CORRIGÉS 2005

AIX-MARSEILLE, CORSE, MARTINIQUE, MONTPELLIER, NICE, TOULOUSE

Note préliminaire :
Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS)
MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1

Question 1

Cette proposition est vraie car, si a est un entier pair alors a est le double d'un autre entier p et peut s'écrire $2p$.
Son carré est donc égal à $4p^2$ qui est le double de $2p^2$, or $2p^2$ est aussi un entier, on peut en déduire que $4p^2$, autrement dit a^2, est aussi un entier pair.

Question 2

Cette proposition est fausse car, si a et q sont deux nombres entiers naturels l'égalité : $a = 13q + 18$ ne montre pas que q est le quotient euclidien de a par 13 car alors 18 en serait le reste et serait supérieur au diviseur 13, ce qui est contradictoire avec la définition de la division euclidienne selon laquelle le reste est toujours positif ou nul et inférieur au diviseur.

<u>Remarque :</u>
On pourrait obtenir la valeur du quotient euclidien de a par 13 en utilisant cette égalité mais en la modifiant pour que l'entier jouant le rôle du reste devienne inférieur à 13 : $a = 13q + 18 = 13q + 13 + 5 = 13(q + 1) + 5$
Cette dernière expression fait apparaître que le quotient euclidien de a par 13 est égal à $(q + 1)$ *et que le reste de cette division est égal à 5 qui est bien inférieur au diviseur 13.*

Question 3

Cette proposition est vraie car, si le nombre à quatre chiffres 8*b*76 est un multiple de trois alors la somme de ses chiffres est elle aussi un multiple de trois (critère de divisibilité par trois) donc : $8 + b + 7 + 6 = b + 21$ est un multiple de trois que nous nommerons M. La valeur du chiffre *b* s'exprime alors par l'égalité $b = M - 21$
Comme M et 21 sont tous deux des multiples de trois, on en déduit que *b* est aussi un multiple de trois car la différence entre deux multiples de trois est toujours un multiple de trois.

Question 4

Cette affirmation est vraie, sa justification peut s'effectuer en trois temps :

1) Le produit de trois nombres entiers consécutifs contient forcément un entier qui est multiple de trois ; pour le prouver, il faut envisager trois cas possibles :

- soit le premier entier est un multiple de trois, et l'affirmation est vérifiée ;
- soit le premier entier n'est pas un multiple de trois et a un reste égal à 1 dans la division par trois ; dans ce cas le nombre entier suivant a un reste égal à 2 quand on le divise par trois et le dernier a un reste égal à 0 quand on le divise par trois, ce dernier est donc un multiple de trois ce qui vérifie l'affirmation précédente ;
- soit le premier entier n'est pas multiple de trois et a un reste égal à 2 quand on le divise par trois, dans ce cas le nombre entier suivant a un reste égal à 0 quand on le divise par trois, donc ce nombre est un multiple de trois ce qui vérifie l'affirmation précédente.

Il n'y a pas d'autres cas possibles car dans la division euclidienne d'un entier par 3, le reste ne peut être égal qu'à 0, 1 ou 2.
Le produit de trois entiers consécutifs est donc toujours divisible par trois car il contient toujours un facteur qui est lui-même divisible par trois.

2) Le produit de trois nombres entiers consécutifs est forcément de l'une des deux formes suivantes : (pair x impair x pair) ou bien (impair x pair x impair). On s'intéresse ici seulement à la première de ces deux formes comme le précise l'énoncé, donc on peut écrire ce produit sous la forme :
$2p \times (2p + 1) \times (2p + 2) = 2p \times (2p + 1) \times 2(p + 1) = 4 \times p \times (p + 1) \times (2p + 1)$
Or les deux entiers p et (p + 1) sont deux entiers consécutifs donc si l'un est impair l'autre est pair, leur produit est donc pair et peut s'écrire : $p \times (p + 1) = 2 \times q$ avec q entier égal à la moitié du produit.
On peut donc écrire : $2p \times (2p + 1) \times (2p + 2) = 8q \times (2p + 1)$
Comme q et (2p + 1) sont deux entiers, on en déduit que le produit est divisible par 8.

3) Comme 3 et 8 sont premiers entre eux on peut déduire des deux conclusions précédentes que le produit de trois entiers consécutifs dont le premier est un entier pair est divisible par (3 x 8) donc divisible par 24.

EXERCICE 2

Question 1
Nombres de sommets et d'arêtes du nouveau solide

<u>Méthode 1 :</u>
Si on « colle » sur chaque face d'un cube une pyramide régulière de base carrée, cette base se confondant avec une face du cube, on obtient un solide dans lequel tous les sommets et toutes les arêtes du cube restent visibles. Il faut donc compter le nombre de sommets et d'arêtes qu'on a ainsi ajoutés au cube. Sur chaque face du cube, la pyramide comporte un sommet qui n'est pas un sommet du cube, ce sommet est relié aux quatre autres sommets de la pyramide (qui sont aussi des sommets du cube) par quatre arêtes qui ne sont pas des arêtes du cube. Comme on a cette configuration sur chaque face du cube et que le cube comporte six faces, on aura six sommets supplémentaires et 24 arêtes supplémentaires.
On dénombre donc, pour ce nouveau solide :

8 sommets + 6 sommets = 14 sommets

12 arêtes + 24 arêtes = 36 arêtes

Le nouveau solide possède 14 sommets et 36 arêtes.

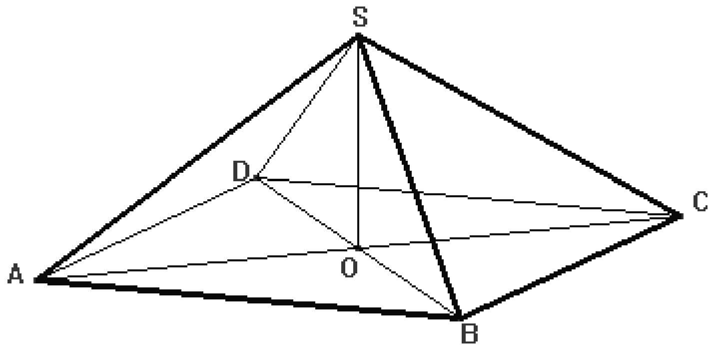
<u>Méthode 2 :</u>
Si on considère que les pyramides construites sur les faces du cube englobent tous les sommets et toutes les arêtes du cube, on peut ne compter que le nombre de sommets (5) et le nombre d'arêtes (8) de chaque pyramide. Mais avant de multiplier ces nombres par six, il faut tenir compte du fait que chaque pyramide construite sur une face du cube partage quatre de ses arêtes et quatre de ses sommets avec les pyramides qui la touchent par sa base, ces arêtes étant communes à deux pyramides voisines et ces sommets étant communs à trois pyramides voisines.
On dénombre ainsi 6 sommets appartenant à une seule pyramide et (6 x 4) sommets communs à trois pyramides. On obtient donc le nombre de sommets par le calcul suivant : 1 x 6 + [(4 x 6) : 3] = 6 + 8 = 14
De même, on dénombre (4 x 6) arêtes appartenant à une seule pyramide et (4 x 6) arêtes communes à deux pyramides. Le nombre d'arêtes est donc donné par le calcul suivant : 4 x 6 + [(4 x 6) : 2] = 24 + 12 = 36

<u>Remarque :</u>
Il existe une loi générale qui met en relation le nombre de faces, de sommets, et d'arêtes d'un polyèdre, c'est la « formule d'Euler » : F + S = A + 2, dans laquelle A désigne le nombre d'arêtes, F le nombre de faces et S le nombre de sommets du polyèdre. Si on calcule le nombre de faces de notre polyèdre (ici F = 6 x 4 = 24) on peut vérifier que les réponses fournies sont cohérentes car :
F + S = 24 + 14 = 38 et A + 2 = 36 + 2 = 38 donc on a bien F + S = A + 2

Question 2
Longueur de l'arête d'une pyramide

Pour calculer la longueur de l'arête de l'une de ces pyramides, il faut utiliser sa propriété de régularité qui permet d'affirmer que la projection orthogonale de son sommet S est le centre O de sa base carrée (Cela revient à dire que la droite qui

passe par le sommet S et le centre O du carré, est perpendiculaire au plan du carré). Si A est l'un des sommets de la base carrée, AO est égal à la moitié de l'une des diagonales du carré. Dans un carré, la longueur de la diagonale est égale au produit de la longueur du côté par le nombre réel $\sqrt{2}$. Ici, le côté du carré a pour longueur 10 cm, donc sa diagonale a pour longueur $10\sqrt{2}$ cm, et AO = $5\sqrt{2}$ cm.
Dans le triangle SAO rectangle en O, on a donc OS = 3 cm, AO = $5\sqrt{2}$ cm.
En appliquant le théorème de Pythagore à ce triangle on obtient : $OS^2 + OA^2 = AS^2$ soit 9 + 50 = 59 donc $AS^2 = 59$ et AS = $\sqrt{59}$.
La longueur de l'arête est donc $\sqrt{59}$ cm.



EXERCICE 3

Question 1a
Construction d'un quadrilatère ABCD isocerfvolant en A

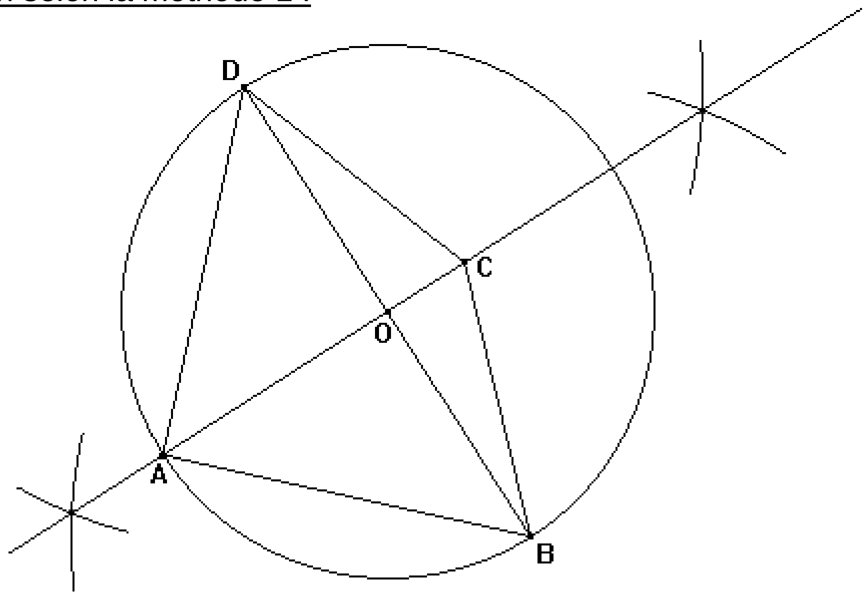
Analyse préalable à la construction :
Pour obtenir un quadrilatère ABCD isocerfvolant en A, il faut réaliser un angle droit en A et faire en sorte que la droite (AC) soit axe de symétrie de ABCD, ce qui a pour conséquence de rendre B et D symétriques l'un de l'autre par rapport à (AC).
Ainsi (AC) devient la médiatrice du segment [BD] ce qui engendre les égalités : AB = AD et CB = CD.

