (ALK, LKJ, etc..) sont isométriques et équilatéraux. Donc IH = HF = FE.
D'où HF = IE

Question 3 : Le point O est sur les axes de symétries du triangle équilatéral AEI, qui sont en même temps ses médianes ; il est donc le centre de gravité de ce triangle. Donc O est aux $\frac{2}{3}$ de la médiane à partir du sommet; donc OT = $\frac{1}{3}$ AT = $\frac{1}{2}$OA

Comme OA = OG, on a T milieu de [OG].

Question 4 : L'aire du triangle AEI est égale à : $\frac{1}{2} \times$ IE $\times$ AT, AT étant la hauteur relative à la base IE

D'après 3), on a AT = AO+OT = L+$\frac{1}{2}$L = $\frac{3}{2}$OA

D'autre part, dans le triangle équilatéral AIE, nous savons que la hauteur est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$a où a est la longueur du côté.

Donc, AT=$\frac{\sqrt{3}}{2}$IE IE =$\frac{2}{\sqrt{3}}$AT = $\frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2}$OA

D'où l'aire du triangle AEI: $\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} \text{OA} \right) \times \left(\frac{3}{2} \text{OA} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} x \, \text{OA}^2$

D'après la question 2c, on passe du côté du triangle AEI au côté du triangle HFG en divisant par 3. Le coefficient de réduction est donc de $\frac{1}{3}$.

Or nous savons que si nous multiplions les longueurs d'une figure par un nombre a, l'aire est multipliée par a^2.

Donc l'aire du triangle HFG est obtenue en multipliant par $\frac{1}{9}$ celle du triangle AEI

D'où l'aire du triangle HFG : $\frac{1}{9} \times \frac{3\sqrt{3}}{4} \times \text{OA}^2 = \frac{\sqrt{3}}{12} \times \text{OA}^2$

On peut considérer que l'étoile est constituée de la juxtaposition du triangle AEI et des trois petits triangles KLJ, BCD et HFG.

L'aire totale est donc égale à : $\frac{3\sqrt{3}}{4} \times \text{OA}^2 + 3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{12} \text{OA}^2\right) = 3 \times \left(\frac{3\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12} \right) \text{OA}^2 = \sqrt{3} \text{OA}^2$

L'aire totale de l'étoile est égale à $\sqrt{3} \times \text{OA}^2$

Question 5a : Nous venons de calculer l'aire de l'étoile en fonction du rayon du cercle de départ.

Pour l'étoile (1), PQ est le diamètre, donc le rayon est de 6cm et pour l'étoile (2) le rayon est de 2cm.

D'où aire de l'étoile (1) : $\sqrt{3} \times 6^2 \text{cm}^2 = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$; de l'étoile (2) : $\sqrt{3} \times 2^2 \text{ cm}^2 = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$

Question 5b : Nous passons de l'étoile (2) à l'étoile (1) en multipliant les longueurs par 3; donc:

aire de l'étoile (1)= 9 × aire de l'étoile (2)

la relation donnée peut s'écrire:

$\frac{airedel' \acute{e}toile(1)}{airedel' \acute{e}toile(2)} = \frac{\text{VN}}{\text{MV}}$ d'où $\frac{\text{VN}}{\text{MV}} = 9$ VN = 9 MV d'où:

VN + MV = 9 MV + MV = 10 MV = MN = 20 cm

<u>MV = 2 cm</u>

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1 :

L'élève A

- compréhension : il part des 4000m et retranche successivement le nombre de points de chaque balle: il n'a donc pas compris qu'il faut retrancher 10m par point;
- calcul : il effectue ses soustractions en ligne et commet deux erreurs:

4000 - 4 = 4996 : il oublie la retenue au dernier chiffre à gauche

4996 - 8 = 4982 : on peut supposer que pour éviter la retenue, il a fait "8 - 6" au lieu de "6 - 8" aux unités mais bizarrement il a tout de même enlevé 1 aux dizaines

- d'autre part, il ne contrôle pas la vraisemblance de son résultat puisqu'il trouve qu'Alain doit parcourir plus de 4000m.

L'élève B:

- Compréhension : il calcule le nombre de points sur la cible, d'abord correctement (la cible du problème) puis il rajoute au début les 20 points de la cible donnée en exemple ; il retranche ensuite ce nombre de points à 4000 : lui non plus n'a pas compris la donnée "10 m par point".
- Calculs : il effectue ses calculs en ligne, sans erreur de calcul, mais avec des écritures incorrectes: mauvais usage du signe = (les écritures de part et d'autre du premier signe = ne désignent pas le même nombre) et mauvais usage du signe – (a - b avec a < b ; ce qui ne prête pas à confusion ici)

L'élève C:

- Compréhension : il retranche 30 à 4000, sans doute les 30 points des 3 balles au centre de la cible du problème ; D'autre part, lui non plus n'a pas compris la donnée "10 m par point".
- Calculs : la soustraction est posée, elle est juste, mais le signe - est mal placé et la retenue ne figure pas

L'élève D:

- Compréhension : il retranche à 4000 les 42 points de la cible du problème ; lui non plus n'a pas compris la donnée "10 m par point".
- Calculs: l'addition des points est effectuée mentalement, la soustraction est posée correctement et effectuée sans erreur.

L'élève E:

- compréhension : il est le seul à avoir compris la donnée 10m par point, mais il part de l'exemple donné et non pas de la cible du problème.
- Calculs : ils sont justes, les opérations sont posées (on peut s'étonner qu'en début de 6, il n'effectue pas mentalement 20×10, et 4000 - 200; mais peut-être pense-t-il qu'il faut les poser ?)

L'élève F:

- compréhension : il se contente de calculer le nombre de points de la cible, et il donne ce nombre comme réponse ; il n'a pas du tout compris le problème.

Autre solution:
On pouvait aussi présenter l'analyse précédente dans un tableau:

		A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
C	*N'a pas compris qu'il faut enlever 10m par point; enlève à 4000 le nombre de points*	X	X	X	X		
C	*Ajoute le nombre de points de l'exemple à ceux du problème*		X				
C	*Ne compte que 3 des 5 balles de la cible*			X			
C	*Part de la cible donnée en exemple, pas de celle du problème*					X	
C	*Donne comme réponse le nombre de points de la cible*						X
Calc	*Erreurs dans les soustractions en ligne*	X					
Calc	*Erreurs d'écriture (signe = et signe -)*		X				

C: erreur de compréhension   Calc: erreur de calcul ou d'écriture

Question 2 :

a)- Nous constatons que seulement un enfant sur les 6 a enregistré la donnée "pour chaque point obtenue au tir, la distance à parcourir est diminuée de 10 m", l'un d'eux n'a pas du tout compris la situation, les 4 autres ont compris qu'il fallait enlever à 4000 le nombre de points.

Pourquoi cette difficulté ? En quoi est-elle liée à l'énoncé ?

Il faut noter que la donnée concernant les essais au tir d'Alain introduit une grande confusion :

* c'est une donnée parasite qui n'intervient pas dans la résolution du problème posé ; ce n'est même pas un exemple de début d'épreuve puisqu'il n'y a que 3 balles tirées alors que dans l'épreuve il y en a 5 ; et de toute façon, elle n'est pas utilisée pour expliciter la consigne (il aurait fallu mettre "avec ces 20 points, la distance à parcourir est diminuée de 200m").

- sa place dans le haut de la fiche , au milieu de la description de l'épreuve sportive, est particulièrement mal choisie : la lecture des trois dernières lignes de cette partie est très perturbée par cette donnée que les élèves ne voient pas comment intégrer à la situation. Certains ne retiennent donc des trois dernières lignes que le fait que les points au tir diminuent la distance à parcourir, la ressemblance des nombres 20 (points) et 10 (m) achevant cette confusion.
-

Compléments :
- Peut-être aussi les élèves ont-ils du mal à reconnaître une situation multiplicative dans cette expression "pour chaque point", dans la mesure où un point tout seul n'existe pas, il s'agit d'une valeur; une phrase plus explicite aurait pu être proposée: "la distance à parcourir est diminuée du nombre obtenu en multipliant par 10 le nombre de points" ou mieux encore "pour savoir la distance à parcourir, il faut retrancher à 4000 le nombre obtenu..."
- On peut ajouter que la situation décrite par l'énoncé n'est pas familière aux enfants.

b) les autres erreurs concernent le calcul du nombre de points: 3 élèves sur les 6

* pour B, on peut avancer deux interprétations:
- une question de contrat didactique : il ne voit pas très bien la situation, mais il pense qu'il doit utiliser toutes les données
- il ne comprend pas bien le mot "essais" et il pense effectivement que tous les points comptent.

Complément
Le "contrat didactique" a été défini par G.Brousseau comme " l'ensemble des comportements de l'enseignant qui sont attendus de l'élève et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus de l'enseignant . Le contrat est donc ce qui détermine pour une petite part, mais surtout implicitement, ce que chaque partenaire va avoir à gérer et dont il sera, d'une manière ou d'une autre, comptable devant l'autre"

*pour C, on peut faire encore deux hypothèses:
- il a remarqué qu'il n'y avait que 3 balles dans les essais, c'est pour cela qu'il n'en compte que 3.
- Il interprète, plus ou moins confusément, la phrase "la distance à parcourir est diminuée de 10 m" comme "on enlève 10 pour chaque balle dans le 10"

*pour E, il lui a paru normal en lisant le haut de la fiche, d'aller jusqu'au bout de l'exemple proposé ; il n'a pas pensé qu'il pouvait s'agir d'une donnée parasite.
C'est là aussi une question de contrat didactique.

Les erreurs sont donc liées au manque de clarté de la fiche proposée, et principalement à cette donnée parasite des essais et à son emplacement dans la fiche .

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

Questions 1 et 2 :
Les contenus mathématiques des activités proposées ici sont :
- l'utilisation de tableaux et de graphiques, en liaison avec des situations mettant en jeu des fonctions
- la reconnaissance de situations de proportionnalité ;

C'est dans le programme du cycle des approfondissements (cycle 3) que ces contenus mathématiques sont indiqués :

" première approche de la proportionnalité :
- reconnaissance de situations de proportionnalité dans des cas simples
- utilisation de tableaux, graphiques."

Ces activités sont donc destinées au cycle 3, et plus particulièrement au CM, car nous verrons plus loin qu'il ne s'agit pas des premières séquences sur la proportionnalité.

Question 3 :
Dans les deux cas, l'objectif est de reconnaître les situations de proportionnalité, et celles de non-proportionnalité.
Dans l'annexe 2-A, l'objectif est aussi
- d'associer l'énoncé d'une situation à un tableau de nombres, et à un graphique.
- de savoir utiliser tableaux et/ou graphiques pour décider si une situation relève de la proportionnalité ou non.

Dans l'annexe 2-B, ce travail n'est plus demandé explicitement
On peut supposer que l'objectif est que l'élève réalise de lui-même un tableau (ou du moins l'ébauche) pour les situations 1,3 et 4 ; et qu'il s'en serve pour voir que les propriétés de linéarités ne sont pas vérifiées (situations 1, 3, 4 et 5)

Question 4 :
Ces activités ne relèvent pas d'une première découverte des situations de proportionnalité.

La consigne de l'annexe 2-A montre que l'expression "situation de proportionnalité" a déjà été introduite, et que les élèves ont appris les propriétés des tableaux de nombres et des graphiques liés à de telles situations.
Il s'agit donc plutôt ici d'exercices de réinvestissement.

Question 5 :

Compléments
pour montrer qu'une situation est "de proportionnalité", il faut montrer qu'elle met en jeu une fonction "multiplicative", c'est à dire une fonction linéaire, qui peut s'écrire y = ax; x et y étant des grandeurs à définir.. On peut :
* reconnaître la fonction explicitement (en raisonnant sur la situation, ou bien en calculant les rapports y/x et en montrant que ce rapport est constant)
* montrer que les propriétés de linéarités sont toujours vérifiées (à partir d'un tableau de nombres, ou en raisonnant à partir de l'énoncé de la situation)
: f(ka)=kf(a) Ou f(a+b)=f(a)+f(b)
* montrer que les points sont alignés avec l'origine sur la représentation graphique
pour montrer qu'une situation "n'est pas de proportionnalité", il faut d'abord préciser entre quelles grandeurs une fonction est envisagée ; on peut alors :
* identifier la fonction et montrer qu'elle n'est pas linéaire (à partir de la situation, ou du calcul des rapports y/x)
* montrer qu'elle ne vérifie pas les propriétés de linéarités : un seul contre-exemple suffit.
* constater que sur sa représentation graphique les points ne sont pas tous alignés avec l'origine : un seul contre-exemple suffit.

Dans la fiche de découverte, seule la deuxième situation relève de la proportionnalité.
Pour T1, nous voyons dans le tableau b) correspondant, que la propriété de linéarité f(2x) = 2 f(x) n'est pas vérifiée puisque f(1) = 35 et f(2) = 60 et 60 n'est pas égal à 2×35 (pour le double de revues, on ne paie pas 2 fois plus cher).
Autres justifications possibles
* *il s'agit d'une fonction affine non linéaire : y=25x + 10 où x et y désignent respectivement le nombre de revues et le prix payé pour ces revues.*
* *c'est le premier graphique qui correspond à cette situation, et on voit que les points ne sont pas alignés avec l'origine.*
Pour T2, il s'agit de la fonction linéaire: y = 39x ; y étant le prix de x places.
Pour T3, on voit sur le tableau correspondant c) que la propriété de linéarité $f(2 \times 1) = 2 \times f(1)$ n'est pas vérifiée.
Autres justifications
* *il s'agit de la fonction $y = x^2$, qui n'est pas linéaire*
* *c'est le deuxième graphique qui correspond à cette situation et on voit que les points n'y sont pas alignés.*

Dans l'Annexe 2B, seules les situations 2 et 6 sont des situations de proportionnalité.

Sit1 :
il s'agit d'étudier le temps, en seconde, en fonction de la distance , en m;
pour les valeurs données, le temps n'est pas proportionnel à la distance puisque
f(100) = 10 et f(400) = 43 donc $f(4 \times 100)$ n'est pas égal à $4 \times f(100)$
Sit 2 :
la donnée "6,5L aux 100km" est une valeur moyenne qui n'a de sens que si l'on considère que la consommation est proportionnelle à la distance parcourue.

<u>Sit 3</u> :
pour une heure, on paie 3F, et pour 2 heures, on paie 7F, qui n'est pas "2 fois plus": la propriété $f(2x) = 2\, f(x)$ n'est pas vérifiée.

<u>Sit4</u> :
pour n à partir de 8, le prix pour n jours n'est pas égal à n fois le prix pour un jour (exemple n=10 le prix est 235F, il est différent de 10×25)

<u>Sit5</u> :
la distance de freinage n'est pas proportionnelle à la vitesse; par exemple:
f(40 + 60) est différent de "f(40) + f(60)" (64 n'est pas égal à "10 + 23")

<u>Sit6</u> :
par définition de la notion d'échelle, les distances réelles sont proportionnelles aux distances sur la carte.

Question 6 :
- On peut penser que les auteurs ont proposé la catégorie "tu hésites" pour éviter que certains élèves ne répondent "au hasard" comme ils font souvent quand ils ne savent pas, et qu'ils doivent absolument produire une réponse.
- Ce peut être aussi pour attirer l'attention des enfants sur la difficulté de l'exercice: ils n'ont pas à se sentir fautifs de ne pas savoir ; même des adultes peuvent hésiter dans certains cas ;
- Mais l'objectif essentiel est sans doute d'inciter les élèves à prouver leurs réponses ; en se posant la question "est-ce que j'en suis sûr ?" l'élève est amené à chercher lui-même des justifications à ses réponses, ou à expliciter ses doutes.
- Et l'objectif est donc aussi, pour l'enseignant, de mieux évaluer le niveau de connaissances de l'élève : une réponse fausse sera plus "inquiétante" dans ce cas, que si l'élève n'avait pas eu la possibilité d'exprimer ses doutes.

Question 7 :
Les réponses justes : les situations 2 et 6 sont "de proportionnalité" ; la situation 4, non.
Les réponses fausses : les situations 1 et 3 sont "de proportionnalité"
et il hésite pour la situation 5, qui n'est pas de proportionnalité
<u>Pour la situation 1</u>, il n'a peut-être pris en compte que les deux premières données: en effet, l'athlète met deux fois plus de temps pour 200m que pour 100m
Il n'a pas compris qu'il suffit d'un contre-exemple pour que la propriété de linéarité ne soit pas vérifiée. Il pense au contraire qu'il suffit de vérifier la propriété pour un exemple.
<u>Pour la situation 3</u>, il a sans doute eu du mal à se représenter la situation et peut-être n'en a-t-il retenu que l'expression "2F par demi-heure supplémentaire" qui évoque une situation multiplicative.
<u>Pour la situation 5</u>, il a peut-être vu un contre-exemple des propriétés de linéarités, mais il hésite car la présence d'un tableau est liée pour lui à une situation de proportionnalité. Il y a conflit entre ses connaissances au sujet des propriétés de linéarité et une représentation fausse de ces situations, liée à un usage dans la classe (obstacle d'origine didactique) .

DIJON

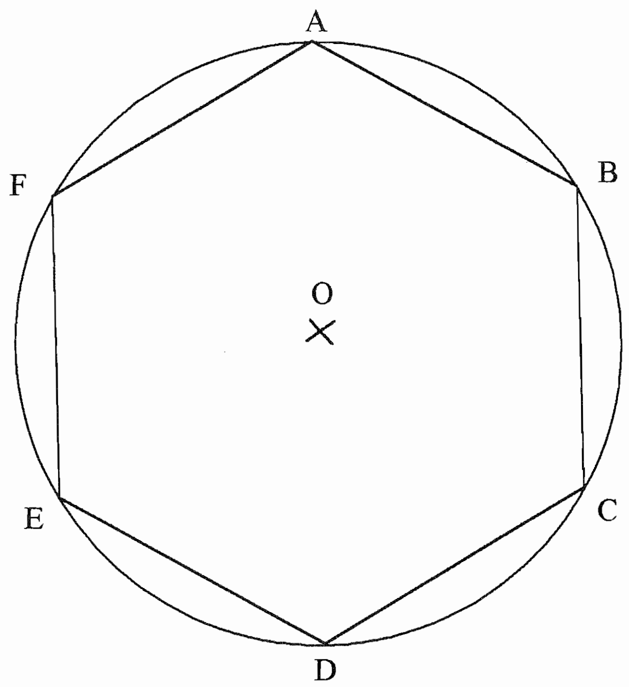
(Corrigé effectué à partir d'indications fournies par notre correspondant de l'académie).

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1 (même exercice que dans l'académie de Nancy-Metz-Strasbourg).
Question 1 :
Placer un point A sur le cercle *C*, de centre O et de rayon 4cm.
En gardant une ouverture de compas de 4 cm :
- tracer un arc de cercle de centre A, qui coupe le cercle *C* en un point B
- tracer un arc de cercle de centre B, qui recoupe le cercle *C* au point C, distinct de A.
- tracer un arc de cercle de centre C, qui recoupe le cercle *C* au point D, distinct de B.
- tracer un arc de cercle de centre D, qui recoupe le cercle *C* au point E, distinct de C.
- tracer un arc de cercle de centre E, qui recoupe le cercle *C* au point F, distinct de D.
- tracer un arc de cercle de centre F, et vérifier qu'il passe par le point A.

Construire les segments [AB] ; [BC] ; [CD] ; [DE] ; [EF] ; [FA] ; ce sont les côtés de l'hexagone régulier inscrit dans le cercle *C*.



Question 2 :
rappel : la médiatrice d'un segment est l'ensemble des points situés à égale distance des extrémités de ce segment.

OA = OC, rayon du cercle, donc O est sur la médiatrice de [AC]
BA = BC, côtés de l'hexagone régulier, donc B est aussi sur la médiatrice de [AC]
Donc la droite (OB) est la médiatrice de [AC]
D'autre part, si la construction précédente est exacte, AB = AO et CB = CO, donc les points A et C sont tous les 2 sur la médiatrice de [BO].
Donc la droite (AC) est la médiatrice de [BO].
Autre solution :
Si la construction précédente est exacte, les côtés de l'hexagone régulier ont même longueur que le rayon du cercle C ; donc AB=BC=CO=OA
Le quadrilatère ABCO *a ses quatre côtés de même longueur, c'est donc un losange. Or dans un losange, les diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires. Donc, la droite* (AC) *est la médiatrice du segment* [BO] *et la droite* (BO) *est la médiatrice du segment* [AC].

Question 3 :
Par construction, les côtés des triangles ABO, BOC et COD ont tous même longueur (4cm) ; ils sont donc tous les trois équilatéraux ; donc tous les angles de ces triangles sont de 60° ; l'angle $\widehat{AOD}$ qui est la somme de trois d'entre eux, est de 180°, ce qui signifie que les points A, O et D sont alignés.
O étant le centre du cercle, les points A et D, qui sont sur le cercle, sont donc diamétralement opposés.
Autre solution :
Le quadrilatère OBCD *est un losange, puisque ses quatre côtés sont de même longueur ; par suite,* (OB) *est parallèle à* (DC) *; comme* (AC) *est la médiatrice* de [OB], *elle est perpendiculaire à* (OB) ; *il en résulte que le triangle* ACD *est rectangle en* C *et inscrit dans le cercle ; le centre* O *de ce dernier est donc aussi milieu de l'hypoténuse* [AD], *d'où la conclusion.*

Question 4 :
Une démonstration analogue à la question 3) montre que les points F et C sont diamétralement opposés.
On en déduit que dans le quadrilatère ACDF, les diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur : il s'agit donc d'un rectangle.
Autre solution :
Une démonstration analogue à la précédente prouve que les triangles CDF, DFA, *et* FAC *sont rectangles respectivement en* D, F *et* A. *Par suite le quadrilatère étudié a quatre angles droits, c'est donc un rectangle.*

Question 5 : Aire (ACDF) = AC × AF ; AF = R = 4 cm ; et pour calculer AC il faut utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AFC et on trouve AC = R$\sqrt{3}$ cm = 4$\sqrt{3}$ cm.
Aire de ACDF est 16$\sqrt{3}$ cm².
Variante pour calculer AH : on sait que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a est
$$a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Question 6a :
- I est sur (AC) perpendiculaire à (OB), donc (AI) est une hauteur du triangle AOB.

- On peut montrer, comme dans 2), que ABOF est un losange et, par suite, ses diagonales étant perpendiculaires, que (BF) est perpendiculaire à (AO) ; donc (BI) est aussi une hauteur du triangle AOB.
- Le point I est donc l'orthocentre de ce triangle ; donc (OI) est la troisième hauteur ; or dans un triangle équilatéral, chaque hauteur est en même temps axe de symétrie du triangle ; donc les points A et B sont symétriques par rapport à la droite (OI)

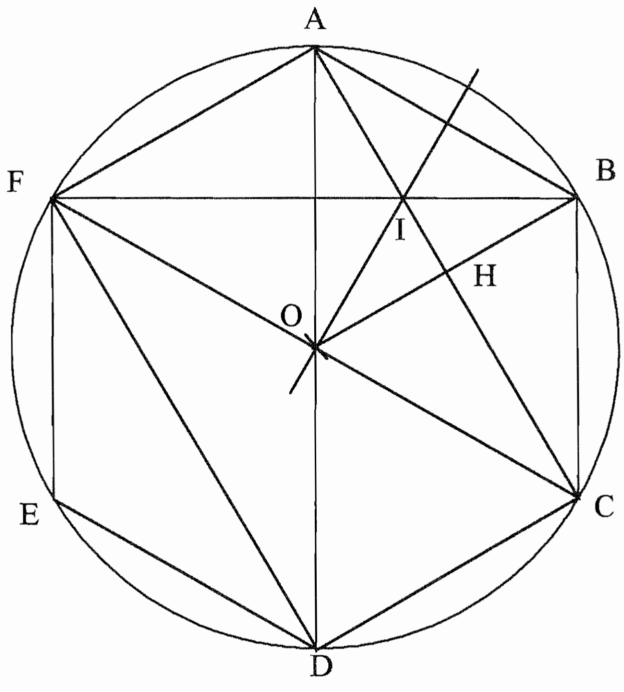
Question 6b :

- dans le losange ABCO, les côtés [AB] et [OC] sont parallèles ; or si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre ; la droite (OI), qui est perpendiculaire à (AB) est donc perpendiculaire à (OC) ;

d'autre part, nous savons que O est le milieu de [FC] ; la droite (OI) est donc la médiatrice de [FC].

Les points F et C sont donc symétriques par rapport à la droite (OI) .

Complément :
Dans la question 1), la justification de la construction n'était pas demandée et on admettait que le segment [FA] avait bien pour longueur R, le rayon du cercle.
Voici une démonstration :
Par construction, les triangles ABO, BCO, CDO, DEO et EFO sont équilatéraux (côtés de longueur R) ; tous leurs angles sont donc de 60°.
L'angle rentrant $\widehat{AOF}$ qui est la somme de 5 d'entre eux est donc de : 300°.
L'angle saillant $\widehat{AOF}$ est donc de : 360°-300° = 60°.
Le triangle isocèle AOF (OA=OF= R) est donc équilatéral, et FA = R.



EXERCICE 2

Question 1a :

Si le nombre de sacs est compris strictement entre 2 et 6, il n'a que 3 valeurs possibles : 3, 4 et 5 ; de même le nombre de paquets ne peut avoir pour valeur que 2 et 3.
Il suffit donc d'examiner les six cas correspondants :

	2 paquets	**3 paquets**
3 sacs	3,5 kg 5 billets 10.5F	3,75 kg 6 billets 13.5F
4 sacs	4,5 kg 6 billets 12F	4,75 kg prix trop élevé 15F
5 sacs	5,5 kg masse trop grande 13,5F	5,75 kg prix trop élevé et masse trop grande 16,5F

On voit qu'il n'y a que trois cas qui satisfont les contraintes (maximum 5kg et 14,25F).
Dans un de ces cas, le client obtient 5 billets, et dans les deux autres 6 billets.
Le nombre maximum de billets de tombola est donc 6, et il y a deux façons de les obtenir :
(2 paquets et 4 sacs) ou bien (3 paquets et 3 sacs)

Autre solution :
Si le nombre de paquets est strictement compris entre 1 et 4, il ne peut avoir pour valeur que 2 et 3. Examinons les deux cas.
1° cas : le nombre de paquets est 2
le prix des graines est alors : 6F et la masse : 2 × 250 g = 500 g
pour les sacs de terreaux, le client dispose donc de 14,25F – 6F = 8,25F.
et son panier peut encore contenir : 5 000 g – 500 g= 4 50 g ; soit au maximum 4 sacs de 1 kg ;
on vérifie qu'il a assez d'argent pour acheter 4 sacs (4× 1,5 < 8,25)
Dans ce cas, il a 2 paquets et 4 sacs ; il obtient donc 6 billets de tombola.
2° cas : le nombre de paquets est 3
le prix des graines est alors : 9F et la masse 3 × 250g = 750 g
le client dispose encore de 14,25F – 9 F = 5,25 F et de 5 000g– 750g = 4 250 g
avec 5,25F, il peut acheter au maximum 3 sacs (3 × 1,5 = 4,5 et 4 × 1,5 = 6) et l'on vérifie que son panier peut les contenir (3 000 < 4 250). Dans ce cas , il a 3 paquets et 3 sacs, il obtient encore 6 billets de tombola.

Question 1b :

le prix total est au plus 14,25 F. : $1,5x + 3y \leq 14,25$ (1)
la masse totale est au plus 5kg = 5 000 g : $1000x + 250y \leq 5000$ (2)
le nombre de sacs est strictement compris entre 2 et 6 : $2 < x < 6$ (3)
le nombre de paquets est strictement compris entre 1 et 4 : $1 < y < 4$ (4)
Il faudrait ajouter : x et y entiers naturels.

Question 1c :

Construction de D1 avec les points : (9,5 ; 0) et (1,5 ; 4)
Construction de D2 avec les points (5 ; 0) et (1,5 ; 14)

Question 1d :

- en divisant par 1,5 la relation (1), on obtient : $x + 2y \leq 9,5$

les points dont les coordonnées (x,y) vérifient cette relation sont donc en dessous de la droite (D1)

- en divisant la relation (2) par 250, on obtient : $4x + y \leq 20$

les points dont les coordonnées vérifient cette relation sont donc en dessous de la droite (D2)

- d'autre part les points qui vérifient (3) sont strictement compris entre les droites d'équation x=2 et x=6 (parallèles à l'axe des ordonnées) et les points qui vérifient (4) sont compris entre les deux parallèles à l'axe des abscisses d'équations y=1 et y=4

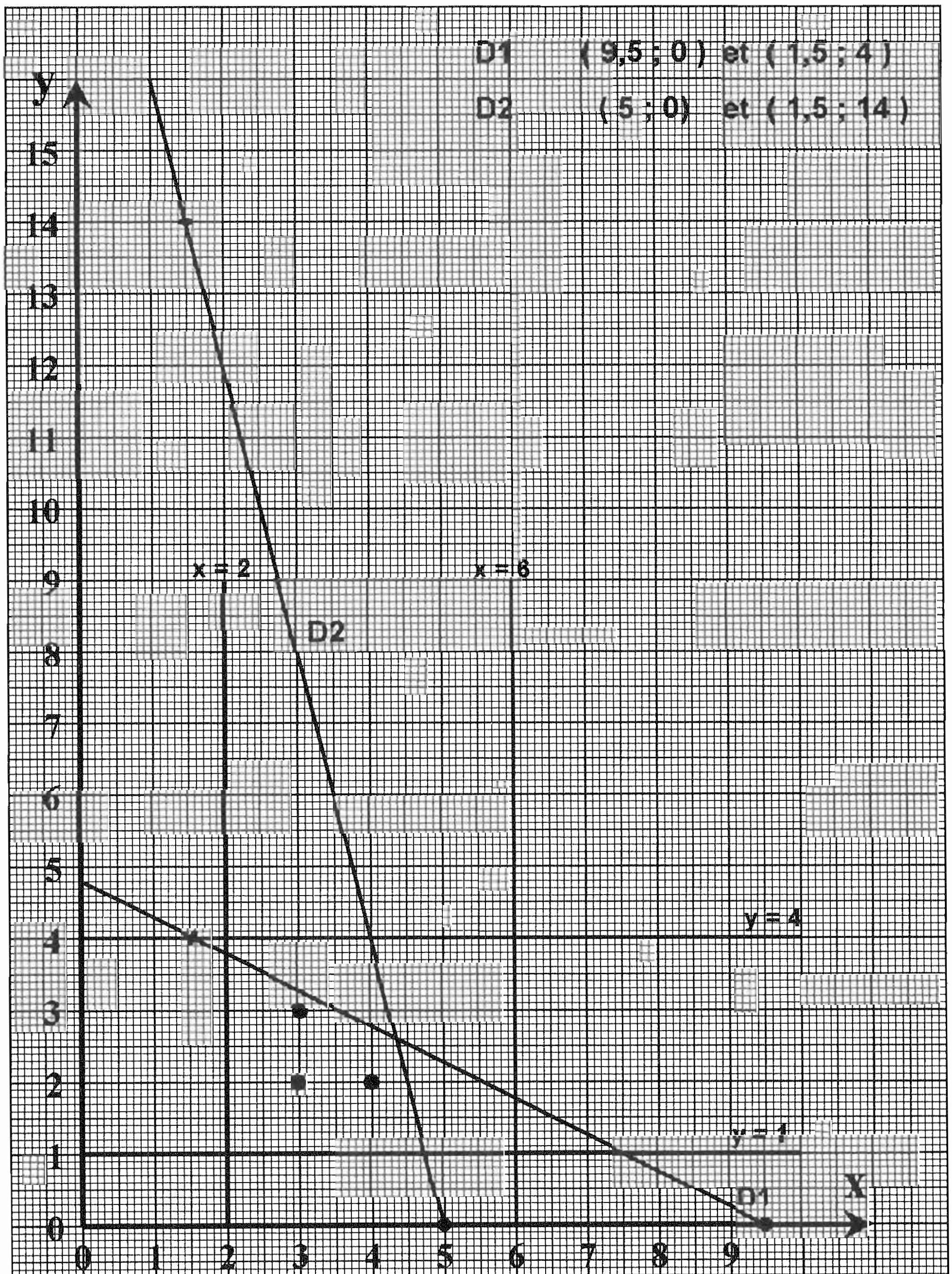
Les points dont les coordonnées (x , y) vérifient toutes les contraintes sont donc les points à coordonnées entières, situés dans le domaine défini ci-dessus.

Nous voyons sur le graphique qu'il s'agit des points (3,2) ; (3,3) et (4,2).

Dans chaque cas, le nombre de billets de tombola est « x + y »

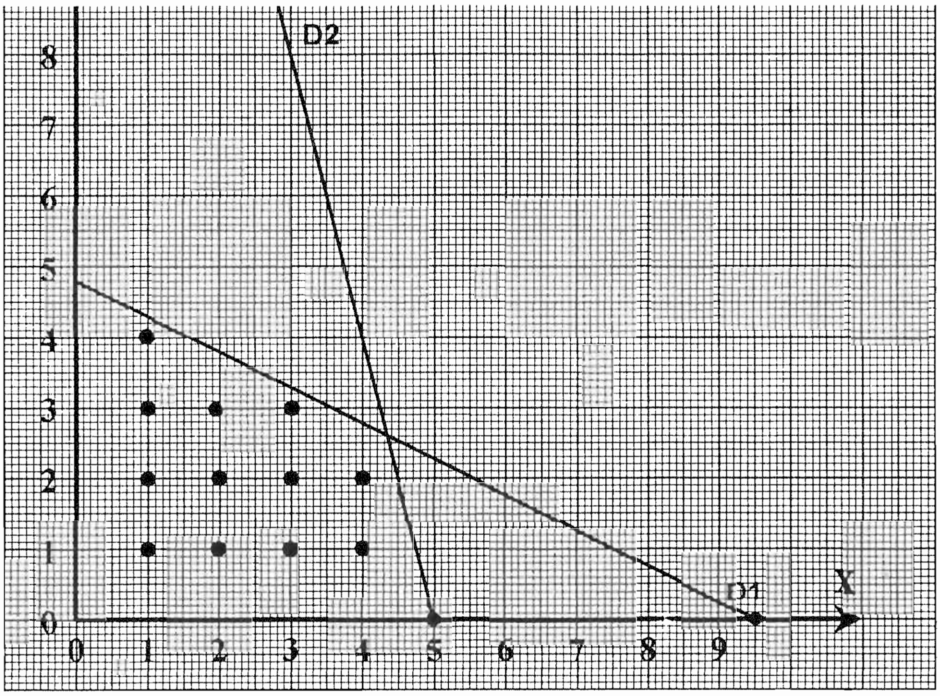
Il s'agit donc de trouver, parmi les points du domaine, ceux pour lesquels « x+y » est maximum.

Comme il n'y a que 3 points, il est très rapide ici de calculer "x+y" pour chacun d'eux : 3+2=5 3+3=6 et 4+2=6. On trouve ainsi les points (3,3) et (4,2), et l'on retrouve les deux solutions du a) : (3 sacs et 3 paquets) et (4 sacs et 2 paquets) qui donnent chacune 6 billets de tombola .

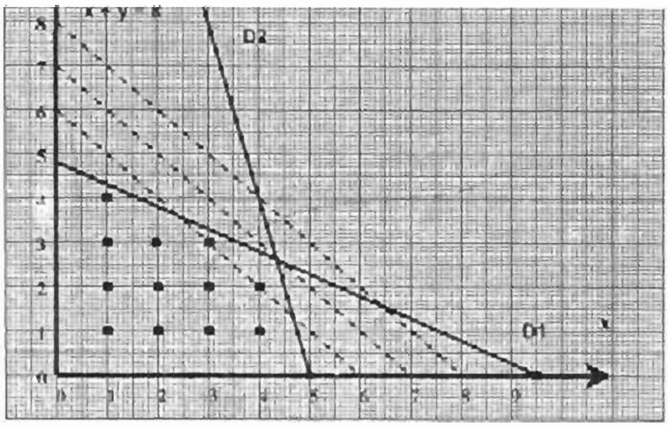


Autres solutions pour b) et d) :

On peut considérer que les inégalités (3) et (4) ne font pas partie des contraintes sur x et y et qu'il s'agit seulement d'indications pour trouver les solutions optimales.
Dans ce cas, le domaine des cas possibles est plus étendu : il est limité seulement par D1,D2, Ox et Oy. Nous voyons sur le graphique suivant qu'il y a 12 points à coordonnées entières dans ce domaine. Il s'agit de trouver parmi eux celui (ou ceux) pour lequel(s) la valeur x+y est maximum ; si l'on remarque que , par exemple sur une même colonne, x+y est maximum pour le point le plus haut, il suffit de calculer x+y pour les points situés le plus haut possible dans le domaine :
(1,4) : 1+4=5 ; (2,3) : 2+3=5 ; (3,3) : 3+3=6 ; (4,2) : 4+2=6
On retrouve les points (3,3) et (4,2) et les solutions du a).



Complément :
Notre problème consiste à chercher, parmi les points d'un domaine, ceux pour lesquels la grandeur x+y est maximum. Ce problème, dit de programmation linéaire, peut être résolu par une méthode plus générale.
Nous savons que toutes les droites d'équation de la forme « x+y= constante » sont parallèles . On construit une droite de ce type, par exemple x+y= 8 et en faisant glisser la règle parallèlement à cette droite, on cherche le premier point du domaine que l'on obtient : on retrouve ainsi, sur la droite "x+y=6", les points (2,4) et (3,3), qui correspondent aux solutions trouvées en a). Cette solution était bien sûr acceptable pour le concours (surtout dans le cas où l'on envisageait un domaine de 12 points) ; nous avons proposé l'autre, moins savante, mais qui nous paraît plus pertinente dans un cas aussi simple.



DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

(Même sujet que Reims pour cette partie, mais utilisant d'autres travaux d'élèves).

Question 1 :

Les élèves du groupe A s'intéressent d'abord aux barquettes de 9 ; ils cherchent des nombres de tomates possibles pour les barquettes de 9, c'est à dire des multiples de 9 compris entre 1700 et 1750.
Pour cela, ils partent d'un multiple facile à calculer (9×100) et, en ajoutant des multiples de 9 (9×90 ; puis 9×2 ; puis 9), ils essaient d'obtenir des nombres entre 1700 et 1750.
Ils semblent procéder un peu "au hasard", sans chercher à obtenir tous les multiples de 9.

- Ils procèdent de la même façon pour les multiples de 6 : ils trouvent un premier multiple 1200 ; puis ils ajoutent 6×90, avant de retrancher 12. On peut penser qu'ici, ils essaient d'obtenir un multiple de 6 qui soit dans la liste précédente, et ils s'arrêtent dès qu'ils en ont trouvé un (1728).
- Même démarche avec les multiples de 8, en essayant cette fois d'obtenir 1728 ; en ajoutant des multiples de 8, ils essaient d'atteindre le nombre trouvé, à la fois multiple de 9 et de 6.
- Ils l'obtiennent en effet et trouvent la solution.

Les élèves du groupe B cherchent systématiquement les multiples de 9 compris entre 1700 et 1750, mais ils en oublient un (1719) ; aucune opération ne figure : on peut supposer qu'ils ont utilisé le caractère de divisibilité par 9 (somme des chiffres), au moins pour trouver le premier : 1701.
Ils cherchent ensuite, parmi les multiples de 9, trouvés, quels sont ceux qui sont multiples de 6 ; pour cela, ils posent les divisions par 6 : ils savent que pour qu'un nombre soit multiple de 6, il faut et il suffit que le reste de sa division par 6 soit 0.
Ils cherchent alors parmi les 3 nombres trouvés, quels sont ceux qui sont multiples de 8, là aussi en posant les divisions par 8. Ils trouvent ainsi la solution 1728.

Question 2 :

Les erreurs du groupe A :
Ils commettent une première erreur, de stratégie, en ne faisant pas une recherche systématique des multiples de 9 ; en effet, il y a 6 multiples de 9 entre 1700 et 1750, et ils n'en ont trouvé que 3, dont un erroné (1747) ; s'ils n'avaient pas eu la chance de tomber sur le multiple commun à 6 et 8, on peut penser qu'après avoir cherché des multiples de 6, ou de 8, ils auraient repris leur recherche des multiples de 9 ; allant ainsi d'une liste à l'autre, ils auraient peut-être abandonné avant d'aboutir à la solution. D'autre part, ils ne se préoccupent pas, ainsi, de trouver toutes les solutions, dans le cas où il y en aurait plusieurs.
- Ils commettent aussi une erreur de calcul : $1728 + 9 = 1747$ (erreur liée à la retenue dans l'addition effectuée en ligne).
- Ils font deux erreurs analogues : $600 \times 200 = 1200$ et $800 \times 200 = 1600$; nous pouvons penser qu'étant en train de chercher des multiples de 6, ou de 8, ils voulaient désigner 6×200 et 8×200 mais qu'ils ont fait ici des erreurs d'écritures.
- L'erreur $1600 \times (8 \times 10) = 1680$ est probablement une erreur d'écriture : ils ont certainement effectué $1600 + (8 \times 10)$.
- L'erreur $1680 + (8 \times 4) = 1704$ est plus difficile à interpréter ; est-ce vraiment une erreur de calcul, ou bien les élèves ont-ils pensé « 1680 + 24 », sachant que 24 est dans la table 8, et ils

se seraient trompé alors en décomposant 24, (à cause peut-être de 6×4 ?) ; il s'agirait alors d'une erreur d'écriture, qui n'a pas de conséquence sur la résolution du problème.

Les erreurs du groupe B :
- ils ont oublié un multiple de 9 (1719) : bien que leur recherche paraisse systématique, ils ont donc eu de la chance que ce ne soit pas le multiple commun à 6 et 8.
- dans le quotient des deux dernières divisions, ils ont écrit "118" au lieu de "218" et "116" au lieu de "216" ; les produits partiels effectués à gauche montrent qu'il ne peut s'agir que d'erreurs de recopiage d'une opération effectuée d'abord au brouillon.

Nous pouvons faire figurer les erreurs dans un tableau :

	Groupe A	*Groupe B*
Stratégie	*Recherche non systématique des multiples*	
Exécution		*Oubli d'un multiple de 9*
Ecriture	*Mauvaise maîtrise des écritures de nombres avec des signes opératoires et des parenthèses :* 800×200 *pour* 8×200 ; 600×200 *pour* 6×200 $1600 \times (8 \times 10)$ *pour* $1600 + (8 \times 10)$ 8×4 *pour 24*	*Erreur de recopiage : 118 pour 218 et 116 pour 216*
Calcul	$1728+9=1747$ *retenue dans l'addition en ligne.*	

Question 3 :

Nous avons vu plus haut les inconvénients d'une recherche non systématique des multiples de 9 pour le groupe A, qui n'est pas sûr d'arriver au résultat.
La stratégie du groupe B est plus efficace pour trouver rapidement toutes les solutions.
D'autre part, le groupe A rédige moins bien sa solution : il n'explique pas sa stratégie, alors que le groupe B montre en 3 phrases qu'il maîtrise bien la situation.
Il n'y a pas d'erreur, ni de calcul, ni dans les écritures de nombres, dans le travail du groupe B, alors qu'il y en a plusieurs dans celui du groupe A.
Le groupe B utilise (d'une façon pertinente) des connaissances plus avancées que le groupe A : caractère de divisibilité par 9 ; division de a par b pour voir si a est multiple de b.
De plus, si on fait abstraction de l'oubli de 1719, la stratégie du groupe B est exhaustive et systématique.
En conclusion : ces deux groupes ont compris le problème. Bien que le travail du groupe A soit tout à fait satisfaisant pour un CM, nous pouvons conclure que le travail du groupe B est meilleur que celui du groupe A.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

(même sujet que Nancy-Metz-Strasbourg pour cette partie)

Avertissement :Nous commençons par la question 2 car nous utilisons la réponse pour la question 1

Question 2 :
Nous donnons pour chaque jeu 4 procédures très différentes, et, à la fin, des éléments pour en envisager d'autres. Il fallait pour le concours en choisir deux pour chaque jeu, aussi différentes que possible.

Nous supposons que l'élève sait repérer sur chaque carte la collection qui correspond au nombre écrit sur la carte (il sait que les chiffres et les dessins de petite taille ne doivent pas être dénombrés).

Pour le jeu a :
1-l'enfant n'utilise pas les nombres. Il compare directement les deux collections *: avec son doigt ou mentalement ; terme à terme ou paquet à paquet (« ces 3-là et ces 3-là c'est pareil ; ces 4 et ces 4 c'est pareil, et là il y a encore deux ») ;*
2-l'enfant « voit » les nombres en reconnaissant la configuration des deux collections, et il les compare en récitant la suite des nombres à partir de 1 ;
3-l'enfant dénombre les deux collections, en comptant un à un, et il les compare en utilisant ses doigts *(pour former successivement les collections correspondantes)* ou en utilisant la comptine, ou en utilisant la bande numérique ;
4-L'enfant lit les nombres et il conclut car il sait déjà comparer les nombres.

Pour le jeu b :
Nous nous limitons à la résolution du problème suivant : comment décider si une carte peut se poser à côté d'une carte retournée donnée, par exemple un 7 de carreaux.
Nous supposons que l'élève sait voir d'abord si sa carte est bien « de carreaux », et qu'il cherche ensuite si elle vient juste après, ou juste avant.

Remarque : la tâche de l'élève est beaucoup plus complexe et diverses stratégies peuvent être envisagées (par exemple, considérer une carte posée, chercher quelle carte pourrait aller à côté, regarder alors dans son jeu si l'on a cette carte...ou bien examiner successivement toutes les cartes de son jeu en les comparant à chaque carte posée, pour voir s'il y en a une qui convient, ceci en n'oubliant pas qu'elles doivent être de la même famille).

Procédures envisagées :
1- l'enfant compare directement les collections, par correspondance terme à terme, en se demandant si l'une d'elles a un élément de plus que l'autre *(procédure envisageable seulement dans le cas où l'équivalence entre « juste après (ou avant) » et « un objet de plus (ou de moins) » a été dégagée).*
2- l'enfant reconnaît les nombres à partir des configurations, et il récite la suite des nombres à partir de 1, pour voir s'ils sont consécutifs.
3- l'enfant dénombre les collections en comptant. Il trouve 7 et par exemple 9, et il récite la suite des nombres à partir d'un nombre plus petit pour voir s'ils sont consécutifs : « 5,6,7,8,9 »

4- il lit les nombres sur ces cartes puis se représente assez bien la suite des nombres pour voir tout de suite s'ils sont consécutifs.

Complément : Nous voyons pour chaque jeu deux types de procédures : - celles qui n'utilisent pas le nombre : l'enfant compare directement les deux collections - celles qui utilisent le nombre Celles qui utilisent le nombre sont caractérisées par deux éléments : - la façon dont l'enfant trouve le nombre de chaque carte (3 possibilités : reconnaissance de la configuration ; comptage ; lecture du nombre). - la façon dont il compare les deux nombres, pour le jeu de bataille ; ou dont il voit si les deux nombres sont consécutifs, pour le deuxième jeu (3 ou 4 possibilités : énoncé de la suite des nombres depuis 1 ou depuis un autre nombre ; réalisation des collections sur les doigts ; conclusion immédiate). Nous avons écarté des procédures qui n'étaient pas utilisables dans tous les cas : par exemple la conclusion immédiate quand l'écart est très grand (pour 2 et 10 dans le jeu de bataille c'est évident).

Question 1 :

Dans le jeu de bataille, il s'agit d'examiner deux cartes pour dire qui a gagné, quelle est la carte la plus forte.
Nous avons envisagé plusieurs procédures :
- la première consiste à comparer directement deux collections pour trouver laquelle a le plus d'éléments ; le nombre n'intervient pas explicitement ici.
- la deuxième et la troisième consiste à trouver le nombre d'éléments de chaque collection puis à comparer les nombres : le nombre intervient ici sous son aspect cardinal comme nombre d'éléments de collections ; mais dans la comparaison, l'enfant se réfère d'une façon ou d'une autre à la suite des nombres, donc l'aspect ordinal est présent aussi.
- Dans la quatrième, l'enfant lit « 9 » et « 7 » et il sait que « 9 est plus fort que 7 » : il est difficile de savoir s'il donne plutôt le sens cardinal « il y a plus d'objets dans la carte 9 que dans la carte 7 » ou plutôt le sens ordinal « 7 vient avant 9 quand on compte – ou dans la suite écrite des nombres ».

Nous voyons donc que les deux aspects du nombre, cardinal et ordinal, sont présents dans ce jeu et il est difficile de savoir quel aspect est prédominant

Dans le jeu du manuel, il s'agit de trouver un nombre qui vient avant, ou un nombre qui vient après, un nombre donné. Il faut donc chercher le prédécesseur ou le successeur d'un nombre, ce qui renvoie à la connaissance de la suite des nombres ; et d'autre part, le but du jeu est de constituer pour chaque famille, la suite des nombres de 1 à 10 ; c'est donc l'aspect ordinal du nombre qui paraît privilégié ici.

Cependant, il faut noter que l'aspect cardinal n'est pas absent : les collections sont présentes sur les cartes ; nous voyons que, dans les procédures 2 et 3, l'enfant commence par trouver combien il y a de dessins sur sa carte : l'aspect cardinal du nombre intervient donc ici ;
Dans la procédure 1, l'enfant, aidé éventuellement par le professeur, fait le lien entre « le nombre qui vient juste après » et « la carte où il y a un objet de plus » : les aspects cardinal et ordinal du nombre sont ici mis en relation .

Question 3 :
Nous donnons ci-dessous les éléments pour répondre à cette question , en fonction de la réponse faite à la question 2.
Procédure 1 : comparaison directe des collections par correspondance terme à terme : l'enfant réalise mentalement une correspondance entre chaque élément d'une collection et chaque élément de l'autre.

- l'enfant doit donc être capable d'énumérer chaque collection, c'est à dire de pointer chaque élément une fois et une seule ;
- il doit être capable de se représenter la correspondance et de coordonner les deux pointages, jusqu'à ce qu'il ait énuméré une collection ;
- il doit alors être capable de conclure correctement ; s'il reste des dessins sur une carte, c'est elle qui gagne au jeu de bataille ; s'il ne reste rien, ou au moins deux éléments, les deux cartes ne peuvent pas être à côté dans le deuxième jeu .

Pour dénombrer une collection en comptant, l'enfant doit :

- être capable de réciter correctement la suite des nombres ;
- être capable d'énumérer la collection ;
- être capable de réaliser une correspondance un à un entre chaque dessin pointé et les noms successifs des nombres ;
- être capable de conclure que le nombre d'éléments est le dernier nom de nombre énoncé ;

Pour la procédure 3, dans le deuxième jeu par exemple, l'enfant doit dénombrer la première collection, garder ce nombre en mémoire pendant qu'il dénombre la seconde, puis garder les deux nombres en mémoire, choisir un nombre plus petit et compter à partir de ce nombre (surcomptage). Il doit être capable de voir si les deux nombres de ses cartes viennent juste l'un après l'autre ou pas.

Pour la procédure 4, l'enfant doit savoir lire les nombres, (jusqu'à 10 ici) et se représenter suffisamment la suite des nombres pour pouvoir tout de suite les comparer, ou savoir s'ils sont consécutifs.

Question 4 :
Il peut se tromper en récitant la suite des nombres (« 1,3,6,8,... »).
Il peut « promener » sa main sur la collection, tandis qu'il récite, sans faire une correspondance un à un.
Il peut bien faire une correspondance un à un, mais il compte deux fois le même élément ou il en oublie : mauvaise énumération de la collection.
Il peut ne pas être capable de donner le dernier nombre énoncé comme cardinal de la collection dénombrée (« combien...? » « 1,2,3,4,5 »)
Il peut dénombrer des éléments parasites sur les cartes (les chiffres, ou les petits dessins)

Question 5 :

Première difficulté : pour comparer directement deux collections, l'enfant peut avoir du mal à effectuer mentalement, ou avec son doigt, la correspondance terme à terme.
Aide envisagée : fournir des jetons, assez petits pour pouvoir être posés sur les dessins des cartes, et de deux couleurs.
L'enfant pose un jeton rouge sur chaque objet de la première carte, puis un jeton bleu sur chaque objet de la deuxième ; puis il prend les deux collections ainsi formées et il les compare

en réalisant effectivement la correspondance terme à terme. S'il y a plus de jetons rouges, il conclut qu'il y a plus de dessins sur la première carte.
Les jetons permettent de constituer deux collections équipotentes aux collections des deux cartes et avec lesquelles il est possible de réaliser matériellement la correspondance terme à terme.

Deuxième difficulté : après avoir identifié les deux nombres, l'enfant ne sait pas les comparer, ou dire s'ils sont consécutifs.
Aide envisagée : fournir une bande de papier avec la suite écrite des nombres (ici jusqu'à 11 au moins).
-Pour savoir par exemple si 7 et 9 sont consécutifs dans le deuxième jeu, l'enfant peut compter en suivant la bande écrite, et voir ainsi que 7 et 9 ne sont pas à côté.
-Ainsi, pour un enfant qui connaît la suite orale des nombres, mais ne la maîtrise pas suffisamment pour conclure,(par exemple pour 7 et 9. Il est trop absorbé par son comptage jusqu'à 9 pour savoir si 7 et 9 sont consécutifs). Le fait de repérer 7 et 9 sur la suite écrite lui permettra de voir qu'ils ne sont pas consécutifs.

Question 6 :
Une variable didactique est un « paramètre de la situation, sur lequel l'enseignant peut agir, et qui est susceptible de modifier les procédures de résolution, ou la hiérarchie de ces procédures dans la classe ».
D'après l'analyse de la question 2, nous voyons que, pour un élève, le choix de la procédure dépend de plusieurs éléments : les connaissances de cet élève bien sûr, mais aussi de paramètres liés aux cartes proposées par l'enseignant, et notamment de :
- la présence ou non d'écriture de nombre sur ces cartes ;
- la disposition des collections dessinées sur les cartes (surtout s'il n'y a pas d'écriture de nombre) ;
- une disposition « en nuage » rend impossible la reconnaissance globale (sauf pour les très petits nombres), et difficile le comptage ;
- une disposition en ligne favorise au contraire le comptage ;
- une disposition « en paquets » favorise un dénombrement basé sur le calcul (« 3, et 2, 5, et 2, 7 ») ou bien une comparaison « paquet à paquet ».

on pourrait citer aussi :
-la taille des nombres mis en jeu : plus le nombre est grand, plus la procédure 1 est difficile et plus les procédures 3 puis 4 s'imposent.
- la présence ou l'absence de collections dessinées sur les cartes : s'il n'y a que les écritures, il faut commencer par lire les nombres.

<u>Exemple 1</u> :
Si l'écriture des nombres est supprimée, et si la disposition est « en lignes », c'est l'apprentissage du dénombrement par comptage qui est visé.
<u>Exemple 2</u> :
Si l'écriture des nombres est supprimée, et si la disposition est « en nuage », c'est encore l'apprentissage du dénombrement qui est visé, avec la mise au point de stratégie d'énumération.
<u>Exemple 3</u> :
L'enseignant qui souhaite développer un apprentissage du calcul sur les petits nombres, peut proposer des cartes avec des collections « en paquets », et de préférence, sans écriture de nombre. Le comptage un à un , ou la comparaison paquet à paquet, sont encore possibles, mais

dans la plupart des cas, le dénombrement par calcul pourra apparaître, pour les enfants, comme la procédure la plus économique et la plus fiable.
Exemple :

OO **O** **O** **O** **O O**		**O** **OO** **O O** **O**	Pour la première, l'enfant peut dire : 2 et 2 : 4 4 et 2 : 6 6 et 1 : 7 Pour la deuxième : 3 et 3 : 6 et il sait que 6 est plus petit que 7.

Question 7 :
L'objectif principal du deuxième jeu pourrait être de bien connaître la suite orale et écrite des nombres jusqu'à 10, c'est à dire de savoir la réciter en avançant ou en reculant à partir d'un nombre quelconque, de savoir comparer rapidement deux nombres, de trouver le nombre juste avant ou juste après, etc…

Autre situation : « La carte qui manque »:
A partir de cartes sur lesquelles sont écrits les nombres de 1 à n, on cache une carte dans une enveloppe ; en examinant les cartes qui restent, l'élève doit trouver quelle est la carte cachée.
C'est en reconstituant la suite des nombres qu'il trouvera la carte qui manque.

Remarque : Cette situation mise au point à l'IREM de Bordeaux, s'inscrit dans une démarche d'apprentissage par résolution de problèmes : l'élève peut se rendre compte tout seul de sa réussite ou de son échec (il suffit d'ouvrir l'enveloppe contenant la carte cachée) et la connaissance visée intervient comme un outil pour résoudre le problème mais elle n'est pas nécessaire pour comprendre le but à atteindre.

Autre exemple (d'après ERMEL) :Sur un fil sont suspendues avec des épingles à linge des feuilles comportant chacune une collection dessinée, avec l'écriture du nombre.
Tous les matins, un élève, à partir des feuilles en vrac, doit « étendre le linge » c'est à dire suspendre les feuilles dans l'ordre. Il peut aussi en manquer une ou deux, qu'il faut remettre à leur place.

GRENOBLE

(Corrigé effectué à partir d'indications fournies par notre correspondant de l'académie).

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

Question 1a : L'axe [AO] du cône est perpendiculaire à chacun des rayons du cercle de base. Le théorème de Pythagore peut être appliqué au triangle rectangle AOB, rectangle en O :

$$h^2 + r^2 = AB^2$$

donc, l'unité étant le centimètre, : (mesure de h)$^2 = 12^2 - (2,5)^2$; soit (mesure de h)$^2 = 137,75$
La calculatrice donne mesure de h $\approx 11,73$. L'encadrement demandé pour mesure de h, en cm, et avec des nombres décimaux ayant au plus un chiffre après la virgule, est donc :

11,7 < mesure de h < 11,8

Question 1b : Soient S l'aire de la base circulaire et V le volume du cône. $V = \frac{Sh}{3}$ et $S = \pi r^2$.

En utilisant l'encadrement précédent et en encadrant π par : $3.14 < \pi < 3.15$, on obtient :

$$\frac{3,14 \times (2,5)^2 \times 11,7}{3} \text{ cm}^3 < V < \frac{3,15 \times (2,5)^2 \times 11,8}{3} \text{ cm}^3$$

Le meilleur encadrement possible du volume du cône avec des mesures entières est donc :

76 < mesure de V < 78

Question 1.c : Soit r' le rayon de la surface horizontale du liquide lorsque le cône est rempli jusqu'au point B' et h' la hauteur du cône « de liquide ». Il s'agit de calculer le volume V' de ce cône « de liquide » : Il a pour sommet A et pour cercle de base le cercle horizontal centré sur l'axe [AO] et passant par B'. On peut appliquer le théorème de Thalès dans le triangle AOB :

$\frac{AB'}{AB} = \frac{h'}{h} = \frac{r'}{r} = \frac{3}{4}$ On en déduit que $h' = \frac{3}{4}h$ et $r' = \frac{3}{4}r$ et donc que $V' = (\frac{3}{4})^3\ V$

En choisissant 76 cm^3 comme valeur approchée de V, on obtient :

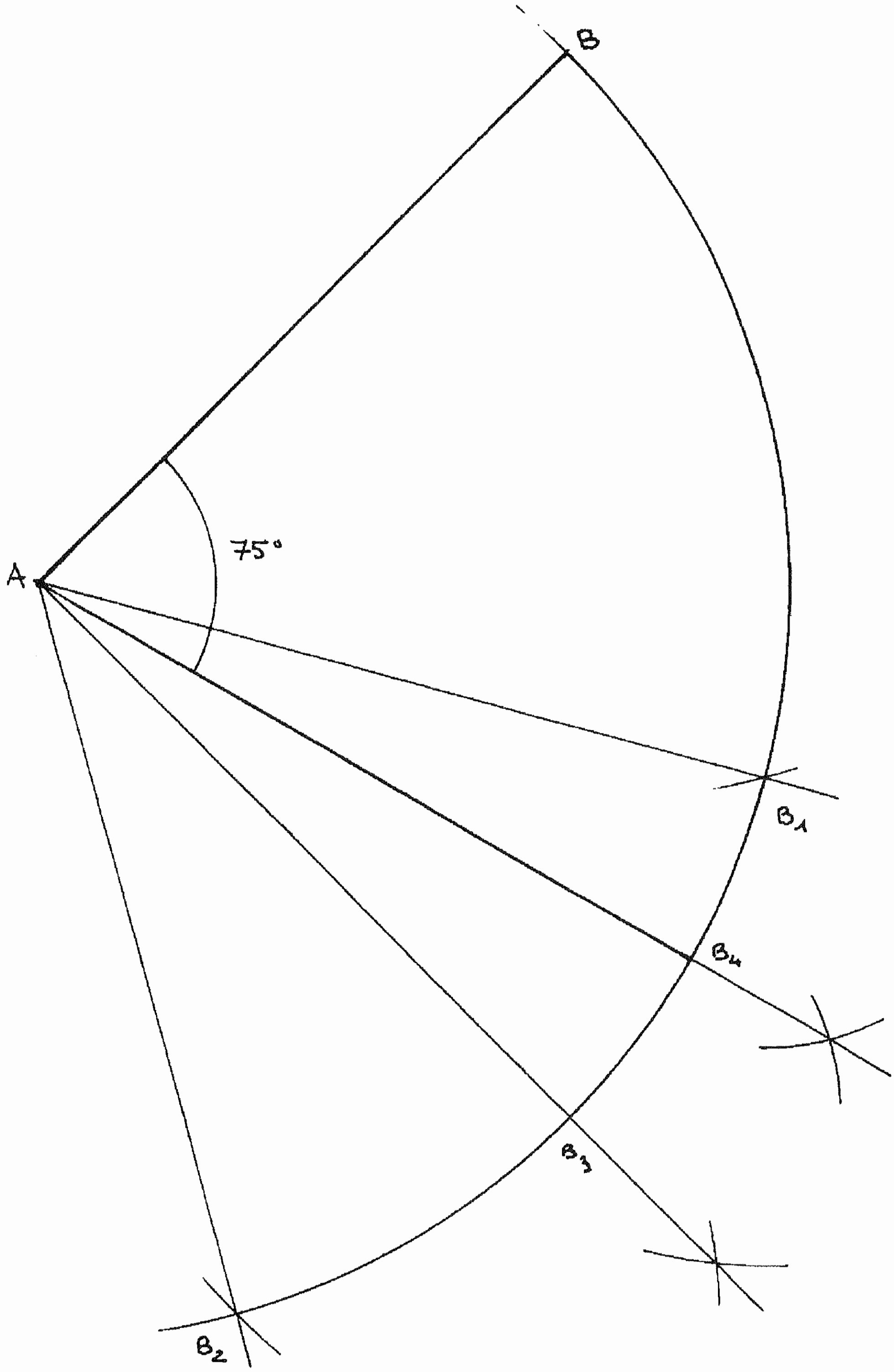
V'≈ 32 cm^3

Comme 1 litre vaut 1000 cm^3 ou 100 cL, le volume du cône en centilitres a pour valeur approchée

V' ≈ 3,2 cL.

Question 2a : le secteur de disque a pour rayon AB et son arc a pour longueur la circonférence du cercle de base du cône, c'est à dire $2\pi r$. Son angle α est proportionnel à la longueur de l 'arc.

Mesure de l'angle en degrés	α	360
Longueur de l'arc	$2\ \pi\ r$	$2\ \pi$ AB



L'angle α a donc pour mesure en degrés : $\alpha = 360 \times \frac{r}{AB}$.

Puisque r = 2,5 cm et AB = 12 cm, il vient : $\alpha = \mathbf{75°}$

Question 2b : (voir figure). On construit un arc de cercle de centre A et de rayon AB, puis, par report du rayon à l'aide du compas pour obtenir les points B_1 et B_2, et deux angles de 60°. Deux constructions de bissectrices donnent B_3 et B_4. L'angle $\widehat{BAB_4}$ est de 75°.

Question 2c : l'aire S de ce secteur de disque est proportionnelle à la mesure de l'angle :

Mesure de l'angle : 360°	$\pi \times AB^2$
Mesure de l'angle : 75°	S

On en déduit ainsi que $S = \frac{75}{360} \times \pi \times 12^2$ et par suite le calcul nous donne, par défaut, une valeur approchée de 94,2 cm².

$$\mathbf{S \approx 94{,}2\ cm^2.}$$

Question 3a : tous les cônes ont le même volume, de mesure égale à 10 cL, ou, ce qui est équivalent, à 100 cm³.

Le volume V et l'aire S de la base circulaire du cône sont liés par la relation $V = \frac{1}{3}S \times h$ ce qui permet de déterminer S en fonction de h : $S = \frac{3 \times V}{h}$.

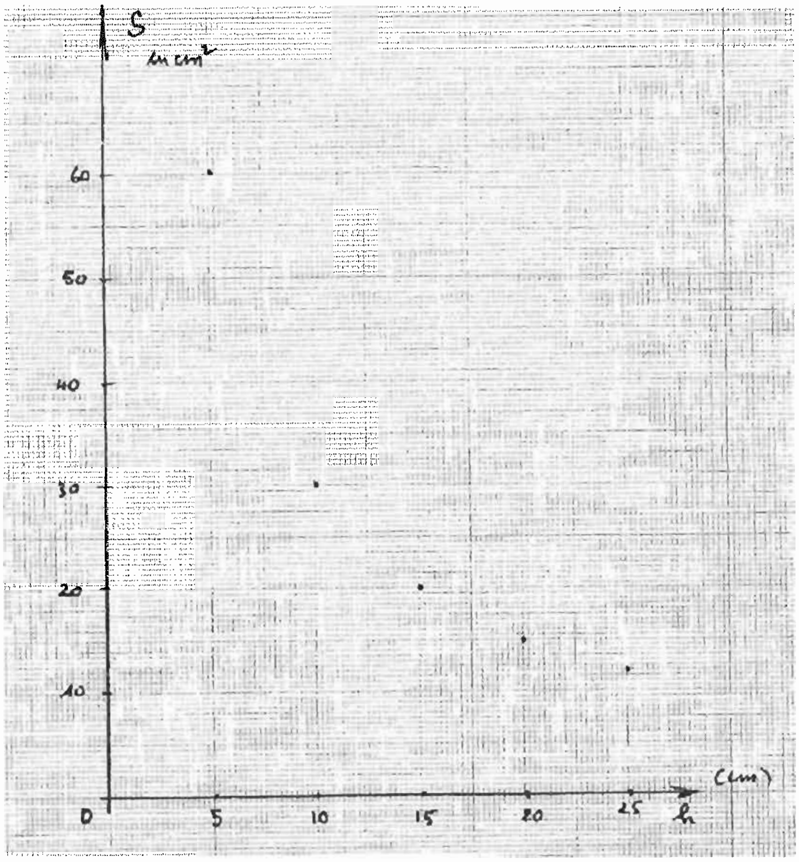
L'unité étant le cm², lorsque h est mesurée en cm et V en cm³ , la mesure de l'aire S des cônes est donc :

mesure de h (en cm)	5	10	15	20	25
mesure de S (en cm²)	60	30	20	15	12

Question 3b : la suite des aires n'est pas proportionnelle à la suite des hauteurs : il suffit de remarquer que la fonction qui associe S à h n'est pas une fonction linéaire. Ce qui peut être illustré de multiples façons : Par exemple $f(5) + f(10) \neq f(15)$, ou bien $f(10) \neq 2 \times f(5)$ etc...

Question 3c : voir graphique joint.

On constate sur ce graphique que les points obtenus ne sont pas situés sur une même droite passant par l'origine, ce qui confirme la réponse précédente.



DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1.
Procédures de résolution :
Procédure 1 : Dessin, représentant les étagères avec deux cartons par étagère et dénombrement.
Procédures de calcul prenant en compte les étagères sans référence au nombre total de livres :

Procédure 2 : Procédure additive, « Il y a 2 cartons par étagère et il y a 7 étagères, donc il faut : $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 14$ cartons. »

Procédure 3 : Procédure multiplicative, « Il y a 2 cartons par étagère et il y a 7 étagères, donc il faut $2 \times 7 = 14$ cartons. »
Procédures reposant sur le calcul préalable du nombre total de livres : Il y a 154 livres , soit car $22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22 = 154$, soit parce que $22 \times 7 = 154$ (reconnaissance d'une situation multiplicative).

Procédure 4 : Addition réitérée $11 + 11 + 11 + ... + 11$ jusqu'à atteindre154 et dénombrement des termes de cette somme.

Procédure 5 : Addition de multiples de 11 permettant d'atteindre 154 plus rapidement :
« $11 + 11 = 22$, $22 + 22 = 44$, $11 \times 10 = 110$, $44 + 110 = 154$
donc il faut $4 + 10 = 14$ cartons »

Procédure 6 : Soustractions réitérées de 11 « 154 - 11 = 143, 143 - 11 = 132 , 132 - 11 = ... jusqu'à obtenir 0 » avec ou sans compteur pour anticiper le nombre d'opérations, puisque chaque soustraction correspond à remplir un carton.

Procédure 7 : Tâtonnement en utilisant la multiplication à trou (méthode multiplicative, dite de fausse position) « $11 \times 10 = 110$, donc il faut plus de 10 cartons. $11 \times 20 = 210$, donc il en faut moins de 20. $11 \times 15 = 165$ c'est encore un peu trop grand, mais on se rapproche : dernier essai, $11 \times 14 = 154$. Il faut donc 14 cartons »
Toutes ces procédures peuvent être utilisées dans une classe de CE2 à ce moment de l'année.

Question 2 :
Groupe A : l'élève A1 utilise probablement la procédure 3. Il ne fait référence qu'aux cartons et aux étagères. L'élève A2 tente de mettre en œuvre la procédure 6 : Il calcule d'abord le nombre total de livres (par multiplication : $22 \times 7 = 154$), puis procède par soustractions successives de 11. Il n'aboutit pas au résultat final (procédure inachevée et erreurs de calcul).

Groupe B : l'élève B1 calcule le nombre de livres par addition réitérée de 22, et obtient 154.
B2 confirme la validité de ce nombre tout en l'exprimant par le produit $22 \times 7 = 154$.
B1 suggère d'utiliser la procédure 7 (multiplication à trou), mais B2 impose une procédure du type 5, avec présence d'un compteur (il écrit les nombres 10, 11, 12, 13, 14 à côté des additions de nombres égaux à 11). B2 traduit finalement cette somme de 14 termes par une écriture multiplicative : $14 \times 11 = 154$.

Groupe C : l'élève C1 détermine d'abord le nombre total de livres par une multiplication. Il écrit : $22 \times 7 = 154$. L'élève C2 a compris et rapidement résolu le problème en adoptant la procédure 3, qui n'utilise pas le nombre total de livres. Cela va apparemment trop vite pour C1 qui souhaiterait que la réponse 14, qu'il ne remet d'ailleurs pas en cause, soit le résultat d'une opération écrite et pas seulement mentale. C2 propose alors : « C'est 2 fois 7. C'est dans la tête. », ce qui est une évidence pour lui mais ne permet pas à C1 de comprendre... Cette proposition reste donc orale et n'est pas traduite par écrit.

Question 3 :
Groupe A : l'élève A1 a trouvé la réponse correcte à l'aide de la procédure 3, probablement résolue mentalement. Cependant il n'arrive pas à l'imposer. Lui même ne l'écrit pas. L'élève A2 ne le suit pas et met en œuvre une autre procédure qu'il ne réussit pas à mener à son terme correctement. L'interaction (influence réciproque des deux membres de l'équipe) s'avère donc inexistante. Elle est d'autant plus difficile que les procédures qu'ils envisagent sont différentes.

Groupe B : l'élève B2 propose une amélioration à la procédure d'addition réitérée de son compagnon. C'est ensuite à B1 de jouer ce rôle : il suggère de remplacer l'addition réitérée de 11 par un produit. Après échange d'idées pour « proposer une opération » le choix retenu est le bon : L'interaction de ces deux élèves est donc utile et favorable à la résolution du problème.

Groupe C : l'élève C1 renonce à poursuivre sa propre procédure en écoutant la résolution de C2. Il semble donc convaincu de la validité de cette dernière, ou, plutôt, ne la conteste pas. Il réclame toutefois de la traduire par une « opération ». Cependant l'explication fournie par son camarade ne lui semble pas suffisante pour respecter le contrat qui consiste à ce que toute réponse soit donnée par une opération, puisqu'elle n'utilise pas le nombre 154 qu'il avait obtenu. C2 renonce à trouver un lien entre les deux nombres qu'ils ont respectivement trouvés. L'interaction dans leur groupe n'est donc guère efficace.

Question 4 : les groupes B et C éprouvent une même difficulté à transcrire une opération qui fasse apparaître le nombre 14 comme solution du problème. L'élève B2 conclut finalement par la multiplication $14 \times 11 = 154$, après discussion et hésitation... L'élève C2, qui a correctement résolu le problème mentalement, semble déstabilisé par la résistance de C1 (voir question 3).

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

Question 1a : Sur papier quadrillé les procédures attendues sont les suivantes :

•Le repérage des noeuds et le comptage des carreaux du quadrillage, le long des côtés des figures. Comme instrument, une règle suffit, même non graduée.

La figure B est un carré, mais ses côtés étant confondus avec des diagonales des carreaux du quadrillage, la tâche est alors plus complexe que pour la figure C qui est un rectangle dont les côtés sont portés par la trame elle même du quadrillage (côtés « horizontaux » et « verticaux »). Pour tracer le premier côté de la figure D, il faut repérer qu'il s'obtient en avançant de 3 carreaux vers le haut et de 1 carreau vers la droite... Le repérage et le comptage sont donc encore plus délicats. La reconnaissance de figures planes (carré, rectangle ou losange) n'est pas indispensable, puisque l'utilisation du quadrillage peut suffire.

•Le repérage et le comptage des carreaux du quadrillage le long des diagonales des quadrilatères, après les avoir éventuellement tracées. Ici de même, comme instrument, une règle non graduée suffit. Cette procédure est plus appropriée pour B que pour C et D, car les diagonales de B sont, l'une verticale, l'autre horizontale, et coïncident avec la trame du quadrillage. Pour C et D, elles ne sont visibles que si elles sont effectivement tracées, ce qui relève d'une initiative personnelle à la charge de l'élève.

Question 1b : sur papier uni, on peut difficilement envisager le recours aux procédures précédentes, qui suivraient la restitution d'un quadrillage identique à celui du manuel, étant donné la complexité de cette tâche préalable aux activités de construction des figures elles mêmes.

Pour reproduire les figures B,C ou D, les procédures que des élèves pourraient mettre en œuvre dépendent naturellement de ce qu'ils perçoivent et de ce qu'ils savent des propriétés géométriques de ces mêmes figures :

• figure B : On peut s'attendre à voir des dessins effectués à main levée, avec ou sans règle. On peut aussi prévoir des constructions plus rigoureuses si l'élève reconnaît un carré. Si l'égalité des mesures des côtés est assez évidente, il n'est pas certain que les élèves « voient » la présence d'angles droits entre côtés consécutifs, du fait de l'orientation de la figure. Les instruments probablement utilisés se réduisent à une seule règle graduée. Si les angles droits sont reconnus , les élèves devraient utiliser aussi une équerre. Les notions mathématiques en jeu sont l'égalité des mesures des 4 côtés ainsi que celle des 4 angles droits. Une autre procédure consiste à utiliser les diagonales, qui sont perpendiculaires, de même longueur et ont le même milieu. Un compas, en plus de la règle graduée et de l'équerre, permet une construction précise, rapide, performante.

