CONCOURS
SEPTEMBRE 2012

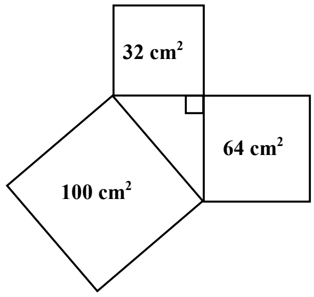
SUJETS

Première partie de l'épreuve

EXERCICE 1 (5 points)

Dans cet exercice, des affirmations sont proposées. Pour chacune d'entre elles, dire si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier la réponse.
Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point.
Une réponse fausse n'enlève aucun point.

1. La figure ci-contre représente trois carrés construits sur les trois côtés d'un triangle rectangle. Dans chacun des carrés est indiquée son aire.



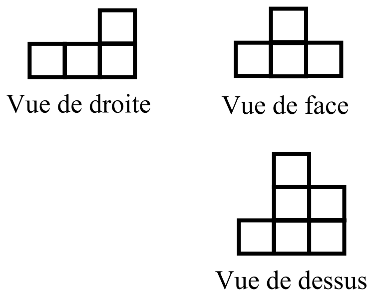
   Affirmation 1 :
   La construction à l'échelle de cette figure est possible.

2. **Affirmation 2 :**
   Si un nombre est multiple de 6 et de 9, alors il est aussi multiple de 54.

3. On considère deux nombres dont la somme est 400.
   Affirmation 3 :
   Si l'on augmente de 3 chacun de ces deux nombres alors leur produit augmente de 1209.

4. En période de sécheresse, un agriculteur a des réserves pour alimenter ses 8 vaches pendant 20 jours. Il accepte de prendre en charge 2 vaches de plus pour rendre service à son voisin.
   Affirmation 4 :
   Avec ces mêmes réserves, il pourra nourrir toutes les vaches pendant 18 jours.

5. On considère un solide constitué d'un empilement de cubes identiques.
   On voit ci-contre les vues de droite, de face et de dessus.



   Affirmation 5 :
   On peut construire un tel solide à l'aide d'un empilement de 7 cubes.

6. **Affirmation 6 :**
   En insérant de différentes manières exactement deux parenthèses (une ouvrante et une fermante) dans l'écriture $8 \times 7 + 3 \times 5$, on peut obtenir tous les nombres de la liste suivante :

$$71 \; ; \; 176 \; ; \; 283 \; ; \; 295 \; ; \; 400.$$

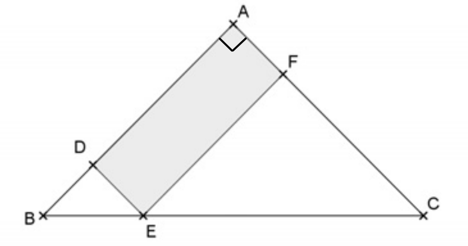
EXERCICE 2 (5 points)

Soit ABC un triangle isocèle, rectangle en A, tel que AB = 1 m.
On cherche à inscrire dans ce triangle un rectangle ayant une aire maximale.
Dans tout ce problème, l'unité de longueur est le mètre.

Partie A :

Dans cette partie, on inscrit le rectangle AFED comme sur la figure ci-contre.

- F est un point du segment [AC],
- D est un point du segment [AB],
- E est un point du segment [BC].



On pose AD = x et on considère la fonction f qui, à tout nombre x compris entre 0 et 1, associe l'aire du rectangle ADEF.

1. Montrer que : $f(x) = -x^2 + x$.

2. À l'aide d'une feuille de calcul, on a construit un tableau de valeurs de la fonction f.

	A	B
1	x	$f(x)$
2	0	0
3	0,1	0,09
4	0,2	0,16
5	0,3	0,21
6	0,4	0,24
7	0,5	0,25
8	0,6	0,24
9	0,7	0,21
10	0,8	0,16
11	0,9	0,09
12	1	0

a) Quelle formule a-t-on pu entrer dans la cellule B2, puis recopier jusqu'en B12, pour générer les images par f ?

b) Dans cette question, on admet l'existence d'un maximum pour la fonction f. Peut-on affirmer, à l'aide du tableau, que le maximum de la fonction f est atteint en $\frac{1}{2}$?