Méthode 1 :
On peut commencer par tracer un segment [BD] de longueur quelconque et construire sa médiatrice (Δ) qui le coupe en son milieu O, puis tracer un cercle de centre O passant par B et D. Ce cercle coupe la médiatrice en deux points, on choisit l'un de ces deux points comme point A, et comme point C on peut choisir n'importe quel point sur (Δ). En reliant les points A, B, C et D, on obtient un quadrilatère ABCD isocerfvolant en A. En effet, l'angle de sommet A est droit car c'est un angle inscrit dans un demi-cercle et la diagonale (AC) est bien axe de symétrie car c'est la médiatrice de [BD].

Méthode 2 :

On peut aussi commencer par construire un triangle ABD isocèle et rectangle en A. Pour cela, on construit deux droites perpendiculaires se coupant en A, puis on trace un cercle de centre A coupant ces deux droites, l'une en B et B', l'autre en D et D', (le choix de la position des points n'a pas d'importance). Ensuite on trace la médiatrice de [BD] qui passe par A (car A est équidistant de B et D). Enfin, on choisit un point n'importe où sur cette médiatrice : ce point est le point C, quatrième sommet de l'isocerfvolant ABCD.

Construction selon la méthode 1 :



Question 1b

Construction d'un quadrilatère avec un axe de symétrie et non isocerfvolant

Pour qu'un quadrilatère admette un axe de symétrie, sans être un isocerfvolant, il faut soit qu'il n'ait aucun angle droit, soit, s'il a un angle droit, que le sommet de cet angle droit ne se trouve pas sur son axe de symétrie.

- Si nous choisissons de construire un quadrilatère ayant un axe de symétrie sans avoir d'angle droit nous pouvons procéder de deux façons différentes au moins :

Méthode 1 :

Construire un triangle ABD isocèle en A mais non rectangle en A, puis, après avoir tracé la médiatrice de [BD], choisir le quatrième sommet C sur cette médiatrice. On obtient bien ainsi un quadrilatère ayant (AC) pour axe de symétrie mais n'ayant pas d'angle droit en A (voir figure a).

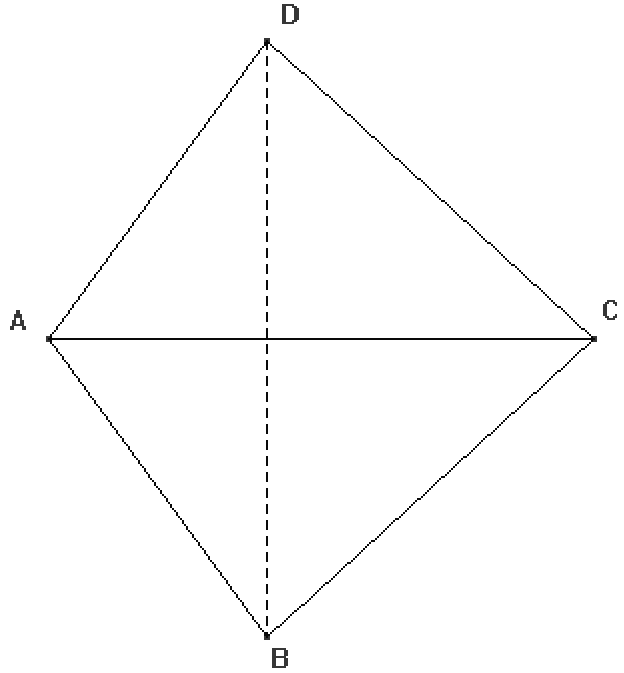


figure a

Méthode 2 :

Construire un triangle ABC quelconque (non rectangle et non isocèle), et ne possédant aucun angle mesurant 45°, puis construire le quatrième sommet D du quadrilatère comme symétrique du sommet B du triangle par rapport au côté [AC]. Ce quadrilatère possède un axe de symétrie et ne possède pas d'angle droit (voir figure a).

- Si nous choisissons de construire un quadrilatère ayant un angle droit (au moins) et dont l'axe de symétrie ne passe pas par le sommet de l'angle droit, dans ce cas un rectangle non carré convient (voir figure b).

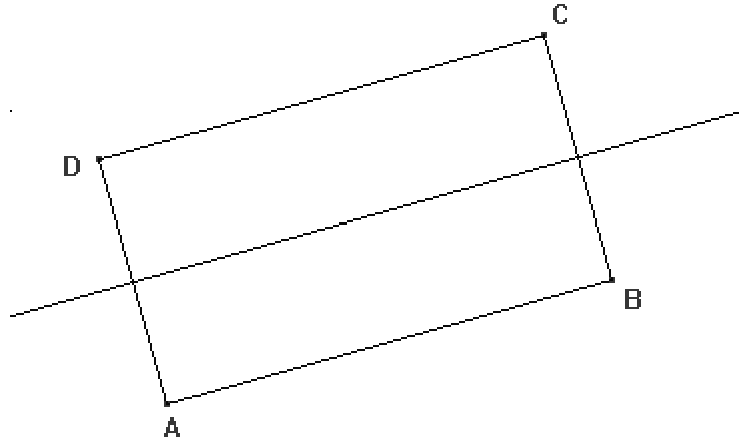


figure b

Remarque :

Comment doit-on interpréter l'expression de l'énoncé : « qui admet un axe de symétrie » ? Faut-il considérer qu'il s'agit d'un axe de symétrie et un seul, ou bien qu'il s'agit d'au moins un axe de symétrie ? Aucune précision n'étant donnée et la deuxième interprétation étant celle qui prévaut en mathématiques, un quadrilatère *ayant deux axes de symétrie et n'ayant pas d'angle droit, doit être considéré comme une réponse correcte. Un losange non rectangle peut à cet égard être considéré comme une réponse convenable.*

Question 2a

« Tous les carrés sont des isocerfvolants » est une **affirmation vraie** car tout carré ABCD possède un angle droit en A et sa diagonale (AC) en est un axe de symétrie du carré.

Question 2b

« Tous les rectangles sont des isocerfvolants » est une **affirmation fausse** car tout rectangle, qui n'est pas un carré, possède quatre angles droits mais aucune de ses diagonales n'est un axe de symétrie car les seuls axes de symétrie d'un rectangle non carré sont ses médianes.

Question 2c

« Tous les isocerfvolants dont les diagonales se coupent en leur milieu sont des carrés » est une **affirmation vraie** car tout quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme, si, de plus c'est un isocerfvolant :

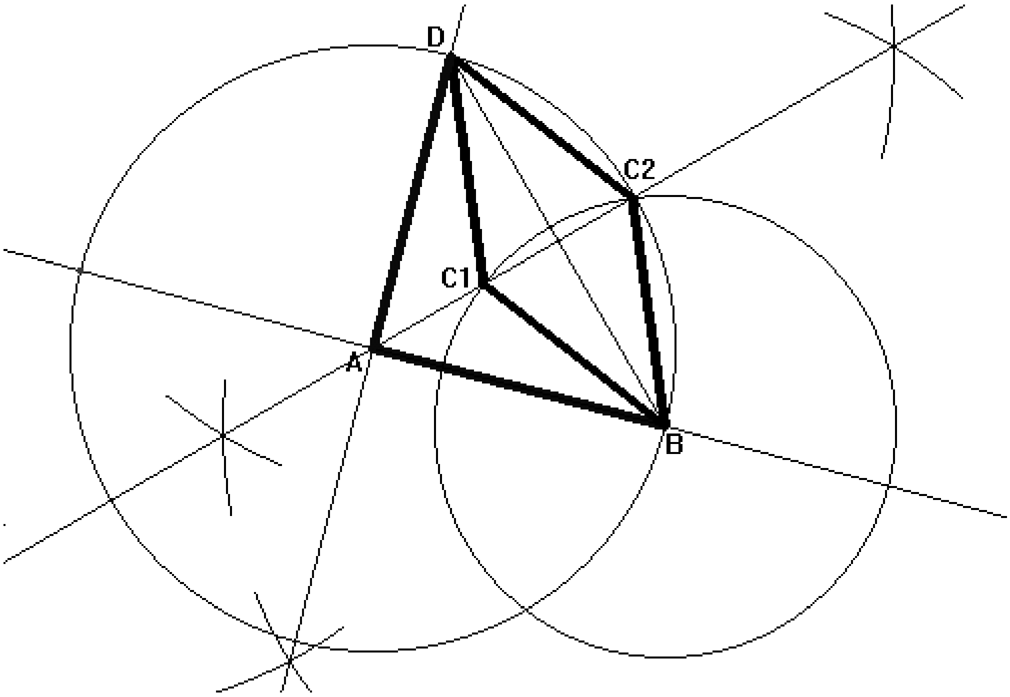
- il possède un angle droit : on peut en déduire que le parallélogramme est un rectangle ;
- il possède une diagonale qui est un axe de symétrie : on en déduit que le rectangle possède deux côtés consécutifs de même longueur et donc que c'est un carré.

Question 3a
Construction

L'angle $\widehat{BAD}$ est un angle droit, AB = 4 cm, ABCD est un isocerfvolant en A, on cherche à placer un point C du plan tel que BC = 3 cm.

Pour construire un tel quadrilatère :

- On trace un cercle de centre a et de rayon 3 cm ; on place un pont B sur ce cercle et on trace [AB]. On construit la droite perpendiculaire à (AB) passant par A ; elle coupe le cercle de centre A en deux points ; on choisit l'un d'eux comme point D. On a ainsi construit un triangle ABD rectangle et isocèle en A avec AB = 4 cm.
- On construit la médiatrice de [BD] et on trace un cercle de centre B de 3 cm de rayon. Ce cercle coupe la médiatrice en deux points, chacun de ces points peut être choisi comme point C, l'un comme sommet de l'isocerfvolant convexe, l'autre comme sommet de l'isocerfvolant non convexe.



Remarque :

La construction est possible ici car la distance de B à la médiatrice (soit $\frac{BD}{2} = 2\sqrt{2}$) est inférieure ou égale au rayon du cercle (3 cm), dans le cas contraire le cercle ne couperait pas la médiatrice et le point C n'existerait pas.

Question 3b
Valeur exacte de BD

Pour calculer la valeur exacte de BD il suffit de se placer dans le triangle ABD. Ce triangle est rectangle et isocèle en A du fait que (AC) est axe de symétrie du quadrilatère ABCD. En appliquant le théorème de Pythagore dans ce triangle on a :

$AB^2 + AD^2 = BD^2$

Donc $4^2 + 4^2 = 32 = BD^2$ donc BD = $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

La valeur exacte de BD est donc $\sqrt{32}$ ou $4\sqrt{2}$.

Remarque :
On peut aussi considérer que ABD est un demi-carré de diagonale BD et appliquer le résultat suivant « dans un carré la longueur de la diagonale est égale au produit de la longueur du côté par $\sqrt{2}$ » donc BD = $4\sqrt{2}$

Question 3c
Aire du triangle ABD

L'aire du triangle ABD est égale au demi-produit de AB par AD soit :

Aire ABD = $\frac{1}{2}$ AB x AD = $\frac{1}{2}$ 4 x 4 = 8

On a donc Aire de ABD = 8 cm².