- figure C : Ce rectangle peut aussi être réalisé avec un dessin effectué à main levée, avec ou sans règle, dans la mesure où ses côtés ont une orientation privilégiée. Il peut aussi être construit avec une règle graduée et une équerre. Les propriétés requises sont l'égalité des mesures de côtés opposés, le parallélisme ou, plus probablement, l'orthogonalité de côtés. La construction basée sur les propriétés des diagonales (et souvent associée à l'usage d'un compas) a peu de chances d'être rencontrée.
- figure D : On peut ici encore s'attendre à voir des dessins effectués à main levée, avec ou sans règle graduée. Pour être plus précise, une construction n'utilisant qu'une règle graduée nécessite de contrôler l'angle de deux côtés consécutifs. Cela peut se faire à l'aide d'un gabarit.

Question 1c : dans l'ordre croissant de difficulté, on range C, B et D.
Pour C, les directions « horizontale » et « verticale » des côtés selon la trame du quadrillage fournissent un repère naturel aux élèves, qu'ils peuvent rapprocher du repère fourni par les bords perpendiculaires de la feuille où ils doivent reproduire la figure.
Pour B, il s'agit d'un carré, et ses diagonales ont elles aussi une orientation privilégiée.
Pour D, enfin, ni les côtés, ni les diagonales n'ont d'orientation privilégiée. De plus cette figure est moins familière aux élèves que les deux précédentes.

Question 1d : l'objectif annoncé et écrit en caractères de petite taille en tête du chapitre est « utiliser les propriétés des quadrilatères pour les construire ».
La reproduction sur papier quadrillé peut certes donner l'occasion aux élèves d'observer plus attentivement les figures à reproduire, d'en retrouver des caractéristiques. Le quadrillage peut montrer des égalités de longueur, aider à retrouver les diagonales, des symétries...
Cependant il permet aussi de reproduire des figures sans même les identifier et sans utiliser leurs propriétés géométriques, par simple imitation en n'utilisant que le repérage et le comptage de carreaux.
La reproduction sur papier uni déstabilise les procédures précédentes ne reposant que sur l'utilisation des carreaux ou des noeuds du quadrillage. Elle est censée inciter à identifier les figures (carré, rectangle et losange) par certaines de leurs propriétés, et favoriser l'utilisation de certaines de ces propriétés pour construire les figures.

Question 1e : les figures à reproduire sont en général orientées d'une façon particulière sur leur support , et les élèves sont conduits à respecter cette orientation. Il en est de même pour la situation des figures sur leur support (au centre, près d'un bord, dans un coin...). L'exercice 1 de la leçon 16 présente simultanément cinq figures dans un espace quadrillé réduit : il en résulte des alignements, des positions relatives particulières qui apparaissent comme des parasites à l'identification des quadrilatères et à l'utilisation de leurs propriétés pour les reproduire.

Question 2a : choix relatifs à la figure : la rosace à huit branches peut être confondue avec la rosace à six branches, plus fréquemment représentée dans les manuels scolaires, et dont des enfants pourraient connaître la construction.
Choix relatif à la présentation de l'activité et l'organisation du travail : Les élèves observent une figure affichée au tableau. Ils n'ont donc pas la possibilité de la voir de près, de mesurer ou de comparer des longueurs, de faire des essais avec un compas afin de chercher des centres de

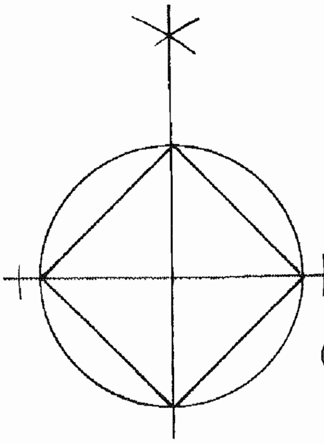
cercles, de déterminer des rayons, de constater que de nombreux écarts de compas sont identiques. Toutes leurs éventuelles propositions ne peuvent reposer que sur l'utilisation d'informations d'origine purement visuelle, sans aucun autre moyen de contrôle.

Ces choix pourraient avoir pour but d'amener les élèves à reconnaître l'impossibilité de reproduire une telle rosace sans une analyse préalable et réellement approfondie de la figure. Ces choix nous paraissent peu justifiables : L'écart probable entre des impressions visuelles, sans description ni mesure possible, conduiront à un dessin inexact donc insatisfaisant pour les élèves. On prévoit d'ailleurs dans le livre du maître (§ III de l'annexe E) *un blocage de la part de certains élèves*... ! On y oublie cependant d'indiquer ce qu'il convient alors de dire où faire pour lever ce blocage...

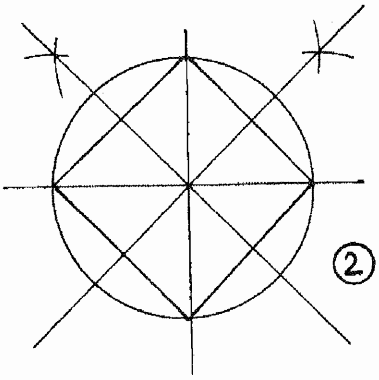
Question 2b : pour construire la figure B, on trace une droite quelconque ; une perpendiculaire à cette droite (au compas) ; on trace un cercle centré au point d'intersection des deux droites et le carré dont les sommets sont à l'intersection des deux droites et du cercle.
On trace ensuite les deux bissectrices des deux droites perpendiculaires précédentes et le carré dont les sommets sont à l'intersection de ces deux bissectrices et du cercle.
Il reste à tracer les huit demi-cercles centrés au milieu des côtés de deux carrés et passant par le centre du premier cercle. (figures 1 à 4 en fin de document)

Pour construire la figure C, on trace une droite quelconque, puis une droite perpendiculaire à cette droite , ainsi que les deux bissectrices des deux droites perpendiculaires. On trace ensuite un cercle centré au point d'intersection des deux droites. On marque les huit points d'intersection de ce cercle avec les quatre droites précédentes.
Tracer huit demi-cercles, centrés sur les huit points précédents et passant par le centre du cercle, tels que les extrémités de ces demi-cercles soient sur une des quatre droites initiales.
(figures 5 à 7 en fin de document)

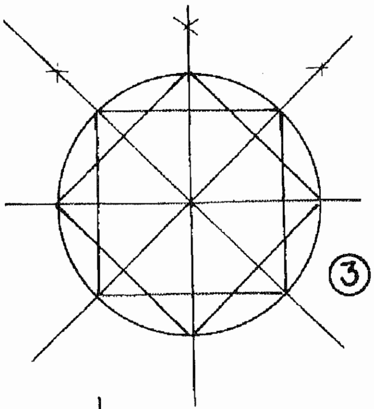
Question 2c : pour réaliser les tracés correspondants aux figures B et C, le papier quadrillé s'avérerait propre à simplifier la construction des droites perpendiculaires et de leurs bissectrices.



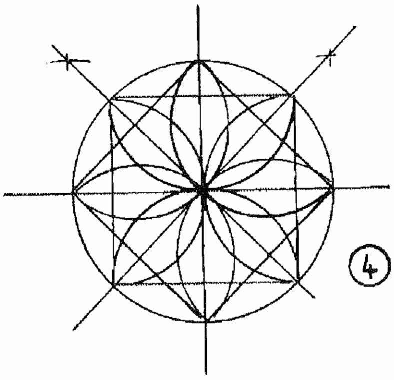
1



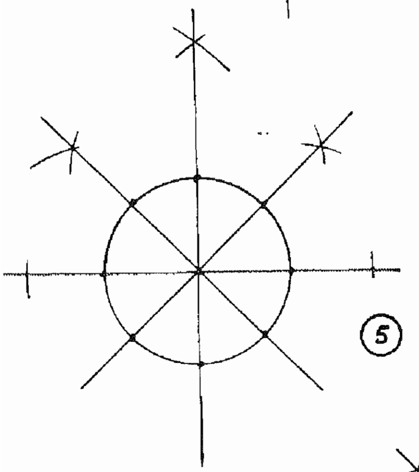
2



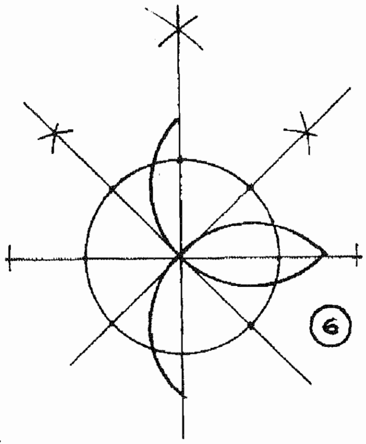
3



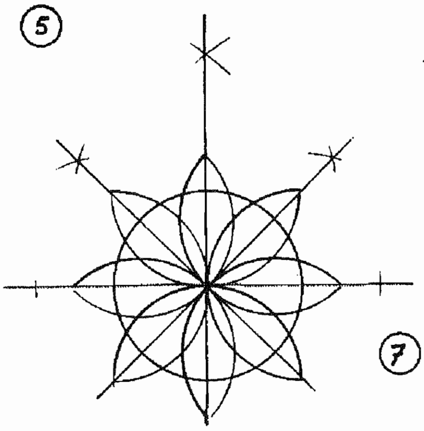
4



5



6



7

LILLE

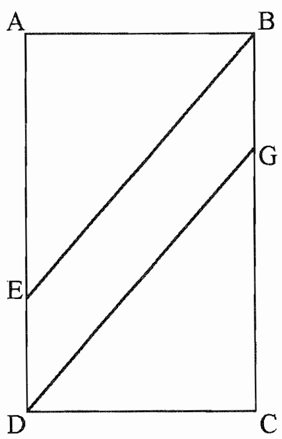
(Corrigé effectué à partir d'indications fournies par notre correspondant de l'académie).

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS) MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

Question 1 : DEHG ; EBGF ; DEFG ; BGHE.

Question 2a : La description permet d'affirmer que EBGD est un parallélogramme.



En effet, ABCD étant un rectangle, les droites (AD) et (BC) sont parallèles ;

E étant sur (AD) et G sur (BC), on en déduit que les segments [ED] et [BG] sont parallèles.

D'autre part, par hypothèse, les segments [EB] et [DG] sont parallèles ;

Le quadrilatère EBGD a ses côtés parallèles deux à deux : c'est donc un parallèlogramme.

b) On pourrait ajouter à la description : " les segments [EB] et [BG] ont même longueur".

En effet, un parallèlogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un losange.

Autre réponse possible :

On pourrait ajouter à la description : "[EG] *est perpendiculaire à* [BD]" *; en effet, un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.*

Commentaires :

(1) La figure ci-dessus est bien conforme à la description :

- les sommets A,B,C et D du rectangle sont bien sur un cercle de centre l'intersection des diagonales

-il est facile de construire les points F et H tels que EFGH soit un carré et ce carré est bien inscrit dans un cercle.

Pourtant il est clair que EBGD n'est pas un losange. Ce qui montre que la description est bien incomplète .

(2) Pour b), d'autres réponses étaient correctes, mais plus difficiles à justifier ; par exemple :

"les points B,F,H et D sont alignés " ; en effet, dans le carré EFGH les diagonales sont perpendiculaires, donc (FH) est perpendiculaire à (EG) ; si les 4 points ci-dessus sont alignés, on en déduit que (BD) est perpendiculaire à (EG) ; d'où la conclusion, comme dans la deuxième réponse proposée.

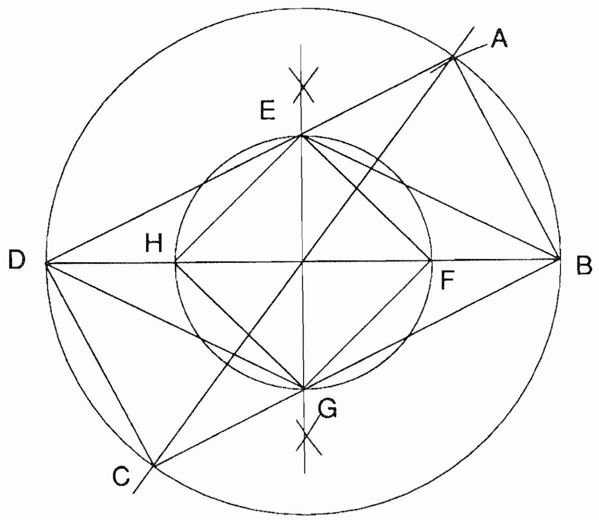
Par contre la réponse "les deux cercles sont concentriques" est fausse : pour s'en convaincre, il suffit de constater que dans la figure de la question 2), complétée par les points F et H, les cercles sont bien concentriques, alors que EBGD n'est pas un losange, ou encore de voir que la démonstration de la question 4) n'utilise pas l'hypothèse "EBGD est un losange"

Question 3 : Les points D,H,F,B sont alignés : en effet, le quadrilatère EBGD étant un losange, les côtés adjacents ont même longueur : BE = BG, donc le point B est sur la médiatrice de [EG] ; de même, DE = DG donc D est aussi sur la médiatrice de [EG] ;
d'autre part, le quadrilatère EFGH étant un carré, FE = FG et HE = HG, donc les points F et H sont eux aussi sur la médiatrice de [EG].
Les points D, H, F et B sont tous sur la médiatrice de [EG], ils sont donc alignés.

Autre justification possible :
Dans le losange EBGD *, d'une part, et dans le carré* EFGH *d'autre part, les diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires ; la droite* (BD) *est donc perpendiculaire au segment* [EG] *en son milieu ; et de même la droite* (FH) *; les points* B, F ,H *et* D *sont donc tous les 4 sur la droite perpendiculaire à* [EG] *en son milieu, ils sont donc alignés.*

Question 4 : Le centre du cercle circonscrit au rectangle ABCD est l'intersection de ses diagonales, donc le milieu de [BD]. Le centre du cercle circonscrit au carré EFGH est l'intersection de ses diagonales, donc le milieu de [EG]. Or [BD] et [EG] sont les diagonales du parallélogramme EBGD ; ces deux segments ont donc le même milieu. Donc les deux cercles ont le même centre.

Question 5 : programme de construction avec règle graduée et compas :



(Echelle non respectée)

- mesures prises : AB = 3,6 cm et BD = 8 cm
- Construire le segment [BD] de longueur 8 cm
- Construire la médiatrice (m) de [BD] (tracer deux cercles sécants, de même rayon et de centres respectifs B et D ; la droite joignant les deux points d'intersection est la médiatrice de [BD]) ; elle coupe [BD] en son milieu que j'appelle O.
- Construire le cercle (C) de centre O passant par B et D.
- Construire le cercle (C') de centre B et de rayon 3,6 cm.
- Appeler A le point d'intersection de (C) et de (C') tel que les points A, B et D soient dans le sens des aiguilles d'une montre. La droite (AO) recoupe le cercle (C) au point C.

- Tracer les segments [BC], [AD] et [CD]. La droite (m) coupe les segments [AD] et [BC] respectivement en E et G
- Construire le cercle de centre O et passant par E et G ; il coupe [OB] en F et [OD] en H.
- Tracer les segments [EF] ;[FG] ;[GH] et [HE]

De nombreuses réponses sont possibles ici ; en voici deux autres :

Programme de construction avec règle graduée , équerre et compas : *mesures prises : AB = 3,6 cm et AD = 7,2 cm*

- *Construire le segment [AB], de longueur : 3,6 cm*
- *Construire le segment [AD], de longueur 7,2 cm ; perpendiculaire à [AB], et de telle sorte que les points A, B et D soient dans le sens des aiguilles d'une montre*
- *Prendre le milieu de [BD], O et construire le point C symétrique du point A par rapport à O*
- *Tracer les segments [BC] et [CD].*
- *Construire la perpendiculaire à (BD) en O ; elle coupe (AD) en E, et (BC) en G.*
- *Le cercle de centre O et de rayon OE coupe [OB] en F et [OD] en H.*
- *Construire les segments [EF] ;[FG] ;[GH] et [HE] et le cercle de centre O passant par A,B,C et D.*

programme de construction avec règle graduée et compas *mesures prises : BD = 8 cm et EG = 4 cm*

- *tracer un segment [BD] de longueur 8 cm.*
- *soit O le milieu de [BD]*
- *tracer le cercle (C) de centre O et de rayon 2 cm (la moitié de EG) ; ce cercle coup e (BD) en F et H (les points D, H, F et B sont dans cet ordre)*
- *tracer la médiatrice de [BD] (tracer deux cercles sécants, de même rayon et de centres respectifs B et D ; la droite joignant les deux points d'intersection est la médiatrice de [BD]) ; cette médiatrice coupe le cercle (C) en E et G (E, F, G et H dans le sens des aiguilles d'une montre).*
- *tracer le cercle (C') de centre O passant par B et D. Ce cercle coupe la droite (DE) en A et la droite (BG) en C.*
- *Tracer les segments [EF] ;[FG] ;[GH] et [HE] puis les segments [AB]et[CD].*

Question 6 : Si le triangle AEB est isocèle, on a AE = AB (1)
- d'autre part ED = EB (côtés consécutifs du losange EBGD)

d'où la longueur du rectangle : AD = AE+ED = AB+EB
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AEB, rectangle en A :
$EB^2 = AE^2 + AB^2$
D'après (1) : $EB^2 = 2AB^2$ d'où $EB = AB\sqrt{2}$

d'où : $AD = AB+AB\sqrt{2} = AB\,(1+\sqrt{2}\,)$
Le rapport entre la longueur et la largeur du rectangle est donc $(1+\sqrt{2}\,)$

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Avertissement
Pour chaque production, nous répondons successivement aux trois questions.

Production de Laura :

1°) solution correcte commencée par Laura :
Quand M.Jean est seul, le nombre de lots vendus est 90 divisé par 3, soit 30 lots de 3 salades.
Il les vend 5F le lot, il reçoit donc 30×5 F, soit 150 F.
Quand M.Pierre est seul, le nombre de lot vendu est 90 divisé par 2, soit 45 lots de 2 salades.
Il les vend 5F le lot, il reçoit donc 45×5 F, soit 225 F.
Quand M.Pierre et M.Jean sont ensemble, le nombre de salades vendus est 90+90, soit 180 salades ; ils les vendent par lot de 5. Le nombre de lots est donc 180 divisé par 5, soit 36 lots ; ils les vendent 10F le lot ; ils reçoivent donc 36×10 soit 360 F.
Ils reçoivent donc chacun : 360 F divisé par 2, soit 180 F.
M.Jean reçoit 180F au lieu de 150F : il y gagne ; M.Pierre reçoit 180F au lieu de 225F : il y perd.

2°) qualités et défauts de la résolution :
a) Laura a bien vu les 3 étapes de la résolution (ce que gagne M.Jean seul, puis M.Pierre seul, puis quand ils sont ensemble) ; dans les deux premières étapes, elle a bien su utilisé la notion de "prix par lots" en cherchant d'abord le nombre de lots et dans la troisième étape, elle a bien l'idée de diviser par 2 le gain total. Elle compare correctement les gains pour conclure
b) Mais Laura omet de déterminer le nombre de lots de 5 salades dans le cas de la vente commune et fait comme s'il y avait 180 lots (ou si les salades étaient vendues 10F l'une ?).

3°) qualités et défauts de la rédaction :
La rédaction est assez claire et la disposition sur la feuille rend bien compte des trois étapes du raisonnement ; la réponse est justifiée. Les calculs des nombres de lots ne sont pas explicités et d'ailleurs il y a une erreur dans les unités (Francs au lieu de lots) ; il manque les unités pour plusieurs résultats.

Production de Guillaume :

1°) solution correcte commencée par Guillaume : quand M.Jean est seul, le nombre de lots vendus est 90 : 3 = 30 soit 30 lots de 3 salades. Il les vend 5F le lot, il reçoit donc 30×5, soit 150F.
Quand M.Pierre est seul, le nombre de lot vendu est 90 : 2, soit 45 lots de 2 salades. Il les vend 5F le lot, il reçoit donc 45×5 F = 225 F
Puisque les deux commerçants apportent chacun 90 salades, et qu'ils se partagent ensuite la recette, on peut considérer que c'est comme s'ils vendaient chacun 90 salades, par lots de 5 vendus 10F le lot.
Le nombre de lots vendus par chacun est donc 90 : 5 = 18 et chacun reçoit 18×10 F = 180F.
M.Jean reçoit 180F au lieu de 150F : il y gagne ; M.Pierre reçoit 180F au lieu de 225F : il y perd.

2°) qualités et défauts de la solution : aucun défaut si l'on voit dans la production de Guillaume la solution ci-dessus ; mais cette solution suppose un raisonnement difficile pour un élève de CM2, et l'on peut aussi faire l'hypothèse qu'il a commis deux erreurs qui se compensent : oubli de calculer le nombre total de salades, puis oubli de diviser par deux la somme.

3°) qualités et défauts de la rédaction :
La rédaction met bien en évidence les trois étapes du raisonnement, mais le sens des calculs n'est pas expliqué et les unités ne sont pas indiquées, les phrases réponses sont à reformuler.

Production de Cécile

1° Solution correcte (à peine ébauchée) :
Quand M.Jean est seul, le prix de vente unitaire de ses salades est 5 : 3 soit 1,66F l'une. Quand M.Pierre est seul, le prix de vente unitaire de ses salades est 5 : 2 soit 2,5F l'une. Quand ils sont ensemble, le prix de vente unitaire est : 10 : 5 soit 2F l'une. M.Jean vend donc plus cher que quand il est seul : il y gagne. M.Pierre vend moins cher que quand il est seul : il y perd. Donc ce ne sera pas la même chose.

2° qualités et défauts de la solution de Cécile :
L'idée de raisonner sur les prix unitaires est tout à fait correcte. En effet, il suffit de comparer les prix unitaires, dans tous les cas où la recette est partagée proportionnellement aux nombres de salades apportées par chacun (on peut supposer que c'est le sens du mot "équitablement" ici : ils ont amené le même nombre de salades, ils vont partager en deux la recette). Mais la solution juste n'est qu'ébauchée dans le travail de Cécile : elle a seulement calculé le prix de vente d'une salade, dans le cas des ventes séparées. On peut même se demander si son raisonnement portait vraiment sur les prix unitaires, ou si elle a compris qu'il n'y avait qu'un seul lot dans chaque cas : la situation n'est sans doute pas très claire pour elle.

3° qualités et défauts de la rédaction :
Les dessins permettent de bien visualiser certaines données(les prix de vente par lots). Il y a une phrase réponse avec une justification. Mais l'expression "ensemble des salades de Jean et Pierre" peut être interprétée comme une erreur de rédaction (à moins qu'il ne s'agisse d'une erreur de raisonnement, cf ci-desssus). Toutes les formulations sont maladroites : "5F à Jean coutant 1,66" etc.

Production de Juliette :

1° une solution correcte que l'on peut imaginer à partir de cette production :
Quand M.Jean est seul, le nombre de lots vendus est 90 : 3 = 30 lots. Quand M.Pierre est seul, le nombre de lots vendus est 90 : 2 = 45lots. Dans ce cas, ils vendent en tout 75 lots (30+45) à 5F le lot ; donc ils reçoivent en tout 75 × 5, soit 375F.
S'ils se mettent ensemble, ils vendent 90+90, soit 180 salades ;
180 : 5 = 36 : ce qui fait 36 lots de 5 salades ; à 10F le lot, soit 360F.
Donc ce n'est pas pareil : ils reçoivent moins ensemble que ce qu'ils recevaient en tout quand ils étaient séparés.

2° qualités et défauts de la solution :
Elle a fait des calculs qui semblent indiquer qu'elle cherchait le nombre de lots dans chaque cas. Sa solution n'est qu'ébauchée, et il est peu probable qu'elle aurait abouti à une solution correcte(celle que nous avons imaginée ci-dessus, ou bien une autre). On ne sait pas, en particulier, si elle donnait un sens correct au calcul de 30+45, ni ce qu'elle comptait faire de ce résultat. Peut-être sa conclusion est-elle basée sur la comparaison de 75 et 36 : "ce ne sera pas la même chose parce qu'il y a moins de lots quand ils sont ensemble".

3°) qualités et défauts de la rédaction :
Juliette fait une représentation assez claire des données (du moins en partie), mais il n'y a pas vraiment de rédaction : aucune phrase pour expliquer le sens des calculs effectués et aucune justification pour la phrase réponse.

SECOND VOLET (8 POINTS)

DIDACTIQUE

Question 1 :

Chloé :
1°ligne : elle utilise implicitement la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition : $36\times(40+5) = (36\times 40) + (36\times 5)$ (après avoir remplacé 45 par 40+5)
2° ligne : elle utilise "la règle des zéros" (pour multiplier par 40 elle met un zéro à la droite du produit par 4) ; cette règle est basée sur l'associativité de la multiplication :
$36\times 40 = 36\times(4\times 10) = (36\times 4)\times 10$ et le principe de la numération décimale (pour multiplier par dix, on ajoute un zéro.).
3°ligne : elle utilise la technique usuelle de la multiplication par un nombre de un chiffre, basée sur la distributivité $36\times 5 = 6\times 5 + 30\times 5 = 6\times 5 + 3\times 5\times 10$

Paul :
Il utilise d'abord la commutativité de la multiplication (il calcule 45×36). Il utilise la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, quand il remplace le calcul de $45\times(30+6)$ par le calcul de la somme de 45×30 et 45×6. Pour calculer 45×30, il utilise implicitement comme Chloé l'associativité de la multiplication et les règles de la numération.

Denis :
1°ligne : soit il utilise la "règle des zéros", soit ses connaissances au sujet de la numération en base dix : 36 centaines c'est 3600.
2°et 3°ligne : il utilise l'associativité de la multiplication :
pour la deuxième ligne, il divise 3600 par 2 : $36\times 50 = 36\times(100 : 2) = (36\times 100) : 2$
pour la troisième ligne, il divise 1800 par 10 : $36\times 5 = 36\times(50 : 10) = (36\times 50) : 10$
4°ligne : il écrit (implicitement) 45 sous la forme "50-5" et utilise la distributivité :
$36\times(50-5) = 36\times 50 - 36\times 5$

Fabienne :
Elle utilise deux fois l'associativité de la multiplication :
$(18\times 2)\times 45 = 18\times(2\times 45)$ et $18\times(9\times 10) = (18\times 9)\times 10$

Question 2 :

Chloé :
a) Elle commet une erreur dans le calcul en ligne de 36×40 : elle oublie la retenue au rang des centaines (4 fois 3, douze, et deux quatorze")
b) Hypothèse : il ne s'agit pas d'une ignorance de la technique puisqu'elle ne se trompe pas dans le calcul de 36×5 ; il s'agit plutôt d'un oubli, peut-être du à la difficulté de penser aussi au zéro qu'il faut ajouter (surcharge cognitive).
c) Intervention : demander de vérifier en faisant le calcul d'une autre façon afin qu'elle se rende compte toute seule de son erreur et la corrige.
On peut l'inciter, en particulier, à vérifier mentalement chaque fois que possible :

$36 \times 4 = 36 + 36 + 36 + 36 = 72 + 72 = 144.$

Paul :

a) et b) Il fait une première erreur dans le calcul de 45×30 : peut-être s'agit-il d'une erreur de table ($4 \times 3 = 14$) ou bien d'une confusion entre la retenue et le nombre 3 par lequel on multiplie (3 fois 4 :12 ; et 3 ;15)
Il fait une deuxième erreur pour 45×6 : il juxtapose 6×5 et 6×4.
c) Intervention : contrairement à Chloé, il ne sait donc pas multiplier par un nombre à un chiffre ; il faudrait lui faire retrouver la technique en utilisant une disposition en rectangle,

40	5	
40×6 240	5×6 30	6

écrire ensuite 240 et 30 l'un au dessous de l'autre et effectuer l'addition, montrer ensuite comment on peut effectuer le produit sans écrire les deux produits partiels et retrouver ainsi le principe de la retenue.
On peut aussi utiliser les écritures en ligne si elles sont familières aux élèves :
$45 \times 6 = 40 \times 6 + 5 \times 6 = 240 + 30$ et montrer ensuite comment on peut effectuer ce calcul mentalement.

Denis et Fabienne n'ont pas fait d'erreur.

Question 3a :

$\mathbf{50} \times \mathbf{212} = 50 \times 2 \times 106 = 100 \times 106 = 10600$
$\mathbf{145} \times \mathbf{12} = (145 \times 2) \times 6 = 290 \times 6 = 290 \times 2 \times 3 = 580 \times 3 = 1740$
$\mathbf{250} \times \mathbf{24} = (250 \times 4) \times 6 = 1000 \times 6 = 6000$
$\mathbf{27} \times \mathbf{202} = (27 \times 200)+(27 \times 2) = 5400+54 = 5454$
$\mathbf{36} \times \mathbf{44} = (36 \times 11) \times 2 \times 2 = (396 \times 2) \times 2 = 792 \times 2 = 1584$ avec $36 \times 11 = 360+36$
on peut aussi utiliser le résultat du 1 : $36 \times 44 = 36 \times (45-1) = 1620-36 = 1584$
$\mathbf{48} \times \mathbf{250} = (12 \times 4) \times 250 = 12 \times (4 \times 250) = 12 \times 1000 = 12000$
on peut, là aussi, utiliser un résultat trouvé : $48 \times 250 = 2 \times (24 \times 250) = 2 \times 6000 = 12000$
12x146 = (12x145)+12 = 1740+12 = 1752
212x51 = (212x50)+212 = 10600+212 = 10812
Il y a, bien sûr, d'autres façons de calculer, en particulier la méthode de Chloé est toujours valable (décomposition du nombre de deux chiffres et distributivité).

Question 3b : Nous constatons que les nombres proposés sont tels que les calculs les plus faciles ne sont pas ceux de la méthode "classique" (sur laquelle est basée la technique usuelle) : décomposition canonique du nombre le plus petit et distributivité. En effet :
- pour 27×202 : il vaut mieux décomposer 202 que 27.
- pour les produits par 50 ou 250 : en utilisant l'associativité, on fait apparaître $50 \times 2 = 100$ et $250 \times 4 = 1000$ et les produits sont alors immédiats.
- pour 145×12 : écriture d'un des nombres sous forme de produit et utilisation de l'associativité .
- pour ceux de la ligne du bas : ils peuvent être calculés très facilement à partir de résultats précédents, à l'aide de la distributivité ou de l'associativité.

Conclusion : les calculs ont été choisis pour apprendre aux élèves à ne pas se lancer dans les calculs en appliquant des automatismes, mais à examiner les nombres et à choisir la procédure la plus facile, en utilisant les propriétés de la multiplication et de la numération décimale. Ils permettent de développer, comme l'annonce le titre, le "calcul pensé" (qui est différent des "techniques opératoires" s'appliquant à tous les nombres).

Question 4a : L'exercice 1 peut aider à la résolution de l'exercice 2 parce qu'il permet aux enfants de se rendre compte qu'il y a plusieurs façons d'effectuer le même calcul, que certaines façons sont plus faciles que d'autres ; il peut aussi leur permettre d'envisager des procédures auxquelles ils n'auraient pas pensé tout seuls.

Question 4b : Les ajouts de l'exercice de la classe B ont pour fonction de permettre aux élèves d'envisager certaines procédures pour les calculs de la fiche initiale.

Soit ils facilitent ces procédures en fournissant un résultat intermédiaire :
- le calcul préliminaire de 27×2 rend très facile le calcul $27 \times 202 = 27 \times 200 + 27 \times 2$
- 36×40 est utile pour $36 \times 44 = 36 \times 40 + 36 \times 4$ (cette fois il faut enlever un zéro à 36×40 pour en déduire 36×4)

Soit ils les mettent sur la voie. C'est le cas des produits de trois nombres qui peuvent inciter les élèves à faire des décompositions multiplicatives et à utiliser l'associativité : $2 \times 106 \times 50$. Le 100×106 sera facilement perçu par les élèves ici (ils savent que les produits par 10,100,1000 etc. sont très faciles) et, en faisant le calcul à partir de la gauche, ils reconnaîtront $212 \times 50 = 50 \times 212$.

Ces ajouts peuvent aussi avoir une fonction de contrôle : si les élèves font les calculs dans l'ordre, $2 \times 106 \times 50$ pourra leur permettre de contrôler 50×212, calculé peut-être d'une autre façon.

Question 4c : Il semble que les élèves aient plus d'initiatives à prendre dans la classe B :
- Aucun exemple de procédure n'est donnée, comme dans l'exercice 1 de la fiche ; les élèves doivent eux-mêmes les imaginer ; alors que dans la classe A, certains élèves vont essayer d'appliquer une des procédures qui sont au-dessus. On peut s'attendre,dans la classe B, à une plus grande variété de procédures.
- D'autre part, en B, il est recommandé aux élèves de choisir l'ordre des calculs : cette initiative les amène à s'interroger sur la facilité plus ou moins grande de certains calculs, et à établir des relations entre les calculs

Dans la classe A, c'est la calculette qui est proposée comme vérification.
Dans la classe B, c'est la confrontation avec les résultats des autres, ou avec ses propres résultats par d'autres procédures, qui doit permettre aux élèves d'établir eux-mêmes les résultats justes.
Dans la classe A, la vérification n'apporte que la conclusion "juste" ou "faux", alors que dans la classe B les élèves doivent développer une argumentation qui les fera progresser dans la maîtrise des procédures de calcul et des propriétés de la multiplication ;

Question 5 :
Pour calculer un produit en ligne, il faut d'abord regarder les nombres pour essayer de trouver une méthode facile ;

a) On peut changer l'ordre des nombres : $12 \times 4356 = 4356 \times 12$

b) Pour multiplier par un nombre, on peut essayer de le décomposer et de l'écrire avec le signe $\times$. Par exemple, pour multiplier par 4, on sait que $4 = 2 \times 2$; on peut multiplier par 2, puis encore par 2, d'où : $27 \times 4 = 27 \times 2 \times 2 = 54 \times 2 = 108$

c) C'est très facile de multiplier par 10, 100 1000...

d) Pour multiplier par 5, ou par 50, ou par 25, ou par 250, on peut essayer d'obtenir 10 ou 100, ou 1000 en multipliant par 2 ou par 4 :

$26 \times 5 = 13 \times 2 \times 5 = 13 \times 10$ $26 \times 50 = 13 \times 2 \times 50 = 13 \times 100$ $128 \times 25 = 32 \times 4 \times 25 = 32 \times 100$

remarque : les règles "pour multiplier par 5, on multiplie par 10 et on divise par 2" ou "pour multiplier par 25, on multiplie par 100 et on divise par 4" ne conviennent pas bien ici car elles supposent des connaissances sur la division

e) Pour multiplier par un nombre de deux chiffres ou plus, on peut l'écrire avec le signe + (ou le signe -) pour se ramener à des produits par des nombres de un chiffre :

$$243 \times 47 = 243 \times (40+7) = 243 \times 40 + 243 \times 7 \quad \text{et } 243 \times 40 = (243 \times 4) \times 10$$

$$36 \times 45 = 36 \times (50-5) = 36 \times 50 - 36 \times 5 \quad \text{et } 36 \times 50 = (36 \times 5) \times 10$$

e) Quand on fait beaucoup de calculs, il faut regarder si l'on peut se servir de résultats que l'on a déjà.

LIMOGES

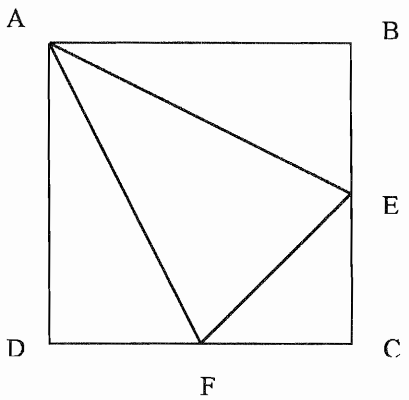
PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE N° 1 :

Question 1 : En admettant que la consigne « Comment reconnaître... » ne mette en jeu que la simple perception visuelle d'indices permettant de répondre simplement aux questions posées, une réponse possible est la suivante : Un prisme possède au moins cinq faces. Son patron contiendrait alors au moins cinq polygones. Un patron d'un cube est constitué d'un assemblage de six carrés. Or le patron proposé est constitué de quatre triangles. Il ne peut donc s'agir ni d'un patron d'un prisme, ni d'un patron d'un cube.

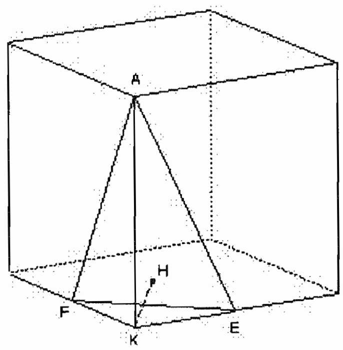
Commentaire sur la question 1 : La consigne de l'exercice 16 de la page 117 du manuel fait probablement référence à des représentations de solides, visibles par les élèves dans ce même manuel, ce dont ne disposaient pas les candidats. S'il n'existe qu'une seule sorte de cubes (avec plusieurs patrons différents), on peut rencontrer par contre des prismes aux formes très diverses, droits ou obliques, au nombre variable de faces...