3. a) Démontrer que : $f(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$.

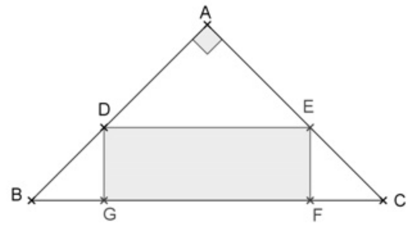
b) En déduire l'aire maximale recherchée.

c) Le rectangle d'aire maximale est-il un carré ?

Partie B :

Dans cette partie, on inscrit le rectangle DEFG comme sur la figure ci-contre.

- D est un point du segment [AB],
- E est un point du segment [AC],
- G et F sont deux points du segment [BC].



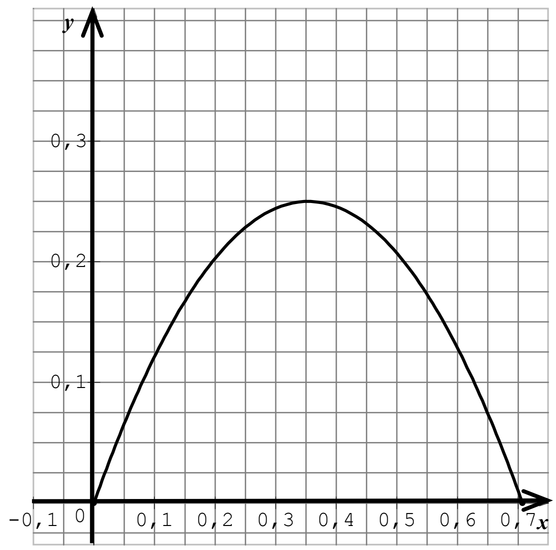
On pose BG = x.

1. Dans quel intervalle I se trouve le nombre x ?

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction g qui, à tout nombre x dans l'intervalle I, associe l'aire du rectangle DEFG.

2. Exprimer $g(x)$ en fonction de x.

3. La représentation graphique de g est donnée ci-dessous :



a) D'après le graphique, où placer le point G pour inscrire un rectangle d'aire 0,2 m² ?

b) Par lecture graphique, déterminer l'aire maximale recherchée au centième près.

c) Pour cette aire, le quadrilatère DEFG est-il un carré ?

EXERCICE 3 (2 points)

Soit n un nombre entier naturel non nul et A_n le nombre entier naturel dont l'écriture décimale ne contient que le chiffre 1 répété n fois : $A_n = \underbrace{111...1}_{n \text{ fois}}$

1. Pour quelles valeurs de n le nombre A_n est-il divisible par 11 ? Justifier.

2. Pour quelles valeurs de n le nombre A_n est-il divisible par 33 ? Justifier.

GROUPEMENT 2

Première partie de l'épreuve

EXERCICE 1 (3 points)

Dans cet exercice, quatre affirmations sont proposées. Pour chacune, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, puis justifier la réponse.
Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point.
Une réponse fausse n'enlève pas de point.

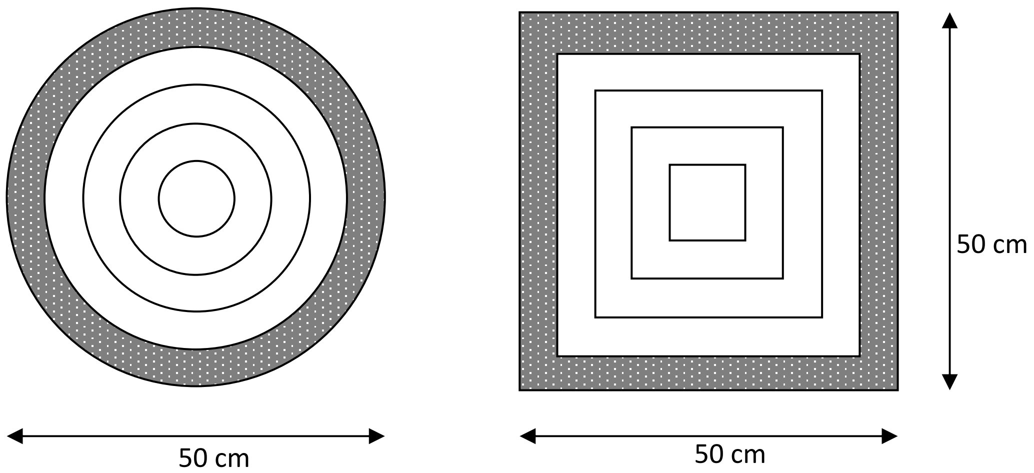
1. **Affirmation 1** : pour tout nombre entier naturel *n*, le nombre $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