Question 3d
Aire de l'isocerfvolant non convexe

L'aire de l'isocerfvolant non convexe ABCD qui peut être obtenu en 1a), est égale à la différence entre l'aire du triangle ABD et l'aire du triangle ACD. Il reste donc à calculer l'aire du triangle ACD. On peut l'obtenir en utilisant la formule :

$$\text{aire triangle} = \frac{(\text{base x hauteur})}{2}$$

Si on choisit le côté BD comme base, il faut utiliser la hauteur issue de C, cette hauteur est égale à CI avec I milieu de [BD] car (CI) est la médiatrice de [BD].
On a BI = $2\sqrt{2}$ cm ; BC = 3 cm et le triangle BCI rectangle en I.
On peut donc appliquer le théorème de Pythagore à ce triangle : $BI^2 + IC^2 = BC^2$

$$IC^2 = BC^2 - BI^2 = 3^2 - (2\sqrt{2})^2 = 9 - 8 = 1 \text{ donc } IC = 1 \text{ cm}$$

$$\text{Aire ACD} = \frac{(4\sqrt{2} \text{ x } 1)}{2} = 2\sqrt{2}$$

L'aire de l'isocerfvolant non convexe ABCD est donc $(8 - 2\sqrt{2})$ *cm²*.

<u>Rappel de la définition de la valeur arrondie d'un nombre :</u>
La valeur arrondie d'un nombre au dixième est le nombre décimal le plus proche dont la partie décimale est composée de 1 chiffre au maximum.

Pour donner l'arrondi au dixième près de cette aire on peut procéder d'au moins deux façons différentes :

<u>Méthode 1(pragmatique) :</u>
Si la calculatrice le permet, on tape $(8 - 2\sqrt{2})$ sur son clavier et on lit sur l'écran : 5,1715729… ; on en déduit que l'arrondi au dixième près de cette aire est 5,2 car ce décimal est plus proche du résultat affiché que le décimal 5,1.

<u>Méthode 2 (mathématique) :</u>
Pour savoir quelle est la meilleure approximation (par défaut ou par excès) au dixième près de $(8 - 2\sqrt{2})$, il faut, à partir d'un encadrement au centième près de la valeur de $\sqrt{2}$, procéder par étapes successives pour obtenir un encadrement au centième près de $(8 - 2\sqrt{2})$:
$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ donc $2{,}82 < 2\sqrt{2} < 2{,}84$ d'où $-2{,}84 < -2\sqrt{2} < -2{,}82$
On en déduit : $8 - 2{,}84 < 8 - 2\sqrt{2} < 8 - 2{,}82$ soit $5{,}16 < 8 - 2\sqrt{2} < 5{,}18$

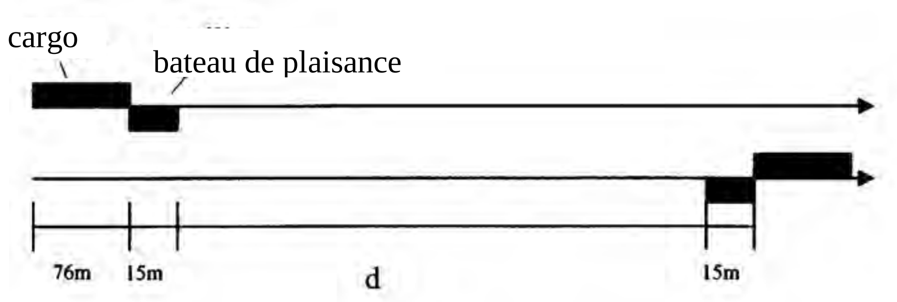
L'arrondi au dixième près de l'aire de l'isocerfvolant non convexe ABCD est donc égal à 5,2 cm².

EXERCICE 4

Le cargo (mesurant 76 m de long et navigant à 25 km/h) commence à dépasser le bateau de plaisance (mesurant 15 m de long et navigant à 12 km/h), quand l'avant du cargo arrive au niveau de l'arrière du bateau de plaisance, et le dépassement se termine quand l'arrière du cargo arrive au niveau de l'avant du bateau de plaisance.
Un passager du bateau de plaisance, verra donc l'avant du cargo parcourir une distance égale à la longueur du cargo (76 m) augmentée de la longueur du bateau de plaisance (15 m) pour permettre à l'arrière du cargo d'atteindre l'avant du bateau de plaisance, soit :

76 m + 15 m = 91 m.

Pendant ce temps le bateau de plaisance aura continué à avancer à sa propre vitesse et aura parcouru une certaine distance d comme le montre le schéma ci-dessous :



Cette distance de 91 m étant perçue par rapport au bateau de plaisance, elle sera parcourue à la vitesse à laquelle un occupant du bateau de plaisance voit avancer le cargo, c'est-à-dire à une vitesse égale à la différence des vitesses des deux bateaux soit :

25 km/h - 12 km/h = 13 km/h

Le problème revient donc à calculer la durée nécessaire pour parcourir 91 m à la vitesse de 13 km/h.

<u>Méthode 1 :</u> utilisation d'un tableau de proportionnalité :

Distance parcourue en mètres	13 000	91
Durée du trajet en secondes	3600	t

A partir de l'égalité : $\frac{13000}{3600} = \frac{91}{t}$ qui traduit la relation de proportionnalité entre les deux grandeurs, on peut déduire que : 13000 t = 91 x 3600 = 327 600

$$\text{D'où } t = \frac{327\,600}{13\,000} = 25{,}2$$

Une autre façon de procéder consiste à ne pas effectuer le calcul de la valeur du produit 91 x 3600 pour chercher à le simplifier par décomposition multiplicative :

$$t = \frac{91x3600}{13000} = \frac{13x7x36x100}{10x10x100} = \frac{7x36}{10} = \frac{252}{10}$$

La durée du dépassement est donc égale à 25,2 secondes.

Remarque :
Dans un tableau de proportionnalité, toutes les mesures d'une même grandeur doivent être exprimées dans la même unité. Ici, la distance 91 mètres imposait d'exprimer la vitesse dans une unité utilisant le mètre (m/s, m/h), (ou bien 91 m devait être converti en km soit 0, 091 km). On pouvait s'attendre à une durée assez faible pour être exprimée en secondes, donc la durée correspondant à la vitesse devait être convertie en secondes, c'est pourquoi la vitesse de 13 km/h a été convertie en 13 000 m en 3 600 secondes, ce qui explique les valeurs des nombres figurant dans la première colonne du tableau.

Méthode 2 : Mise en équations du problème, résolution algébrique.

Si nous désignons par t la durée en secondes du dépassement total, par d la distance en mètres parcourue par le bateau de plaisance pendant le dépassement, les vitesses des deux mobiles doivent être exprimées en mètres par seconde pour que les unités de vitesse soient compatibles avec les unités de durée et de distance :
Vitesse du cargo en m/s = 25 000m / 3600 s = (125/18) m/s
Vitesse du bateau de plaisance en m/s = 12 000m / 3600 s = (10/3) m/s

Remarque :
Nous exprimons ces valeurs sous forme de quotients simplifiés afin de conserver des valeurs exactes. Les valeurs décimales que nous fournit une calculatrice ne sont, dans ce cas, que des valeurs approchées ; ces nombres étant des nombres rationnels non décimaux, leurs valeurs exactes ne peuvent s'exprimer que sous forme de quotients.

Distance parcourue par le voilier : $d = (\frac{10}{3}) \times t$ (1)

Distance parcourue par le cargo pendant la même durée : $15 + d + 76 = (\frac{125}{18}) \times t$

On en déduit que : $d + 91 = (\frac{125}{18}) \times t$ (2)

En remplaçant dans (2) la lettre d par la valeur obtenue en (1), on obtient :

$(\frac{10}{3}) \times t + 91 = (\frac{125}{18}) \times t$

$91 = (\frac{125}{18}) \times t - (\frac{10}{3}) \times t = (\frac{125}{18} - \frac{10}{3}) \times t = (\frac{125}{18} - \frac{60}{18}) \times t$

$91 = (\frac{65}{18}) \times t$

$t = 91 : (\frac{65}{18}) = 91 \times (\frac{18}{65}) = \frac{1638}{65} = 25,2$

Le dépassement total dure donc 25,2 secondes.

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

Résolution de l'exercice posé aux élèves :
Le départ de la course a été donné à 14 h 45 min, le premier de la course a mis 32 min, il est donc arrivé à 15 h 17 min, le dernier de la course est arrivé à 15 h 26 min, il est donc arrivé 9 min après le premier. Il y a donc 9 min d'écart entre le premier et le dernier.

Commentaire :
Dans cet exercice les heures et minutes ne désignent pas toujours la même chose. Quand il est indiqué : « Le départ de la course a été donné à 14 h 45 min », les heures et minutes désignent le repérage d'un instant donné dans l'écoulement du temps d'une journée, on est dans la chronologie.
Quand il est indiqué : « Le premier de la course a mis 32 minutes pour parcourir le circuit », les minutes désignent la mesure de la durée d'un moment. La mesure de la durée d'un moment se calcule en faisant la différence entre le repérage (l'heure) de la fin de ce moment et le repérage (l'heure) du début de ce même moment. On peut faire l'analogie d'une part, entre l'abscisse d'un point d'une droite graduée qui permet de repérer sa position sur la droite et le repérage d'un instant (en heures et minutes) dans l'écoulement du temps, et d'autre part, entre la mesure de la longueur d'un segment et la mesure de la durée d'un moment (compris entre deux instants).

Question 1
Élèves dont la réponse est juste

Il s'agit de Gianni et de Lola car seules les réponses fournies sont prises en compte, indépendamment des procédures ayant permis de les obtenir.

Question 2
Les deux procédures correctes apparaissant chez les élèves

La première procédure correcte est celle de Dolorès et de Lola qui calculent la durée du parcours du dernier coureur avant de calculer la différence entre la durée du premier et celle du dernier.
La deuxième procédure est celle de Gianni qui calcule l'heure d'arrivée du premier coureur avant de calculer la différence entre l'heure d'arrivée du premier et l'heure d'arrivée du dernier.

Question 3
Analyse comparative des productions de Dolorès et de Lola

Remarque :
Une telle analyse doit faire apparaître, d'une part, les ressemblances entre les deux productions, et, d'autre part, ce qui les différencie. Nous distinguons ces deux parties dans la réponse proposée ci-dessous.

<u>Points communs :</u>
- Comme cela a été signalé à la réponse de la question 2, elles adoptent la même procédure correcte de résolution ou le même raisonnement.
- Elles utilisent l'écriture décimale à virgule pour coder les heures et minutes, ce qui est erroné.
- Elles écrivent le résultat de la différence de leurs nombres (codés par des écritures à virgule) comme un nombre entier (81 et non 0,81 ; 41 et non 0,41).
- Elles rédigent chacune une phrase explicative avant d'écrire leurs calculs et une phrase exprimant la réponse finale.

<u>Différences :</u>
- Dolorès effectue ses calculs comme s'il s'agissait de véritables nombres décimaux, elle écrit que 15,26 - 14,45 = 81 ; cela doit être interprété comme 0,81 qui serait l'expression exacte de cette différence entre deux décimaux. Elle interprète implicitement ce résultat comme étant égal à 81 minutes.
- Lola procède à un calcul correct, elle décode ses notations décimales et calcule dans le système sexagésimal sans commettre d'erreur mais sans livrer d'indication sur la procédure qu'elle a employée (complément de 14 h 45 min pour arriver à 15 h 26 min ou bien conversion de 15 h 26 min en 14 h 86 min). Elle écrit 41 comme résultat qu'elle interprète comme 41 minutes ce qui est la durée attendue.