Question 2.a : Le pliage du patron permettant d'obtenir la pyramide amène [AB] sur [AD], ces segments constituant la même arête du solide. Il en est de même pour [EB] venant sur [EC] et [FC] venant se superposer à [FD]. Les segments correspondant à une même arête de la pyramide doivent donc être isométriques. Ainsi EB = EC et FC = FD.
Le point E doit être placé au milieu du segment [BC].
Le point F doit être placé au milieu du segment [CD].

Question 2.b : ABCD étant un carré, ses côtés ont la même longueur et ce quadrilatère possède quatre angles droits. On en déduit que les triangles ABE et ADF sont deux triangles rectangles d'angle droit situé respectivement en B et D.
Le triangle ECF est un triangle rectangle, son angle droit étant situé au sommet C. Ce triangle est isocèle car CE = CF . Les côtés [CE] et [CF] ont en effet la même longueur, égale à la moitié de celle des côtés du carré. Le triangle ECF est donc un triangle rectangle isocèle.
Le triangle AEF est un triangle isocèle car AE = AF. En effet les segments [AE] et [AF] sont les hypoténuses respectives de deux triangles rectangles superposables (par retournement), les triangles ABE et ADF.

Question 3.a : Les trois triangles rectangles AKE, AKF et EKF sont tels que [AK] est perpendiculaire simultanément à [KE] et [KF]. [AK] est donc perpendiculaire au plan EFK.
[AK] a pour mesure AB, c'est à dire 4 cm. [AK] peut donc coïncider avec l'arête d'un cube de côté 4 cm, et la pyramide avec un coin de ce cube, les côtés [CE] et [CF] perpendiculaires étant portés par deux arêtes du cube.



Question 3.b : En choisissant la face EFK pour base et [AK] comme hauteur correspondant à cette face, on applique la formule de calcul de volume d'un pyramide :
L'aire b de la base EFK est égale à $\frac{2 \times 2}{2}$ cm² , donc à 2 cm².
(Autre argument : l'aire b de ce triangle rectangle est égale au quart de la moitié de celle du carré ABCD)
La hauteur h correspondante mesure 4 cm. Par conséquent, $V = \frac{1}{3} \times 2 \times 4 \text{ cm}^3$

Le volume de la pyramide AEFK est $V = \frac{8}{3} \text{ cm}^3$.

Question 4.a : Le triangle AEF a pour aire la différence entre l'aire du carré ABCD et la somme des aires des trois triangles qui entourent AEF, c'est à dire ABE, ECF et ADF.
Aire (ABCD) = 16 cm², d'autre part aire (ABE) = aire (ADF) = $\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$ cm².
Par conséquent : Aire(AEF) = 16 - (4 + 2 + 4) = 6 cm²

Question 4.b : [KH] est la hauteur de la pyramide AEFK correspondant à la base AEF. Or, nous avons calculé le volume V de cette pyramide (égal à $\frac{8}{3}$ cm^{3}) et nous connaissons également la mesure de l'aire de la base AEF (égale à 6 cm²). Il est donc aisé d'en déduire la mesure de la hauteur [KH] en centimètres.

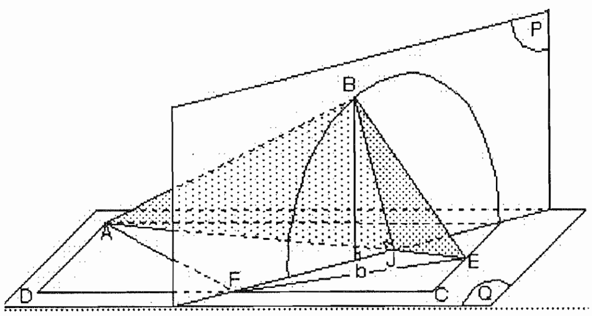
$\frac{8}{3} = \frac{1}{3} \times 6 \times KH$, donc $KH = \frac{4}{3}$ cm.

Question 5.a : Nous proposons deux démonstrations pour répondre à cette question :

1) Utilisation des mesures des angles : Appelons X l'intersection des segments [AE] et [BF]. Les angles $\widehat{BAE}$ et $\widehat{AEB}$ sont complémentaires (leur somme vaut un angle droit). Les triangles ABE et BCF étant isométriques (superposables), les angles $\widehat{CBF}$ et $\widehat{AEB}$ sont complémentaires. Le triangle BXE est donc un triangle rectangle : les droites (AE) et (BF) sont perpendiculaires.
2) Utilisation d'une rotation : Soit O le centre du carré ABCD (intersection de ses diagonales) et r la rotation de centre O et d'angle droit rétrograde (de sens inverse du sens trigonométrique). Par cette rotation : $A \to B$; $B \to C$; et $C \to D$. Le milieu E de [BC] a donc pour image le milieu F de [CD]. Donc $E \to F$ et, par suite, dans cette rotation d'angle droit, le segment [AE] a pour image le segment [BF]. Les droites (AE) et (BF) sont donc perpendiculaires.

Question 5.b : Dans le pliage permettant de réaliser la pyramide, la trajectoire de B est un cercle contenu dans un plan perpendiculaire à l'axe (AE). De même la trajectoire de D est un cercle contenu dans un plan perpendiculaire à l'axe (AF), et ces deux cercles passent par K. Les deux plans qui contiennent ces deux cercles ont pour intersection la droite perpendiculaire à (AE) et (AF) passant par K, c'est donc la droite (KH), hauteur de la pyramide.
(BH) est perpendiculaire à (AE) et (FH) est la hauteur issue du sommet F du triangle AEF, donc (BH) et (FH) sont confondues.
De même, (DH) est perpendiculaire à (AF), donc (DH) et (EH) sont confondues.
H est donc l'intersection des hauteurs du triangle AEF.

Autre démonstration :



procédons au pliage du patron en fixant le triangle AEF dans un plan horizontal Q ; notons J l'intersection des droites, perpendiculaires, (BF) et (AE) . Au cours du pliage, le triangle ABE pivote autour de la droite (AE) et le point B se déplace sur le cercle de centre J et de rayon JB, situé dans le plan vertical P qui coupe le plan horizontal suivant la droite (BF) ; ce cercle est l'intersection du plan P avec la sphère S de centre A et de rayon AE. Dans toute position du triangle AEB au cours du pivotement le projeté orthogonal b de B sur le plan horizontal Q appartient à la droite (BF). De la même façon, au cours du pivotement du triangle ADF autour de la droite (AF), le projeté orthogonal du point D sur le plan Q décrit un segment de la droite (DE). Si les points B et D, qui sont tous les deux sur la sphère S, coïncident en K, leur projeté commun sur le plan Q est l'intersection H des droites (DE) et (BF) et K est l'une des intersections de la droite verticale passant par H avec la sphère S. Par pivotement du triangle CEF autour de la droite (EF), le point C vient aussi en K ; son projeté orthogonal sur Q se déplace sur la droite (AC), médiatrice de [EF] et troisième hauteur du triangle AEF ; on redémontre ainsi l'existence de l'orthocentre du triangle AEF.

EXERCICE 2 :

Question 1.a : Si 8 oranges coûtent 4 F, une orange coûte donc 0,50 F. (En effet $4 = 0{,}50 \times 8$).
Si 3 citrons coûtent 2 F, un citron coûte 0,66 F (valeur approchée au centime près par défaut, car $0{,}66 \times 3 \leq 2 < 0{,}67 \times 3$). Si 7 poires coûtent 4 F, une poire coûtera 0,57 F (valeur approchée au centime près par défaut, car $0{,}57 \times 7 \leq 4 < 0{,}58 \times 7$)
On obtient ainsi le prix unitaire moyen de chaque fruit, ce qui permet de répondre à la question posée.
Les difficultés pour un élève :
Envisager la division adéquate, alors que le dividende est à chaque fois inférieur au diviseur. Le quotient est donc inférieur à l'unité. (le problème suivant « 4 pommes coûtent 9 F » serait mieux réussi, car $9 > 4$)
Le quotient n'est donc jamais un nombre entier naturel, et dans deux cas sur trois n'est pas non plus un nombre décimal. De ce fait, la division engagée, ne donnant pas de reste nul, ne « s'arrête pas » naturellement, et c'est à l'élève lui-même qu'il appartient d'arrêter le calcul dès lors que le nombre de chiffres de la partie décimale est suffisant et en rapport avec le sens du problème (une réponse telle que « le prix d'une poire est de 0,5714285 F » n'a pas de sens... dans le contexte de l'énoncé).

Question 1.b : Une autre méthode consiste à calculer combien de fruits de chaque sorte il est possible d'acheter pour une même somme d'argent : Il est commode de choisir cette somme égale à 4 F. Ainsi pour 4 F on peut acheter 6 citrons, 7 poires ou 8 oranges.
Les citrons sont donc plus chers que les poires, et les poires plus chères que les oranges.

Question 2 : Soient g, c et p les prix unitaires en Francs des oranges, des citrons et des poires. L'ordre « convenable » à prendre en compte est celui qui résulte de la question 1 précédente :

$$g < p < c$$

(car les oranges sont moins chères que les poires, et les poires sont moins chères que les citrons)
On en déduit les relations suivantes : $p = g + 1$ et $c = p + 1$, puisque p, g et c sont des nombres entiers naturels consécutifs. Sachant que la somme des prix des trois plateaux est égale à 67 F, on peut écrire : $8g + 3c + 7p = 67$ et en remplaçant g et c par leur expression en fonction de p : $8(p - 1) + 3(p + 1) + 7p = 67$ ce qui donne $18p = 72$ et donc $p = 4$.
La solution est donc : $g = 3$ $p = 4$ et $c = 5$
Les nouveaux prix à afficher sur les plateaux sont :
8 oranges coûtent 24 F. 3 citrons coûtent 15 F. 7 poires coûtent 28 F.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1. L'élève « A » a probablement reconnu un problème multiplicatif puisqu'il écrit en ligne « 34×12 = », égalité qu'il complétera ensuite avec le nombre 408. Pour effectuer son calcul, il pose certes une addition en colonne de 12 termes égaux à 34, mais n'engage probablement pas l'algorithme classique de l'addition : il multiplie le chiffre des unités par 12 et écrit $12 \times 4 = 48$, puis calcule le nombre de dizaines en écrivant : $(12 \times 3) + 4 = 40$. Il conduit donc le calcul d'une multiplication à travers une organisation différente de la disposition habituelle. Il en reproduit néanmoins une bonne réalisation, appuyée par une bonne intelligence des principes de la numération. Notons que le chiffre de la retenue, égal à 4, est parfaitement identifié et distingué en étant entouré.

Question 2.a : L'élève « B » sait effectuer le calcul d'un produit de deux nombres dont le multiplicateur est 10 ou bien ne s'écrit qu'avec un seul chiffre. Il pose correctement la multiplication 34×12 qu'il ne sait pas calculer et, pour obtenir le résultat, il calcule séparément les produits 34×10 et 34×2 . Il additionne ensuite ces deux produits partiels pour obtenir la réponse correcte qui est bien 408. On peut donc penser qu'il sait décomposer un nombre en séparant unités et dizaines et que, de plus, il le fait à bon escient pour utiliser (implicitement mais effectivement) la distributivité de la multiplication sur l'addition. Il montre donc qu'il sait appliquer ce qui a été l'objet de l'enseignement précédent. Malheureusement, en formulant sa réponse finale à la question du problème, il reporte un résultat intermédiaire (340) au lieu de 408.

Question 2.b : Comparaison des procédures de calcul des élèves « B » et « D ».

	Opérations posées	Calculs de produits	Addition	Réponse
Elève B	4 opérations pour calculer 34×12.	Calculs effectués séparément de 34×10 et de 34×2 .	$(34 \times 10) + (34 \times 2)$ L'addition est posée séparément et en colonne.	408 mais report d'un produit intermédiaire, 340.
Elève D	Une seule opération posée pour calculer 12×34.	Opération en colonne,. Le second produit écrit est 360, donc le problème du décalage dû à l'absence du 0 des unités est évité.	$(12 \times 4) + (12 \times 30)$ Cette addition est intégrée à la suite des autres calculs, dans la même opération (technique usuelle)	408

Question 3 : Les procédures de calcul incorrectes sont celles des élèves « C » « E » et « F ».
Elève « C » : S'il pose correctement la multiplication 34×12 , cet élève ne franchit pas l'étape du calcul d'un produit par un multiplicateur à deux chiffres et semble s'arrêter à l'étape précédemment apprise puisqu'il calcule correctement le produit $34 \times 2 = 68$ et propose ce nombre comme réponse au problème. Il n'a donc pas su gérer la présence du second chiffre du multiplicateur.
Elève « E » : Sans doute a-t-il pensé « 4 multiplié par 2 égale 8, et 3 multiplié par 1 égale 3 » ce qui permettrait d'expliquer qu'il obtienne 38 comme résultat de la multiplication 34×12. Cette procédure est sensiblement calquée sur celle de l'addition, l'expression « multiplié par » se substituant à « plus » : Il traite d'abord les chiffres des unités entre eux puis les chiffres des

dizaines de la même manière (il ne crée pas de centaines), l'absence de retenue lui évitant aussi une éventuelle remise en cause.
Elève « F » : Le premier calcul en ligne semble analogue au précédent, mais la réponse 38 lui a peut-être semblé invraisemblable puisqu'il tente une seconde fois de calculer différemment le produit 34×12. Première ligne : $34 \times 2 = 680$ au lieu de 68. Le chiffre 0 a-t-il été ajouté ensuite pour aligner les produits partiels en colonne ? Deuxième ligne : $34 \times 10 = 430$ au lieu de 340. Quelle raison l'a amené à inverser les chiffres 3 et 4 ? Le chiffre 0 a-t-il été ajouté ensuite pour aligner les chiffres en colonnes et avoir le même nombre de chiffres aux deux produits partiels ? Il additionne les deux termes 680 et 430 et ne gère pas franchement la présence de la dernière retenue en proposant un résultat ambigu : Est-ce 110 ou 1110 ?

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

Question 1.a :
Exercice 1.a) La planche de 10 timbres a une longueur égale à 20 cm et une largeur égale à 6cm. Elle a donc pour aire $20 \times 6 = 120$ (en cm²). Son périmètre est égal à $(20 + 6) \times 2 = 52$ (en cm.)
Exercice 1.b) Chaque timbre a une aire égale à $4 \times 3 = 12$ cm². De gauche à droite, les « figures » ont pour aire et périmètre respectifs :

aire	$12 \times 9 = 108$ (108 cm²)	$12 \times 9 = 108$ (108 cm²)	$12 \times 8 = 96$ (96 cm²)	$12 \times 7 = 84$ (84 cm²)
périmètre	52 cm	58 cm	44 cm	58 cm

Question 1.b :
Le tableau demandé peut être le suivant (nous nous limitons au cas où $x \geq y$) :

x en cm	1	2	3	4	4,5	6
y en cm	36	18	12	9	8	6
aire en cm²	36	36	36	36	36	36
périmètre en cm.	74	40	30	26	25	24

Question 2 :
Annexe II : L'élève doit, pour répondre, savoir au préalable ce que désignent les termes « aire » et « périmètre » et savoir calculer leurs valeurs pour des surfaces aux contours variés (il peut calculer l'aire d'un timbre, surface rectangulaire, comme unité, et multiplier ensuite par le nombre de timbres contenus dans les différentes surfaces, mais ce n'est pas la seule méthode...) Pour le calcul des périmètres il faut savoir analyser les différentes figures afin de compter combien de fois leur contour contient la longueur d'un timbre ou sa largeur.
Annexe III : L'élève doit, pour répondre, savoir au préalable construire un rectangle sur du papier millimétré, mais ce rectangle doit avoir une aire de 36 cm². Il ne lui suffit donc pas de savoir déterminer l'aire d'un rectangle, mais il doit comprendre et résoudre cet autre problème : Connaissant l'aire et une dimension, trouver la seconde dimension, ce qui nécessite de décomposer

36 en un produit de deux nombres qui constitueront les mesures du rectangle cherché. Il lui faut de plus savoir reporter des mesures sur du papier millimétré, dénombrer des carreaux unités d'un cm² , et, éventuellement, effectuer des divisions dont le quotient est un nombre décimal... Enfin il lui faut savoir utiliser et construire un tableau de nombres, à double entrée.

Question 3.a :
Première phase: Compréhension de la consigne et action individuelle (construire un rectangle dont l'aire est déterminée et égale à 36 cm²)
Deuxième phase collective : S'assurer de l'adéquation de la construction effectuée avec la contrainte fixée, puis comprendre les données d'un problème nouveau : Il existe plusieurs solutions au problème précédent.
Troisième phase : action individuelle (construire plusieurs rectangles satisfaisant à la contrainte sur leur aire et consigner leurs dimensions dans un tableau).
Quatrième phase : Faire un tableau en commun afin de recenser le plus grand nombre de réponses différentes.

Question 3.b : Les élèves peuvent constater lors de la mise en commun le fait que plusieurs rectangles peuvent avoir la même aire (donc la même grandeur) tout en étant sensiblement différents (par leur forme), ayant des dimensions différentes. Cela peut être une première surprise pour certains. De plus, si les formats des rectangles sont nettement différents, il est possible qu'une conjecture sur le fait que les mesures de leurs périmètres soient probablement inégales apparaisse. Il devient alors utile d'effectuer les calculs et mesures nécessaires pour répondre à cette nouvelle question.

Question 4.a : Le mot « carré » est associé à une catégorie de quadrilatères que les enfants pensent être différente de celle des rectangles. La connaissance qu'ils ont de ces figures planes est essentiellement liée à la perception visuelle (de plus, dans la plupart des manuels scolaires les rectangles représentés possèdent des dimensions visiblement différentes). Le fait que les carrés soient des rectangles particuliers relève des propriétés géométriques de ces figures, c'est à dire de raisons intellectuelles et non liées à la simple perception visuelle. La consigne demande de construire des « rectangles », les élèves l'appliquent à la lettre.

Question 4.b : Le nombre 36, choisi comme mesure de l'aire des rectangles, possède 9 diviseurs entiers naturels : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12,18 et 36. Ce choix permet donc aux élèves de trouver facilement des décompositions différentes sous forme de produit de deux entiers. Facilement c'est à dire par une procédure mentale, sans recourir à une opération écrite de division. La valeur du nombre choisi pour l'aire du rectangle, et, en particulier le nombre de ses diviseurs entiers, est donc une variable didactique de la situation.
Il semble, sans autre information, que les élèves puissent choisir au gré de leurs découvertes les nombres x et y qu'ils ont à reporter dans les deux premières lignes du tableau. La solution de facilité amène donc à favoriser des couples de dimensions entières. Pour obtenir des dimensions non entières il suffirait d'imposer les valeurs de x dans la première ligne du tableau. Par exemple pour x choisi parmi les nombres 5, 8, 10, 15 ou 20, la seconde dimension, exprimée en cm, est nécessairement un nombre décimal.

Un autre moyen d'aider à obtenir des dimensions non entières consiste à faire découper les rectangles tracés sur le papier quadrillé, afin de les plier selon une de leurs médianes, de les partager en deux rectangles superposables, puis après reconstitution d'un nouveau rectangle avec les deux morceaux, de faire déterminer ses dimensions. Ainsi à partir du rectangle 9×4 on peut obtenir le rectangle $4{,}5 \times 8$. Le découpage suivi du ré-assemblage donne de plus une bonne idée de la conservation de l'aire comme grandeur. Il s'agit là d'une procédure empirique et géométrique, qui n'était pas évoquée dans la situation décrite.

Question 5 : (cf. annexe IV) L'erreur qui consiste à lier l'aire et le périmètre des surfaces planes est un obstacle bien connu et qui mérite d'être dissipé. L'essentiel est donc de s'en tenir à institutionnaliser que l'aire d'une surface plane est une grandeur et, qu'en général, il n'existe aucun lien entre l'aire d'une surface plane et son périmètre. Le fait que pour des rectangles d'aire constante, celui qui a le plus petit périmètre soit le rectangle carré est purement anecdotique : Ce résultat est un savoir qui n'a que très peu de chances d'être réutilisable par la suite. Ce n'est donc pas cela qui doit faire l'objet d'une trace écrite. Par ailleurs, l'observation des six travaux présentés incite à une réponse prudente : Seules les feuilles de deux élèves, Amandine et Marthe, contiennent les tableaux utilisés et leurs tableaux n°2 sont erronés, au moins en partie. Leurs conclusions reposent donc sur des données sujettes à caution, et sont d'ailleurs difficilement exploitables (Marthe s'attache à comparer entre eux les nombres mesurant l'aire et le périmètre). Pour les autres, les tableaux sont absents. Faisons l'hypothèse qu'ils étaient corrects, on peut alors penser qu'Alex, Marine et Elie ont compris l'objectif visé par cette activité. Les conclusions d'Etienne sont confuses, contradictoires, voire fausses.

Commentaire : Pour décider des constats qui mériteraient d'être institutionnalisés dans une classe, il faut admettre que les travaux présentés soient représentatifs de l'ensemble des productions de cette classe.

Question 6.a : Les élèves doivent comprendre qu'il n'y a pas de lien entre la grandeur aire et le périmètre des surfaces planes. Les élèves confondent souvent même les deux termes, comme s'il s'agissait d'une seule et même grandeur. Une autre conception, erronée mais courante, consiste à penser que « plus la surface est grande (pour l'aire), plus grand est son périmètre ».

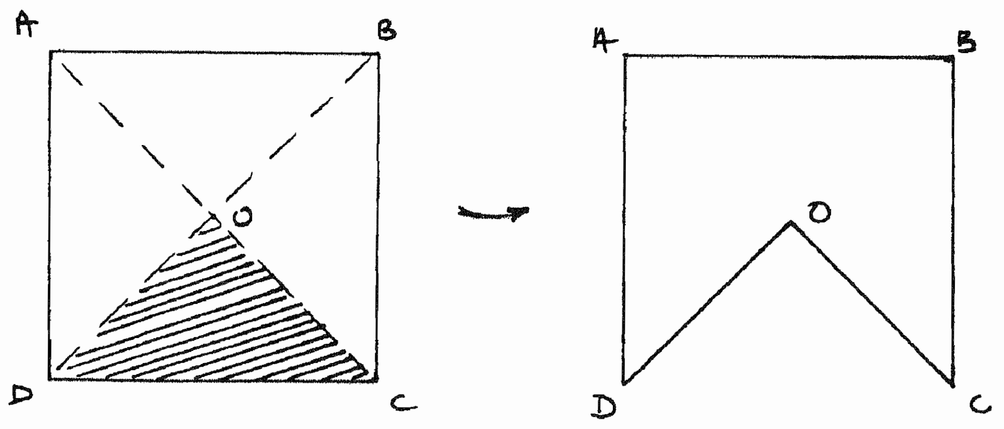
Question 6.b : La situation de « découverte » ainsi que l'exercice 1 ne peuvent contribuer à révéler réellement les conceptions spontanées des élèves quant aux relations entre aire et périmètre d'une surface plane, mais rien n'interdit de penser que les activités menées ne permettront pas de les modifier. En tout cas ces activités se limitent au cas particulier des rectangles et veulent montrer que si l'aire est fixe le périmètre varie selon la forme (et la longueur du rectangle), que ,si le périmètre est fixe, l'aire peut elle aussi varier. Les représentations graphiques illustrent au contraire qu'il existe des relations mathématiques entre divers objets attachés aux rectangles : les élèves auront-ils bien perçu quelles sont les variables liées ?

Les autres activités proposées (problèmes 2 et 3) relèvent d'autres savoirs. Le problème 2 est un problème complexe, où il faut savoir identifier les données, élaborer une démarche de résolution, savoir utiliser correctement une formule de calcul d'aire ou de périmètre (connaissant l'aire et une dimension trouver l'autre dimension pour en déduire le périmètre), savoir effectuer des calculs dans l'ensemble des nombres décimaux (il faut par exemple savoir diviser un nombre décimal par

un autre et produire un quotient décimal, ce qui n'est plus au programme de l'école primaire !). La solution (le prix de revient des travaux) s'obtient au terme de 11 opérations...
Le problème 3 demande de savoir exécuter des calculs multiplicatifs avec des nombres décimaux et d'interpréter des tableaux afin de dire si des relations numériques relèvent ou non de la proportionnalité. Ils ne répondent donc pas à l'objectif précédent.

Question 6.c : Cet énoncé pourrait être le suivant :
Avec une feuille de papier, construis et découpe un carré. Appelle les sommets A, B, C et D. Marque les plis de ses diagonales. Appelle O le centre du carré.
Découpe et enlève le triangle COD. Tu obtiens une nouvelle surface ABCOD.

Compare l'aire cette surface avec celle du carré initial.
Compare le périmètre de cette surface avec celui du carré initial.



LYON

(Corrigé effectué à partir d'indications fournies par notre correspondant de l'académie).

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS) MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1

- Les multiples de 21 dont l'écriture nécessite trois chiffres sont compris entre 100 et 999. Ils vérifient : $100 \leq 21 \times n \leq 999$ (avec n naturel), c'est à dire : $\frac{100}{21} \leq n \leq \frac{999}{21}$; et comme n est naturel, $5 \leq n \leq 47$. Cela fait 43 multiples possibles, donc $43 \times 3 = 129$ caractères.
- De même, les multiples de 21 dont l'écriture nécessite 5 chiffres sont compris entre 10 000 et 99 999. Ils vérifient $10\,000 \leq 21 \times n \leq 99\,999$

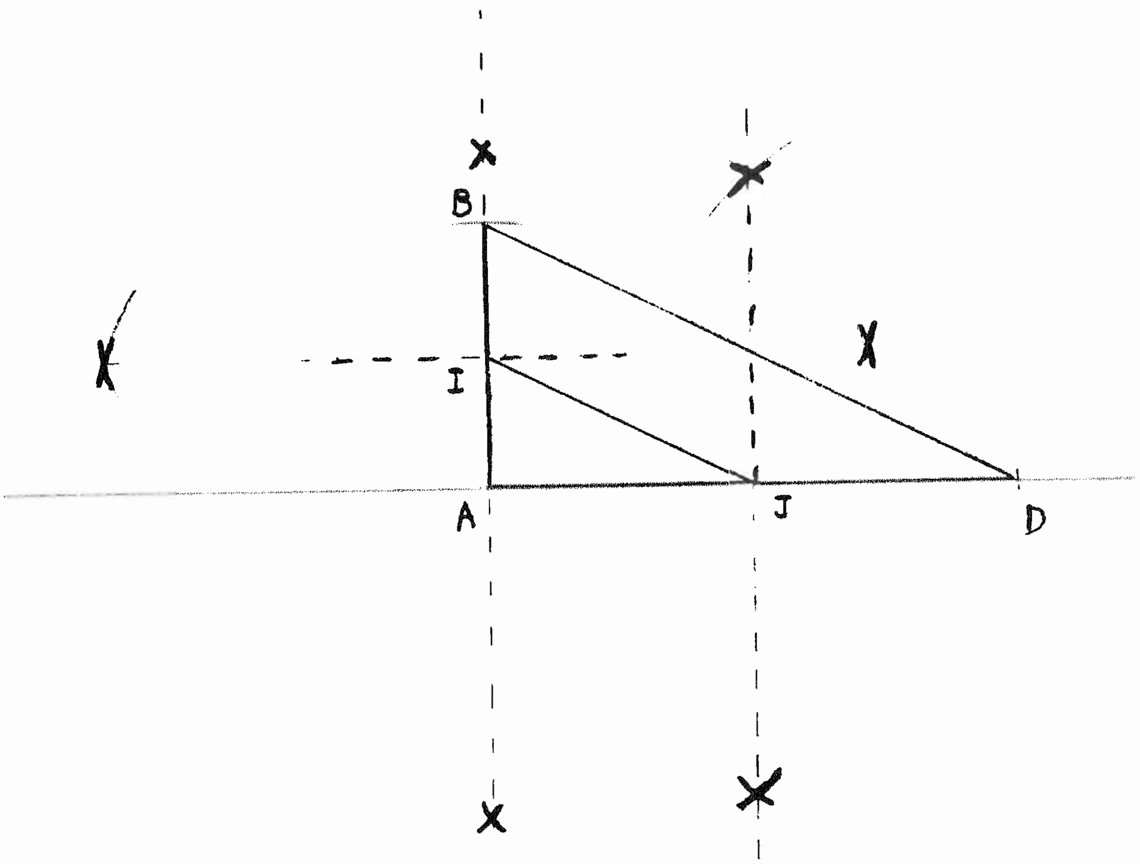
c'est à dire : $\frac{10000}{21} \leq n \leq \frac{99999}{21}$, $477 \leq n \leq 4761$, ce qui fait 4285 multiples possibles, donc $4285 \times 5 = 21\,425$ caractères

EXERCICE 2

Question 1 : Trapèze BDJI : Sur une droite, placer les points A et D tels que AD = a. Placer le milieu J de [AD] en traçant la médiatrice de [AD] puis, tracer la droite perpendiculaire en A à (AD), en traçant la médiatrice d'un segment milieu de A. Tracer alors le cercle (A,AJ) qui coupe cette perpendiculaire en deux points dont l'un est nommé B. Placer le milieu I de [AB] en traçant la médiatrice de [AB].

Remarque : Le programme de construction n'était pas demandé, mais les traits de construction étaient exigés.(voir page suivante).

La construction d'un segment perpendiculaire à un segment [XY] se fait en prolongeant ce segment d'une longueur égale [XY'], et en construisant au compas deux points de la médiatrice de [YY']. On construit une longueur moitié d'une longueur L en traçant au compas et à la règle la médiatrice d'un segment de longueur L. On trace [AD] de longueur connue a. La médiatrice de [AD] fournit la longueur $\frac{a}{2}$ et le point J. La construction du triangle BAD rectangle en A, dont les côtés mesurent a et $\frac{a}{2}$ et du milieu I de [AB] se font donc en combinant les deux précédentes méthodes. Le quadrilatère BIJD est un trapèze. En effet, dans le triangle BAD : I est le milieu de [AB], J est le milieu de [AD], donc, d'après le théorème des milieux, (IJ) // (BD) et $IJ = \dfrac{BD}{2}$.



- L'aire de ce trapèze est égale à la différence des aires des triangles rectangles BAD et IAJ, donc :

$$\text{aire (BDJI)} = \frac{AD.AB}{2} - \frac{AI.AI}{2} = \frac{a(a/2)}{2} - \frac{(a/2)(a/4)}{2} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{16} = \frac{3a^2}{16}$$

Question 2 : Patron de S, voir page suivante.

Les méthodes décrites en question 1 permettent de reproduire à l'échelle ½ la figure précédente que nous convenons de nommer par les mêmes lettres. Sur la base de [BD] on construit le rectangle BDD'B' de largeur BB' = AJ (construction de [BB'] et [DD']). On construit alors le rectangle $BB'I_1'I_1$ qui vient dans le prolongement du premier avec $BI_1 = BI$ (les points I_1,B,D et I_1',B',D' sont alignés dans cet ordre). De même on construit $I_1I_1'J_1'J_1$ rectangle qui vient dans le prolongement du précédent avec $I_1J_1 = IJ$ (Les points B,I_1,J_1 et B',I_1',J_1' sont alignés dans cet ordre). On prolonge le rectangle BDD'B' de l'autre côté par un carré $DD'J_2'J_2$ car $DJ_2 = DJ$ (BDJ_2 et B',D',J_2' sont alignés dans cet ordre.
De l'autre côté du rectangle BDD'B', on construit le trapèze B'D'J'I' dont on connaît les dimensions et les angles par la première construction. Le report au compas de l'angle $\widehat{DBI}$ en $\widehat{D'B'x}$ permet de placer le point I'. On procède de même pour placer le point J'.

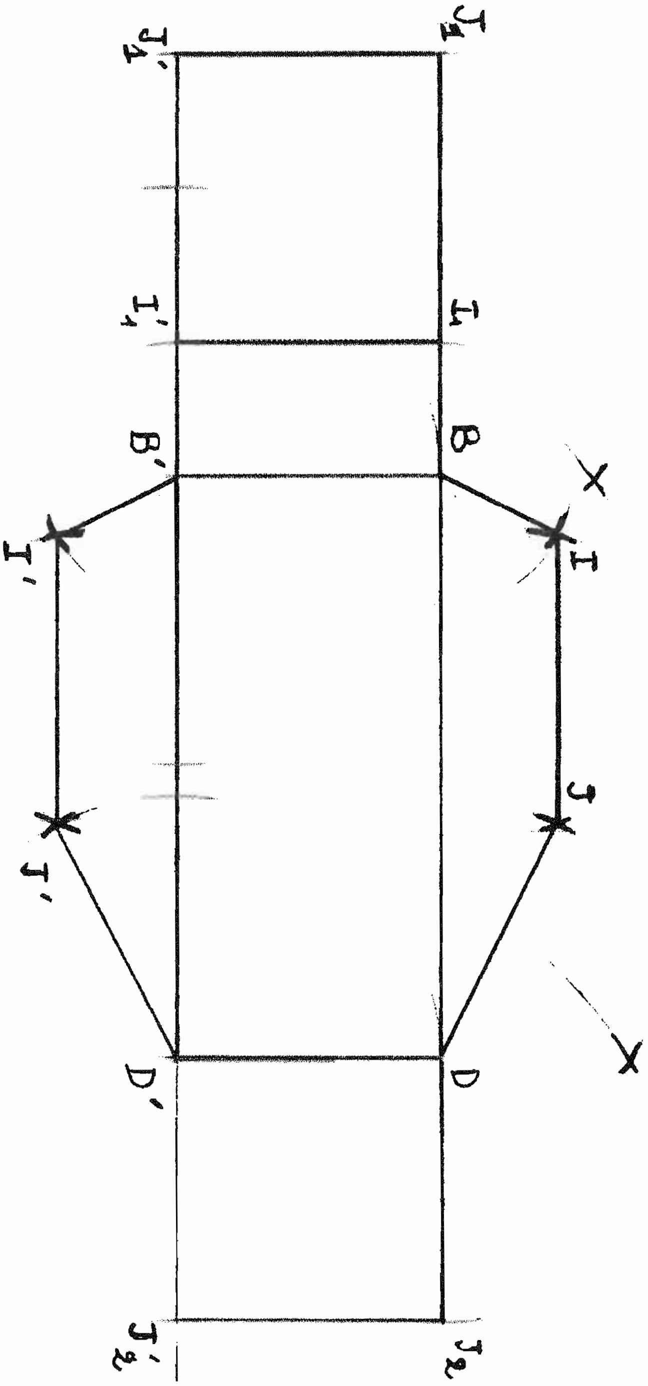


Figure 2

Question 3 : Aire totale du solide S

C'est la somme des aires de son développement

BD = $\frac{a}{2}\sqrt{5}$ car BD² = $a^2 + (\frac{a}{2})^2 = \frac{5a^2}{4}$ (Théorème de Pythagore dans le triangle rectangle BAD)

IJ = $\frac{a}{4}\sqrt{5}$

- aire totale des deux trapèzes : $\frac{3a^2}{8}$
- aire du rectangle BDD'B' : BD $\times$ DD' = $\frac{a}{2}\sqrt{5} \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}\sqrt{5}$
- aire du rectangle IJJ'I' = IJ $\times$ JJ' = $\frac{a}{4}\sqrt{5} \times \frac{a}{2}$
- aire du carré JDD'J' = JD $\times$ DD' = $\frac{a}{2} \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$
- aire du rectangle IBB'I' = IB $\times$ BB' = $\frac{a}{4} \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}$

D'où l'aire totale du solide S = $\frac{a^2}{8}(6 + 3\sqrt{5})$

Question 4 : Proportion du volume du parallélépipède initial représenté par S

Volume du prisme = (aire de la base) $\times$ DD' car DD' est la hauteur.

Le parallélépipède est aussi un prisme, de base ABCD et de même hauteur.

Le rapport des volumes est donc égal au rapport des aires des bases, soit : $\frac{3a^2}{16} : \frac{a^2}{2} = \frac{3}{8}$.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)

ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

1) CLASSEMENT DES PROCEDURES

On peut classer les procédures correctes en quatre types selon le niveau des connaissances numériques utilisées.

- Représentation de chaque étape de l'effeuillage (énumération). C'est la méthode qui est la plus proche de l'action décrite par le texte. La variante de Grégory est plus pertinente et sûre que celle de Fanny et elle est évolutive (elle permet de repérer les nombres à l'aide d'additions successives de 6). On peut considérer que la variante de Grégory introduit implicitement un repérage de la période qui va donner appui à la méthode de calcul soustractif.

Les autres méthodes introduisent des calculs pour modéliser le problème posé.

- soustractions successives : efficace, et évolutive vers la technique de division

- calcul du multiple le plus proche : ne peut se faire que pour de petits nombres, nécessite de nombreux calculs ou une calculatrice.
- division .

2) ANALYSE DES PRODUCTIONS

- Procédures correctes :

Fanny :

Représentation de chacune des opérations, en symbolisant le mot correspondant pour chacune. Procédure lourde, car elle nécessite un comptage, et un contrôle de la suite des symboles (arbitraires).

Grégory :

Représentation et écriture du numéro des pétales en 6 classes repérées chacune par le mot correspondant. Procédure plus sure et plus rapide, qui peut se généraliser.

Laeticia :

Soustractions successives de 6 à 40, et interprétation correcte du reste.

Guillaume :

Recherche du multiple le plus proche de la période, repérage en avançant ou en reculant. La réponse n'a pas été donnée.

- Procédures incorrectes

Laura :

Interprétation du problème en termes de division, donne une réponse en termes de quotient et reste, mais la division n'est pas menée à son terme et le reste est supérieur au quotient. L'interprétation de la réponse est fausse, du point de vue du quotient. Le reste est bien interprété.

Aline :

Commence par énumérer les termes jusqu'au huitième pétale, mais elle en oublie un (« pas du tout »).

Elle pose une division correcte de 40 par 6, sans trace de la soustraction qui est donc faite par calcul mental.