2. Aujourd'hui, Martin n'a pas appris sa leçon. Le professeur donne un contrôle dans lequel figure un Q.C.M. qui comporte 3 questions. À chacune des questions, il y a 3 choix possibles dont une seule bonne réponse. Martin répond au hasard à chaque question.

   Affirmation 2 : La probabilité que toutes les réponses soient justes est $\frac{1}{27}$.

   Affirmation 3 : La probabilité que toutes les réponses soient fausses est $\frac{1}{3}$.

3. On considère les 2 figures suivantes :



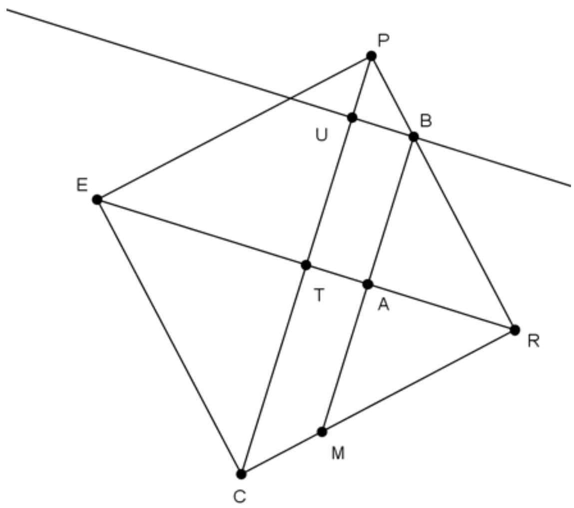
La première est constituée de cinq disques concentriques de rayons respectifs 5 cm, 10 cm, 15 cm, 20 cm et 25 cm. La seconde est constituée de cinq carrés concentriques à bords parallèles de côtés respectifs 10 cm, 20 cm, 30 cm, 40 cm et 50 cm.

Affirmation 4 : le rapport entre l'aire du disque central et l'aire grisée dans la figure de gauche est égal au rapport entre l'aire du carré central et l'aire grisée dans la figure de droite.

EXERCICE 2 (5 points)

On considère la figure ci-dessous, dans laquelle :

- EPRC est un carré de centre T ;
- M est un point du segment [CR], distinct de C et de R ;
- B est le point du segment [PR] tel que CM = PB ;
- A est le point d'intersection des droites (MB) et (ER) ;
- U est le point d'intersection de la droite parallèle à la droite (ER) passant par B et de la droite (PC).



L'objectif de l'exercice est de déterminer la position du point M permettant d'obtenir le quadrilatère BATU d'aire maximale.

1. Montrer que le quadrilatère BATU est un rectangle.

Dans la suite du problème, on donne CR = 40. On pose CM = x.

2.