C'est donc au niveau des procédures de calcul que leurs productions se distinguent.
L'une se laisse abuser par ses notations et les traite comme de véritables nombres décimaux, ce qui provoque une erreur, tandis que l'autre réinterprète ses notations en heures et minutes et calcule correctement dans le système sexagésimal malgré des notations incorrectes.

Question 4
Analyse comparative des productions de Jacques et Peter

<u>Points communs :</u>
- Ils utilisent tous les deux la même procédure erronée : à la durée du parcours du premier, ils soustraient l'heure d'arrivée du dernier.
- Ce faisant, ils ne distinguent pas la notion de durée d'un moment et la notion de repérage d'un instant. Bien que ces deux notions s'expriment toutes deux en heures et minutes, l'une est une grandeur mesurable (durée) alors que l'autre est un repérage sur l'axe du temps (heure).
- De plus l'ordre des termes de leurs différences (32 - 15,26 ou 32 - 15 h 26) est dicté par la seule taille des nombres (32 > 15,26) et non par une éventuelle interprétation respectant le sens de l'énoncé (durée du dernier moins durée du premier, ou bien, heure d'arrivée du dernier moins heure d'arrivée du premier) bien que cela ne soit plus possible à cause du mélange des grandeurs.
- Leurs deux réponses sont fausses.

<u>Différences :</u>
- A condition d'interpréter 15 h 26 comme étant le décimal 15,26 Jacques effectue une soustraction décimale correcte : 32 - 15,26 = 16,74. Il maîtrise donc la technique opératoire de la soustraction entre deux décimaux. Peter ne la maîtrise pas car il commet entre autres des erreurs de retenues.

- Jacques pose des calculs en ligne, Peter pose ses calculs en colonnes.
- Peter éprouve beaucoup de difficultés pour effectuer son calcul en colonnes : il aligne une première fois les chiffres à partir de la gauche, ce qui est conforme à son écriture décimale, puis il barre sa première tentative et aligne les chiffres à partir de la droite, ce qui semble dû au fait que 32 représente des minutes au même titre que 26. On peut donc penser qu'il y a dans sa démarche une tentative de retour au sens des nombres et donc vers le système sexagésimal.
- Peter rédige une réponse conforme à la question posée dans l'énoncé alors que Jacques rédige une réponse confuse dans laquelle la durée est exprimée sans unité sous forme d'écriture décimale.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Question 1a
Notion mathématique étudiée

Dans les trois documents la notion étudiée est la division euclidienne.

Commentaire :
Ces trois documents sont extraits de manuels de CE2, il s'agit donc d'une approche de la division euclidienne.

Question 1b
Compétence disciplinaire exigée à la fin du cycle 3 concernant cette notion

Remarque :
La question évoque « la » compétence disciplinaire exigée à la fin du cycle 3, ce qui laisse penser que les correcteurs attendent une seule compétence en réponse à cette question.

Dans les programmes de 2002, dans la partie « calculs », on peut lire l'énoncé de la compétence suivante : « Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un nombre entier (d'au plus quatre chiffres) par un nombre entier (d'au plus deux chiffres), par un calcul posé » qui semble être la mieux adaptée à la question posée.

Remarque :
Cette compétence est au service d'une compétence plus large que l'on trouve dans la partie : « Problèmes relevant des quatre opérations » ainsi formulée : « Résoudre des problèmes en utilisant les connaissances sur les nombres naturels et décimaux et sur les opérations étudiées ».

Question 2 : On s'intéresse aux documents A et B.

Question 2a
Comparaison des caractéristiques des deux situations

Remarque :
Sans que l'on puisse donner une définition générale du terme « caractéristique », il semble nécessaire de distinguer deux grandes composantes :
- *le type de situation proposée*
- *le type de travail demandé aux élèves sur chaque situation (type de tâches).*

Point communs :
- Elles font appel au même sens de la division : la division-quotition (qui revient à chercher le nombre de parts quand on connaît la valeur d'une part dans un problème de partage équitable).
- Elles demandent aux élèves de comprendre et de terminer un travail amorcé par des élèves virtuels. Concrètement, après avoir compris la procédure amorcée (« Explique et termine ») les élèves doivent compléter un tableau, une phrase réponse et une égalité du type a = b.q + r.
- Elles évoquent un contexte qui est familier aux élèves.
- Elles proposent des raisonnements organisés et conduits à l'aide de tableaux.

Différences :
- Les dividendes et les quotients n'ont pas la même taille (29 et 88 pour les dividendes, 7 et 14 pour les quotients).
- Le document B ne propose qu'une procédure numérique.
- Les tableaux du document A comportent le nombre exact de lignes à compléter, tandis que le tableau du document B, qui comporte plus d'étapes, ne semble pas contenir dans l'espace qui lui est réservé et ne donne aucune information sur le nombre de lignes nécessaires.
- Le problème du document B comporte une étape intermédiaire pour la recherche du dividende dont la résolution est donnée alors que le document A ne comporte aucune question intermédiaire.
- Le document A propose trois procédures de résolution dont la première, empirique (dessin de William), permet de résoudre entièrement le problème, ce qui atténue fortement l'intérêt de mener à leur terme les deux autres.

Question 2b
Similitudes et différences constatées dans les procédures de résolution

Le document A présente le début de trois procédures de résolution différentes : la procédure de William prenant appui sur un dessin ou un schéma figuratif, celle de Sonia qui est une procédure numérique additive (addition itérée) et celle de Pauline qui est un procédure numérique soustractive (soustraction itérée).
Le document B ne présente que le début d'une procédure numérique soustractive (soustraction itérée).

Pour respecter la demande de l'énoncé, on peut répondre sous la forme suivante :
Similitudes :
- les deux documents présentent une procédure soustractive organisée en tableau qui fait correspondre les nombres en jeu.
Différences :
- le document A présente deux autres procédures : schématique et additive.
- le document B présente une colonne supplémentaire de nombres (la colonne des 6, 6 étant le nombre de glaces mangées à chaque étape). Le rappel de ce nombre pourra servir de test d'arrêt quand le reste sera inférieur à ce nombre.

Question 2c
Autre procédure utilisable par les élèves

Pour économiser le nombre d'additions ou de soustractions, les élèves peuvent avoir recours à des ajouts ou à des retraits de multiples du diviseur qui est un nombre simple dans les deux cas (4 dans un cas, 7 dans l'autre) en s'appuyant sur leur connaissance des « tables de multiplication ».

Ils peuvent aussi utiliser une procédure multiplicative consistant à calculer des multiples du diviseur s'approchant au plus près du dividende. Par exemple, pour le problème du document B : « Dix fois 6, c'est trop petit, quinze fois 6 c'est trop grand mais c'est tout près de 88, alors c'est quatorze fois 6 ». Sur un plan mathématique, cela revient à encadrer le dividende par deux multiples successifs du diviseur.

Remarque :
Il ne serait pas pertinent de proposer comme autre procédure « Effectuer la division euclidienne du dividende par le diviseur » car à ce stade de leur apprentissage, les élèves ignorent encore la technique opératoire experte relative à cette opération (celle qui fait intervenir la potence).

Question2d
Intérêt de l'emploi d'une calculatrice (proposée dans le document B)

- L'utilisation de la calculatrice réduit le risque d'erreur de calcul et permet surtout aux élèves manquant d'assurance en calcul d'oser s'engager dans la résolution du problème en se centrant sur le raisonnement à suivre, sans risquer de le parasiter par une éventuelle surcharge cognitive due à la nécessaire attention qu'ils doivent porter au calcul lui-même. Mais elle ne dispense pas du contrôle de la résolution du problème :
    - si elle permet de compléter la troisième colonne du tableau, elle ne donne aucune indication sur le nombre d'itérations à effectuer ;
    - si l'élève ne contrôle pas le sens de ce qu'il fait, il peut rencontrer une difficulté pour interpréter les nombres négatifs qui s'afficheraient en fin de processus.
- Elle favorise les itérations car l'élève n'a qu'à répéter la séquence de touches :
  « - 6 = » pour les réaliser.
- Elle fournit un moyen de validation des procédures calculatoires.

Question 3 - On s'intéresse au document C que le maître se propose d'utiliser en situation initiale.

Question 3a
Existence d'une progression entre les trois exercices

Les trois exercices proposés sont des situations de division-partition (recherche de la valeur d'une part) : ceci n'est donc pas un élément distinctif pour justifier une éventuelle progression entre les trois exercices.

La procédure la mieux adaptée à ce type de situation est une procédure multiplicative.

Compte tenu de la familiarité de la situation, de la petite taille des nombres en jeu, et de leur rapport (40 c'est 5 fois 8), le problème n°1 incite l'élève à utiliser une procédure multiplicative en se demandant : « 40 c'est cinq fois quel nombre ? ». Ce problème sera nécessairement le premier proposé aux élèves car il installe le modèle de résolution des problèmes de division-partition. De plus la reconnaissance de la multiplication est favorisée par une représentation sous forme de piles, ou de rangées régulières, qui renvoie à l'une des situations de référence de la multiplication.

Le choix du second problème à proposer aux élèves peut se faire selon différents points de vue que le maître est amener à privilégier :

- **La taille du quotient**, qui est une variable didactique significative (il a été montré que plus le quotient est grand, plus sa recherche par essais multiplicatifs est fastidieuse). Le quotient est 102 pour le problème n°2, 400 ou 333 pour le problème n°3 selon que le diviseur est 5 ou 6, l'ordre est alors dans ce cas : problème n°1 ; problème n°2 ; problème n°3.
- **L'accès à la représentation du problème** qui est aussi une variable importante. Le problème n°3 propose une quantité d'objets (bonbons) à partager, ce qui favorise l'analogie avec le problème n°1 ; par contre le problème n°2 met en jeu une masse (grandeur continue) dont on connaît la mesure, mais qui ne peut pas être assimilée à une quantité d'objets (1326 g ne correspond pas à 1326 boulettes de 1 g !). Dans ce cas, l'ordre devient problème n°1 ; problème n°3 ; problème n°2.
- **Les particularités des couples de nombres donnés** : (13, 1326) ; (5, 2000) ou (6, 2000). Dans le problème n°2, on reconnaît le diviseur 13 dans le dividende 1326. Ainsi un élève de CE2 peut décomposer 1326 en 1300 et 26 et voir que 1300 et 26 sont des multiples de 13. Dans le problème n°3, la reconnaissance d'un multiple de 5 dans le nombre 2000 n'est pas évidente pour un élève de CE2 car l'idée que 2000 c'est 20 centaines ou 200 dizaines exige une expertise qu'il ne possède en général pas ; si le diviseur est 6 c'est encore plus compliqué. Dans ce cas, l'ordre devient : problème n°1 ; problème n°2 ; problème n°3

Plusieurs réponses semblent donc possibles à cette question selon les paramètres que l'on prend en considération. La validité de la réponse proposée est donc à mettre en relation avec la qualité de la justification fournie.

Question 3b
Procédure produite par un élève en fin de CE2, pour les problèmes 1 et 2

Pour résoudre le problème n°1, un élève de fin de CE2 peut utiliser plusieurs procédures différentes car la taille des nombres et le contexte le permettent.