Elle ajoute ensuite quotient et reste, ce qui manifeste une absence de maîtrise du lien entre l'opération choisie et la situation. Elle se trompe dans le résultat du calcul mental 4+6=8 (trace d'une correction à 10).

Elle donne comme réponse le mot correspondant à 8 dans son énumération.

Cette production est très hétérogène du point de vue du niveau de la maîtrise des opérations et de leur signification.

3) PROPOSITIONS POUR A ET D :

Le texte ne dit pas si la demande faite au candidat concerne des propositions individuelles et donc des aides personnalisées ou bien s'il s'agit de la suite à donner à l'activité pour la classe. Le fait de ne considérer que deux élèves laisse à penser que la première éventualité est la bonne.

D a besoin de passer d'une énumération à des calculs, A de passer des soustractions successives à la division.

La première possibilité est d'organiser une mise en commun des résultats et des méthodes.

La seconde serait de proposer un nouveau problème où l'on fait varier une variable didactique adéquate : par exemple, augmenter la taille des nombres et notamment celle du quotient.

Pour D, il est possible que cela ne suffise pas.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

1) FORMULATION DE COMPETENCES

Les réponses suivantes sont faites en utilisant les formulations du texte officiel des compétences à acquérir au cours de chaque cycle.

Remarque : on peut s'éloigner de telles formulations, mais il devient difficile alors d'assurer l'équité dans la correction.

- Passer de l'écriture chiffrée à l'écriture littérale et réciproquement
- Comparer deux entiers naturels quelconques, ranger des nombres entiers
- Connaître la signification de chacun des chiffres composant un nombre entier et décomposer ce nombre suivant les puissances de dix.
- Comprendre la signification des différents chiffres de l'écriture ; par exemple être capable de faire la différence entre le chiffre des dizaines et le nombre des dizaines.
- Maîtriser les suites écrites et orales de 1 en 1, de 10 en 10 ...connaître la suite des nombres.

2) ANALYSE DU DOCUMENT 4

a. Discuter de la pertinence des exercices dans l'activité " je découvre " relativement à deux objectifs.

- Pour l'objectif " passer de l'écriture chiffrée à l'écriture littérale", ce sont les exercices a, c, et d qui sont plus particulièrement concernés.

Ils introduisent des nombres entre 100 000 et 58 000 000. Ils nécessitent donc les références aux groupements oraux des mille et des millions.

Le professeur peut donc utiliser ces nombres pour faire collectivement les apports qui seront nécessaires.

Le professeur devra alors pousser plus loin l'exploration, du point de vue des nombres ayant des chiffres non nuls dans les différents groupements ou du point de vue de nombres plus grands.

- Pour l'objectif " connaître la signification de chaque chiffre ", la situation est plus délicate car le terme de connaître est très vague. Si on en limite l'acception à " savoir dire ", et si on limite la signification au rang du chiffre dans le tableau de numération, l'exercice c est un support satisfaisant.

Si on considère que " connaître la signification de chaque chiffre " nécessite la capacité à identifier le nombre de milliers et pas seulement le chiffre des milliers... il reste au maître à introduire et traiter ces questions à l'occasion de ce tableau...

b.Les exercices de la rubrique " je m'entraîne "

L'affirmation est complexe : « la rubrique *je m'entraîne* propose des exercices proches de la situation de découverte, mais qui précisent la notion mathématique en la sortant du contexte dans lequel elle a été présentée. » L'affirmation porte sur trois caractéristiques.

Leur proximité avec ceux de la situation dite de découverte est une chose difficile à identifier si on ne précise pas le critère de proximité. De quel type de proximité s'agit-il ? Elle n'est point liée à la situation, puisque ils ne concernent que des nombres. Est-elle liée aux questions mathématiques posées ? Une seule question mathématique serait concernée par la première,

c'est celle de la comparaison d'une grande quantité de nombres, et elle ne revient pas dans les exercices d'entraînement. La proximité peut alors provenir d'une exploration plus poussée des objectifs annoncés, du point de vue de ce qui est à la charge des élèves.
Par ailleurs, préciser une notion mathématique peut s'entendre au sens d'en enrichir la connaissance par des usages différents, par de nouvelles représentations, d'en explorer les relations avec les autres notions.

Les exercices ne font appel qu'aux nombres seuls. On peut donc déclarer qu'ils sortent tous du contexte de toute situation.

L'exercice 1 nécessite des aller retours entre écriture en chiffres et en lettres, ce qui est plus poussé que l'activité a de " je découvre " où seul le passage des chiffres aux lettres est proposé. La notion « de grand nombre » peut donc être considérée comme précisée par la maîtrise proposée du passage des mots aux écritures chiffrées.

Les exercices 2 et 4 peuvent être considérés comme une précision de vocabulaire (chiffre et nombres de dizaines, centaines, etc.).

Enfin, l'exercice 3 peut aussi être considéré comme un enrichissement de la notion de grand nombre, englobant les relations avec le comptage de un en un , de mille en mille, etc.

c. Fonction des exemples, et autres questions sur les exercices 2 et 4

Exercice 2,
L'exemple sert à préciser le sens de la consigne
Le chiffre 7 ne sert qu'une fois à identifier une position dans la partie qui détermine l'ordre de grandeur des nouveaux nombres. Les choix réalisés ont donc pour résultat de viser plus l'intégration des anciennes connaissances dans les nouvelles, que les spécificités de ces nouvelles.
Exercice 4,
L'exemple est à lui seul la consigne effective de l'exercice.
La précision de la notion tient au fait de l'introduction explicite de la question du nombre de millions et non plus du seul chiffre des millions.
L'exercice peut se limiter à l'oralisation du nombre. L'alignement à droite des nombres évite le travail pourtant nécessaire de détermination de l'oralisation de ce nombre par repérage à partir de la droite.
Il serait sans doute plus riche d'un point de vue mathématique d'étudier aussi le nombre de milliers, voire le nombre de centaines de mille ; etc...

3) ANALYSE DU DOCUMENT 5

a. Procédures correctes et erreurs possibles

Deux procédures correctes :

- P1 : transcrire successivement chacun des nombres en prenant par exemple les chiffres entourés en partant du centre et en s'en éloignant progressivement, puis comparer
- P2 : comparer directement en partant du centre vers l'extérieur et conclure dès que les chiffres sont différents.

Erreurs possibles avec les valeurs proposées dans l'exercice 1 :

- compter et comparer le nombre total des palets,
- se tromper dans la transcription des chiffres
- surtout oublier le rang où aucun palet ne sera parvenu

b. Exercice 2 : variations et son but

L'exercice introduit plusieurs variations : des nombres de palets supérieurs à 9, des zones non atteintes, et plusieurs totaux de palets dans deux emplacements d'une même zone.

L'exercice 2 peut avoir deux buts principaux :

- Éviter le codage direct appliquant la position spatiale relative sur la position dans le nombre, possible dans l'exercice 1 (zone sans palets)
- Inciter à relier position des chiffres et les questions d'addition à retenue.

4) COMPARAISON « RAPIDE » DE DOCUMENTS D'ENSEIGNEMENT

- du point de vue des objectifs, le document 5 ne vise pas du tout la numération orale, alors que c'est un point très important dans le document 4.

Le document 5 n'introduit pas explicitement la notion de grand nombre, et pourrait donner lieu à une activité ne portant que sur des sommes, voire sur des parties de sommes (c'est le propre du jeu que de donner une certaine liberté aux élèves)..

Si le passage au nombre est effectif, ce nombre est d'emblée inséré dans une situation d'addition et de comparaison, et par là plusieurs notions mathématiques (addition, ordre et position des chiffres dans le nombre) sont reliées, alors que le document 4 ne propose que des exercices où la numération n'est reliée qu'au comptage.

- du point de vue des stratégies d'enseignement, le document ne fournit aucune indication.

Le document 5 se réfère à un jeu. On peut penser qu'il vient à la suite de quelques activités du même type, et qu'il propose aux élèves d'enrichir les situations de jeu et/ou de prendre une position réflexive par rapport aux connaissances. L'activité du professeur est donc censée s'appuyer sur les productions « spontanées » des élèves, puis les exploiter pour dégager le savoir à maîtriser. Cette exploitation se fait souvent en s'appuyant sur les différences entre propositions d'élèves.

Le document propose des modèles à suivre, et la tâche du maître consiste donc à vérifier, de manière prioritaire, la conformité de la production des élèves au modèle proposé.

MARTINIQUE

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

Question 1 :

a) Il faut démontrer que $\varphi^2 = \varphi + 1$ ou encore $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1$

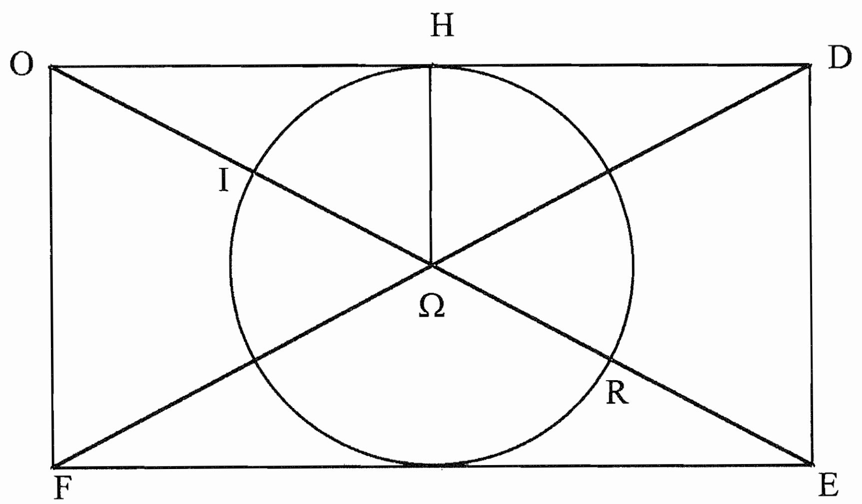
ce qui donne $\frac{1+5+2\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}+2}{2}$ soit $\frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ou $\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, cqfd

b) Il faut démontrer que $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$, ou encore $\frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1$

$\frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{1+\sqrt{5}-2}{2}$ soit $\frac{2(1-\sqrt{5})}{(1-5)} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ce qui se simplifie en
$\frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ soit $\frac{-(1-\sqrt{5})}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, cqfd

Question 2 :

Construction de la figure demandée :



a) - Calcul de OR : OR = OΩ + ΩR et $O\Omega^2 = OH^2 + H\Omega^2$ soit $O\Omega^2 = 1^2 + (\frac{1}{2})^2$, donc $O\Omega^2 = \frac{5}{4}$. par conséquent $O\Omega = \frac{\sqrt{5}}{2}$, comme $\Omega R = \frac{1}{2}$, $\Omega R = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \varphi$

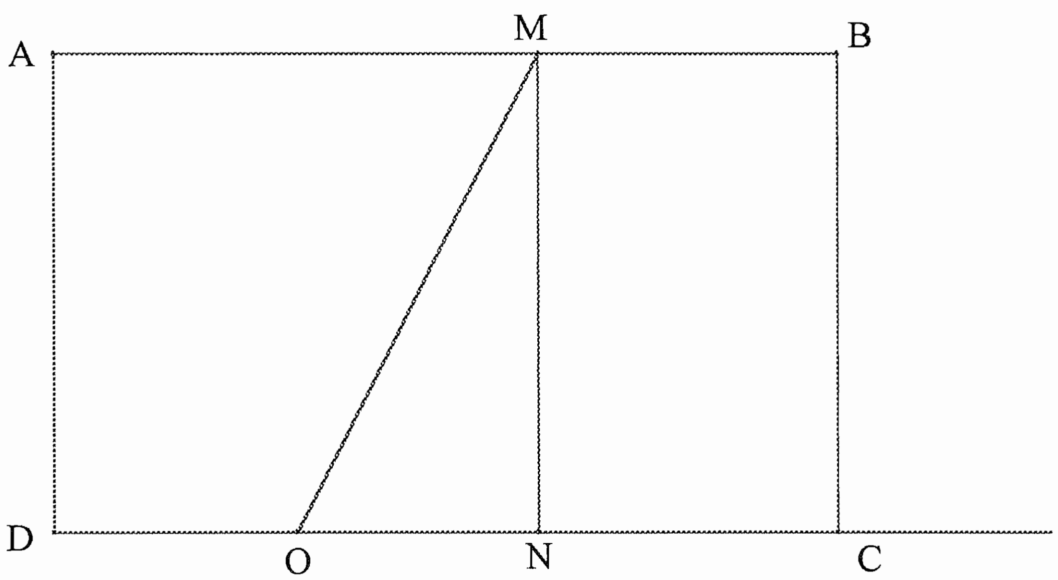
b) - Calcul de OI: $OI = O\Omega - \Omega I$ soit $\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\varphi}$

Une autre solution qui fait appel à des notions géométriques plus avancées consisterait à dire que : Puissance de O *par rapport au cercle* Ω : $OI \times OP = OH^2$, *soit* $OI \times \varphi = 1$ *donc :*
$OI = \frac{1}{\varphi}$.

Question 3 :

Rectangle d'or :

a) - Construction du rectangle ABCD :



b) - Calcul de OM : $OM^2 = ON^2 + NM^2$ soit $OM^2 =$ donc $OM = (\frac{l}{2})^2 + l^2 = \frac{l^2}{4} + l^2 = \frac{5l^2}{4}$,

donc $OM = \frac{l\sqrt{5}}{2}$.

Calcul de L : $L = \frac{l}{2} + \frac{l\sqrt{5}}{2} = l\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{L}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1 :

Compétences disciplinaires en jeu :

- Être capable de décomposer un problème en sous problèmes
- Être capable, le cas échéant, d'élaborer une stratégie de résolution
- Être capable de reconnaître les opérations usuelles de l'arithmétique qui permettront de résoudre le problème (addition, soustraction, multiplication)
- Être capable d'effectuer ces opérations
- Être capable, éventuellement, de juger de la vraisemblance ou de l'invraisemblance d'un résultat
- Être capable d'exprimer la solution par la production d'un écrit correct;

Bref, être capable d'élaborer une représentation opératoire du problème.

Question 2 :

Analyse des productions d'élèves

- **Les élèves B et E** fournissent une écriture complète, dans laquelle toutes les opérations sont identifiées et placées dans un ensemble qui représente une traduction opératoire des relations entre les données. On peut remarquer néanmoins que cette production est au delà de la simple décomposition en sous problèmes se traduisant par le calcul de résultats intermédiaires utiles pour la détermination de la solution. On peut penser qu'il s'agit de la production attendue par le maître. L'élève E commet une petite erreur, qui peut être attribuée à la recopie de la solution.
- **L'élève D** effectue une décomposition en sous-problèmes. Cette décomposition, telle qu'elle est présentée, a une forme intermédiaire entre la décomposition arithmétique classique et une écriture «algébrique» de type précédent. La seconde relation porte un signe (+) en lieu et place du signe (-), ce qui témoigne de la difficulté que les élèves peuvent rencontrer, à ce niveau, dans la pratique de ces écritures. En tout état de cause la solution est exacte.
- **L'élève G**, dont on peut penser qu'il s'est placé dans le cadre du contrat courant de la classe : fournir une écriture unique qui décrive les relations entre les données et les opérations à réaliser, a montre lui aussi, par sa réponse la difficulté de la tâche. Les sous-problèmes (calculs des timbres achetés et vendus) sont correctement identifiés. Toutefois les signes opératoires, qui rendent compte, sur le plan de l'écriture, des relations entre le total des timbres, ce qui a été acheté et ce qui a été vendu, sont inversés. Si on ajoute les erreurs de calcul qui ont été faites, on aboutit à un résultat erroné.
- **Les élèves A et F** ont donné comme solution au problème celle d'un sous problème. De plus, l'élève A fait une erreur de calcul.
- La production de **l'élève C** est celle qui est la plus éloignée d'une représentation opératoire (même partielle) du problème.

Question 3 :

Remédiations.

Les interventions du maître peuvent porter

1 - sur la décomposition en sous-problèmes : on peut suggérer de reprendre le texte du problème avec les élèves A, F et C, en leur faisant élaborer puis résoudre des équations intermédiaires du type : « combien a-t-il de timbres après son achat ? ».

2 - sur la représentation du problème sous la forme d'une écriture unique comportant des parenthèses et plusieurs opérations, on peut envisager un moment de débat et discussion collective autour de l'étude de quelques écritures : codage et décodage en particulier.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

Question 1 :

$a = b \times q + r$ avec $r < b$

Question 2 :

Les activités décrites dans ce document correspondent au niveau de la deuxième année du cycle 3 (CM1).

Question 3 :

En proposant aux élèves un problème dont la résolution fait appel à la division mais qui peut aussi se résoudre à l'aide des autres opérations et de comparaisons, le maître fait travailler sur le sens de la division avant d'aborder les techniques et notamment la technique classique qui devra être apprise et retenue. Une progression de ce type est conforme au programme et aux conceptions actuelles sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques, notamment dans le domaine de la connaissance des opérations arithmétiques et de leurs applications.

Question 4 :

La technique qui sera institutionnalisée est le produit d'un travail spécifique qui vise à en contrôler les éléments en leur conférant du sens. La progression comporte trois étapes

- rencontre et étude d'un problème (de division) ; la première partie de l'étude consiste à chercher une solution en s'appuyant sur des techniques construites à l'aide d'additions successives, de multiplications, etc. ; aucune technique n'est favorisée ;
- dans la seconde partie, on cherche à favoriser l'identification, par les élèves, du rôle d'une "bonne" décomposition additivo-multiplicative du dividende en fournissant un répertoire de multiples du diviseur ;
- dans la troisième partie, on rationalise la technique.

Question 5 :

Dans la phase trois, l'enjeu du travail des élèves est la conduite systématique de la technique précédente en fabricant des multiples qui sont soustraits les uns après les autres, jusqu'à ce qu'on ne puisse pas effectuer de soustraction. Les soustractions sont posées de sorte que les calculs effectués de tête se limitent à des multiplications. C'est une étape provisoire qui sera ensuite dépassée. On note que les problèmes soumis aux élèves comportent des restes nuls et des restes non nuls.

Question 6 :

La (ou les) phase(s) suivante(s) correspondent à la fin de l'identification de la technique et de ses caractéristiques fondamentales :

- soustraire des multiples les uns après les autres en cherchant, à chaque étape, le plus grand multiple d'une puissance de dix, correspondant à la décimale sur laquelle on est positionné, qui peut être soustrait ;
- traduction de cette méthode sous la forme de la recherche organisée des chiffres du quotient en opérant de gauche à droite sur le dividende.

MONTPELLIER

(Corrigé effectué à partir d'indications fournies par notre correspondant de l'académie).

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS) MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1 :

Question 1 : (3)(0)(17)(48) s'écrit en base dix : $48 + 17 \times 60 + 3 \times 60^3 = 649\ 068$.

Question 2 : 54 325 432 s'écrit en base soixante : (4)(11)(30)(23)(52). On obtient cette suite de « chiffres » en divisant 54 325 432 par 60, ce qui donne (52) comme reste et 905423 comme quotient, puis en divisant à nouveau le quotient par 60, ce qui donne (23) comme reste, etc., jusqu'au dernier quotient qui est 11 et au dernier reste qui est 4.
On peut aussi procéder en recherchant les valeurs des différentes puissances de 60, jusqu'à encadrer le nombre proposé par 60^4 et 60^5, puis faire le quotient de 54 325 432 par 60^4 ce qui donne (4) comme quotient ; on divise alors le reste obtenu par 60^3, ce qui donne (11) comme quotient, etc. (52) est alors le reste de la division par 60.

Question 3a : Pour que l'écriture soit correcte, il faut que a et b soient inférieurs à 6.

Question 3b : $N = (\overline{ab}) \times 60 + (\overline{ba}) = (a \times 10 + b) \times 60 + (b \times 10 + a) = 601 \times a + 70 \times b$. 70 est un multiple de 5. Si N est un multiple de 5 alors $601 \times a$ doit être un multiple de 5. Comme 601 n'est pas un multiple de 5, alors a est un multiple de 5, c'est à dire 0 ou 5. N est donc de la forme (b)(b0) ou (5b)(b5).

Question 3c : $(\overline{b})(\overline{b0})$ est inférieur à (10)(00), c'est à dire à 600. Ce cas est donc exclu. Reste l'autre cas, et N peut donc s'écrire de deux façons : $1000 \times b + 210 + 5$ d'une part et d'autre part $(50 + b) \times 60 + b \times 10 + 5$. De l'égalité obtenue, on tire $2790 = 930 \times b$, d'où $b = 3$.
Donc, N = 3215.

EXERCICE 2 :

Question 1 : Le premier diamètre [AB] s'obtient comme intersection du cercle et d'une droite quelconque passant par O. Le second s'obtient en traçant la médiatrice de [AB].

Question 2 : Le triangle ABC est isocèle, puisque C est sur la médiatrice de [AB]. Comme AB est un diamètre, l'angle en C est droit et le triangle est rectangle isocèle.

Question 3 : Le triangle ABC est la réunion des triangles OAB et OAC, qui par découpage et recollement donnent un carré de côté R. Donc : Aire (triangle ABC) = R^2.
Aire de la lunule (ADBEA) = Aire du demi-disque (ABDA) - Aire du secteur de disque (AEBA)
Aire du secteur de disque (AEBA) = Aire du quart de disque (CAEBC) - Aire du triangle (ABC)

Donc Aire de la lunule (ADBEA) est égale à :
Aire du demi-disque (ABDA) - Aire du quart de disque (CAEBC) + Aire du triangle (ABC)
Les deux disques qui interviennent ont pour rayon R et $R\sqrt{2}$.(théorème de Pythagore) ; et par suite :

Aire du du demi-disque (ABDA) = ½ πR^2

Aire du quart de disque (CAEBC) = ¼ $(\pi (R\sqrt{2})^2)$ = ½ πR^2

Ces deux aires se neutralisent et il reste : Aire de la lunule (ADBEA) = R^2

EXERCICE 3 :

Remarque : D'après l'énoncé h est une longueur et v(h) un volume ; la formule donnée est donc incorrecte car elle n'est pas homogène (mélange de nombres et de grandeurs).
En conséquence, nous désignerons par h la mesure en cm de la hauteur et par v(h) la mesure en cm3 du volume. (et dans la question 2, x sera la mesure en cm de la hauteur du liquide)

Question 1 : Le volume du tronc de cône est égal à la différence entre les volumes des deux cônes de la figure.

Volume du grand cône = $\frac{\pi}{3}3 = \pi$ cm^3, car le rayon de la base mesure 1 cm et la hauteur 3 cm.

Calcul du rayon r du petit cône. On applique la propriété de Thalès sur une section de la figure passant par l'axe des cônes. $\frac{r}{1cm} = \frac{3-h}{3}$ soit r = $\frac{3-h}{3}$ cm

Mesure du volume du petit cône = $\frac{1}{3}\pi\left(\frac{3-h}{3}\right)^2(3\text{-h})$

Mesure du volume du tronc de cône = $\pi - \pi\frac{1}{27}(3\text{-h})^3$. Or $(3\text{-h})^3 = 27 - 27h + 9h^2 - h^3$

Mesure du volume du tronc de cône = $\frac{\pi}{27}(27h - 9h^2 + h^3) = \frac{\pi h}{27}(h^2 - 9h + 27)$

Question 2a :

- Si x est compris entre 0 et 3, $V(x) = \pi x - [\frac{\pi x}{27}(x^2 - 9x + 27)] = \frac{\pi x}{27}(27 - x^2 + 9x - 27)$

$V(x) = \frac{\pi x^2}{27}(9 - x)$

- Si x est supérieur à 3, il faut ajouter à V(3) la mesure du volume du cylindre de hauteur 5-x *cm*, soit $\pi(x\text{-}3)$.

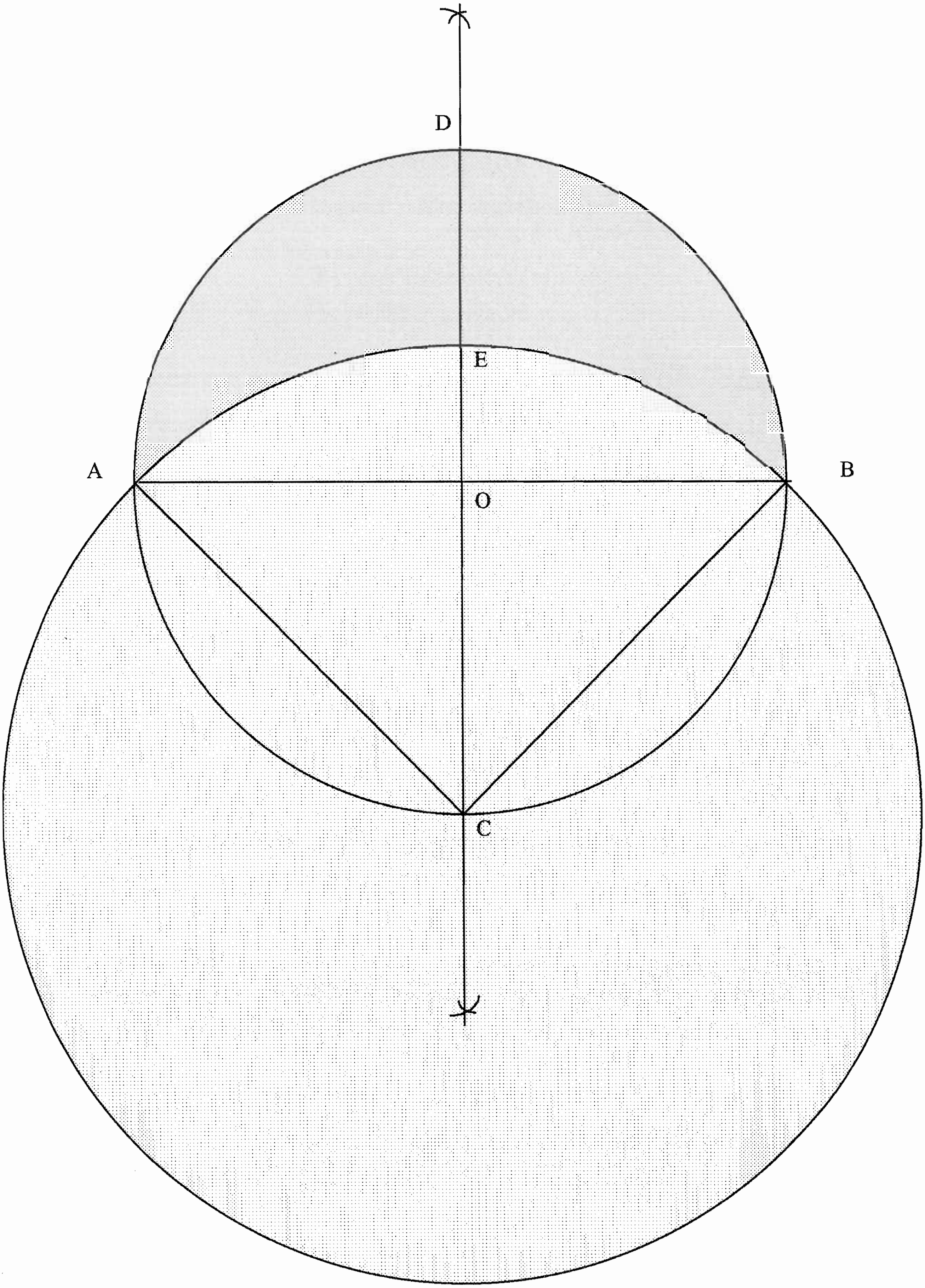
$V(x) = \frac{\pi x^2}{27}(9 - x) + \pi(x\text{-}3)$

Question 2b : Les graphiques 2 et 3 ne peuvent convenir, car $V(x)$ est une fonction constamment croissante, ce qui n'est pas le cas des fonctions représentées par ces graphiques.

Les graphiques 1 et 6 ne conviennent pas car $V(x)$ ne peut être une fonction linéaire pour $x<3$...

Le graphique 5 ne convient pas car il donne $V(x) = \pi$cm^3 pour x = 3, or $V(3) = 2\pi$ cm^3.

Seul peut donc convenir le graphique 4.


D
E
A
B
O
C

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

(EXERCICE 4)

1. NOTION MATHEMATIQUE

Pour ce qui concerne le calcul, il s'agit de la multiplication d'un nombre entier par un décimal.
Pour ce qui concerne la résolution du problème, il s'agit de la proportionnalité comme modèle d'agrandissement.

2. PARAMETRES

Si on considère la situation comme une situation d'agrandissement de dessins constitués de segments, on peut proposer les paramètres suivants pouvant avoir une influence sur la difficulté de l'exercice

- la présence ou non de quadrillage,
- la position des points sur un quadrillage : ils sont ou non choisis parmi les nœuds d'un quadrillage
- la position des segments : sur ou en travers des lignes de quadrillages, parallèles ou non
- la forme du quadrillage (carré, rectangulaire)
- la taille des carreaux

Les trois premiers paramètres, dans la mesure où ils modifient les connaissances nécessaires à la résolution, se nomment variables didactiques.

3. PROCEDURES CORRECTES

- Pour 6, on augmente de 3 ; pour 8, on augmente de 4 ; pour 10, on augmentera donc de 5 ; pour 12, on augmentera de 6, pour 14, on augmentera de 7...
- de 8 à 12, on ajoute la moitié du nombre de départ, de même pour aller de 6 à 9, ...
- utiliser les propriétés de la proportionnalité (le double, la somme des longueurs). Ainsi l'agrandissement de C vaudra deux fois celui de B, et celui de D vaudra la somme de celui de A et de B.
- Identifier le coefficient de proportionnalité et multiplier par 1,5

4. ERREURS

- élève 1 : Les deux réponses sont fausses. L'agrandissement est obtenu en ajoutant 4, différence entre l'agrandissement de A et A. L'élève n'a pas pris en compte les valeurs données pour B.
- élève 2 : la première réponse est bonne ; la seconde diffère d'une unité. On peut incriminer une erreur de calcul.
- élève 3 : c'est la bonne réponse
- élève 4 : Les deux réponses sont fausses. L'élève a reproduit les segments initiaux. Peut-être a-t-il été perturbé par la présentation de l'exercice, le fait que les segments initiaux et agrandis se voient attribuer le même nom.
- élève 5 : Les deux réponses sont fausses. La première relève du modèle « ajouter 4 » comme le premier élève et la deuxième peut relever de ce même modèle avec une erreur de calcul (par comptage ?).

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

QUESTION 1 :

Remarque : les nombres proposés par la question du sujet sont des <u>résultats</u> de calcul, et non pas des <u>réponses,</u> au sens usuel, que l'on donne à ces termes. Les réponses sont des longueurs, et s'expriment donc en unités de longueur, comme dans l'énoncé du problème. Le texte de la question n'est donc pas correctement rédigé. Il est évident que dans un tel cas, les correcteurs sont astreints à ne pas pénaliser les candidats sur cette question.

	Signification relative à la mesure en km	Réponse
$\frac{339}{8}$	C' est la valeur exacte de la mesure.	$\frac{339}{8}$ km
42,375	$\frac{339}{8}$ est un nombre décimal dont l'écriture à virgule est 42,375	42, 375 km
42	C'est la valeur entière approchée par défaut de la mesure en km, ou la valeur entière la plus proche, obtenue par exemple comme quotient entier de la division.	42 km.
42,37 et 42,38	Ce sont les nombres décimaux ayant deux chiffres après la virgule qui sont les plus proches de la mesure en km.	42, 370 km et 42, 380 km
42,3	C'est la valeur obtenue par troncature à la première décimale du quotient fourni par la division, ou une valeur approchée au dixième près par défaut	42,300 km
42,5	C'est une valeur approchée à cinq dixièmes près.	42,500 km.

Les réponses qui correspondent le mieux à la consigne sont $\frac{339}{8}$ km et 42,375 km. Cependant ce type d'écriture fractionnaire n'est pas courant à l'école primaire.

QUESTION 2 : Thème principal de la séquence
Le thème principal est celui sur lequel les élèves sont invités à s'exercer.
Quotient décimal exact et approché de deux entiers, au dixième, au centième, au millième, sens et technique de calcul de ces quotients.
Définitions possibles :
Le quotient décimal exact de deux entiers a et b n'existe pas toujours. Lorsqu'il existe, c'est le nombre q tel que a = bq
Le quotient décimal approché au dixième près (respectivement au centième, au millième) est le nombre décimal ayant un (respectivement deux, trois) chiffres (non nuls) après la virgule qui s'approche le plus du quotient exact de deux entiers.
Pour le trouver, il faut continuer la division jusqu'à ce que le quotient ait un chiffre de plus que le nombre demandé, et arrondir.

QUESTION 3 : Cycle
Cette séquence se situe en cycle 3. En effet, les programmes n'introduisent les nombres décimaux qu'au cycle 3.
La complexité des notions en jeu renvoie en général le travail au CM2.

QUESTION 4 : Procédures que peuvent utiliser les élèves pour répondre à la question de l'activité de découverte.
On peut imaginer par exemple :

- P1 : On pourrait imaginer que des élèves effectuent des mesures sur la carte et convertissent en fonction de l'échelle. Il faudrait pour cela que la conversion soit simple. La réponse la plus précise possible dépend des possibilités et des erreurs de mesure inévitables.
- P2 : Les calculs peuvent être réalisés en repérant à quelle unité de longueur correspond la précision qui a du sens dans la situation, en exprimant les longueurs avec cette unité, puis en faisant une division euclidienne classique. La réponse peut être donnée avec l'unité choisie.
- P3 : L'élève détermine le type de nombre décimal qui a du sens selon lui dans la situation : avec trois chiffres après la virgule par exemple s'il s'agit de mètres.
  Les calculs peuvent alors être réalisés par tâtonnement pour trouver un encadrement de 329 par deux produits de 8 avec deux nombres décimaux ayant un, puis deux, puis trois chiffres avec la virgule et différant entre eux respectivement de 10^{-1}, de 10^{-2}, de 10^{-3} ; On choisit celui dont le produit par 8 est le plus proche de 329.
  Cette procédure peut être favorisée si les élèves disposent de calculatrice.

QUESTION 5 : Problème soulevé dans l'exercice 5

Depuis le premier exercice les élèves qui utilisent la division sont en présence de divisions qui se terminent (rapidement) et d'autres dont le professeur sait qu'elles ne se terminent pas (dont le reste n'est pas nul).

L'affirmation « certaines divisions ne se terminent pas » n'a probablement pas le même sens pour un professeur et pour un élève. Pour un élève, cela signifie d'abord qu'une telle opération ne se termine pas dans les conditions de calcul habituel, c'est à dire après avoir poussé jusqu'à deux ou trois chiffres après la virgule.

On peut attendre d'un élève (non exceptionnel) qu'il déclare que la division ne se terminera jamais par ce qu'elle ne se termine pas dans les conditions usuelles, et qu'il comprend ainsi la demande du maître.

En attendre plus ne relève pas d'un exercice, mais d'un véritable problème, qui est plus une question de collège que d'école primaire.

<u>La réponse mathématique</u> est le repérage (et l'explication) de la période : comme les restes sont forcément plus petits que le diviseur, à un certain moment, on va retrouver le même reste et tout va recommencer indéfiniment à partir de là.

<u>Le choix des nombres</u> doit se faire pour obtenir une période de longueur inférieure ou égale à trois chiffres, pour obtenir une répétition observable dans le contexte de nombres qui ont un sens pour les élèves.

Chacun sait par exemple qu'avec les nombres 3 ou 9 comme diviseurs on obtient de tels résultats, dès que le dividende n'est pas multiple de 3.

QUESTION 6 : Prolongement de la séance

- Une réponse astucieuse consiste à dire qu'il faut différencier les activités avec les élèves, fournir au groupe qui réussit bien une activité autonome, et pouvoir s'occuper des plus faibles sur les questions ayant abouti à des échecs, qui sont difficiles et importantes. Par exemple ici, les deux objectifs de la leçon, sens ou technique du calcul du quotient décimal de deux entiers.
- On peut aussi envisager un prolongement sur le calcul du quotient approché d'un décimal par un nombre entier.

Le prolongement par un apprentissage de la technique de la division approchée de deux entiers, ou par un travail sur des problèmes ne sont pas des réponses satisfaisantes dans la mesure où aucun critère ne les distingue des activités de la séance proposée.

NANCY-METZ-STRASBOURG

(Corrigé effectué à partir d'indications fournies par notre correspondant de l'académie).

PREMIER VOLET (12 POINTS)

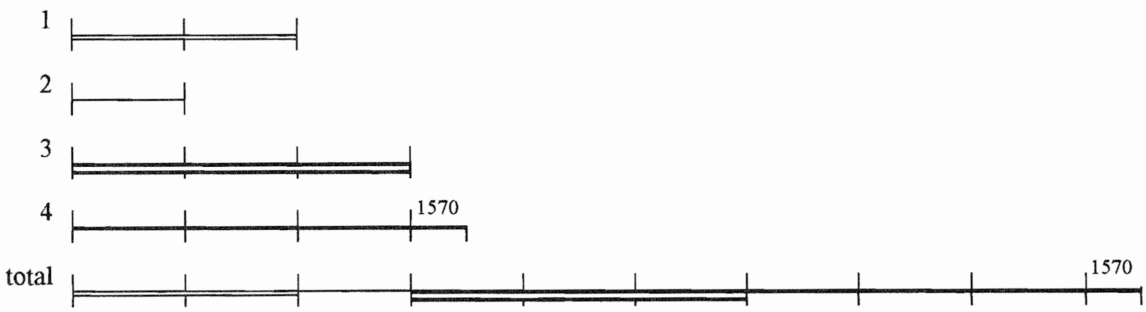
PREMIERE EPREUVE (8 POINTS) MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1 (même exercice que dans l'académie de Dijon : voir DIJON).