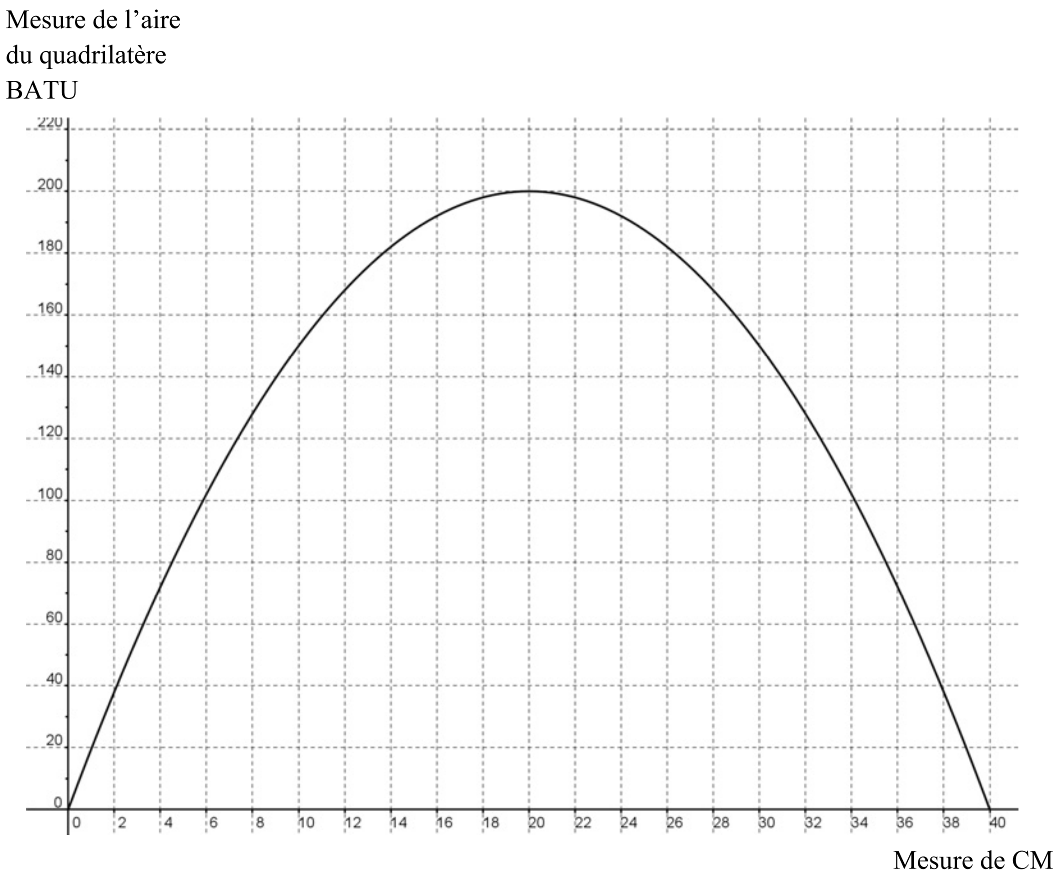
a) Dans quel intervalle x varie-t-il ?

b) Exprimer UB en fonction de x.

c) Exprimer TU en fonction de x.

d) Montrer que la mesure de l'aire du rectangle BATU s'exprime en fonction de x par $A(x) = \dfrac{x(40-x)}{2}$.

3. À l'aide d'un logiciel, on a tracé la courbe représentative de la fonction A :



Lire sur le graphique la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle est maximale. Quelle est la mesure de cette aire ?

4. Résolution algébrique

a) Montrer que $A(x) = \dfrac{-(x-20)^2}{2} + 200$.

b) En déduire que l'aire maximale est atteinte pour $x = 20$.

c) Montrer que, lorsque l'aire est maximale, le quadrilatère BATU est un carré.

EXERCICE 3 (4 points)

Françoise désire faire son arbre généalogique. Elle s'intéresse à la façon de numéroter ses ascendants selon la méthode dite « de Sosa ».

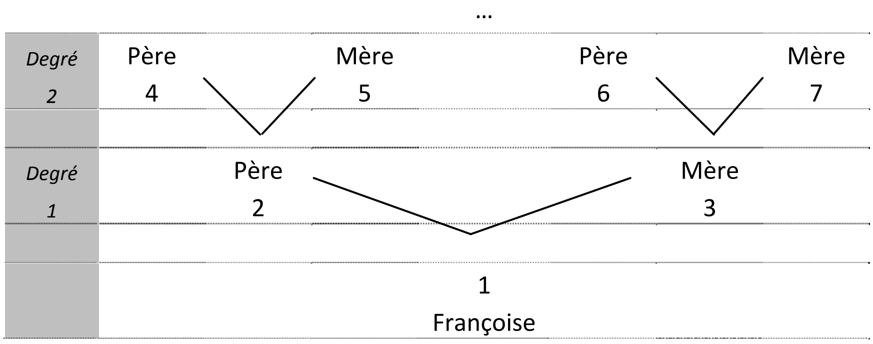
Dans cette numérotation, le sujet, ici Françoise, porte le numéro 1. Elle est située en bas de l'arbre généalogique.