<u>Première procédure :</u> procédure empirique. Il peut faire un dessin en comptant les cubes un à un et découvrir qu'avec 40 cubes il peut construire 5 tours de huit cubes chacune, il peut aussi s'en assurer en calculant la somme de 5 termes égaux à 8.

Deuxième procédure : Après avoir fait une simulation, soit mentale, soit à l'aide d'un schéma, l'élève peut découvrir qu'à chaque fois que les 5 tours montent d'un étage, on utilise 5 cubes supplémentaires, cela peut le conduire à additionner 5 à lui-même autant de fois que nécessaire pour obtenir 40. Le nombre de termes de la somme lui fournit le nombre de cubes de chaque tour. Il peut éventuellement remarquer que quand les cinq tours montent de deux étages il place dix cubes, en utilisant le rapport entre 10 et 40, il peut alors conclure plus rapidement.
Troisième procédure : Il peut savoir que 5 fois 8 c'est 40 ou que 40 c'est 5 fois 8. Il lui reste alors à interpréter cette relation dans le contexte de l'énoncé et à formuler la réponse attendue.

Par contre, pour résoudre le problème n°2, l'élève n'a plus accès aux procédures faisant appel à un dessin, la masse totale (1326 g) et le contexte (quantité continue) ne le permettent plus. Une procédure efficace de résolution doit nécessairement faire appel à la multiplication en mettant en évidence que 1326 est un multiple de 13, ce qu'un élève peut réussir à faire en s'appuyant sur la décomposition 1326 = 1300 + 26 déclenchée par la vue du « 13 » dans 1326.
L'élève peut aussi calculer 1326 - 13 = 1313 puis 1313 – 13 = 1300 et découvrir à ce moment là que 1300 = 13 x 100 ; il découvre ainsi une procédure plus performante en mettant à profit l'opportunité qui se présente à lui et qu'il n'avait peut-être pas anticipée.

Question 4
Comparaison des choix chronologiques de deux maîtres :
Maître 1 : document C (problèmes 1 et 2), document A, document B.
Maître 2 : document A, document B, document C complet.

Question 4a
Logique conduisant le maître 1 à faire ces choix

Parmi les raisons qui peuvent être évoquées pour justifier le choix du maître A on peut citer :

- Il choisit de commencer par l'étude de la division-partition (recherche de la valeur d'une part), afin de permettre aux élèves d'établir un lien fort entre situations de division et situations multiplicatives, puis de poursuivre par l'étude de la division-quotition (recherche du nombre de parts) qui lui permet d'élargir le sens de la division et le champ des procédures de résolution.
- Il choisit de commencer par des énoncés courts sur lesquels aucune procédure de résolution n'est imposée ni suggérée (problèmes de recherche du document C), en écartant le problème n°3 dont l'énoncé est source de confusion (faut-il partager en 5 ou en 6 parts ?), il continue par des situations dans lesquelles les procédures de résolution sont amorcées et, de ce fait, imposées (documents A et B), le document B étant d'un degré de difficulté supérieur au document A par la taille des nombres en jeu et le fait qu'une seule procédure de résolution soit proposée (voir question 2).
- Il préfère commencer par des divisions exactes dans lesquelles le reste est nul (document C) avant d'aborder des divisions dans lesquelles le reste n'est pas nul (documents A et B) dans le but de rendre plus simple la formulation du résultat par les élèves.

<u>Remarque :</u>
Des travaux de recherche montrent que la présence d'un reste non nul n'a pas d'influence sur les procédures utilisées par les élèves.

Question 4b
Différence entre la démarche du maître 2 et celle du maître 1

- Il choisit de commencer par l'étude de la division-partition qui offre la possibilité d'utiliser de façon naturelle des procédures additives ou soustractives, ce qui permet aux élèves d'utiliser leurs connaissances dans le champ additif.
- Il choisit de commencer par le document A qui offre aux élèves la possibilité de s'approprier trois procédures simples de résolution, proches de la manipulation, facilement interprétables en termes d'actions concrètes dans le contexte de l'énoncé, avant de poursuivre par le document B qui impose une procédure soustractive, puis par le document C qui élargit le sens de la division au sens de la division-partition, et les procédures aux procédures multiplicatives associées.

<u>Remarque :</u>
On peut se demander si, à la suite de cette progression, les élèves ne vont pas penser qu'il y a deux types de situation de division différentes, chacune étant associée à des procédures de résolution qui lui sont propres. Cela serait dommageable pour les apprentissages ultérieurs et cela risque de se produire si le maître ne prend pas la peine de mettre en place des moments de synthèse dans lesquels il soulignera que les deux types de situations conduisent à la même relation entre les nombres ($a = b.q + r$ avec $0 \leq r < b$). Il convient d'avoir l'objectif que les élèves puissent identifier le modèle de résolution associé au problème qu'ils ont à résoudre, puis se libérer du contexte de l'énoncé pour développer les procédures de calcul qui utilisent au mieux les particularités des nombres intervenant dans l'énoncé.

Question 5
Respect des recommandations des programmes de 2002 (docs. A et B)

Le document A semble mieux respecter que le document B ce type de recommandations : le texte est plus court, il ne contient que les éléments nécessaires à la résolution du problème.

<u>Remarque :</u>
L'exigence de brièveté dans la réponse doit être prise en compte pour la réponse attendue car un développement plus long risquerait de pénaliser un candidat.
Pour être plus complet, il serait opportun d'expliciter d'autres justifications, par exemple :
- *le texte B comporte une proposition relative alors que le texte A n'en comporte pas ;*
- *la question intermédiaire du document B semble brouiller les pistes en détournant les élèves du problème qu'ils vont avoir à résoudre…*

D'autre part il peut sembler curieux que la question ne concerne que les documents A et B car le document C semble respecter les recommandations des programmes beaucoup mieux que les documents A et B !

AMIENS - ROUEN

Note préliminaire :
Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS)
MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1

Question 1
Nombre maximal de paquets

Le nombre de paquets réalisés doit être un diviseur du nombre de billes rouges (108) et du nombre de billes noires (135). Ce nombre cherché est donc un diviseur commun de 108 et 135.
On cherche le nombre maximal de paquets, il s'agit donc de trouver le plus grand diviseur commun (pgcd) de 108 et 135.

<u>Méthode 1 :</u> Décomposition en facteurs premiers.
$108 = 2^2 \times 3^3$ et $135 = 3^3 \times 5$. Le PGCD de 108 et 135 est donc 3^3, soit 27.

<u>Méthode 2 :</u> Décomposition des deux nombres en produits d'entiers.
108 est pair donc divisible par 2 108 = 2 x 54 = 4 x 27
135 se termine par 5 donc il est divisible par 5 135 = 5 x 27
Les nombres 4 et 5 n'ayant pas de diviseurs communs autres que 1, cette décomposition permet de conclure que 27 est le plus grand commun diviseur des deux nombres.

On peut donc faire au maximum 27 paquets.

Question 2
Nombre de billes rouges et de billes noires dans chaque paquet

On sait que $\frac{108}{27} = 4$, chaque paquet contient donc 4 billes rouges. De plus, $\frac{135}{27} = 5$, ainsi, chaque paquet doit contenir 5 billes noires.
Chaque paquet contient doncà la fois 4 billes rouges et 5 billes noires.

EXERCICE 2

Question 1
Volume du bloc

28 + 53 + 11 = 92
Donc ensemble, le quartz, le feldspath et la biotite représentent 92% du bloc de granite.
Les 19,2 dm³ de minéraux secondaires correspondent au pourcentage restant du bloc de granite, soit 8% (100 – 92 = 8).
Soit *V* le volume du bloc de granite.
On a $\frac{8}{100} \times V = 19{,}2$; on en déduit : $V = 19{,}2 \times \frac{100}{8}$. Donc $V = 240$ dm³.
Le volume du bloc de granite est de 240 dm³.

Question 2
Masse du bloc

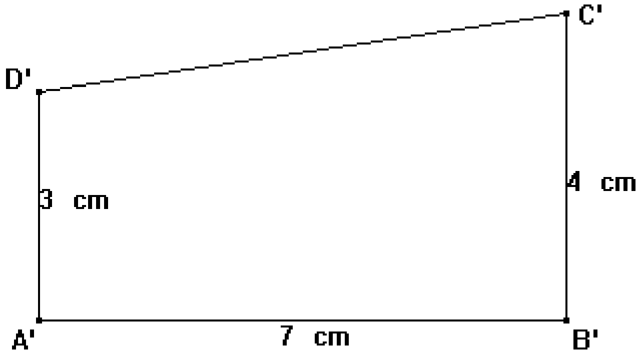
On sait qu'un mètre cube représente 1000 dm³.
Ainsi, 1000 dm³ de granite ont une masse de 2,6 tonnes, donc 240 dm³ ont une masse dont la mesure en tonnes est $240 \times \frac{2{,}6}{1000} = 0{,}624$.
La masse du bloc de granite est de 624 kilos.

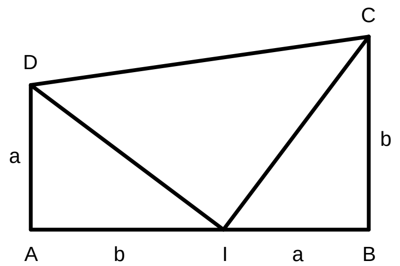
<u>Remarque :</u> *La valeur 2,6 tonnes par m³ est appelée masse volumique du granite.*

EXERCICE 3

<u>Remarque préalable :</u>
L'énoncé précise que l'unité de mesure est le centimètre. Dans ce corrigé, les unités de longueur ne seront donc pas précisées, seules les unités d'aire (cm²) et de volume (cm³) figureront.

Question A
Figures





Question A 1
Aire du trapèze ABCD

On remarque que $[AB]$ est une hauteur du trapèze ABCD.

L'aire du trapèze ABCD vaut donc $\dfrac{(AD+BC)\times AB}{2}$**, soit** $\dfrac{(a+b)^2}{2}$**.**

Question A 2
L'angle $\widehat{DIC}$ est droit.

<u>Remarque :</u>
On peut montrer que les triangles AID et IBC sont superposables de la manière suivante : les deux triangles ont un angle de mesure commune (l'angle droit) compris entre deux côtés de mesure commune (AD = BI et AI = BC), les deux triangles sont donc isométriques, c'est à dire superposables.

Dans le triangle AID, on sait que $\widehat{AID} + \widehat{IDA} + \widehat{DAI} = 180°$; or $\widehat{DAI} = 90°$,
donc $\widehat{AID} + \widehat{IDA} = 90°$.
Les triangles AID et IBC sont superposables donc $\widehat{IDA} = \widehat{CIB}$.
Ces deux dernières égalités donnent : $\widehat{AID} + \widehat{CIB} = 90°$.
De plus, on a $\widehat{AID} + \widehat{DIC} + \widehat{CIB} = 180°$ car A, I et B sont alignés.
Il suffit alors de prendre en compte $\widehat{AID} + \widehat{CIB} = 90°$ pour trouver $\widehat{DIC} + 90° = 180°$.
Ainsi $\widehat{DIC} = 90°$.

Question A 3
Nouvelle expression de l'aire du trapèze

L'aire du triangle DAI vaut $\dfrac{DA\times AI}{2}$ soit $\dfrac{ab}{2}$.