EXERCICE 2

Question 1 : Soit x la part du deuxième héritier : $2x + x + 3x + (3x + 1570) = 85\,000$
d'où $9x + 1570 = 85\,000$
$9x = 83\,430$
soit $x = 9\,270$.
Le premier reçoit 18 540 F ; le deuxième reçoit 9 270 F ; le troisième reçoit 27 810 F et le quatrième reçoit 29 380 F.

2) Représentation :



(85 000 - 1 570) représente 9 parts. Une part vaut donc : (83 430 : 9) soit : 9 270.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

La solution du problème n'est pas demandée au candidat. Toutefois, voici la réponse (en francs) :

Prix	95	83	179	104	325
Remise	19	16,6	35,8	20,8	65
Prix à payer	76	66,4	143,2	83,2	260

Question 1 : On peut citer :

- Reconnaître, trier, organiser et traiter les données utiles à la résolution de ce problème.
- compréhension du terme " remise " et association avec l'opération soustraction
- prendre 20% de...
- calcul sur les entiers : multiplier par 20, soustraction, division par 100
- calcul sur les décimaux : soustraction d'un entier et d'un décimal

Question 2 :
Élève A : associe 20% à : montant de la remise égal à 20 F.
Élève B : multiplie par 20 puis barre un ou deux chiffres selon qu'il a reporté le 0 du 20 ou non. Il ne tient pas compte des chiffres non nuls barrés.
Élève C : multiplie par 20 puis divise par 100 en traduisant le calcul à l'aide de la fraction 20/100. Il commet trois erreurs (166 au lieu de 16,6 ; 358 au lieu de 35,8 ; 208 au lieu de 20,8). Il additionne ensuite les prix remisés.
Élève D : Résultats juste en ce qui concerne le calcul de la remise. On ne sait pas comment il pratique ; peut-être calcul mental (multiplier par deux et travail sur l'ordre de grandeur) ou utilisation d'une calculette.

Question 3 :
Élève A : enlève 20 au prix initial
On peut penser que l'opération 104-20 faisant apparaître une retenue (ce qui n'est pas le cas dans les autres calculs), l'élève n'a pas su effectuer cette soustraction.
Élève B : l'élève utilise un procédé connu en CM2 : Pour diviser un nombre par 100 on barre deux chiffres à droite lorsque ces chiffres sont des " 0 ". L'élève utilise ce procédé juste mais l'applique à des chiffres non nuls, ce qui devient alors erroné.
Élève C : travaille sur des fractions. Il remplace une fraction de dénominateur 100 par le numérateur privé des " 0 " de droite. On peut penser qu'il se dit que : " pour diviser par 100... on barre les zéros qui apparaissent à droite. "
Élève D : pour tous les articles, sauf la jupe, il retranche le montant de la remise au prix initial ; pour la jupe, il ajoute.
Pour le pantalon et le manteau : pas d'erreurs
Pour la jupe : il ajoute 83 et 16,6 : peut-être est-il gêné par le nombre à virgule
Pour le pull et chemisier : il effectue deux soustractions (79-35,8 et 104-20,8). Pour effectuer ces opérations il ne s'occupent que des parties entières et garde les parties décimales : il ne maîtrise pas la soustraction à retenue ou la soustraction d'un décimal.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

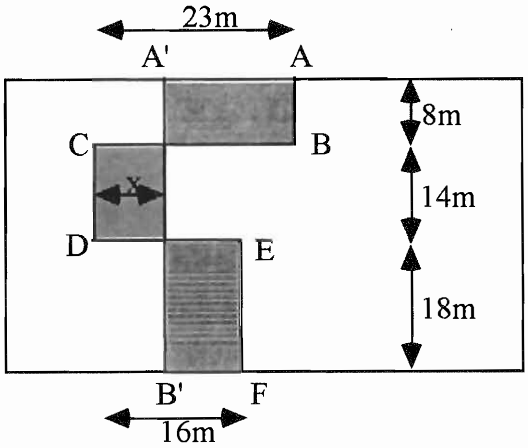
(même sujet que Dijon pour cette partie ; voir DIJON)

NICE

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1 : Le partage équitable



Nous désignerons par x la mesure, l'unité étant le mètre, de la longueur cherchée.
Dans le nouveau découpage, le voisin de gauche aura en plus la partie hachurée dont l'aire, en mètres carrés mesure 14x et en moins, les parties pointillées dont les aires mesurent, en mètres carrés, respectivement 8.(23-x) et 18.(16-x). On doit donc avoir 14x = 8(23-x) + 18(16-x) et donc x = 11,8 en mètres bien entendu.

EXERCICE 2 : L'exploitation agricole

1°) Si s désigne la superficie (mesure), en hectares, de l'exploitation, on a :
$\frac{1}{2}s+\frac{1}{3}s+\frac{1}{10}s+\frac{1}{20}s+\frac{1}{2}=s$, et donc $\frac{59}{60}s+\frac{1}{2}=s$, soit s = 30.

2°) Par suite, les différentes zones représentent en pourcentage :

Pâturage : 50%, car $\frac{1}{2}=\frac{50}{100}$;

Bois : 33,33....%, car $\frac{1}{3}=\frac{33,33...}{100}$

Verger : 10% car $\frac{1}{10}=\frac{10}{100}$

Culture : 5% car $\frac{1}{20}=\frac{5}{100}$

Enfin, la zone bâtie représente : $\frac{0,5}{30}=\frac{1}{60}=\frac{1,66..}{100}$, c'est à dire 1,66...%

EXERCICE 3 :

Un entier naturel	$\frac{255}{85}$	$\frac{85}{1}$
Un décimal non entier	$\frac{34}{85}$	$\frac{85}{170}$
Un rationnel non décimal	$\frac{5}{85}$	$\frac{85}{7}$

Complément : Détermination des entiers cherchés

• Pour que $\frac{a}{85}$ soit un nombre entier, il faut et il suffit que a soit multiple de 85. Ici, on a choisi 3×85.

• Pour que $\frac{a}{85}$ soit un décimal non entier, il faut et il suffit que a soit multiple de 17, sans être multiple de 5. En effet, on remarque que $85 = 5 \times 17$. Ici, on a choisi 2×17.

• Pour que $\frac{a}{85}$ soit rationnel non décimal, il faut et il suffit que a ne soit pas divisible par 17. En effet, la décomposition en facteurs premiers du dénominateur (après simplifications éventuelles) doit contenir des facteurs autres que 2 et 5. Le seul facteur possible est donc 17, qui ne doit pas pouvoir être simplifié.

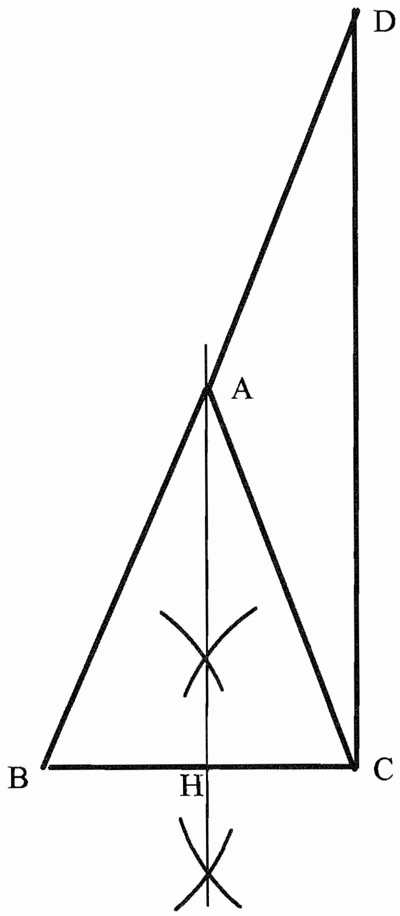
• Pour que $\frac{85}{a}$ soit un entier, il faut et il suffit que a soit un diviseur de 85. Comme $85 = 5 \times 17$, les diviseurs de 85 sont : 1, 5, 17, 85. D'où les choix possibles.

• Pour que $\frac{85}{a}$ soit un décimal non entier, il faut et il suffit que a ne divise pas 85, et que, après simplifications éventuelles, il n'y ait plus que 2 et 5 comme facteurs premiers au dénominateur. Comme la seule simplification utile peut être par 17, il faut donc choisir a de la forme $2^p \times 5^q$, $p \geq 1$ ou $q \geq 2$; ou bien de la forme $17 \times 2^p \times 5^q$, $p \geq 1$ ou $q \geq 2$.

• Pour que $\frac{85}{a}$ soit un rationnel non décimal, il faut et il suffit que a contienne des facteurs autres que 2 et 5, non totalement simplifiables avec 17.

EXERCICE 4 :

Question 1 : Le triangle ABC étant isocèle, la droite (AH) est aussi médiatrice de [BC]. Il suffit donc de construire le segment [BC], puis sa médiatrice (joindre les points d'intersection de deux cercles de même rayon centrés aux extrémités) ; on obtient le point H, le point A est situé sur cette médiatrice, à 5 centimètres. Construction avec traits apparents, ci dessous.



Question 2a : A étant le milieu de [BD], (AC) est la médiane du triangle ABD ; d'autre part, le triangle ABC est isocèle et donc AB = AC = AD, ce qui est une propriété caractéristique des triangles rectangles (La longueur de la médiane est moitié de celle de l'hypoténuse).
Remarque : Proposons une autre démonstration : A *est le milieu de* [BD*] et* H *celui de* [BC]. *Par suite,* (AH) *est droite des milieux dans ce triangle, donc parallèle à* (DC), *or* (AH*) est perpendiculaire à* (BC) *et donc, toute perpendiculaire à l'une étant perpendiculaire à l'autre,* (BC) *est aussi perpendiculaire à* (DC).
Question 2b : Les triangles ABC et ACD ont même aire. On peut le montrer de multiples façons ; nous en donnons deux démonstrations :

• L'aire d'un triangle est donnée par : " $\dfrac{\text{Base x Hauteur}}{2}$ ". Il suffit de prendre pour base de ABC le côté [AB] et pour base de ACD, le côté [AD]. Ces bases ont même longueur, et la hauteur relative à ces bases est la même pour les deux triangles.

• Le triangle ABH a toutes ses dimensions moitié de celles de BCD, son aire est donc le quart de celle de BCD. Mais d'autre part, l'aire de ABC est le double de celle de ABH ((AH) axe de symétrie du triangle ABC), donc l'aire de ABC est moitié de celle de BCD. D'autre part, on a aire(BCD) = aire(ABC) + aire(ACD), donc l'aire de ACD est aussi moitié de celle de BCD.

DEUXIEME PARTIE (4 POINTS)
TRAVAUX D'ELEVES

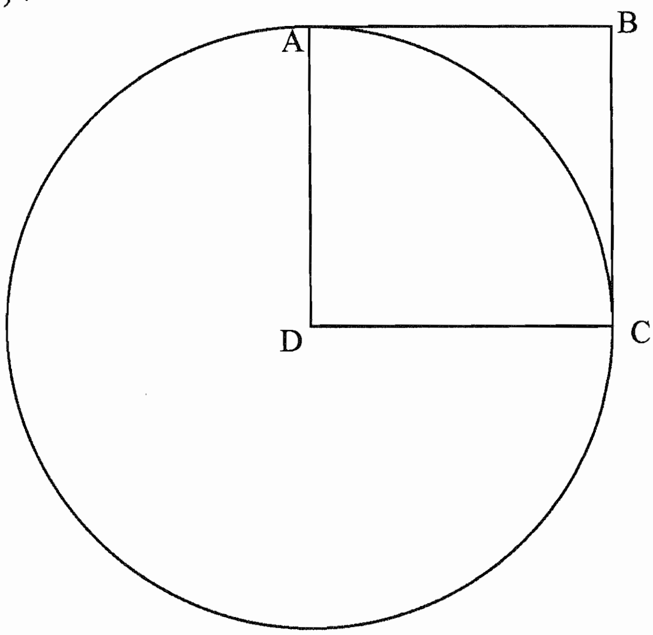
Question 1 : Les principales compétences que l'on peut évaluer par l'intermédiaire de cette tâche, sont, en se référant aux I.O.

- Savoir identifier quelques figures planes élémentaires (carré, cercle) dans une figure complexe.
- Elaborer et communiquer une stratégie de reproduction (ce qui suppose, en particulier, une chronologie établie pour les tracés).
- Utiliser à bon escient le vocabulaire de la géométrie plane (cercle, sommet, carré, côté, centre, rayon).

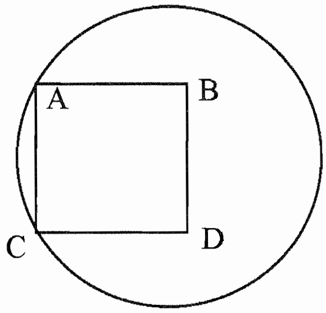
Remarque : Rappelons que dans ce genre de question, il n'est pas question de "réciter" la liste des compétences, en espérant "tomber juste" par moments. Une telle attitude est en général pénalisée. Il n'est pas question, ici, d'énoncer les compétences relatives à la construction de figures ou à l'utilisation d'outils qui ne sont pas requises par la tâche. Par contre, d'autres compétences, mineures, telles que "anticiper" pourraient être proposées....

Question 2 : Le message produit par l'élève B recèle deux ambiguïtés : d'une part le centre du cercle n'est pas précisé, d'autre part le rôle des points A et C n'est pas défini : sont-ils sommets du carré, ce qui est implicite, sommets opposés, ce qui est beaucoup moins implicite ? On peut donc avoir plusieurs productions :

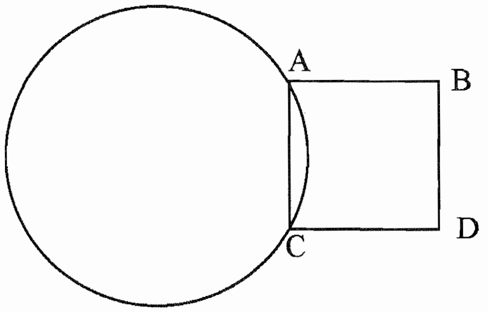
- A et C sont opposés (Le centre du cercle est donc B ou D) :
  - # La production correcte
  - # Une production correcte, mais que les élèves peuvent avoir quelques difficultés à reconnaître comme satisfaisante (Elle se déduit par rotation et non par translation de la figure originelle) :



- A et C sont consécutifs : Deux figures incorrectes sont possibles (réduites à 50%) :



ou bien



(Le centre est situé sur la médiatrice de [AC] et n'a que deux positions possibles).
Question 3 : L'élève A utilise un vocabulaire incorrect : angles au lieu de sommets, et en diagonale au lieu de opposés.

L'élève D commet une erreur de désignation du carré : compte tenu de la position des points, le carré est ACDB et non ABCD.

Question 4 : "Il y a un carré de 4cm de côté. Il y a un cercle. Il y a un sommet du carré qui est le centre de ce cercle. Deux côtés sont les rayons du cercle."

DEUXIEME VOLET (8 POINTS)
PARTIE DIDACTIQUE

QUESTIONS à propos du document 1 :

Question 1 : On peut définir l'objectif de cette leçon par : "L'élève doit savoir écrire un nombre, ou le nombre d'objets d'une collection, sous forme multiplicative.".

Question 2 : Cette leçon se situe en CE_1, en effet, il s'agit clairement d'une des premières séquences sur la multiplication, or celle-ci est introduite dans cette classe. On peut remarquer d'autre part que les nombres utilisés sont "petits", ce qui corrobore cette affirmation.

Question 3 : Nous l'avons dit, cette séquence est au début de l'apprentissage de la multiplication. Il n'est pas question ici de calculer, c'est-à-dire déterminer l'écriture en numération, mais seulement de donner un sens aux écritures multiplicatives. Ce n'est toutefois pas la première séquence, les enfants ont auparavant appris à coder et décoder multiplicativement des collections d'objets, en tenant compte de la disposition spatiale : rectangles ou paquets (présentation du maître au début du document). Le sens du codage (décodage) multiplicatif a donc déjà été abordé, introduit.

Question 4 : Le maître n'a pas distribué les jetons car il désire que les enfants travaillent sur le nombre, et non sur sa représentation comme cardinal d'une collection. Il veut provoquer des écritures du type, par exemple, $12 = 6 + 6 = 2 \times 6$... par des procédures numériques et non par une disposition de jetons en rectangle. D'autre part, l'intention du maître est clairement d'utiliser les jetons non pas comme outil de recherche, mais comme outil de validation (...il propose de les utiliser pour vérifier leurs réponses). Les jetons permettront d'ailleurs peut-être aux élèves de découvrir de nouvelles écritures multiplicatives.
Remarque : Bien que ne disposant pas matériellement de jetons, les élèves peuvent y avoir recours par l'intermédiaire de procédures dessinées.

QUESTIONS à propos du document 2 :

Question 1 : Du point de vue de la tâche :

- Dans les exercices 1 à 3, l'élève est confronté à des situations de codage : il doit mettre en relation une collection avec une ou plusieurs écritures de nombres. Dans les exercices 4 et 5, il est confronté à des situations de décodage : il doit réaliser une collection correspondant à une écriture multiplicative.
- Dans les exercices 1 à 3, il n'y a que deux possibilités : barrer ou entourer, et une seule est juste. Dans les exercices 4 et 5, il y a de multiples bonnes réponses. (On peut dire que la tâche relative aux exercices 1 à 3 est fermée, celle relative aux exercices 4 et 5 est ouverte).

• Du point de vue des compétences :

- L'enfant doit évidemment savoir coder et décoder multiplicativement une collection (on retrouve les tâches précédentes).
- Il doit savoir organiser chronologiquement sa recherche dans les exercices 1 à 3, ce qui n'est pas le cas pour les exercices 4 et 5.

- Il doit savoir reconnaître l'égalité et l'inégalité d'écritures, éventuellement par des procédures numériques, dans les exercices 1 à 3, compétence qui n'est pas requise dans les exercices 4 et 5. (Par exemple, il lui faut reconnaître que 2×18, c'est aussi 6×6). Ces compétences peuvent concerner le passage d'une écriture multiplicative à une écriture additive.

Question 2 : Les erreurs possibles sont liées à la variable didactique : "choix des écritures proposées".

• Ainsi, dans les exercices 1 et 2 où l'on a proposé de "fausses écritures additives", une confusion entre écriture additive et multiplicative est possible ($6 + 6$ au lieu de 6×6, $7 + 5$ au lieu de 7×5).

• Dans l'exercice 1, une écriture 6×5 est proposée, elle peut correspondre à une erreur dans le comptage des lignes ou plutôt des colonnes (elles sont plus resserrées...; ou bien l'élève ne compte pas le carreau du coin à la fois pour les lignes et pour les colonnes).
Si l'élève a procédé numériquement à partir de l'écriture $6 + 6 +$.., il peut aussi produire cette erreur en comptant le nombre de signes +.

• Enfin, dans l'exercice 3, la réponse 8×8 peut être entourée par confusion de l'écriture multiplicative avec l'écriture additive (il y a deux paquets de 8). Dans la mesure où les deux paquets de 8 sont peu repérables, cette erreur peut aussi résulter d'un traitement erroné du nombre 16 dans le champ du numérique ($16 = 8\times8$!).

Question 3 : La réponse majoritairement entourée aurait été, selon les exercices : 6×6 ; 7×5 ; 8×2. Ces réponses sont en effet liées au contrat didactique implicite que la séquence a instauré (cf : document 1). D'autre part, la présentation spatiale des collections dans les exercices 1 et 2 est prégnante ; elle l'est moins dans le 3. Pour l'exercice 3, la forme de la collection est moins prégnante, il peut dès lors y avoir conflit entre le contrat didactique hérité de la séquence précédente et celui issu du C.P. relatif à la décomposition des nombres dans la base 10 ; l'écriture majoritairement entourée pourrait être $10 + 6$.

Remarque : On peut envisager cette question sans tenir compte du contrat didactique, ou plutôt en supposant que celui-ci n'influence pas significativement les procédures. Une procédure, pour les élèves, serait alors de tester systématiquement les écritures dans l'ordre où elles sont proposées. Comme il se trouve que la première écriture proposée est toujours juste, les élèves pourraient être amenés à entourer majoritairement, 2×18 ; $5 + 5 + 5 +\ldots$; 4×4.

Compléments : Contrat didactique :

Le contrat didactique est constitué des obligations et sanctions que chaque partenaire de la situation didactique impose ou croit imposer ou auxquelles il est soumis ou croit être soumis.

Dans la situation qui nous occupe, les élèves sont amenés à croire que ce qui est attendu d'eux est la production d'une écriture multiplicative, d'où les réponses majoritaires. Cette "croyance" des élèves résulte d'un contrat didactique implicite, établi par la pratique : la connaissance visée doit être réinvestie dans les exercices qui suivent une séquence.

Question 4 : L'écriture 7 + 7 +... ne correspond pas à un codage du nombre de croix lié à la disposition spatiale. L'accès à cette écriture ne peut qu'être numérique (pas facile de voir ou faire 5 paquets de 7 croix). Le maître pourra observer et utiliser ultérieurement ces modes d'accès : calcul additif, par exemple 7 + 7 +... = 35 et 10 + 10 + 10 + 5 = 35 donc.. ; ou bien transformations d'écritures : 7×5 = 5×7 = 7 + 7 +... où l'on reconnaît une transformation par commutativité puis une transformation par décodage itératif du signe ×. Le maître veut donner du sens aux diverses écritures d'un même nombre et instituer les règles de passage des unes aux autres, et cela sans recours à la collection. Il veut simplement apprendre aux enfants à calculer.

ORLÉANS-TOURS

(Corrigé effectué à partir d'indications fournies par notre correspondant de l'académie).

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS) MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1 :

(Avertissement : dans la suite, on écrira en indice à droite du nombre la base de référence. Sans indice, le nombre est écrit en base dix.).

Question 1 :

L'écriture de 132_6 : sous forme polynomiale permet de déterminer sa «valeur» (écriture en base dix) : $(1 \times 36) + (3 \times 6) + 2 = 56$; 132_6 représente donc 56. Ce n'est pas un multiple de 6, mais c'est un multiple de 2.

Question 2 :

$324_6 = (3 \times 36) + (2 \times 6) + 4 = 124$: multiple de 2, mais pas de 6;

$222_6 = (2 \times 36) + (2 \times 6) + 2 = 86$: multiple de 2, mais pas de 6;

$550_6 = 210$, qui est multiple de 6 donc multiple de 2.

Question 3 :

$abc_6 = (a \times 36) + (b \times 6) + c = 2 \times (18a + 3b) + c$.

Si c = 0 ou c = 2 ou c = 4, l'expression est la somme de deux multiples de 2 : **abc est donc multiple de 2**. *La condition est suffisante.*

$abc_6 = (a \times 36) + (b \times 6) + c = 6 \times (6a + b) + c$.

abc est multiple de 6 si c=0. *La condition est également nécessaire.*

Question 4 :

Théorèmes de divisibilité en base Six :

Un nombre entier est divisible par 6 si et seulement si son écriture en base six se termine par un 0.

Un nombre entier est divisible par 2 si et seulement si son écriture en base six se termine par un 0, un 2 ou un 4.

Question 5 :

a) $325_6 = 125$; $212_6 = 80$; $555_6 = 215$. Or 125, 80 et 215 sont tous multiples de 5.

b) On remarque que $3 + 2 + 5 = 10$, $2 + 1 + 2 = 5$, et $5 + 5 + 5 = 15$.

On peut conjecturer le critère suivant : "Un entier est divisible par 5 si et seulement si la somme des chiffres de son écriture en base six est elle-même multiple de 5".

Une exemple de justification : $abc_6 = a \times 36 + b \times 6 + c = a \times 6 \times (5 + 1) + b \times (5 + 1) + c$

$$= (6a + b) \times 5 + (5 + 1)a + b + c$$
$$= (7a + b) \times 5 + (a + b + c)$$

La condition est nécessaire et suffisante

EXERCICE 2 :

Question 1 :

AN = AB + BN = AB + CH = 8 + 5 = 13 ; NQ = GH = S.

La mesure de l'aire de ABHF, en cm^2 est : $8 \times 8 = 64$; la mesure de l'aire de AEQN en cm^2 est $13 \times 5 = 65$.

Les pièces du puzzle construit sur le découpage initial du carré recouvrent le rectangle. Les deux figures ont même aire, donc leurs mesures exprimées dans la même unité sont égales donc 64 = 65

Question 2 : (rappel : le rapport de deux longueurs est le rapport de leurs mesures, avec la même unité).

a) $\tan\widehat{BAC} = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{8}$ d'où $\widehat{BAC} = 20{,}5°$. A'D = A'E - DE = 5 - FG = 2

et $\tan\widehat{DA'C} = \frac{DG}{A'D} = \frac{5}{2}$ résultat dont on peut déduire que $\widehat{EA'C} = \widehat{DA'C} = 68{,}0°$.

b) $\widehat{EA'G} + \widehat{BAC} < 90°$. L'angle A n'est donc pas recouvert (il y a "un trou").

Question 3 :

a) $\tan\widehat{ACB} = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{8-x}$ et $\tan\widehat{EA'G} = \frac{EF}{EA'-FG} = \frac{x}{x-(8-x)} = \frac{x}{2x-8}$

b) Pour que l'angle A soit recouvert, il faut que $\widehat{ACB}$ et $\widehat{EA'G}$ aient même mesure. L'égalité des tangentes donne

$\frac{8}{8-x} = \frac{x}{2x-8} \Leftrightarrow 8(2x-8) = (8-x)x \Leftrightarrow 16x - 64 = 8x - x^2 \Leftrightarrow x^2 + 8x = 64$

c) x étant la longueur du côté EA et (x + 8) celle de AN, x (x + 8) est l'expression de la mesure de l'aire du rectangle AEQN, 64 celle de ABHF :

Question 4 :

a) $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$, d'où $x^2 + 8x = (x + 4)^2 - 16$ et alors $x^2 + 8x = 64$ si et seulement si $(x + 4)^2 - 16 = 64 \Leftrightarrow (x + 4)^2 = 16 + 64 = 80$.

On obtient bien : $x + 4 = -\sqrt{80}$ ou $x + 4 = \sqrt{80}$.

b) $x + 4 = -\sqrt{80} \Leftrightarrow x = -4 - \sqrt{80}$, qui est négatif, donc ne convient pas.

Reste $x = -4 + \sqrt{80}$ qui convient.

On calcule 8 (Φ -1) soit $8\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{2}\right) = 8 \times \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = -4 + 4\sqrt{5} = -4 + \sqrt{80}$, cqfd

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

Question 1 :

Parmi les procédures possibles qui permettent de réaliser une construction de la figure, on peut proposer les suivantes, en utilisant les mesures des longueurs des segments obtenus sur le dessin fourni dans le texte :

- On trace les deux diagonales en précisant leurs longueurs, la position de leur point d'intersection et le fait qu'elles sont perpendiculaires. On termine en traçant les côtés.
- On trace un triangle dont les côtés mesurent 13 cm, 9,8[1] cm et 5,6 cm. On trace ensuite le symétrique de ce triangle par rapport au grand côté (ou bien directement les deux triangles simultanément) ; on termine en traçant la deuxième diagonale.
- On trace deux triangles isocèles de part et d'autre d'un segment commun, leur base commune, ainsi que leur axe commun. On pourra préciser que l'un des triangles est rectangle.
- On trace un triangle isocèle rectangle, puis son axe de symétrie qu'on prolonge de 9 cm, dans le demi plan déterminé par l'hypoténuse qui ne contient pas le triangle précédent. On termine en traçant les deux derniers côtés.

Question 2 :

Dans le message n°1, le mot *diagonale* apparaît utilisé correctement ; il désigne très précisément la diagonale horizontale du quadrilatère.

Dans le message n°3, le mot *diagonale* paraît être utilisé pour signifier «en biais» par rapport aux directions principales de la feuille (verticale et horizontale). Le terme est donc bien utilisé dans un sens différent du sens mathématique.

Question 3 :

Trois différences entre le message n°2 les autres messages peuvent être prises parmi les quatre suivantes :

- Il fait référence à une forme familière, le cerf-volant. Ceci contribue à donner une vision globale de la figure avant même d'en commencer la construction.
- Les sommets du quadrilatère et le point d'intersection des diagonales sont désignés part des lettres.
- Il utilise un vocabulaire plus mathématique (notamment le mot *point).*
- Il ne privilégie pas d'orientation (verticale...).

Dans ce message, les instructions sont désignées par des numéros. Cette différence concerne la forme du message, mais non les propriétés géométriques de la figure.

Question 4 :

Le tracé réalisé n'est pas conforme au modèle proposé. Le segment de 9 cm de longueur qui représente la « demi- diagonale » verticale du quadrilatère n'a pas son extrémité supérieure en C mais en D. Le résultat ne paraît pas dû à l'imprécision du message, mais à une mauvaise lecture (ou une mauvaise interprétation).

Question 5 :

On met facilement en évidence que le fait de ne pas préciser la position du segment de 8cm, perpendiculaire au segment initial, conduit immédiatement à des tracés qui ne correspondent pas à la figure demandée.

DEUXIÈME VOLET
DIDACTIQUE

Question 1 :

- a) Le *support facilite la construction.* En effet :

[1] 9,8 cm est une valeur possible du côté appuyé sur deux « demi-diagonales » de longueurs respectives 9 cm et 4 cm ; elle sera calculée en utilisant le théorème de Pythagore.

- Le papier quadrillé permet d'éviter l'usage de la graduation de la règle, et de l'équerre pour dessiner le carré. L'élève peut utiliser le repérage sur quadrillage et le comptage des carreaux ou de leurs côtés.
  Pour la première étape la réponse est : oui

- Pour tracer la médiane, l'élève repère le milieu en comptant les carreaux et il trace le segment passant par 1 et parallèle à [AD], en suivant une ligne verticale existant sur le quadrillage.
  Pour la deuxième étape la réponse est : oui

- Pour tracer l'arc de cercle, on ne fait qu'utiliser des points déjà tracés en prenant comme rayon un segment qui n'est pas porté par le quadrillage.
  Pour la troisième étape la réponse est : non

- Pour le tracé des deux derniers segments, on peut marquer une petite différence. Pour l'un d'entre eux (le segment "horizontal") la tâche consiste à prolonger un segment existant dont le tracé a été facilité par la présence du quadrillage. Pour l'autre, la proximité d'une ou de deux "verticales" du quadrillage peut représenter une aide significative.
  Pour la quatrième étape la réponse est : oui

- **b)** Étude des productions des élèves :
- La production de **type 1** est très précise et soignée, les étapes sont bien identifiées et décrites avec brièveté et précision. Les objets (points, segments) et opérations géométriques (prolonger) sont bien identifiés et nommés.
- La production de **type 2** présente une lacune majeure. Elle concerne la définition du tracé de l'arc de cercle : on ne précise ni le centre, ni le rayon. L'élève montre un grand souci de codage des angles droits qui n'est pas en rapport avec les exigences de la tâche.
- La production de **type 3** met en évidence des problèmes réels au niveau de l'exécution des tracés : l'élève ne semble pas soucieux de suivre les traits du quadrillage. L'emploi du vocabulaire géométrique laisse à désirer et certains objets (la médiane du carré, l'arc de cercle) sont mal caractérisés. Leur rôle dans la construction a été perçu, mais l'élève ne semble pas avoir su ou pu engager les connaissances et savoirs géométriques leur correspondant, dans la conduite et la description du tracé.
- La production de **type 4** apparaît plus précise dans sa description. Elle est mieux réussie, dans sa réalisation, que la précédente. Toutefois, le centre de l'arc de cercle n'est pas identifié, et la construction est visiblement fausse. Les rapports entre médiane et centre du carré ou milieu du segment OC sont ambigus. On notera que la perpendiculaire en K n'est pas tangente à l'arc de cercle.

- **c)** La phase de construction permet à l'élève de modifier son rapport à la figure. Il peut ainsi passer d'un rapport construit sur une simple énumération des éléments de la figure, à un rapport plus opératoire du point de vue de la construction, dans lequel ces éléments sont caractérisés géométriquement, du point de vue de leur réalisation, et des interrelations que cette réalisation demande.

Question 2 :
Deux polygones étaient en jeu dans l'exercice proposé : le carré[2] et le rectangle.
- **a)** La notion de médiane d'un carré ne paraît totalement acquise.

---
[2] Pour le carré, il semble que, pour les élèves considérés, la seule connaissance du côté soit suffisante pour effectuer le tracé. Il n'y a pas de mention des angles.

Pour le rectangle dont le tracé était un des objectifs de l'exercice :

- Dans la production de **type 1**, le rectangle semble avoir été identifié en tant que tel, BL et KC sont deux côtés opposés, parallèles et isométriques. Deux angles droits sont donnés par le prolongement de [AB] et [DC].
- Dans la production de **type 2,** le rectangle semble avoir été identifié : l'élève a marqué les des angles droits et prolongé des segments (en dépit d'une formulation insatisfaisante).
- Dans la production de **type 3**, on n'est pas assuré que l'élève ait cherché à construire un rectangle. Par contre, on peut penser que [BL] et [KC] sont considérés comme parallèles, car tous deux sont perpendiculaires à [BC].
- Dans la production de **type 4,** la dernière phrase de l'élève donne à penser que le carré BCKL a été vu comme le terme de l'activité. Le rectangle demandé n'est pas mentionné.

- **b)** Les compétences relatives à l'utilisation de repérages peuvent être de deux types :

- un repérage «global» (ou absolu) par rapport à la feuille et ses directions privilégiées. Ce repérage se marque par l'utilisation d'un vocabulaire spatial : verticalement, vertical, que l'on retrouve dans quelques productions.

- un repérage «local» (ou relatif) de points ou d'autres éléments des figures les uns par rapport aux autres. Ce repérage se traduit par l'utilisation d'un vocabulaire de positionnement : milieu du carré, milieu du côté droit. On le retrouve dans quelques productions.

- **c)** On peut proposer le montage didactique suivant : le maître fait mesurer DK et DA ; puis calculer le rapport DK/DA. De même, avec LK et CK et le rapport LK/CK. Il peut alors faire constater que les deux rapports sont de même ordre de grandeur.

- d) aide mémoire pour apprendre à utiliser le verbe « prolonger » : pour prolonger un segment tracé sur une feuille de papier on utilise une règle et un instrument de tracé (crayon, stylo). On fait coïncider un côté de la règle avec le segment et on effectue un tracé en s'appuyant sur ce côté, de sorte qu'il coïncide avec le segment déjà tracé et qu'il déborde.

Question 3 :

Programme de tracé de la spirale : Les tracés vont être effectués sur du papier uni.

- Tracer un carré ABCD.
- Tracer un rectangle ALKD selon la méthode de l'exercice 3 (document 1). Dans ce rectangle sont juxtaposés un carré (ABCD) et un petit rectangle (BLCK)
- Tracer un carré BLEJ à l'intérieur du petit rectangle de l'étape précédente
- Tracer un carré EKFQ à l'intérieur du petit rectangle de l'étape précédente
- Tracer un carré FCGR à l'intérieur du petit rectangle de l'étape précédente.
- Tracer un carré GJHP à l'intérieur du petit rectangle de l'étape précédente.
- Tracer un arc de cercle DB de centre C et de rayon CB, puis un arc de cercle BE de centre J et de rayon JE, puis un arc de cercle EF de centre Q et de rayon QF, un arc FG de centre R et de rayon RG et enfin un arc GH de centre P et de rayon PH.

REIMS

(Corrigé effectué à partir d'indications fournies par notre correspondant de l'académie).

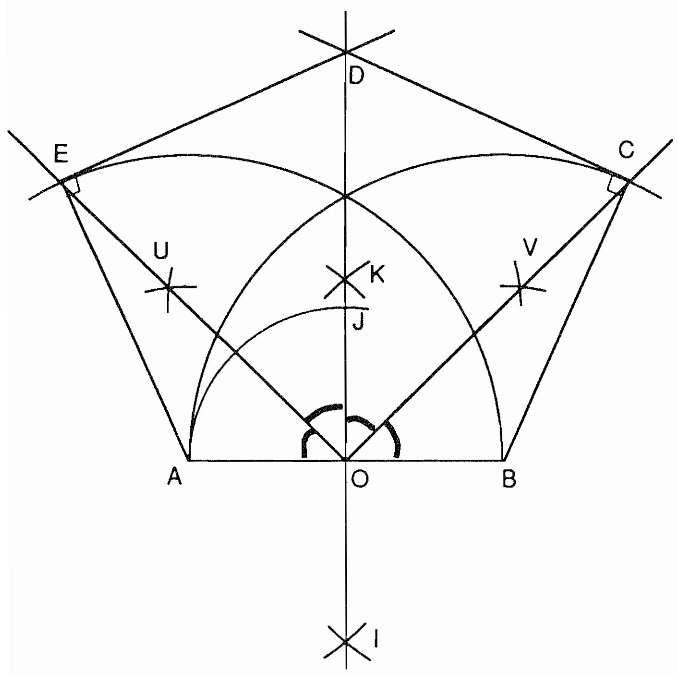
PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1 :

Question 1 :

Figure construite :



L'énoncé utilise des notations désuètes : "droite (xy)' ; "demi-droite [Ou)", ...
Au cours de la construction nous allons introduire d'autres notations que nous utiliserons ensuite.

En traçant des arcs de cercles de même rayon, centrés en A et en B, on obtient les deux points K et I de la médiatrice du segment [AB].
Tout le reste de la figure est dans le demi-plan P de bord (AB) qui contient le point K.
Le point J est le point de la demi-droite [OK) tel que OJ = OA.
Les points U et V sont les intersections d'arcs de cercles de centre O avec des arcs de cercles de centres respectifs A et B, tous de même rayon.
Les demi-droites du demi-plan P cherchées sont les demi-droites [OU) et [OV).
On trace des arcs de cercles de centres respectifs A et B et de rayon AB pour obtenir les points E et C, puis les droites perpendiculaires à (AE) et (BC) passant par E et C respectivement.