Au degré 1, on trouve son père qui porte le numéro 2 et sa mère qui porte le numéro 3.

Au degré 2, on trouve le père de son père qui porte le numéro 4, la mère de son père qui porte le n° 5, le père de sa mère qui porte le numéro 6 et la mère de sa mère qui porte le n° 7.

Et ainsi de suite…

Dans cette numérotation, à partir du degré 1, chaque degré ne comporte que des couples mixtes. On admet alors que les numéros pairs sont des hommes et les numéros impairs sont des femmes.



1. On s'intéresse au nombre d'ascendants à un degré donné.
   a) Donner, sans justifier, le nombre d'ascendants au degré 3.
   b) Donner, sans justifier, le nombre d'ascendants au degré *n* en fonction de *n*.
2. On s'intéresse au lien entre une personne apparaissant dans l'arbre et son descendant direct (homme ou femme).
   a) Soit *p* le numéro d'un homme de l'arbre généalogique de Françoise.
   Sans justification, exprimer en fonction de *p* le numéro de son descendant direct dans cet arbre généalogique.
   b) Soit *m* le numéro d'une femme de l'arbre généalogique de Françoise.
   Sans justification, exprimer en fonction de *m* le numéro de son descendant direct dans cet arbre généalogique.
   c) Dominique est la personne de numéro *d* dans cet arbre. Camille est son descendant direct dans cet arbre.
   Donner la (ou les) condition(s) sur *d* pour que Camille et Dominique soient de même sexe. Justifier la réponse.
3. La personne portant le numéro 191 est-elle un ascendant du côté du père de Françoise ou de la mère de Françoise ? Justifier la réponse.
4. Claude est la personne de numéro 257 de l'arbre généalogique de Françoise.
   Combien compte-t-on d'hommes sur le chemin de l'arbre qui relie Claude à Françoise ?
   Justifier la réponse.

GROUPEMENT 3

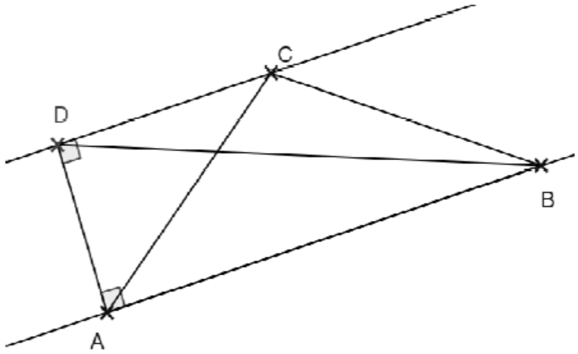
Première partie de l'épreuve

EXERCICE 1 (3 points)

Dans cet exercice, cinq affirmations sont proposées. Pour chacune, dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse. Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point ; une réponse fausse n'enlève pas de point.

1. **Affirmation 1 :**
   Tout prisme droit a deux fois plus d'arêtes que de faces.

2. On considère la figure ci-contre dans laquelle le quadrilatère BADC est un trapèze rectangle :
   Affirmation 2 :
   Le triangle ABD a la même aire que le triangle ABC.



3. On augmente de 50 % la longueur L d'un pavé droit, on double sa hauteur h et on conserve sa largeur l.
   Affirmation 3 :
   Le volume V de ce pavé droit est multiplié par 4.

4. Une classe de 24 élèves est composée de 14 filles et 10 garçons. La taille moyenne des garçons est 174 cm et celle des filles 162 cm.
   Affirmation 4 :
   La taille moyenne des élèves de la classe est 167 cm.

5. **Affirmation 5 :**
   Le produit de deux nombres pairs consécutifs est divisible par 8.