L'aire du triangle IBC vaut $\dfrac{BC\times BI}{2}$ soit $\dfrac{ab}{2}$. *(Les triangles AID et IBC étant superposables, ils ont la même aire).*

Les deux triangles AID et IBC sont superposables donc $ID = IC$. On en déduit l'aire du triangle DIC : $\dfrac{ID\times IC}{2}$ soit $\dfrac{c^2}{2}$.

Par conservation de l'aire, on peut dire que l'aire du trapèze ABCD est la somme des aires des triangles AID, IBC et DIC.

Or $\dfrac{ab}{2}+\dfrac{ab}{2}+\dfrac{c^2}{2}=\dfrac{2ab+c^2}{2}$.

Ainsi l'aire du trapèze ABCD vaut $\dfrac{2ab + c^2}{2}$.

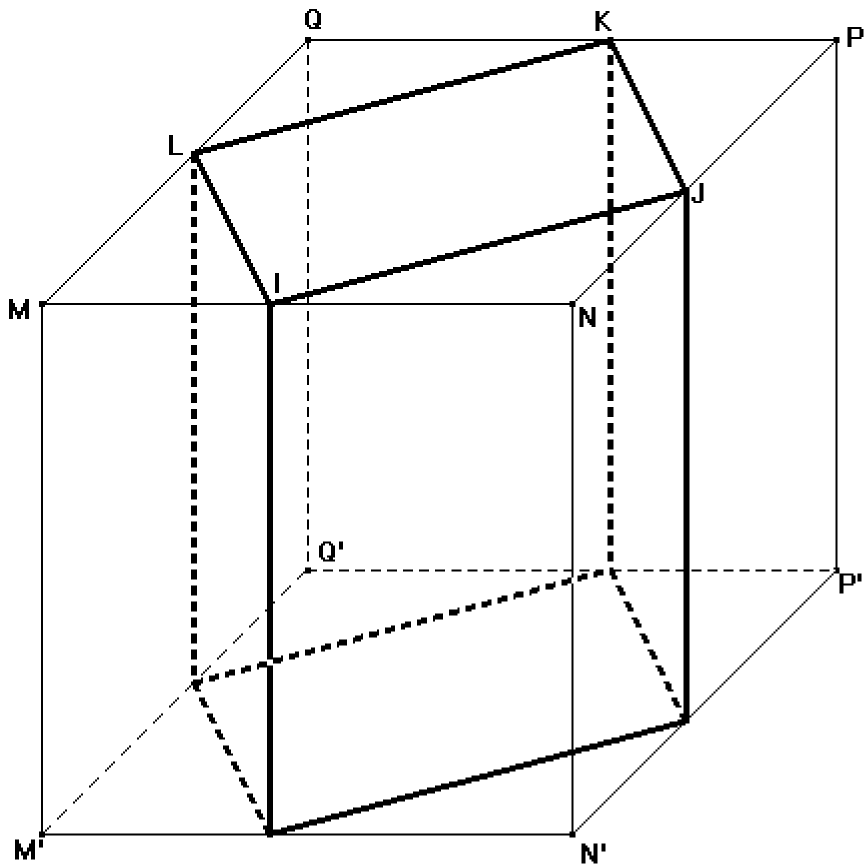
Question A 4
Démonstration du théorème de Pythagore

La question (A1) donne l'aire du trapèze ABCD en fonction de *a* et *b* uniquement. La question (A3) donne l'aire du trapèze ABCD en fonction de *a*, *b* et *c*. Il suffit alors d'égaliser les deux expressions pour obtenir : $\frac{(a+b)^2}{2} = \frac{2ab+c^2}{2}$.

Après simplification par 2 et développement du membre de gauche, on obtient : $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$. Ce qui donne l'expression bien connue : $a^2 + b^2 = c^2$.

Le carré de la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.
Le théorème de Pythagore est ainsi démontré.

Figure de la partie B



Question B 1
Nature du quadrilatère IJKL

Le trapèze MNJL vérifie les conditions du trapèze ABCD de la condition (A1). Le point I est placé à la manière de (A2). Ainsi, on peut conclure, grâce à la question (A2) que IL = IJ et que l'angle $\widehat{LIJ}$ est droit.

Le raisonnement analogue dans le trapèze IMQK (avec le point L) donne LI = LK et l'angle $\widehat{\text{ILK}}$ est droit.
Le raisonnement analogue dans le trapèze LQPJ (avec le point K) donne KL = KJ et l'angle $\widehat{\text{LKJ}}$ est droit.
Le raisonnement analogue dans le trapèze INPK (avec le point J) donne JI = JK et l'angle $\widehat{\text{IJK}}$ est droit.
On en déduit que le quadrilatère IJKL possède quatre côtés de même mesure et quatre angles droits.
IJKL est un carré.

Remarque :
Pour démontrer qu'un quadrilatère est un carré, il suffit de prouver par exemple qu'il a quatre côtés de même mesure et un angle droit.

Question B 2
Volume du solide restant

Nous allons présenter deux méthodes de calcul du volume du solide restant. Les deux méthodes reposent sur le calcul de LI.

Calcul de LI :
On applique le théorème de Pythagore dans le triangle IML rectangle en M. On trouve $\text{MI}^2 + \text{ML}^2 = \text{LI}^2$. Sachant que $\text{MI} = 3$ et $\text{ML} = 4$, on obtient $\text{LI}^2 = 25$. Or LI est une mesure (donc positive), ainsi $\text{LI} = 5$.

Méthode 1 :
IJKL est un carré ainsi, le solide restant est un pavé droit à base carrée. Pour calculer le volume de ce solide, il suffit alors de connaître sa hauteur. Elle vaut $3 + 4 = 7$, car le solide MNPQM'N'P'Q' est un cube. Le solide restant est un pavé droit de volume $5 \times 5 \times 7 = 175$. Soit 175 cm³.

Méthode 2 :
Une autre façon de trouver le volume du solide restant est de considérer le volume du cube MNPQM'N'P'Q' et de lui retrancher les volumes des quatre prismes à base triangulaire. Les quatre prismes ont strictement la même forme : une base triangulaire dont les côtés mesurent 3, 4 et 5 et une hauteur de mesure 7.
Le volume d'un prisme est « l'aire de la base multipliée par la mesure de la hauteur ».
La mesure en cm² de l'aire de la base est $\dfrac{3 \times 4}{2} = 6$, donc la mesure en cm³ du volume d'un prisme est $6 \times 7 = 42$. La mesure en cm³ du volume du cube est $7^3 = 343$.
On en déduit la mesure en cm³ du volume du solide restant : $343 - 4 \times 42 = 175$.

Le volume du solide restant est de 175 cm³.

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

Remarque préalable :
Comme pour toute analyse de travaux d'élèves, les candidats doivent résoudre au brouillon l'exercice proposé. Ici, il s'agit de trouver une manière de compter le nombre de matchs à organiser.

Méthode 1 :
Chaque joueur doit rencontrer les 4 autres.
Comme il y a 5 joueurs, ceci conduit à 5 x 4 = 20.
Mais dans ce calcul chaque rencontre est comptée deux fois.
Le nombre cherché est donc $\frac{5 \times 4}{2}$ *= 10 matchs.*

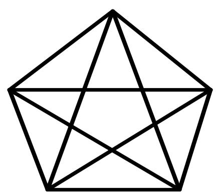
Méthode 2 :
On nomme les cinq joueurs, par exemple a, b, c, d et e. Il s'agit alors de dresser une liste exhaustive des choix de deux lettres différentes parmi cinq lettres. Le plus simple et le plus rigoureux est de faire un arbre de choix en prenant garde au fait que l'ordre dans l'écriture du couple n'intervient pas (par exemple le couple (a,b) est le même que le couple (b,a)). Ainsi, on fixe la lettre a et on forme tous les couples ayant pour première lettre a, soit (a,b),(a,c),(a,d) et (a,e). Puis on fixe la lettre b et on écrit tous les couples ayant pour première lettre b…attention le couple (b,a) a déjà été cité…ainsi on trouve (b,c),(b,d) et (b,e). On fait de même avec la lettre c : (c,d) et (c,e) et enfin avec la lettre d : (d,e). Il suffit alors de compter le nombre de couple écrit. On trouve 10.

Méthode 3 :
On nomme les cinq joueurs, par exemple a, b, c, d et e ; on dresse alors un tableau dans lequel chaque croix représente un match.

	a	b	c	d	e
a		X	X	X	X
b			X	X	X
c				X	X
d					X
e					

Il suffit alors de compter les croix.

Méthode 4 :
On représente les cinq joueurs par un point et on relie les joueurs entre eux. Chaque « segment » représente un match. Il suffit alors de compter le nombre de segments.



<u>Méthode 5 :</u>
Le premier joueur rencontre les 4 autres (4 matchs). Le deuxième joueur a déjà rencontré le premier, il rencontre alors les 3 autres (3 matchs). Le troisième joueur a déjà rencontré les deux premiers, il rencontre les 2 autres (2 matchs). Le quatrième joueur a déjà rencontré les trois premiers ; il rencontre alors le dernier (1 match). Le dernier joueur a déjà rencontré tous les autres…il suffit de compter le nombre de matchs joués 4+3+2+1=10.

<u>Méthode 6 :</u>
Ce résultat est donné par une formule connue.
Il s'agit de trouver le nombre de combinaisons à deux éléments parmi cinq éléments : $C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5\times 4\times 3\times 2\times 1}{(2\times 1)\times(3\times 2\times 1)} = \frac{5\times 4}{2} = 10$.

Question 1
Analyse des productions des 5 élèves

Prénom	Procédure mise en œuvre	Réponse et hypothèse pour l'expliquer
Henri	Henri propose une solution associant un schéma et un calcul. Son schéma semble représenter un joueur isolé qui doit rencontrer les quatre autres joueurs. Les flèches correspondent aux matchs à jouer. Il compte ainsi quatre matchs à jouer pour son joueur isolé. L'addition posée $4+4+4+4+4$ .. montre qu'il compte ainsi 4 matchs à jouer pour chacun des joueurs.	Chacun des 5 joueurs joue 4 matchs, donc il y a 20 matchs en tout. Cette réponse est fausse car chaque rencontre est comptée deux fois.
Medhi	L'écrit de Medhi est uniquement numérique. Il croit reconnaître un modèle multiplicatif dans l'énoncé. Peut-être a-t-il fait le raisonnement suivant : 5 joueurs, donc 5 matchs chacun.	La réponse est $5\times 5 = 25$ matchs. Cette réponse est fausse. Non seulement Medhi compte toutes les rencontres en double, mais il compte aussi que chaque joueur joue avec lui-même.
Cyril	Cyril raisonne avec un schéma. Chaque joueur est représenté par une forme géométrique (croix, rond, losange, carré, triangle). Il représente tous les matchs possibles de manière exhaustive en dessinant des terrains de tennis et les symboles des joueurs sur chacune des parties du court. Nous pouvons faire l'hypothèse qu'il	Il y a bien 10 terrains dessinés mais Cyril trouve un total de 9 matchs, sans doute par étourderie. Il faut noter que cet élève possède bien la méthode dite d'exhaustion des cas.

	commence par dessiner tous les matchs du joueur « croix », puis tous les matchs restant du joueur « rond », puis tous les matchs restant du joueur « losange » et enfin tous les matchs restant du joueur « carré ».	
Charlotte	Charlotte commence par représenter les 5 amis. Puis elle représente les courts de tennis accolés les uns aux autres et remplit ses courts par des personnages numérotés. Le joueur n°1 rencontre le joueur n°2, le joueur n°3 rencontre le joueur n°4, le joueur n°5 rencontre le joueur n°1…le tableau des courts reste ouvert.	Elle compte alors les matchs représentés, soit 3 matchs. On peut faire différentes hypothèses sur son erreur. Peut-être a-t-elle compris que tous les joueurs devaient jouer (au moins une fois) ? Peut-être a-t-elle bien compris la question mais ne trouve pas de moyens de dresser une liste exhaustive des différents matchs ?
Alice	Les joueurs sont numérotés de 1 à 5. Elle dresse par écrit une liste exhaustive de tous les matchs en travaillant de manière réfléchie et appliquée. Elle commence par tous les matchs du joueur n°1, puis tous les matchs restant du joueur n°2, puis tous les matchs restant du joueur n°3, puis le match restant du joueur n°4. Sa procédure est la plus experte à ce niveau.	Il lui suffit de compter le nombre de matchs décrits. Elle donne alors la réponse exacte, soit 10 matchs.