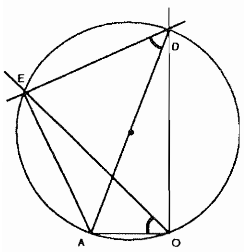
Question 2 :

- Soit la symétrie axiale d'axe (KI). A est symétrique de B. Les deux cercles $\mathcal{C}$(A, AB) et $\mathcal{C}$(B,BA) sont symétriques. [OU) et [OV) sont symétriques.

Donc E qui est l'intersection de $\mathcal{C}$(A, AB) et de [OV) et C qui est l'intersection de $\mathcal{C}$(B,BA) et de [OU) sont symétriques. (Le demi-plan P est invariant par la symétrie).

- (AE) et (BC) sont symétriques. La perpendiculaire en E à (AE) est symétrique de la perpendiculaire en C à (BC). Donc (ED) et (CD) sont symétriques. Leur point d'intersection C appartient donc à l'axe de symétrie. Donc D est sur (KI).

Question 3 :



- On sait que $\widehat{DEA}$ = 90° ainsi que $\widehat{DOA}$
Le triangle ADE est rectangle en E donc inscriptible dans le cercle de diamètre [AD].
Le triangle DOA est rectangle en O donc inscriptible dans le cercle de diamètre [AD].
Donc les points E et O sont sur le cercle de diamètre [AD].

- Mesure de l'angle $\widehat{ADE}$: dans le cercle de diamètre [AD], les angles $\widehat{EDA}$ et $\widehat{EOA}$ interceptent un même arc. Il sont donc égaux. Or $\widehat{EOA}$ = 45° donc $\widehat{EDA}$ = 45°.

- Côtés du pentagone :
- On sait que AB = EA = BC (comme rayons de cercles égaux). De plus, le triangle EDA est rectangle et possède un angle de 45°. Il est donc isocèle. Par conséquent, ED = EA. Pour des raisons de symétrie (question 1), CD = CB.

Donc AB = BC = CD = DE = EA. Les cinq côtés du pentagone sont de même longueur, 4cm.

Question 4 :
L'angle $\widehat{DEA}$ est droit. Or l'angle $\widehat{EDC}$ est : $\widehat{EDC} = \widehat{EDA} + \widehat{ADB} + \widehat{BDC} = 90° + \widehat{ADB}$.
Donc $\widehat{EDC}$ > 90°. Le pentagone a des angles de mesures différentes, il n'est donc pas régulier.

EXERCICE 2 :
(Voir le même exercice dans le sujet de DIJON.).

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

(même sujet que Dijon, pour cette partie, mais qui utilise d'autres travaux d'élèves).

Etapes de la démarche :

Les deux enfants commencent par essayer de cibler un multiple de 9 compris entre 1700 et 1750.
Ils travaillent par approximations successives jusqu'à trouver $190 \times 9 = 1710$
Après, les enfants divisent le nombre de barquettes obtenu par 9 : perte de sens. Ils trouvent $189 \times 9 = 1701$.
Ils vérifient ensuite si ce nombre pourrait convenir pour les paquets de 6 (multiple de 6). Ils constatent que non.
Ils cherchent ensuite tous les nombres pairs compris entre 1700 et 1750.

Parmi ces nombres ils recherchent ceux qui répondent au problème. 1726 est pris parcequ'il se rapproche du « milieu » 1725, mais 1726 n'est pas un multiple de 6. Ils prennent le suivant, c'est à dire 1728, constatent que c'est un multiple de 6, de 8, de 9
Conclusion : ce nombre convient.

Les compétences en jeu :
- Organiser son travail et effectuer une recherche de façon exhaustive.
- Tenir compte du résultat précédent pour approcher un nombre.
- Effectuer la multiplication par 100
- La division euclidienne et le contrôle du reste (ici, il doit être nul).
- Les nombres qui ont une division juste par 6 et/ou par 8 sont des nombres pairs : on ne peut pas vraiment affirmer que ce théorème en acte est bien ressenti par les élèves.

Remarque : les notions de multiple et de nombre pair n'apparaîssent pas explicitement dans le travail de ces élèves.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

Question 1 :

Les éléments du texte officiel qui permettent de justifier la présence de cette leçon dans un manuel de CM1 sont :
Dans le « chapeau » relatif aux mathématiques, ligne 4 :
« Il approche la notion de fonction numérique, en particulier dans le cadre des situations de proportionnalité ».
Dans le chapitre « nombres et calcul » :
- « Utilisation de tableaux, diagrammes, graphiques ».

Question 2 :
Les fonctions numériques sous-jacentes sont :

S'il tire 1	$x \mapsto x + 10$
S'il tire 2	$x \mapsto 2x$
S'il tire 3	$x \mapsto x^2$
S'il tire 4	$x \mapsto 4x$
S'il tire 5	$x \mapsto x + 5$
S'il tire 6	$x \mapsto 2x + 6$

Question 3 :

Il s'agit des fonctions $x \mapsto x+10$ et $x \mapsto 4x$. L'exercice demande d'écrire les nombres dans un ordre croissant pour 1b, puis dans l'ordre décroissant pour 2b. Il s'agit sans doute de prendre conscience que ces deux fonctions sont croissantes. D'autres constats ponctuels peuvent être faits relevant en particulier des propriétés de la fonction linéaire dans 2b.

Question 4 :

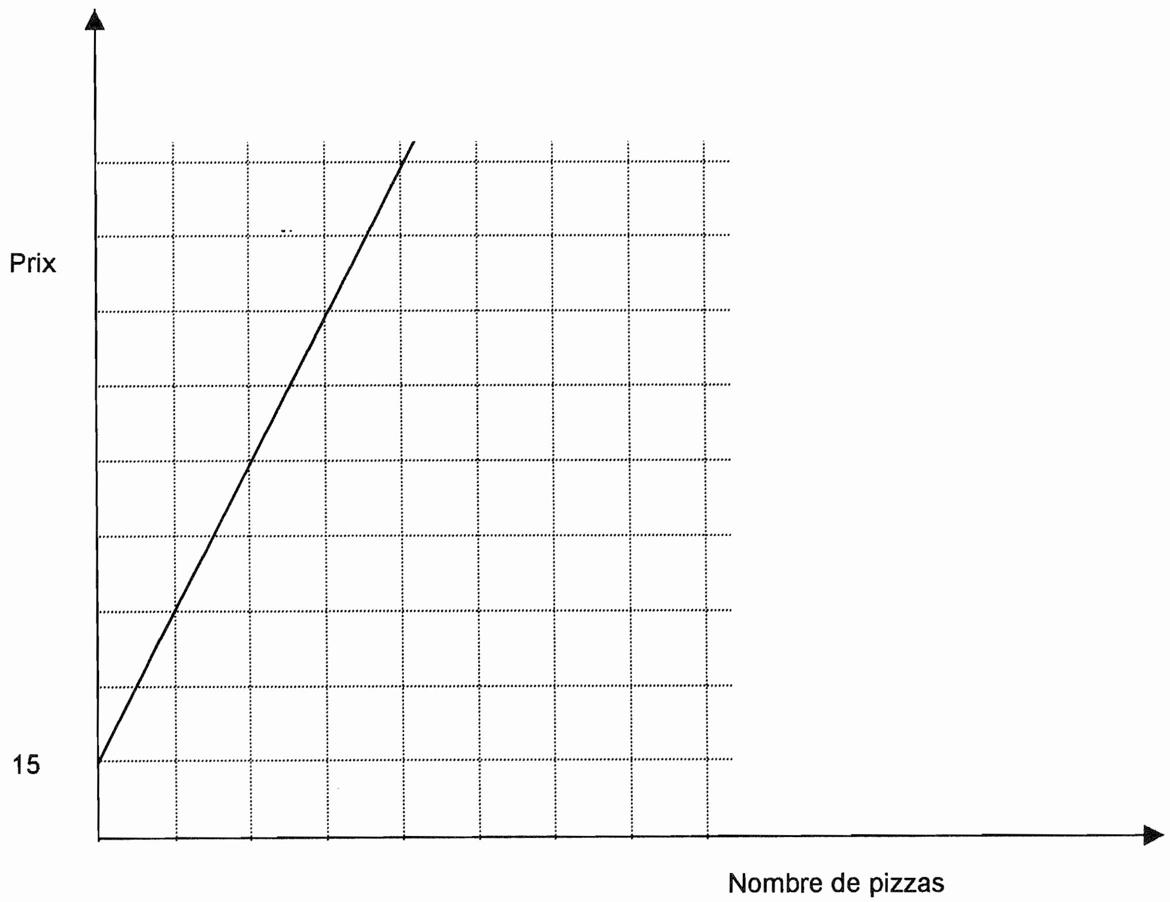
Si le tableau contient (2 ; 6) dans la première colonne, le coefficient de la fonction linéaire (3) devient l'outil le plus économique pour remplir le tableau. Or, l'exercice veut faire utiliser les deux propriétés de la fonction linéaire :
$f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(k.x) = k.f(x)$ (k nombre réel).
Dans l'exercice, les enfants ne savent pas multiplier par 3/5.
Remarque : L'exercice suggère par un schéma l'utilisation des propriétés caractéristiques.

Question 5 :

Il s'agit des propriétés
$f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(k.x) = k.f(x)$ (k nombre réel).
Qui ne pourront pas être écrites sous cette forme, mais reconnues et décrites à partir d'exemples.

Question 6 :

Il s'agit de faire travailler cette fois ci sur une fonction affine ($x \mapsto 30x+15$) en faisant constater que la règle des écarts (de 30 pour 1) fonctionne dès que l'on augmente de 1 le nombre de pizzas, tout en n'étant pas identique aux règles vues en 3 et 4.



Question 7 :

$x \mapsto x+21$		$x \mapsto 3x$	
source	image	source	image
2	23	10	30
3 (3=2+1)	24 (24=23+1)	17	51
5(5=3+2)	***27 (27 = 24+3)***	***18***	***53***
7	28	***23***	***69***
10	31	25	75
14	36	30	90

Pour la première fonction, dès les lignes 2 et 3, la règle des écarts n'est pas respectée
Pour la deuxième fonction, dans les lignes 2,3 et 4, on constate que l'on passe de 17 à 18 (+1) et de 51 à 53 (+2) puis de 18 à 23 (+5) et non pas de 53 à 63 (5×2) mais 69.

- La difficulté est de mettre en œuvre cette notion d'écarts égaux ou proportionnels dans le cas de listes de nombres pour l'ensemble de départ qui n'a pas une régularité qui permettrait de se servir de la seconde liste plus aisément.
- Il s'agit d'un travail formel sur des tableaux. Un recours à un exemple permettrait aux élèves de détecter les erreurs.

C'est un exercice difficile.

Question 8 :

La proportionnalité s'étudie aussi dans les cadres géométriques (agrandissement, réduction de figures), graphiques (droite passant par l'origine des coordonnées).

Question 9 :

L'élève peut faire le total pour calculer la durée d'une boucle (30+15+5 = 50), puis il peut ajouter 50s autant de fois qu'il le faut pour approcher 7×60 secondes.
0 ; 50s ; 100s ; 150s ; 200s ; 250s ; 300s ; 350s ; 400s ; 420s
Le feu repassera au vert 400 secondes après. 420 secondes après il est encore au rouge.
Cette démarche est un exemple : il est vraisemblable que l'approche pas à pas sous des formes variées sera la méthode utilisée par les enfants. La difficulté étant pour eux de :
- prendre en compte le « 9 heures » (inutile mais omniprésent)
- s'organiser pour travailler avec les nombres sexagésimaux.

Il y a un lien entre le nombre de boucles et le temps nécessaire pour une boucle. Donc une fonction, mais il n'est pas nécessaire de recourir à cet outil pour résoudre le problème. Donc cet exercice n'a pas grand chose à voir avec la leçon.

RENNES

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

Question 1a : Le tracé a été effectué sur l'annexe jointe. Pour réaliser ce tracé, on a utilisé la règle graduée pour reporter les distances (compte tenu de l'échelle, 1cm représente 1km) et le rapporteur pour les angles (315° dans le sens indiqué, c'est aussi 45° dans l'autre sens, puisque $45 = 360 - 315$).

Question 1b : *1ère méthode* : Il suffit d'effectuer un mesurage à l'aide de la règle graduée. On trouve à peu près 5cm. La distance réelle est donc à peu près 5km.

2ème méthode : On peut remarquer que le triangle $A_1B_1C_1$ est rectangle en B_1 puisque, de 315° à 360° il y a 45° comme de 0° à 45°. Cela étant, on peut appliquer le théorème de Pythagore, donc la mesure en kilomètre de $A_1C_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

Question 2 : Le tracé a été réalisé sur l'annexe. Nous savons que l'agrandissement conserve les angles, il suffit donc d'achever un triangle rectangle en B_2 (cf remarque précédente), tel que $[B_2C_2]$ mesure , en centimètres, $3.\frac{5}{2} = 7,5$.

Question 3 : Le tracé a été réalisé sur l'annexe. Il suffit de savoir que, par définition de la symétrie centrale, le point O est le milieu des segments $[A_2A_3]$ etc...

Question 4 : Tracé effectué sur l'annexe. Il suffit de savoir que, par définition de la rotation d'angle 90°, le triangle A_2OA_4 doit être rectangle isocèle et direct (par rapport à l'orientation imposée), etc...

Remarque : Certains points sont "malheureusement" situés en dehors de la feuille annexe !

Question 5 : Le point de rendez-vous étant à égale distance des sommets est donc le centre du cercle circonscrit au triangle, c'est à dire, dans le cas général, le point de concours des médiatrices du triangle. Mais, nous savons que la rotation conserve les angles ; le triangle $A_4B_4C_4$ est donc rectangle, par suite, le centre de son cercle circonscrit est aussi le milieu de l'hypoténuse. On est donc ramené à construire ce milieu.

Remarque : On n'a pas tenu compte du fait que le point C_4 était "hors d'atteinte". Le point cherché est aussi l'intersection de la médiatrice de $[A_4B_4]$ avec le segment $[A_4C_4]$

> Complément : Construction du milieu d'un segment à l'aide de la médiatrice de ce segment :
> Il suffit de savoir que cette médiatrice joint les points d'intersection de deux cercles de même rayon, centrés aux extrémités du segment.

C'est cette construction que nous avons utilisée en annexe.

Question 6 : Le point "assistance médicale" étant à égale distance des côtés du triangle est donc le centre du cercle inscrit au triangle. C'est donc le point de concours des bissectrices intérieures du triangle. Il suffit donc de tracer deux de ces bissectrices pour obtenir le point cherché.

Complément : Construction de la bissectrice intérieure de deux demi-droites de même origine :
Un cercle centré au "sommet" (origine commune des demi-droites) coupe chacune de ces demi-droites ; deux cercles de même rayon (assez grand) centrés en chacun de ces points se coupent sur la bissectrice. Comme, d'autre part, cette dernière passe aussi par le sommet, le tracé s'achève aisément.

C'est cette construction que nous avons utilisée en annexe.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1 : *Elève A* : L'élève A analyse le problème comme la recherche du nombre de carreaux d'un rectangle. Son but est de calculer ce nombre en effectuant le produit "nombre de carreaux en largeur par nombre de carreaux en longueur". C'est dans le comptage du nombre de carreaux en longueur et en largeur que se produit son erreur : pour évaluer ces données, il compte tous les carreaux qui "touchent". L'élève A sait donc coder multiplicativement sous la forme n x p une collection disposée en n rangées de p colonnes. Ce qu'il n'a pas acquis, ce sont les méthodes de comptage de ces lignes et colonnes lorsqu'elles sont "cachées".

Elève B : L'élève B a au départ, la même analyse du problème que A ; Il estime correctement la longueur et la largeur (en côtés de carreaux). Par contre, il ne sait pas quelle est la relation opératoire entre ces nombres et le nombre total de carreaux, et son codage est un codage additif et non multiplicatif.

Remarque : On retrouvera ce type d'erreur dans les confusions "aire/périmètre".

Elève C : L'élève C perçoit les diverses colonnes de carreaux cachés et les compte par "paquets". Il dénombre en fait 9 paquets de 5. Il obtient d'abord l'écriture additive du nombre de carreaux : 5 + 5 + ..., puis transforme cette écriture additive en une écriture multiplicative : 5×9.

Elève D : L'élève D traduit le problème comme un problème soustractif : "carreaux cachés = total des carreaux - carreaux visibles". Il obtient le nombre total de carreaux à l'aide du codage multiplicatif "largeur x longueur" (à la différence de ce qui se passe pour la forme cachée, ici, les longueurs et largeurs peuvent être effectivement comptées à l'intérieur). Pour compter le nombre de carreaux visibles, il en réalise mentalement des partitions en rangées et colonnes : il y a 4 colonnes de 8 carreaux et 3 rangées de 9 carreaux. Il utilise alors l'écriture multiplicative associée à ces dispositions. Son erreur ne provient que d'une erreur de retenue dans "l'addition à trous" finale.

Question 2 : Le maître peut proposer à B une validation effective de son résultat. Par exemple, donner sur transparent un quadrillage de même maille, le faire superposer, puis cocher et compter les carreaux "cachés" ainsi devenus apparents.

• Le maître peut aussi s'orienter vers des procédures plus purement numériques, en demandant de colorier des rectangles de 9 carreaux sur 5, puis de dénombrer les carreaux coloriés et comparer à 9 + 5 etc...

Question 3 : C'est bien entendu dans des chapitres relatifs à la résolution de problèmes (additifs ou multiplicatifs) que l'on trouvera essentiellement ce genre de problème. On peut aussi le trouver dans des chapitres relatifs aux notions de longueur, surface et aire.

ROUEN(1)

Avertissement : Cette épreuve a finalement été annulée à Rouen. En effet, une erreur s'était glissée dans l'énoncé de l'exercice 1 de la première épreuve : à la place de « l'histoire dit qu'une boîte P pave une boîte Q si la boîte **P** est exactement et parfaitement remplie avec un nombre entier (>1) d'exemplaires de la boîte **Q** (Après remplissage, il n'y a pas de trou et rien ne dépasse). », ***il fallait lire*** **:** « l'histoire dit qu'une boîte P pave une boîte Q si la boîte **Q** est exactement et parfaitement remplie avec un nombre entier (>1) d'exemplaires de la boîte **P** (Après remplissage, il n'y a pas de trou et rien ne dépasse). ».
Nous avons toutefois décidé de faire figurer ce sujet (Rouen 1) ainsi que le sujet de remplacement (Rouen 2).

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1 : (histoire de boîtes)

Question 1 :
a) : la boîte B1 se place dans B2. 72 < 80 et 36 < 40 et 48 < 60.
b) : B1 ne pave pas B2 et B2 ne pave pas B1. Il suffit qu'une des dimensions de B1 ne soit pas diviseur des trois dimensions de B2 : or 36 n'est ni diviseur de 40, ni de 60, ni de 80.
c) : pour qu'une boîte soit un agrandissement de l'autre, il faudrait que l'on passe des mesures de l'une aux mesures de l'autres à l'aide d'une fonction linéaire (proportionnalité). Or le tableau :

B1	72	36	48
B2	80	40	60

N'est pas celui de valeurs possibles prises par une fonction linéaire : par exemple 72 est le double de 36, comme 80 est le double de 40, mais 48 est les 2/3 de 72 alors que 60 est les ¾ de 80.

Question 2 :
Une boîte cubique a ses trois dimensions égales. Le problème revient donc à chercher un diviseur commun aux trois dimensions de la boîte B1. La boîte de plus grand volume a comme dimension le plus grand commun diviseur (PGCD) de 72, 36 et 48. Les autres boîtes ont comme dimensions les diviseurs de ce PGCD.
Or $72=6\times 12$; $36=3\times 12$; $48=4\times 12$. Le PGCD est 12, car 3 et 4 n'ont pas d'autre diviseur commun que 1.
Les boîtes ont pour dimensions les diviseurs de 12 : 1, 2, 3, 4, 6 et 12. Leur nombre est respectivement $72\times 36\times 48$ = 124 416 pour les boîtes de 1 ; 15 552 pour celles de 2 ; 4608 pour celles de 3 ; 1944 pour celles de 4 et 576 pour celles de 6.

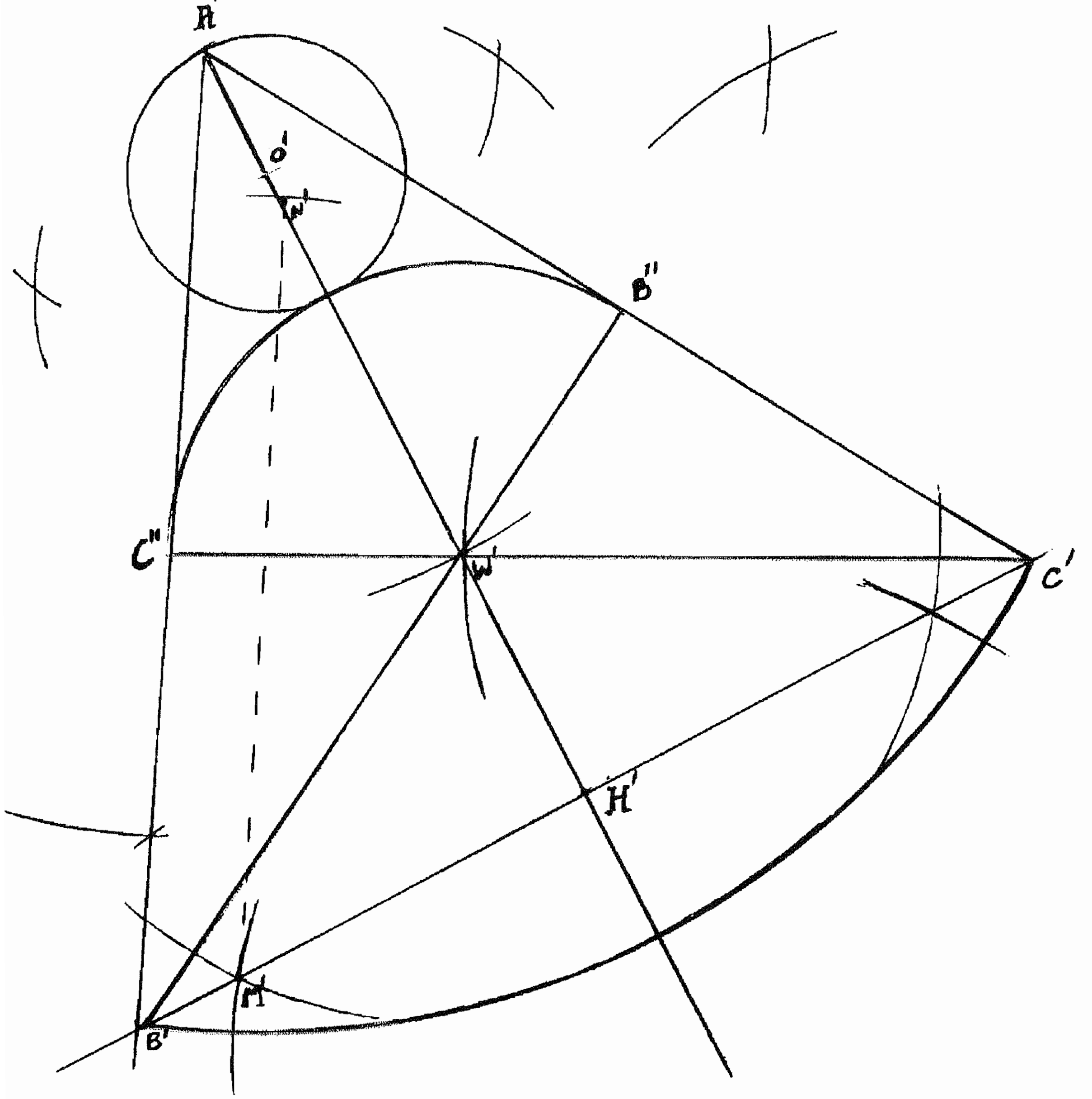
Question 3 :
La boîte de plus grand volume est un cube de côté 12 cm. Il en faut 6 pour 72, 4 pour 48 et 3 pour 36, soit 72 boîtes : les boîtes cubiques qui pavent B2 sont obtenues par la même démarche qu'en question 2. Il suffit de prendre le PGCD de 80, 40 et 60. Le PGCD est 20.
Une boîte cubique qui pave à la fois B1 et B2 doit avoir sa dimension qui divise 20 et 12. Cela ne peut être que 1, 2 et 4.
Pour la boîte 1, il en faudra $40 \times 80 \times 60 = 192\ 000$ pour paver B2
Pour la boîte 2, il en faudra 24 000 pour paver B2
Pour la boîte 4, il en faudra 3 000 pour paver B2

Question 4 :
Ce sont les notions de diviseur, de diviseurs communs et de plus grand diviseur commun qui sont sous-jacentes aux questions précédentes.

EXERCICE 2 :

Question 1 :
Nous proposons deux méthodes de construction qui ne s'appuient pas sur la figure d'origine. Toutefois, rien n'interdisait de s'appuyer sur la figure d'origine pour construire la figure agrandie, en conservant A pour A' par exemple.
De toutes façons, il faut admettre que ABC est un triangle équilatéral dont [AH] est bissectrice et médiane, que les segments issus de B et C sont les médiatrices de ce triangle, que les centres des arcs de cercles de la figure sont des points significatifs de la figure...
Il n'est pas demandé de décrire la construction effectuée. Pour éclairer le lecteur, nous faisons une description de la construction. Il existe plusieurs façons de construire la figure.

Figure avec traits de construction : (voir page suivante).
- Sur une droite, reporter deux longueurs AB pour obtenir A'H'
- De H', construire une perpendiculaire à (A'H').
- Il s'agit maintenant de placer B' et C'. Pour cela, soit M' arbitraire sur la perpendiculaire à (A'H') et N' sur (A'H') tel que M'N'= 2M'H'. Alors, il suffit de mener la parallèle à M'N' passant par A' pour obtenir B'.
- C' par symétrie.
- B'W' comme médiatrice, puis C'W'.
- Arc de cercle de centre W' passant par B'' et C''.
- Tracé du cercle (O', O'A').
- De O', tracé de l'arc B'C'.


A'
O'
N'
B''
C''
W'
C'
H'
M'
B'

Question 2 :
[AH] et [A'H'] sont hauteurs des triangles équilatéraux semblables.

AH=AB$\frac{\sqrt{3}}{2}$, A'H'=A'B'$\frac{\sqrt{3}}{2}$. On sait que A'H' = 2 AB donc 2AB=A'B'$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

A'B' = $\frac{4\sqrt{3}}{3}$AB

Le rapport d'agrandissement est donc $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ pour les longueurs. Pour les aires, le rapport d'agrandissement est le carré, soit $\frac{16}{3}$

Les élèves ont donc tort : les élèves évoquent sans doute le rapport des aires, ce qui ramène le rapport des longueurs à 2, ce qui est faux.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS) ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1 :
Il s'agit d'une situation de proportionnalité ; donc les compétences visées sont :
- La reconnaissance d'une situation de proportionnalité.
- être capable d'utiliser les propriétés de linéarité afin de mener à bien les calculs.
- être capable de présenter les résultats.

Question 2 :

Nombre de disques	3	5	6	8	?
Prix	105	?	?	280	350

Elève	Procédure adoptée.	Remarques
Elève A	f(6)=f(3)+f(3) et 350 = f(3)+f(3)+f(3)+f(1)=f(10) puis utilisation du prix unitaire pour calculer le prix de 5 disques.	Il trouve f(1) sans doute en divisant mentalement 350 par 10.
Elève B	Considère 105 comme prix unitaire. Multiplie alors par 5 puis 6. Pour 350F, il écrit 2.	Sans doute parce que 105 est le plus petit nombre ?
Elève C	Cherche le prix unitaire à partir de 105 et de 3. Calcule alors pour 5. Pour 6, il utilise f(6)=f(3)+f(3) Effectue 350-280. Trouve 70 et considère 70 comme prix unitaire. Ecrit donc 9.	
Elève D	Utilise f(6)=2 $\times$ f(3) pour trouver 210 Calcule le prix unitaire en divisant 105 par 3. Calcule alors le prix de 5. Divise 350 par 35 pour trouver la quantité 10	Commet une erreur de report sur l'étiquette (170 au lieu de 175).
Elève E	Utilise f(5)=f(8)-f(3) et trouve 175. Utilise f(6)=2 $\times$ f(3) pour trouver 210. Trouve 10 pour 350 en ayant retrouvé 350 à partir de 175 $\times$ 2, donc en effectuant sans doute, sans l'écrire 5 $\times$ 2.	

Question 3 :
L'opération posée se justifie parce que la consigne exige que toutes les opérations même effectuées mentalement doivent être posées.

Question 4 :

Remarque : lorsque l'on additionne les réponses correctes avec ou sans démarche apparente, on constate qu'il n'y a pas de différence très nette.
Apparemment, le prix de 6 disques, parce qu'il peut se calculer directement à partir du prix de 3 disques est plutôt un peu mieux réussi.
Pour le prix de 5 disques, la soustraction du prix de 8 au prix de 3 disques a sans doute été utilisée. Il faudrait les résultats plus détaillés pour mieux conclure.
Le nombre de disques pour 350 francs ne peut être obtenu qu'à partir du prix d'un disque.
D'où une chute relative des réussites.

SECOND VOLET (8 POINTS).
DIDACTIQUE

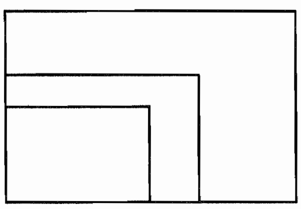
Question 1 :

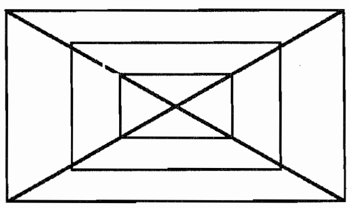
a) le classement est le suivant :

Rapport L/l égal à 1,5	Rapport L/l égal à 1	Rapport L/l égal à 2,5
A : $5 \times 7{,}5$ E : $3 \times 4{,}5$ H : 6×9 J : $2{,}4 \times 3{,}6$	C : $4{,}8 \times 4{,}8$ I : $2{,}4 \times 2{,}4$ F : $3{,}6 \times 3{,}6$	B : $7{,}5 \times 3$ D : 4×10 G : 6×15

b) Trois procédures numériques :
- filtrer les carrés puis les longueurs obtenues en ajoutant la moitié de la largeur. Vérifier pour ceux qui restent.
- Effectuer le calcul du rapport L/l pour chaque rectangle et en déduire un classement.
- Contrôler que le rapport des longueurs est ou non égal à celui des largeurs.

Une procédure géométrique :
Découper les rectangles et les placer en fixant un sommet, en les faisant se superposer. Apparaissent alors 3 familles correspondant à trois ensembles de sommets alignés.
Dans ce cadre, , on peut imaginer plusieurs dispositions possibles : deux exemples : découper les différents rectangles et essayer de les superposer en fixant un sommet ou en superposant les diagonales.





Remarque

La première disposition permet de vérifier que les sommets opposés au sommet fixe sont alignés sur une droite qui passe par l'origine (d'équation $l = c\,L$ où l et L sont respectivement les largeur et longueur et c l'inverse du coefficient de forme) . Cette interprétation se fait dans un cadre graphique.

Question 2 :

- La première difficulté est de l'ordre du contrat. Tous les enfants ont-ils la même compréhension du terme « agrandissement » ? La fiche nous assure que ce thème a déjà été travaillé.
- Si les enfants procèdent par procédures numériques, se poseront alors les questions de précision dans le mesurage (surtout à partir de photocopies : d'où la précaution du maître). Il faut un certain accord tacite afin que les enfants voient dans ces rectangles trois familles distinctes.

Question 3 :

Cette notion est la solution la plus rapide pour obtenir le classement dans cette activité.

Question 4 :

Le choix du coefficient de forme et des grandeurs des rectangles sont deux variables didactiques. En effet, si les rapports de forme sont visibles à l'œil et n'ont besoin que d'une confirmation numérique simple (de type $\times 2$, $\times 3$ ou $\times 4$), la classification sera plus simple que si les coefficients de forme sont des nombres décimaux non entiers.

Ces variables changent essentiellement les procédures numériques.

Toutefois, si l'on prend des rectangles de même coefficient de forme et d'échelles très différentes, le contrôle par alignement deviendra très coûteux. Donc la procédure géométrique peut être atteinte.

Question 5 :

Les exercices peuvent être tous deux proposés comme application.

L'exercice 1 impose une dimension, les solutions sont donc uniques, contrairement aux exercices 2 et 3. Le choix des dimensions imposées est encore une variable didactique. Aucune procédure n'est a priori induite : les procédures géométriques et numériques ont sensiblement la même économie.

L'exercice 2 est une simple application. Il permet de préciser la notion d'agrandi (ce n'est pas l'aire qui est en jeu, mais le rapport des dimensions). Il se résout a priori plutôt dans le cadre numérique (le découpage des rectangles nécessiterait une recopie préalable) par le repérage des longueurs des côtés en unités carreaux.

A	B	C	D	E	F	G
2×4	4×8	3×6	3×4	2×3	2×5	1×2

A, B, C et G sont donc des rectangles de même forme (coefficient de forme 2).

L'exercice 3 laisse libre choix à l'élève du type d'agrandissement ou de réduction, il sera réservé éventuellement aux élèves qui ont un plus de mal. Il leur suffit en effet de multiplier les dimensions par 2 et encore 2. Ils choisiront sans doute des procédures numériques de ce type.

Donc le rangement peut être 3-2-1 (selon le critère des contraintes croissantes).

ROUEN(2)

(Corrigé effectué à partir d'indications détaillées fournies par notre correspondant de l'académie).

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1 :
Question 1 :

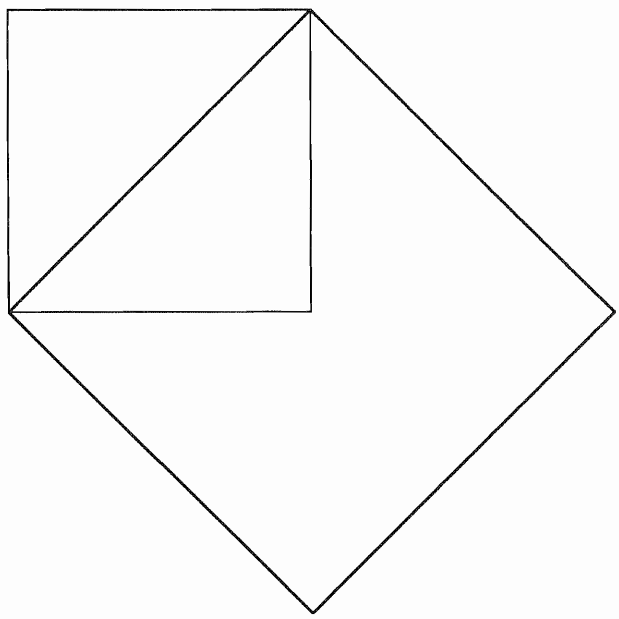
L'aire de H est l'aire d'un rectangle de 1 cm sur 8 cm et d'un autre rectangle, obtenu en découpant et en recollant, de dimensions 3 cm sur 8 cm. L'aire totale est donc 32 cm².

Le périmètre de H : Le théorème de Pythagore permet de trouver le côté de la figure qui manque :

$4^2+3^2=25$. Le côté mesure donc 5 cm. Le périmètre est donc $2 \times 1\text{cm} + 4 \times 5\text{cm}$, c'est à dire 22 cm.

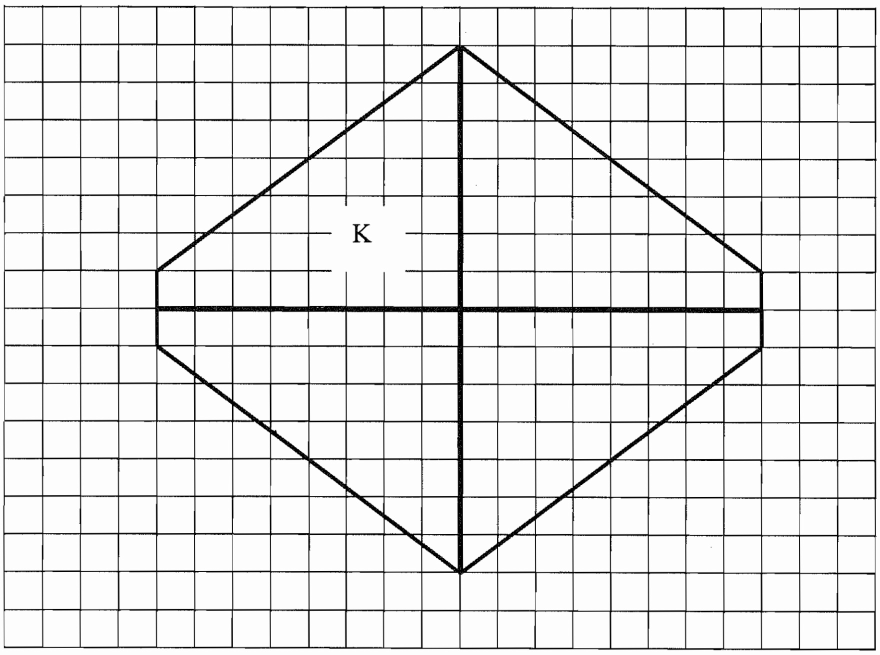
Question 2 :

Le carré de même aire que H a pour côté $\sqrt{32}$ cm, soit $4\sqrt{2}$ cm. On peut donc le construire soit en construisant les diagonales d'un carré de côté 4 cm (voir figure) , soit en construisant un carré de côté 1 cm, et en reportant 4 fois la diagonale de ce côté.