EXERCICE 2 (3 points)

On rappelle la propriété P suivante :

« Un nombre entier naturel et la somme de ses chiffres ont le même reste dans la division euclidienne par 9. »

1. Quel est le reste de la division de 164 330 258 647 par 9 ?

2. L'objet de cette question est de démontrer la propriété P pour un nombre entier naturel strictement inférieur à 10 000.

   On considère un nombre entier naturel strictement inférieur à 10 000 et on note $\overline{abcd}$ son écriture en base dix.

   a) Montrer qu'il existe un nombre entier naturel k tel que
   $$\overline{abcd} = a + b + c + d + 9k.$$

   b) On note r le reste de la division euclidienne de $\overline{abcd}$ par 9, et r' le reste de la division euclidienne de $a+b+c+d$ par 9.
   Montrer que $r=r'$.

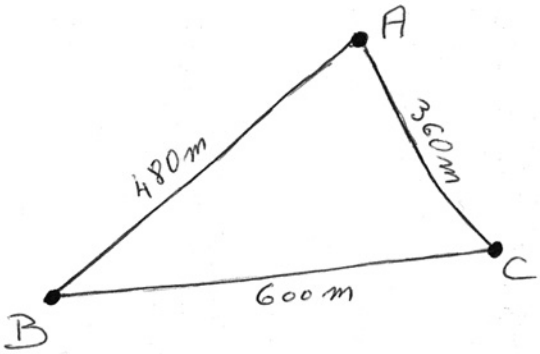
3.

   a) Déduire de la propriété P un critère de divisibilité par 9 d'un nombre entier naturel , utilisant la somme de ses chiffres.

   b) Déterminer le plus grand diviseur commun de 18 et 164 330 258 643.

PROBLÈME (6 points)

On délimite, sur un terrain plat, un parcours de cross avec 3 jalons, représentés par les points A, B et C comme indiqué sur le schéma ci-contre.
Le départ et l'arrivée de la course se font au point A.



Partie A

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

2.
   a) Calculer l'aire du triangle ABC.

   b) En déduire la distance du point A à la droite (BC).

Partie B

1. José a fait deux tours de ce parcours à la vitesse moyenne de 8 km/h. Combien de temps lui a-t-il fallu ? Donner la réponse exacte, en heure, minute, seconde.

2. Pour calculer la vitesse moyenne en m/min de chaque élève durant la course, on construit une feuille de calcul comme ci-dessous :

SOMME =E$1/(C4+D4/100)

	A	B	C	D	E
1	Distance totale parcourue (en m) :				2880
2	Elève	Classe	Durée		Vitesse moyenne (en m/min)
3			Minutes	Secondes	
4	Armand	5e A	25	15	=E$1/(C4+D4/100)
5	Bakhali	5e B	25	26	
6	Clotilde	5e A	26	24	
7	Florent	5e C	26	30	
8	Julie	5e B	25	20	

Ce tableau nous indique que l'élève Armand a mis 25 minutes et 15 secondes pour faire les deux tours de parcours.

a) La formule « =E$1/(C4+D4/100) » entrée dans la cellule E4 donne-t-elle le résultat souhaité ? Sinon la corriger.

b) On envisage de recopier vers le bas la formule correcte entrée dans E4 pour calculer la vitesse moyenne (en m/min) des élèves de 5e du collège. Pourquoi le symbole « `$` » devant « `1` » est-il nécessaire ?

Partie C

1. Pour surveiller la course, on place un enseignant au point J, situé à égale distance des points A, B et C.

a) Préciser la position du point J. Justifier.

b) Construire, à la règle et au compas, le triangle ABC à l'échelle 1/5000 et le point J. (On laissera les traces de construction.)

On pourra compléter la figure au fur et à mesure des questions.

*Les questions **2.** et **3.** sont indépendantes.*

2. On place deux autres enseignants sur le parcours :

- l'un au point K, milieu de [AB] ;
- l'autre au point I, milieu de [AC].

Montrer que AKJI est un rectangle.

3. On appelle H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC. Deux postes de secours sont installés en A et H. Montrer que si l'infirmière du collège se déplace sur le segment [KI], elle reste à égale distance de ces deux postes.