Question 2
Compétences relatives à la résolution de problème

Nous pouvons considérer que le problème proposé est un véritable « problème ouvert » comme il est décrit dans les « documents d'accompagnements des programmes ».
En effet, son énoncé est court, il n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de question intermédiaire) ; la solution ne peut se réduire à l'utilisation des derniers résultats du cours, le problème est « consistant », et le domaine conceptuel du problème est « assez » familier à l'élève.
Le but de cette activité est donc uniquement de développer chez l'élève un comportement de recherche et des compétences d'ordre méthodologique. En particulier, l'élève devra élaborer une démarche pertinente afin de produire une solution personnelle, formuler une réponse dans les termes du problème et communiquer sa démarche par écrit.

Question 3.1
Suite envisageable

Remarque :
La généralisation de ce problème doit être conforme aux programmes de cycle 3. En particulier on ne cherchera pas à généraliser en introduisant une inconnue (le nombre d'amis). Il faut donc chercher le maximum de généralité que l'on peut atteindre avec des élèves de cycle 3.

Étape 2 possible : Confronter les différentes procédures en organisant une mise en commun. Gérer un débat oral entre les élèves pour déterminer une solution qui semble convenir.

Étape 3 possible : Valider cette solution en organisant effectivement les matchs (« pour de faux ») dans la classe entre 5 élèves.

Étape 4 possible : On repose le même problème avec 7 amis. (Résolution individuelle).

Étape 5 possible : Mise en commun des résultats et débat.
A la fin de cette étape le maître peut espérer qu'au moins une des deux grandes stratégies suivantes a été plus ou moins explicitée. Par exemple pour 7 joueurs :
Stratégie 1 : Les joueurs sont a, b, c, d, e, f, g.
a joue avec les 6 autres (b, c, d, e, f, g), puis b joue avec les 5 autres (c, d, e, f, g) , et ainsi de suite ce qui conduit à la somme : 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21
Stratégie 2 : Chaque joueur doit jouer avec les 6 autres, mais si on compte 7 x 6, chaque rencontre est comptée deux fois. Donc le nombre est $\frac{7 \times 6}{2}$.

Étape 6 possible : (En classe entière et à l'oral) On pose le même problème avec 10 amis ? 20 amis ? 100 amis ? (On n'attend pas nécessairement une réponse numérique, mais au moins le calcul qu'il faudrait faire pour l'obtenir).

Étape 7 possible : Résoudre de manière individuelle le problème suivant « des amis décident d'organiser un tournoi de tennis. Ils doivent tous se rencontrer une fois. A l'issue du tournoi, 28 matchs ont été organisés. Combien sont-ils ? »

Remarque :
S'il y a n amis, le nombre de match à organiser est $1+2+3+...+(n-1)$.
Or on peut montrer que $1+2+3+...+(n-1)=\frac{(n-1)\times n}{2}$, *mais cette formulation générale ne peut être envisagée à l'école élémentaire.*
Démonstration de la formule $1+2+3+...+(n-1)=\frac{(n-1)\times n}{2}$ *:*
On note $S=1+2+3+...+(n-1)$.
On cherche à calculer S+S.
Pour cela, on effectue le calcul en colonne en écrivant les termes de S dans un sens puis dans l'autre et en sommant terme à terme :

$$\begin{array}{rccccccc} & 1 & + & 2 & + & 3 & + \dots + & (n-2) + (n-1) \\ + & (n-1) & + & (n-2) & + & (n-3) & + \dots + & 2 \quad + \quad 1 \\ \hline & n & + & n & + & n & + \dots + & n \quad + \quad n \end{array}$$

On trouve ainsi $2 \times S = (n-1) \times n$ *ce qui donne directement le résultat.*

Question 3.2
Réponse attendue d'un élève en fin de cycle 3

Il serait bon qu'un élève de CM2 puisse savoir trouver de manière exhaustive tous les couples possibles en créant lui-même un arbre de choix (*cf. méthodes 2 et 3*) et qu'il sache faire le lien avec une représentation graphique *(.f. méthode 4).*

Un élève de fin cycle 3 devrait pouvoir comprendre que pour répondre à la question « combien de matchs faut-il organiser pour que tous les amis se rencontrent une fois ? » on peut sommer tous les termes inférieurs au nombre d'amis en question. (*cf. méthode 5*) ce qui amène vers une généralisation.

SECOND VOLET (8 POINTS)

<u>Remarque préalable :</u>
Le sujet nous présente deux pages d'un fichier comme une séquence d'enseignement.
Si la séquence se limite à donner aux élèves ces deux fiches à compléter, les analyses qui suivent sont appropriées.
Le sujet ne fournissant ni le livre du maître, ni la fiche de préparation d'un enseignant utilisant ces deux fiches, il n'est pas possible de produire une autre analyse.
Cela ne préjuge en rien de la pertinence de ce fichier utilisé par le maître dans d'autres conditions.

Question 1
Analyse de la séquence pages 42 et 43

Les objectifs de la séquence décrite page 42 et 43 sont les suivants :

- Déterminer la valeur de chacun des chiffres composant l'écriture d'un nombre entier (ici inférieur à 100) en fonction de sa position.
- Comparer deux entiers naturels (ici inférieur à 100), utiliser les signes < et >.
- Aborder la confection de la centaine.

Les compétences visées sont :

- Assimiler les termes de vocabulaire *dizaine* et *unité*.
- Passer de la description d'un nombre inférieur à 100 en dizaines et unités à l'écriture en base dix de ce nombre.
- Passer de l'écriture en base dix d'un nombre à sa description en termes de dizaines et unités.
- Aborder la confection de la centaine et l'écriture du nombre 100.

L'utilisation du vocabulaire *unité, dizaine, centaine* ne constitue pas un objectif prioritaire du cycle 2. En revanche, la compréhension et la détermination de la valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture décimale d'un nombre est du ressort du cycle 2. (Le vocabulaire est en termes de « paquets »).
Nous pouvons ainsi supposer que la séquence est proposée à des élèves de cycle 2 et plus particulièrement à des CE1.

Question 2
Caractéristiques de notre système de numération mises en évidence

Notre système de numération appartient à l'ensemble des numérations dites « de position », c'est à dire qu'elle permet d'écrire une infinité de nombres avec dix symboles ou chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en respectant les conventions suivantes :

- les chiffres s'utilisent dans l'ordre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 pour écrire les nombres ;

- chaque chiffre a une valeur différente selon la position qu'il occupe dans l'écriture d'un nombre ;
- dix unités d'un ordre donné constituent une unité de l'ordre immédiatement supérieur (positionnée à sa gauche).

Cette séquence met en évidence les caractéristiques suivantes de notre système de numération :

- Les groupements d'unités par dix :
  dix unités $\longrightarrow$ une dizaine
  dix dizaines $\longrightarrow$ une centaine
  dans l'exercice A de la page 42.
- La valeur positionnelle des chiffres :
  Le passage de l'écriture additive (comme 6 dizaines 9 unités) à l'écriture positionnelle (69 dans l'exemple) et réciproquement, dans l'exercice A de la page 42, puis dans les exercices 1 et 3 de la page 43.
- Le fait que notre système de numération permet de comparer des nombres en s'appuyant uniquement sur leur écriture dans l'exercice B de la page 42, puis dans les exercices 2 et 4 de la page 43.
- Le caractère algorithmique des écritures :
  Il est ébauché avec le passage de 99 à 100 illustré par le compteur, dans l'exercice A de la page 42.

Question 3
Critique de la démarche proposée

Dans la fiche « découvre et comprends », l'élève ne « découvre » rien et rien ne peut laisser prévoir qu'il « comprenne ».
Dans le premier exercice (A page 42) on lui impose que « *5 dizaines et 4 unités* » s'écrit 54. Sans comprendre, et donc uniquement par mimétisme, il peut alors remplir les exercices à trous qui suivent. Le lien entre les 3 différentes écritures (sous forme de cartes à points, sous forme d'une description dizaine-unité et sous forme chiffrée) n'est pas assez mis en valeur. Où intervient le point crucial « groupement-échange » qui caractérise notre système de numération ?
Dans l'exercice B, on lui montre la comparaison de deux nombres désignés par leur écriture chiffrée ; il doit ensuite utiliser le résultat de cette comparaison
L'élève finit la fiche en remplissant l'exercice « as-tu compris ? » en comprenant uniquement que « pour avoir juste » il suffit de placer en premier le chiffre de la dizaine et en second le chiffre des unités ou reproduire le modèle de comparaison de deux nombres.
Dans la fiche « utilise tes connaissances », l'élève utilise effectivement les automatismes appris dans la page précédente. En effet, dans l'exercice 1 (page 43), il lui suffit de remplir les trous toujours par mimétisme. L'exercice 3 vérifiera encore une fois s'il a bien retenu que le premier chiffre est le chiffre des dizaines et que le second est le chiffre des unités. A aucun moment on ne vérifie si l'élève a donné du sens à cette écriture.
Dans les exercices 2 et 4, il doit comparer des nombres, en réinvestissant le modèle donné page 42.

Le choix des exercices n'est donc pas pertinent. Ils sont axés uniquement sur la forme mais pas sur le fond.
L'enchaînement d'exercices non pertinents ne permet pas aux élèves de donner du sens aux apprentissages en jeu.

Question 4
Pertinence de l'exercice « A – Complète »

L'exercice « A- Complète » aborde le passage à la centaine.
En premier lieu l'élève doit comprendre que 10 dizaines vaut « cent », pour cela une simple flèche relie dix plaques de 10 bien rangées à une plaque de 100.
Dans un deuxième temps, il est proposé à l'élève un compteur où, partant de 99 on arrive à 100 en ajoutant 1. (Les petites flèches sous les chiffres étant sensées représenter la rotation des roues du compteur qui avancent chacune d'un cran). On finit par poser à l'élève la question suivante : 99+1 = ?
L'exercice n'établit aucun lien entre ces deux aspects du passage à la centaine.
Des images ne suffisent pas ; il faudrait que l'élève puisse réaliser lui-même le groupement de dix cartes de dix et l'échange contre une carte de cent. De même, il devrait pouvoir manipuler un compteur manuel pour le passage de 99 à 100 en liaison avec une activité de dénombrement.