Question 3 :

K peut-être une figure obtenue à partir du découpage selon les deux axes de symétrie de la figure H :

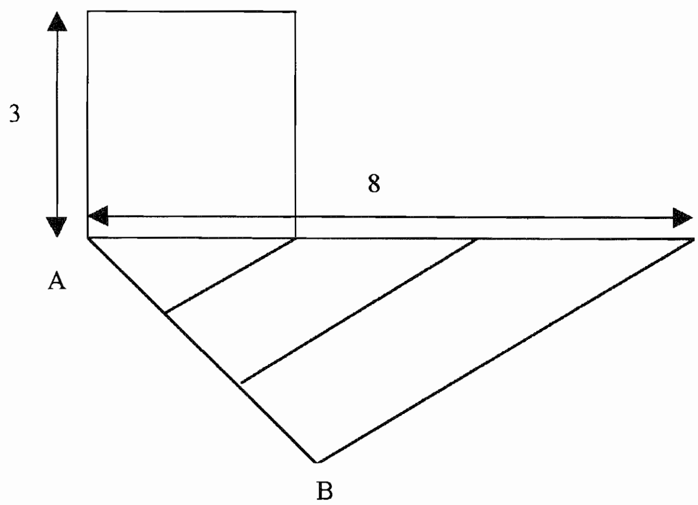


L'aire de K est le quart de l'aire de H, soit 8 cm².
Son périmètre est 0,5cm + 5cm + 3,5cm + 4cm, c'est à dire 13 cm.

Question 4 :

a- La relation entre x et y est $x.y = 8$

b- Si $x = 3$, alors $y = \frac{8}{3}$, d'où la construction du rectangle à la règle et au compas en partageant en 3 un segment de longueur 8 (à l'aide d'un segment annexe [AB] obtenu par 3 reports d'une mesure arbitraire, comme sur la figure ci-dessous et en utilisant le théorème de Thalès) :



c- Le périmètre de ce rectangle est : $\frac{34}{3}$ cm.

d- La démonstration rigoureuse nécessiterait l'étude d'une fonction et de sa dérivée : on sait que xy = 8 $y = \frac{8}{x}$ donc le périmètre 2p = 2(x +y) = $2(x+\frac{8}{x})$. Considérons le demi-périmètre p et étudions la dérivée de $(x+\frac{8}{x})$: $p'(x) = \frac{2x^2 - x^2 - 8}{x^2} = \frac{x^2 - 8}{x^2}$

Pour x>0, cette dérivée s'annule en changeant de signe à $x=\sqrt{8}$. Cela correspond à un minimum de la fonction p.

Mais les concepteurs du sujet n'attendaient pas une démonstration nécessitant l'étude d'une dérivée. Dans ce cas, il s'agit d'émettre une conjecture et de l'étayer le mieux possible :

- Soit, on admet, qu'à aire constante, le rectangle qui a le plus petit périmètre est le carré, et dans ce cas, $x = y = \sqrt{8}$.
- Soit, on conduit une recherche empirique en construisant un tableau d'étude de certaines valeurs et en pressentant un minimum sur le périmètre :

Première dimension	Deuxième dimension	Périmètre
1	8	18
2	4	12
3	$\frac{8}{3}$	$\frac{34}{3}$ # 11
4	2	12

Entre 2 et 4, il semble qu'une valeur de x (et donc de y) donne un périmètre minimum.

Autre réponse possible : on fait la conjecture « le rectangle qui a le plus petit périmètre est le carré ». Il reste à la prouver. Pour cela, étudions le signe de p(x)- p($\sqrt{8}$).

$(x+\frac{8}{x}) - (\sqrt{8}+\sqrt{8}) = (\sqrt{x} - \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{x}})^2$ Cette expression est positive ou nulle (c'est un carré). Elle s'annule pour $x = \sqrt{8}$.

Question 5 :

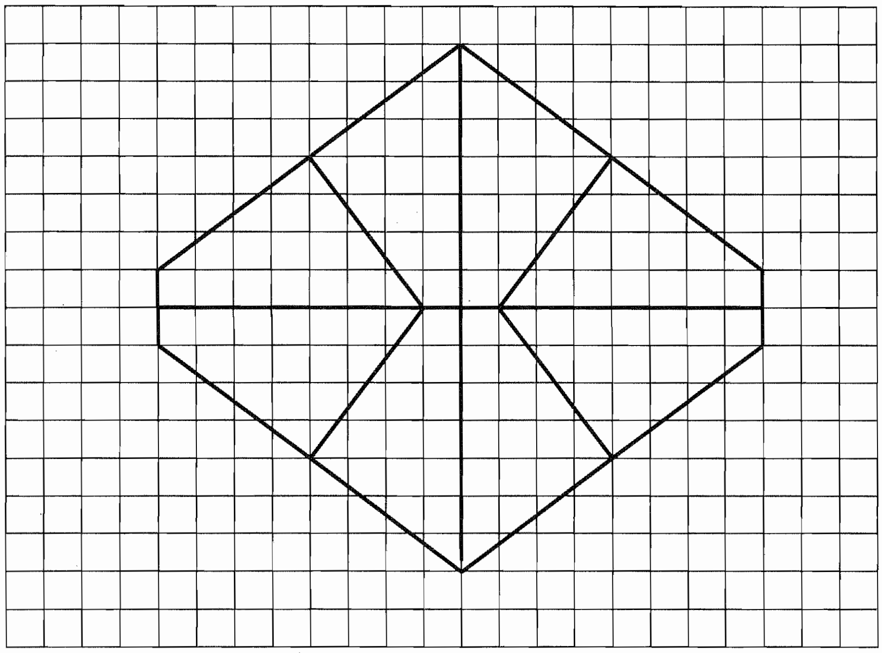
Soit *r* la mesure du rayon du disque d'aire 8 cm², on a :

$\pi r^2 = 8$ soit $r = \sqrt{\frac{8}{\pi}}$. $2\pi\sqrt{\frac{8}{\pi}} = 4\sqrt{2\pi}$; Le périmètre du disque est donc $4\sqrt{2\pi}$ cm.

Une valeur approchée au centième est 10,02 cm par défaut ou 10,03 cm par excès.

Question 6 :

D'après la question 3, on dispose déjà de quatre parties superposables. A l'intérieur du trapèze (K) on cherche donc un découpage en deux parties superposables.



EXERCICE 2 :
Question 1 :
Soit a l'âge d'Aline, l'âge de Bernard est a - 3, celui de Charles est a - 6. La somme de leurs âges est donc 3a - 9 = 63. L'âge d'Aline est 24 ans, celui de Bernard est 21 et celui de Charles est 18 ans.
Remarque : en formulant différemment : si l'on prend a-3, a et a+3, on obtient 3a = 63, donc a = 21.

Question 2 :
Reprenons comme dans la remarque : on a ici : 3a = 126. L'âge de Bernard est 42, celui d'Aline est 45 ans, et celui de Charles est 39 ans.
Toute autre procédure correcte est bien sûr acceptée.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1 :
Il suffit de déterminer le nombre de dizaines dans l'écriture du nombre d'enfants par école et d'ajouter 1. Par exemple, pour l'école Jean Macé : 553 élèves, donc 55 dizaines ;
55 + 1 = 56. Il faut 56 boîtes.

Question 2 :
- Savoir reconnaître le nombre de dizaines à partir de l'écriture chiffrée d'un nombre de trois chiffres.
- S'adapter à la situation (ajouter 1 au nombre obtenu).

Remarque : un élève qui recompterait 10 par 10 pourrait très bien réussir cet exercice sans avoir la compétence décrite ci-dessus.

Question 3 :

Elève	Procédures	Erreurs
A	Utilisation d'un dessin Décomposition de chaque centaine en dizaines Repérage du chiffre des centaines. On ne sait pas dans quel ordre l'enfant a travaillé les écritures.	Peut-être la tâche est-elle inachevée. Confusion entre nombre de fromages, et nombre de boîtes Non prise en compte des chiffres des dizaines et des unités.
B	40 semble obtenu à partir de 400. Le chiffre des dizaines est repéré et traduit en nombre de dizaines. Le chiffre des unités (8) est représenté et traduit par la nécessité d'une boîte supplémentaire (1). Il est difficile d'interpréter 478+10. La réponse exacte (48) est donnée.	Réussite
C	2..........2 boîtes (20 fromages) 8..........8 boîtes (80 fromages) 9.........9 boîtes (90 fromages)	Chaque chiffre est interprété comme un chiffre des dizaines
D	553 est représenté. L'élève tire 55 du nombre de dizaines. Il ajoute 3 f (fromages).	L'élève a bien compris la situation. >Ses connaissances de la numération sont correctes . Il n'a pas prêté attention au fait que les fromages étaient obligatoirement vendus par paquets de dix ; il ne pouvait commander 3 fromages.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

Question 1 :
Ces documents portent sur l'étude de la numération écrite :
- Numération par groupement (annexe 2, exercice 2 de l'annexe 3).
- Numération par échange (exercice 1 de l'annexe 3, annexe 5).
- Décompositions additives (exercice 3 annexe 3).
- Suite croissante des nombres et écritures (annexe2 et annexe 4)

Etude de A
Question 2.1 :
- Comprendre le codage « bâton, point » : un bâton représente une dizaine, un point représente une unité
- Savoir trouver le successeur sous la forme bâton-points (donc savoir mettre un point de plus ou passer à un bâton supplémentaire).
- Savoir passer de 3 bâtons 4points à l'écriture chiffrée usuelle 34.

Question 2.2 :

Les nuages sont placés aux changements de dizaines. (Le plus difficile à réaliser dans la suite algorithmique chiffrée usuelle. Il est plus facile d'écrire 25 26 27 que 28 **29 30** 31.)

Etude de C

Question 3.1 :

L'aspect algorithmique de la suite des nombres écrits en chiffres :

Commencer à 1 : 0 ne sert pas à compter au début du comptage, il est un signe qui devient nécessaire lorsque l'écriture se structure. (Numération de position). [1]

Question 3.2 :

- Repérer les écritures identiques (15 puis 22 par exemple), superposer des morceaux ou supprimer des morceaux.
- Repérer et accoler les écritures de deux nombres consécutifs (43 – 44 ; 68 – 69 ; 91 - 92) y compris le seul passage à la dizaine supérieure (29 - 30) de cet exercice. Dans ce cas, il s'agit de comprendre le changement de dizaine.

Question 3.3 :

- Présence ou non de plages de superposition.
- Premiers morceaux dans l'ordre d'assemblage ou non.
- Choix du couple de nombres (extrémité, début) ou (extrémité, élément non commençant d'une bande).
- Choix des nombres aux extrémités des morceaux de bande selon qu'il se termine par 9 ou non.

Etude de D

Question 4.1 :

Généralisation de l'aspect échange dans l'écriture chiffrée du nombre : dix contre un jusqu'au 3° niveau d'échange.

Question 4.2 :

Il semble nécessaire que les élèves aient pratiqué effectivement le jeu du banquier par groupe dans la classe pendant au moins une séance (avec de vrais dés, de vrais jetons, des joueurs et un banquier)

Question 4.3 :

On peut imaginer des réponses qui montrent que l'élève ne tient pas compte de la valeur des jetons et déclare par exemple : « Thomas a le plus car il a plus de jetons » : il n'y a alors pas de prise en compte de la valeur du jeton rouge.

Pour les mêmes raisons, on peut prévoir une réponse telle que : « Leïla et Marie ont pareil ».

Question 4.4 :

a) Non, le maître ne peut se satisfaire d'une telle réponse car Rémi peut dire qu'Audrey « en a le plus » à cause du nombre de jetons devant elle. Il se trouve qu'après les échanges cela correspond aussi au nombre de points le plus grand. Rémi fournit ainsi une réponse correcte mais peut avoir mis en oeuvre une procédure fausse (non détectable).

Le maître peut lui faire expliquer sa procédure, mais c'est difficile. C'est pourquoi il est plus judicieux de donner une autre collection que celle prévue par le manuel à Audrey pour détecter les procédures fausses usuelles et les traiter avec les élèves.

---

[1] Bien que depuis juin 98, la suite ait tendance à devenir 1,2,3,0 !

b) Donner à Audrey une collection de beaucoup de jetons mais qui représente moins de points que par exemple Marie : 2 jetons rouges et 15 jetons jaunes. Ainsi il y a contradiction entre Audrey a le plus de points et le résultat des échanges : d'où une possible différenciation entre valeur et quantité.

Etude de B

Question 5.1 :

Le premier exercice montre qu'il sait échanger dix contre un avec des pièces de monnaie.

Le second exercice montre qu'il sait ce que veut dire , « regrouper par dix », « compter et écrire un nombre entre 20 et 30 ».

Le troisième exercice montre qu'il sait passer de l'écriture en chiffres à celle en lettres (ou inversement) pour certains nombres, puis les décomposer sous forme additive imposée (ou inversement).

Question 5.2 :

Le document B peut être lié à des exercices extraits de A ou de D.

Ex 1	Ex 2	Ex 3
Doc D Numération échanges.	Doc A Numération groupements	Doc A Activités de transformation d'écritures.

Remarque : l'aspect algorithmique du document C n'est pas présent dans le document B.

TOULOUSE

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE N°1 :

On désigne par abc le nombre cherché, a étant le chiffre des centaines, b celui des dizaines et c celui des unités, et on écrit les conditions vérifiées par les nombres a, b, c; Ce sont des nombres entiers tels que :

(1) $0< a \leq 9$ (le nombre cherché est un nombre de trois chiffres)

(2) $0 \leq b \leq 9$

(3) $0 < c \leq 9$

(4) $b = 4c$

(5) $100a + 10b + c - 297 = 100c + 10b + a$

On peut alors résoudre le système composé des deux équations et trois inéquations ci-dessus.

Le sous système (4) et (5) est équivalent au système

(4) $b = 4c$

(5') $99a - 99c = 297$

lui-même équivalent au système

(4) $b = 4c$

(5") $a - c = 3$

c ne peut pas être nul car le nombre cherché n'est pas un multiple de 10. Comme $b = 4c$ alors $b \neq 0$.

c ne peut être supérieur à 2 car $4c \leq 9$. Par conséquent c = 1 ou c = 2

si c = 1 alors b = 4 et a = 4 et le nombre cherché est 441

si c = 2 alors b = 8 et a = 5 et le nombre cherché est 582

Le problème a deux solutions qui sont les nombres 441 et 582.

EXERCICE N°2 :

Question 1 :

a) - Si on appelle W la pointe du rabat sur la **figure 1** (on y retrouve les points A,B,C,D de la figure déployée, **figure 2**), alors [ED] est superposé avec [EW]. DEH est donc un triangle isocèle de sommet E. Par conséquent ED = EH. Or, par hypothèse AE = EH donc ED = AE.

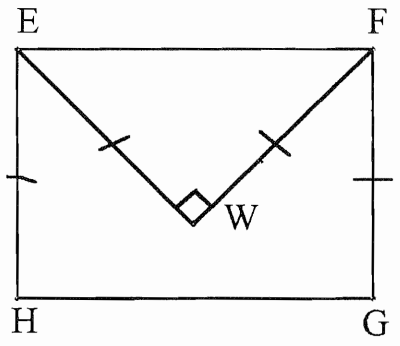


Figure 1

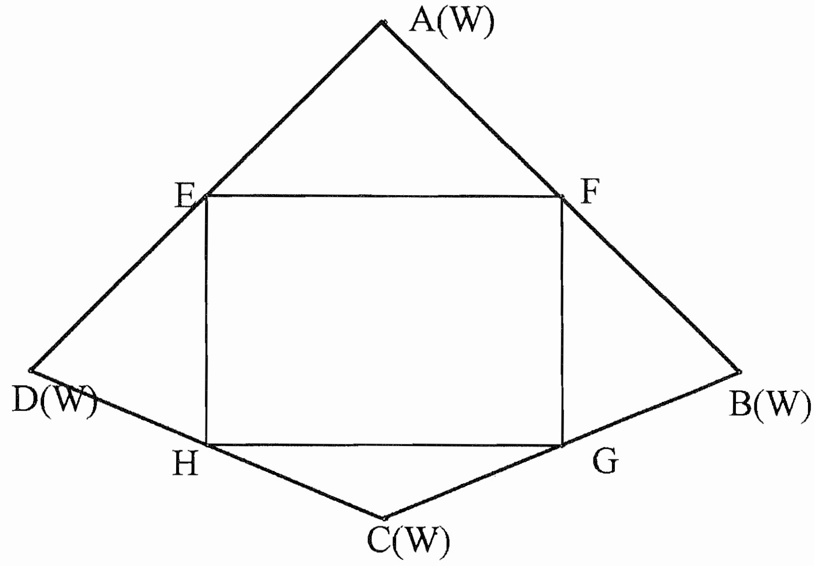


Figure 2

b) - Par hypothèse, AEF est un triangle rectangle isocèle en A, donc $\widehat{AEF} = 45°$. EFGH est un rectangle, donc $\widehat{HEF} = 90°$. Dans la figure 1, $\widehat{WEF}$ et $\widehat{WEH}$ sont des angles complémentaires, donc dans la figure 2, $\widehat{AEF}$ et $\widehat{DEH}$ le sont aussi. Ceci entraîne que $\widehat{AEF} + \widehat{HEF} + \widehat{DEH} = 180°$: les points A, D et E **(figure 2)** sont alignés.

Question 2 :

Démontrons que (AC) est axe de symétrie de la figure 2. Le point A est sur la médiatrice de EF, le point C est sur la médiatrice de HG, par conséquent (AC) est un axe de symétrie du rectangle EFGH. De plus les points A,E,D et les points A,F,B sont alignés et AD = AB. De même, les points D,H,C d'une part, et C,G,B d'autre part, sont alignés et DC = CB. (AC) est axe de symétrie des triangles isocèles ADB et DBC donc axe de symétrie de la figure.

Question 3 :

Le triangle EDH est isocèle, par conséquent $\widehat{EDH} = \frac{1}{2}(180° - \widehat{DEH})$. Or $\widehat{DEH}$ est le supplémentaire de $\widehat{HEA}$ et $\widehat{HEA} = 90° + \widehat{AEF} = 90° + 45° = 135°$. Donc $\widehat{DEH}$ est un angle de 45° et $\widehat{EDH}$ un angle de 67,5°. La symétrie par rapport à (AC) permet de conclure que FBC est aussi un angle de 67,5°.

Question 4 :

L'aire du quadrilatère ABCD est égale au double de l'aire du rectangle EFGH, laquelle est égale à 2 × EH × EF. Or EH = a et EF = $a\sqrt{2}$. Si a est la mesure de EH en cm, alors la mesure, en cm^2, de l'aire de ABCD est $2a^2\sqrt{2}$.

Question 5 :

Par développement AC = 2 EH = 2 a et BD = 2 EF = 2 $a\sqrt{2}$

Question 6 :

On se réfère désormais à la **figure 3.**

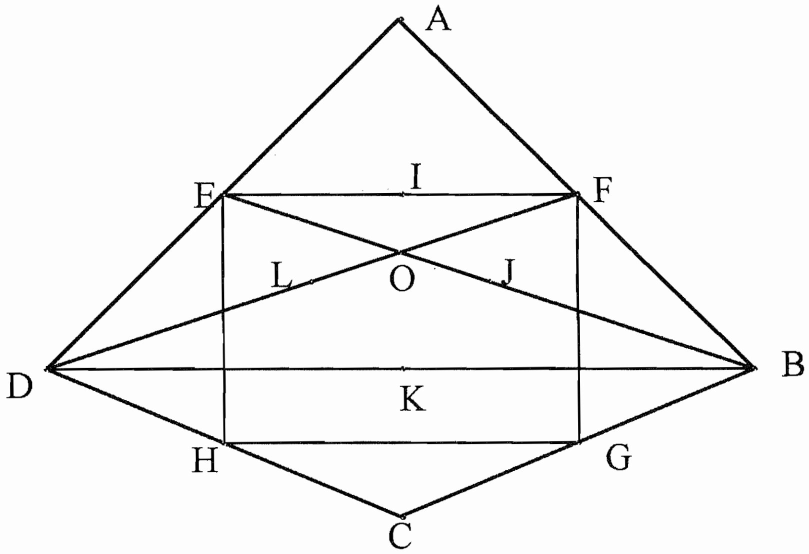


Figure 3

a) - O est le centre de gravité du triangle ABD comme point d'intersection des deux médianes BE et DF.

J est milieu de [EB] donc JE = JB = ½ EB ; OE = 1/3 EB ; OB = 2/3 EB ;
donc OJ = 1/6 EB et OJ/OB = 1/4 . De même OL/OD = 1/4.

b) - Les résultats précédents permettent d'applique la réciproque du théorème de Thalès dans le triangle OBD. Il en résulte que (JL) est parallèle à (BD).

De plus JL/BD = OL/OD = ¼ et JL = $a\sqrt{2}/2$:

c) - Dans le triangle ADB, (EF) est la droite des milieux, donc I est le milieu de [AK] et
AI = IK = $a\sqrt{2}/2$.

d) - IJKL est un carré. Il suffira de vérifier que les conditions qui permettent de définir un carré sont vérifiées. Par exemple :

- IL = JK,. En effet, dans le triangle FED, (EL) est la droite des milieux, donc :
IL = 1/2ED et [IL] est parallèle à [ED].

- En effectuant le même raisonnement pour [JK] dans le triangle BED on conclut que [IL] parallèle à [JK] et IL = JK.

Le quadrilatère IJKL a deux de ses côtés parallèles et de même longueur, c'est un parallélogramme. (EF) est parallèle à (DB), donc [JL] qui joint les milieux est parallèle à (DB). [IK] est donc perpendiculaire à [JL]. Comme en plus ses diagonales [IK] et [JL] sont de même longueur, c'est un carré.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS) ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1 :

Je prends l'équerre et je place un de ses côtés sur [AB], de sorte que l'autre côté passe par le point E. Je désigne par I le point de [AB] qui coïncide avec le sommet de l'angle droit de l'équerre. Avec la règle graduée, je mesure la longueur du segment [EI] et je prolonge la droite (EI) de l'autre côté de (AB). Sur ce prolongement je place un point F tel que EF = EI

Question 2 :

On se trouve devant un ensemble de procédures utilisées par les enfants pour accomplir la tâche demandée en 1°). Ces procédures vont être décrites et évaluées du point de vue de leur validité dans les registres d'action propres à ce niveau scolaire pour mettre en œuvre des procédures de tracé : pliage, application de propriétés géométriques (orthogonalité et isométrie).

	Procédures	*Validité*
Maéva	Le point F est obtenu à l'aide d'un pliage (correspondant à l'ouverture de rabat) et marquage du point F	La procédure est valide et le tracé est correct
Claude	Le segment [DE] est mesuré. On prolonge [DE] et on cherche l'intersection de ce prolongement avec la perpendiculaire en A à [AE]	La procédure serait valide si la méthode permettant d'obtenir le point D avait été précisée. Le tracé est correct
Fouad	Construction du symétrique du triangle AEB en utilisant un "retournement*" de l'équerre et un report de longueur	Le procédé est valide et le tracé correct.
Stéphanie	Trace le point F comme sommet d'un triangle isocèle dont le côté est de même longueur que [AE]**	La procédure utilise deux reports de longueurs et une intersection de droites. Elle est valide et le tracé est correct.

* le terme retournement pourrait s'interpréter de deux manières : comme une transformation plane, il s'agit alors d'une rotation, comme une tranformation dans l'espace, rotation d'axe (AB). C'est certainement ce dernier sens qui est en jeu. Nous disposons ici de deux théorèmes en acte relatifs aux propriétés métriques de la rotation dans le plan ou dans l'espace.

** Il semble que cette élève a construit le symétrique du triangle AEB en traçant à la règle un triangle isocèle AFB. Cette construction a sans doute nécessité une évaluation de visu de l'angle $\widehat{AFB}$ et des essais de tracé avec la règle des deux côtés du triangle. Elle a, par exemple, fait pivoter la règle de façon à ce que les deux côtés se coupent en F, sommet du triangle.
De ce fait, elle utilise sa règle comme un compas. Si la procédure est théoriquement correcte, elle est matériellement imprécise et peut laisser penser que l'élève ne voit pas, dans ce cas, la pertinence du compas pour reporter les longueurs.

Question 3 :

Le maître va pouvoir exploiter ces travaux en examinant comment une procédure de base, celle d'un pliage, peut être réalisée à l'aide de l'utilisation des propriétés géométriques correspondantes et notamment celles qui correspondent à la construction du symétrique d'un point :

- à l'aide d'une perpendiculaire et d'un report de longueur
- à l'aide du tracé de deux droites symétriques (symétrique d'une droite)

Le maître pourra montrer les limites de l'utilisation, dans certaines situations, d'une règle graduée pour le report de longueurs et montrer la pertinence de l'utilisation du compas.

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

Partie A :

Question 1 :

On effectue une étude comparée des activités proposées dans les documents 3 et 4 du point de vue des compétences disciplinaires et du point de vue de la capacité des situations à permettre d'atteindre les objectifs proposés.

	Document 3	*Document 4*
Compétences disciplinaires	- Organiser le calcul d'une addition en combinant calcul mental et utilisation de l'algorithme - Porter dans un tableau à double entrée des données extraites d'un texte de problème - Compléter un tableau à l'aide d'opérations portant sur des données contenues dans certaines cellules. - Rédiger une conclusion après la réalisation d'un ou plusieurs calculs	Chercher dans un ensemble de données des combinaisons additives dont les résultats vérifient une contrainte
Objectifs	Les situations proposées ne paraissent pas pouvoir permettre d'atteindre les objectifs *Choisir une démarche et expliquer.* En effet, pour les deux problèmes la démarche de résolution est fixée dans le texte. L'élève n'a pas à la rechercher, pas plus qu'il n'a à expliquer sa solution. Ceci n'est pas en cohérence avec le titre de la fiche.	Les situations proposées paraissent permettre d'atteindre l'objectif, *Résoudre un problème en gérant des essais successifs.* En effet, les élèves doivent prendre des initiatives par eux-mêmes pour chercher les diverses possibilités et les explications des choix sont possibles. Elles sont même demandées

Question 2 :

En admettant que les deux documents rendent compte de méthodes d'enseignement relativement à un ou plusieurs objets de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire, on peut identifier les différences suivantes. :

- Dans le premier cas, (Document 3), l'élève est sollicité du côté des connaissances, et même de connaissances complexes (réalisation et utilisation d'un tableau), mais cette sollicitation est effectuée sur un mode rigide où il n'est pas appelé à prendre des initiatives.

- Dans le second cas, (Document 4), les situations choisies, sans être totalement ouvertes, permettent aux élèves de prendre des initiatives et d'organiser par eux-mêmes la recherche de la solution. La méthode n'est en aucune façon prescrite dans le texte.

<u>Partie B</u> :

On étudie une organisation didactique ayant pour objectif de développer les compétences des élèves de CE2 à résoudre des problèmes du type de ceux qui figurent dans le document 4. Pour cette résolution, les élèves, qui ont déjà une bonne pratique de l'addition, doivent identifier et calculer des sommes de nombres extraits d'une liste, ces sommes étant inférieures à un nombre donné.

Question 1 :

Étude de l'étape 1 :

a) La résolution du problème demande la prise en compte d'un ensemble de conditions nombreuses : calculer des sommes partielles, les comparer à 150, ne pas utiliser deux fois le même nombre, etc.. On ne peut pas s'attendre à ce qu'une majorité d'élèves ait une solution juste. Il est même légitime de penser que de nombreux élèves auront oublié l'une ou l'autre des contraintes par centration excessive sur l'une d'entre elles.

b) L'objectif de cette première étape est pour les élèves une familiarisation avec le problème, pour le maître l'identification des difficultés qu'ils rencontrent et dont il aura à décider du mode de traitement (aide individuelle, intervention devant la classe).

Question 2 :

Étude de l'étape 2

Cette étape permet de montrer aux élèves qu'il est possible de trouver une solution. La mise en valeur de la prise en compte des contraintes :

- les groupes ne se séparent pas,
- un groupe va dans un seul bateau,
- les bateaux ne prennent que 150 passagers.

La mise en valeur est un élément de compréhension du problème, elle va donc aider les élèves en difficulté. Enfin, la discussion sur les stratégies et l'identification d'une stratégie efficace : commencer par le plus grand nombre, va aider à la structuration de démarches qui pourront ensuite être réinvesties.

Question 3 :

Reprise du problème avec d'autres nombres.

a) - Elle permet aux élèves d'améliorer leur contrôle (connaissance) de la stratégie efficace et au maître de s'en assurer. On ne peut être totalement certain qu'à la fin de l'étape 2, le problème ait été suffisamment bien compris par tous, cette étape va contribuer à améliorer cette compréhension.

b) - La première série est composée de 7 nombres, comme la série initiale, alors que la seconde en comporte 8.

La somme des nombres de la première série est de 435, alors que celle de la seconde série est de 440.

Si on applique la méthode dégagée à la première série, on prend 90 qui se complète facilement avec 60 et il reste trois solutions pour compléter les deux autres bateaux. La seconde série n'est pas beaucoup plus difficile que la première, elle peut être traitée par des élèves qui n'ont pas encore acquis une bonne maîtrise du problème.

Pour la seconde série, il y a un nombre supplémentaire, ce qui est un facteur de complexité. La liste des solutions peut être plus longue (il y en a quatre). Elle permettra de relancer l'intérêt des élèves qui ont réussi.

c) - Solutions.

Première série : 90, 75, 70, 65, 60, 40, 35

$90 + 60 = 150$ (seule solution possible à partir de 90)

Restent alors :
1 - 75 + 70 = 145 et 35 + 40 + 60 = 135
2 - 75 + 65 = 140 et 35+ 40 + 70 = 145
3 - 70 + 65 = 135 et 75 + 35 + 40 = 150

La même procédure que celle identifiée et appliquée lors de la mise en commun s'utilise avec succès en deux étapes. les sommes calculées en second ne comportent que deux nombres
Seconde série : 90, 70, 65, 60, 40, 35

Deux familles de solutions :
Première famille :
1- 90 + 60 = 150
Restent alors :
1-1 - 70 + 50 + 20 = 140 et 45 + 35 + 65 = 145
1-2 - 70 + 45+ 35 = 150 et 20 + 55 + 65 = 140
Seconde famille :
2 - 90 + 55 = 145
Restent alors :
2-1 - 70 + 60 + 20 = 150 et 45 + 35 + 65 = 145
2-2 - 70 + 45 + 35 = 150 et 20 + 60 + 65 = 145

On trie deux familles de solutions avec la procédure issue de la mise en commun. Il faut ensuite gérer des sommes de trois nombres, ce qui peut représenter pour certains élèves un difficulté significative.

Question 4 :

Étude de la troisième phase.

a) - On peut estimer que la reprise d'un problème du même type une semaine après va marquer, pour les élèves, l'intérêt du maître. Elle leur montre qu'il y a plusieurs situations qui relèvent du même traitement et donc qu'on n'a pas travaillé en vain. Cette reprise contribue aussi à ancrer cet apprentissage dans le temps qui est un facteur fondamental. Enfin, il y a, à petite échelle, la sollicitation d'un transfert.

b) - Ce problème admet plusieurs solutions. Il n'est pas inutile que les élèves rencontrent des problèmes de ce type et qu'il s'habituent au fait qu'ils disposent de techniques pour les traiter, techniques dont certains éléments seront à mettre au point au moment de la résolution. L'identification de toutes les solutions est aussi un élément fondamental de la compréhension du problème.

Question 5 :

Compétences travaillées.
- Élaborer une démarche originale dans l'étude d'un problème nouveau
- Argumenter à propos de la validité d'une solution

Les publications de la COPIRELEM

Depuis sa création en 1973, la COPIRELEM a produit 41 brochures dont 20 actes du colloque annuel des formateurs en mathématique des instituteurs, 10 brochures destinées aux maîtres de l'école élémentaire, les actes d'un colloque CM2-6ème, 7 brochures destinées à la formation en didactique des mathématiques des maîtres du premier degré, une brochure destinée à présenter la commission dans un congrès international (CIEM) et les annales du second concours interne de recrutement des PE.

- **Les 7 documents pour la formation en didactique des mathématiques des professeurs d'école :**
- Actes de la première université d'été des formateurs d'instituteurs, Olivet – juillet 1998, IREM de Bordeaux (1990).
- Actes du stage national de Cahors – mars 1991 (IREM Paris VII, 1991)
- Actes du stage national de Pau – mars 1992 (IREM de Bordeaux, 1993)
- Actes du stage national de Colmar – mars 1994 (IREM de Paris 7, 1995)
- Actes du stage national d'Angers – mars 1995 (IREM de Paris 7, 1996)
- Actes du stage national de Rennes – mars 1996 (IREM de Paris 7, 1996)
- Actes du stage national de Besançon – mars 1996 (IREM de Paris 7, 1997)
-

- **Les 21 actes des 24 colloques annuels de la COPIRELEM (diffusé par l'IREM de l'Académie d'accueil) :**

Orléans (74), Alpes d'Huez (75), Nice (76), Plestin les Grèves (77), Auberive (78), Bombannes (79), Clermont (80), Le Touquet (81), Blois (82), Antibes (83), Guetwiller (84), Guéret-Quimper (85/86), Angers (87), Rouen (88), Bordeaux (89), Paris (90), Nice-Besançon (91/92), Aussois (93), Chantilly (94), Douai (95), Montpellier (96), Saint –Etienne (97)

- **Les annales du second concours interne de recrutement des professeurs d'écoles :**

Un choix de sujets des années 92 à 96 (IREM de Paris 7, 1997)

- **Les 9 brochures intitulées : «Aides pédagogiques » diffusées par l'APMEP) :**
- Elem-Math I : « La mathématique à l'école élémentaire (1972)
- Elem-Math II : « la manipulation des naturels à l'école élémentaire (1974)
- Elem-Math III : « La division à l'école élémentaire »
- Elem-Math IV : « Aides pédagogiques pour le cours préparatoire »
- Elem-Math VI : « Le triangle à l'école élémentaire »
- Elem-Math VII : « Aides pédagogiques pour le cycle moyen, tome 1 : géométrie » (1985)
- Elem-Math VIII : « Aides pédagogiques pour le cycle moyen, tome 2 : nombres décimaux (1985)

- Elem-Math IX : : « Aides pédagogiques pour le cycle moyen, tome 3 : situations-problèmes » (1986)

- **Une brochure « mixte » sur la proportionnalité destinée à la formation des instituteurs et proposant des activités pour les élèves de l'école élémentaire :**
  « La proportionnalité existe, je l'ai rencontrée.... (IREM de Rouen, 1987).

- **Les actes du colloque Liaison CM2-6ème de Limoges (IREM de Limoge)**

- **Une brochure internationale :** La COPIRELEM, CIEM d'Adélaïde (Australie, 1984)

De plus, la COPIRELEM contribue chaque année au recueil des sujets des annales du concours des Professeurs des Ecoles, éditées par l'IREM de Bordeaux et l'IREM de Paris 7.

Vous pouvez vous procurer les brochures issues des précédents stages organisés par la COPIRELEM :

- ***Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques***
  - ***Tome 1 : stage de Cahors - 1991*** (*56* F + frais de port : 11,50 F)
  - ***Tome 2 : stage de Pau - 1992*** (*55* F + frais de port : 16 F)
  - ***Tome 3 : stage de Colmar - 1993*** (*45 F*+ frais de port : 11,50 F)
  - ***Tome 4 : stage d'Angers - 1994*** (*67 F* + frais de port : 16 F)
  - ***Tome 5 : stage de Rennes - 1996*** (*68 F* + frais de port : 16 F)
  - *Tome 6:stage de Besançon 1997 (96 F+frais de port: 21 F) auprès de l'IREM de Paris 7*

  (le tome 2 est aussi disponible auprès de l'IREM de Bordeaux) ;

- Ainsi que les **actes des derniers Colloques** des professeurs et formateurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres, par exemple :
  - actes du colloque de **Saint-Étienne - 1997** - auprès de l'IREM de Paris 7
  - actes du colloque de **Montpellier - 1996** - auprès de l'IREM de Montpellier
  - actes du colloque de **Douai - 1995** - auprès de l'IREM de Lille.

La **COPIRELEM** participe aussi à la publication des annales des concours de recrutement des professeurs des écoles, en liaison avec les IREM de Bordeaux et Paris 7.
Vous pouvez vous procurer :

- **Annales du concours CRPE 97**
  (110 F + frais de port : 20 F) auprès de l'IREM de Paris 7.
- **"Thèmes mathématiques pour le recrutement des PE"**
  choix de sujets issus des concours externes 92, 93, 94
  (110 F, port compris)
- **Annales des concours CRPE 92, 93, 94, 95 et 96**
  auprès de l'IREM de Bordeaux.

et

- **Annales du second concours interne de recrutement de PE 92 à 96**
  (61 F + frais de port : 16 F)
  auprès de l'IREM de Paris 7.

IREM de Bordeaux
40, rue Lamartine
33400 TALENCE
☎ 05 56 84 89 76
🖳 05 56 84 89 72

IREM de Paris 7
Case 7018 - 2, place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
☎ 01 44 27 53 83 / 84
🖳 01 44 27 56 08

Notes

Notes

Notes

Notes

Notes

Notes

L O U I S - J E A N
avenue d'Embrun, 05003 GAP cedex
Tél. : 04.92.53.17.00
Dépôt légal : 977 — Novembre 1998
Imprimé en France