Proposition d'exercice :
On utilise toujours le matériel mis en place, à savoir les cartes à points.
La première partie de l'exercice reste identique : on peut échanger dix plaques de dix contre une plaque de cent.
L'enseignant peut ensuite proposer l'exercice :
Après avoir formé et échangé des plaques, écris ce que possèdent les enfants, puis vérifie avec le matériel :

- Jean possède neuf plaques de dix points. On lui donne alors trois plaques de dix points supplémentaires.
- Karim possède neuf plaques de dix points et une plaque avec quatre points. On lui donne alors sept points supplémentaires.
- Noé possède six plaques de dix points et une plaque de huit points. On lui donne alors cinq plaques de dix points et trois points supplémentaires.

<u>Remarques :</u>
Le premier item propose une situation d'addition sur les dizaines avec passage à la centaine. Le second item propose une addition sur les unités avec passage à la dizaine et à la centaine. Enfin le dernier item reprend les deux premiers.

Dans un deuxième temps, on peut proposer à l'élève de compléter des additions à trous du type 96 + … = 100, 80 + … = 100, 30 + … = 100.
(L'élève pourra s'aider des cartes à points ou d'un compteur).

Finalement, on demandera à l'élève de répondre à des questions du type 70 + 40 = …, 99 + 1 = …, 84 + 17 = …
(L'élève pourra s'aider des cartes à points ou d'un compteur).

Question 5
Analyse des exercices 2 et 3 page 43

Pour l'exercice 2 page 43. L'élève doit dans un premier temps reconnaître le plus grand des nombres entiers. Pour cela il doit faire l'effort de faire le lien avec le système de numération et comprendre que six dizaines est plus grand que deux dizaines (et ceci quel que soit le nombre d'unités mis en jeu). Dans un deuxième temps il lui faut utiliser les symboles < et > à bon escient. Le choix des nombres est pertinent dans le sens où on s'intéresse à des cas particuliers :

- 62 et 26 sont des nombres symétriques, les chiffres qui composent ces deux nombres, même s'ils sont identiques, n'ont pas la même valeur ;
- 79 et 80 sont des nombres consécutifs, ils ont une unité de différence.

On peut cependant regretter l'absence d'autres couples d'entiers « moins particuliers ».
Pour les élèves en difficulté sur cet exercice on peut proposer le passage par le schéma intermédiaire des cartes à points.

Pour l'exercice 3 page 43. Il s'agit du même cas particulier que celui décrit précédemment. Les nombres choisis sont « symétriques » l'un de l'autre (16 et 61, 23 et 32). Les nombres s'écrivent avec les mêmes chiffres, mais ces derniers n'ont pas la même valeur selon leur position. Ils ne correspondent pas au même groupement. Le choix des nombres est judicieux dans cet exercice.
Pour les élèves en difficulté sur cet exercice on peut proposer le passage par le schéma intermédiaire des cartes à points ou alors l'oralisation en termes de paquets…*23 c'est deux paquets de dix et 3 points seuls*…

Remarques :
Pour la comparaison de deux entiers à deux chiffres, les élèves doivent dégager explicitement la règle d'action suivante :

> *On compare d'abord les chiffes des dizaines ; s'ils sont différents, cela suffit ; s'ils sont identiques, on compare alors les chiffres des unités.*

Un raisonnement plus ou moins explicite pour les élèves permet de la justifier ; il s'agit du raisonnement suivant donné ci-dessous sur un exemple :

> *Quel est le plus grand des entiers 26 et 54 ?*
> *26 (10 + 10 + 6) est plus petit que 30 (10 + 10 + 10) car 6 est plus petit que 10,*
> *Mais 30 (10 + 10 + 10) est plus petit que 50 (10 + 10 + 10 + 10 + 10)*
> *Et 50 est plus petit que 54.*
> *Donc 26 est aussi plus petit que 54*

Ce raisonnement est fondamental ensuite pour comprendre que 1,26 <1,5

parce que $\frac{2}{10}+\frac{6}{100}<\frac{2}{10}+\frac{1}{10}$

donc $\frac{2}{10}+\frac{6}{100}<\frac{3}{10}<\frac{5}{10}$

Pour que tous les élèves arrivent à expliciter la règle en CE1, le maître peut utiliser la situation suivante :

> *Deux nombres différents A et B de deux chiffres sont représentés chacun par deux cartes, la carte de gauche porte le chiffre des dizaines et la carte de*

droite le chiffre des unités. Les cartes sont retournées de sorte que les chiffres ne soient pas visibles.

Nombre A ☐ ☐ *Nombre B* ☐ ☐

Il s'agit de prévoir quel est le nombre le plus grand en retournant le moins possible de cartes. L'élève a compris s'il demande de retourner seulement les dizaines, et peut conclure si les chiffres des dizaines sont différents.
Il faut retourner les cartes des unités si les chiffres des dizaines sont les mêmes. Dans ce cas il faut retourner en général les quatre cartes mais il suffit de retourner trois cartes si la première carte des unités retournée porte un 0 ou un 9.

BESANÇON

Note préliminaire :
Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS)
MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1

Question 1
Consommation moyenne sur l'ensemble du parcours

Méthode 1 :

La consommation moyenne sur l'ensemble du parcours est la moyenne arithmétique des deux consommations aller et retour :

Soit $\frac{10 + 8}{2} = 9$ donc 9 litres de carburant aux 100 km.

Méthode 2 :

La consommation à l'aller sur 1000 km est de 100 litres ($\frac{10 \times 1000}{100}$).

La consommation au retour sur 1000 km est de 80 litres ($\frac{8 \times 1000}{100}$).

Sur l'ensemble du parcours, soit 2000 km, la consommation est donc de 180 litres ; par conséquent la consommation moyenne est : $\frac{180 \times 100}{2000} = 9$.

La consommation moyenne sur l'ensemble du parcours est 9 litres de carburant aux 100 km.

Question 2
Vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours

Par définition la vitesse moyenne en kilomètres à l'heure sur l'ensemble du parcours est le quotient de la distance parcourue exprimée en kilomètres par la durée du parcours exprimée en heures.

Appelons v cette vitesse moyenne, t la durée totale du parcours aller et retour, t_a la durée de l'aller et t_r la durée du retour (les durées sont exprimées en heures et les distances en km) :

$V = \frac{2000}{t}$ $\quad t = t_a + t_r \quad t_a = \frac{1000}{120} = \frac{100}{12} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}$

$t_r = \frac{1000}{60} = \frac{100}{6} = \frac{50}{3}$

$t = \frac{25}{3} + \frac{50}{3} = \frac{75}{3} = 25$

Donc $v = \frac{2000}{25} = 20 \times 4 = 80$

La vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours est 80 km à l'heure.

Remarques :
- Cette vitesse moyenne n'est donc pas la moyenne arithmétique des deux vitesses moyennes (on parle de moyenne harmonique) : c'est une erreur classique.
- La valeur 1000 km de la distance entre les deux villes n'est pas nécessaire : dans tous ces calculs on peut la remplacer par la valeur inconnue x ; après simplification, on retrouve exactement les deux mêmes résultats.

EXERCICE 2

Les trois entiers a, b et c, non nuls sont rangés du plus petit au plus grand. Comme ils expriment, dans une certaine unité de longueur, les mesures des longueurs des trois côtés d'un triangle rectangle, on déduit que c correspond à l'hypoténuse et que $c^2 = a^2 + b^2$ (par le théorème de Pythagore).

Méthode 1 :

Un nombre est soit pair, soit impair. Prenons d'abord a :
Si a est pair, alors le problème est résolu. Supposons alors que a est impair.
Si b est pair, le problème est résolu.
Supposons alors que a et b sont tous deux impairs.
Tout nombre impair peut s'écrire sous la forme 2n+1, n étant un entier naturel éventuellement nul (on peut dire aussi qu'un nombre impair a pour reste 1 dans la division euclidienne par 2).
Il existe donc deux entiers i et j tels que $\quad a = 2i + 1 \quad$ et $\quad b = 2j + 1$

Or $\quad c^2 = a^2 + b^2 \quad$ donc $c^2 = (2i + 1)^2 + (2j + 1)^2$

$= 4i^2 + 4i + 1 + 4j^2 + 4j + 1$

$= 2(2i^2 + 2i + 2j^2 + 2j + 1)$

c^2 est donc un nombre pair (puisque égal au double du nombre entier $(2i^2 + 2i + 2j^2 + 2j + 1)$.
Il reste à prouver que si le carré d'un nombre entier est pair, alors ce nombre est aussi pair. Il suffit d'examiner les deux seuls cas possibles :

- Si un entier x est pair, il peut s'écrire $x = 2n$, et son carré x^2 est pair [car $x^2 = 4n^2 = 2 \times 2n^2$].
- Si cet entier est impair, il peut s'écrire $x = 2n + 1$, et son carré est aussi impair [car $x^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$].

En conclusion un carré pair ne peut provenir que d'un nombre pair.
On a vu que c^2 est un nombre pair, donc c est aussi un nombre pair.

On a donc montré que soit a, soit b, soit c est un entier pair.

Méthode 2 :

Prenons pour hypothèse la proposition (P) suivante :

Proposition (P) : « Les trois entiers a, b, c sont impairs. »

Donc il existe trois entiers i, j et k tels que $c = 2k + 1$ $b = 2j + 1$ $a = 2i + 1$

Or $c^2 = a^2 + b^2$ donc $(2k + 1)^2 = (2i + 1)^2 + (2j + 1)^2$

$$4k^2 + 4k + 1 = 4i^2 + 4i + 1 + 4j^2 + 4j + 1$$

$$2\times 2(k^2 + k) + 1 = 2(2i^2 + 2i + 2j^2 + 2j + 1)$$

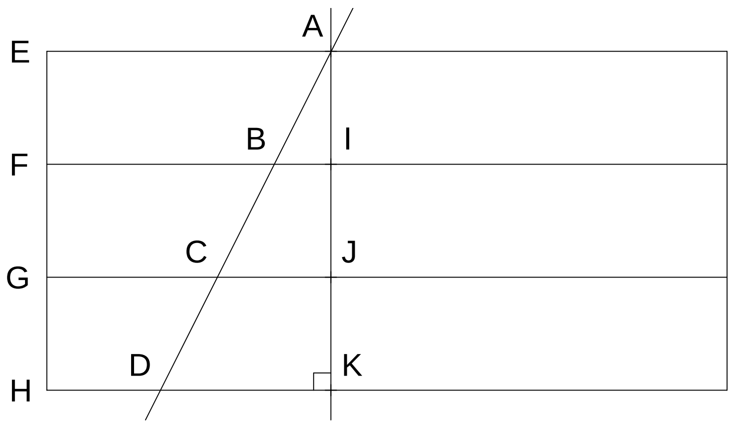
Appelons A l'entier $2(k^2 + k)$ et B l'entier $(2i^2 + 2i + 2j^2 + 2j + 1)$, l'égalité précédente s'écrit : $2A + 1 = 2B$.
C'est impossible (un nombre impair ne peut être égal à un nombre pair).
Donc la proposition (P) est fausse. La contraire est donc vraie (principe du « tiers exclu »).
La proposition contraire est : « Sur les trois entiers a, b, c, il y a au moins l'un d'eux qui est un nombre pair. »

Sur les trois entiers a, b, c ($0 < a \leq b \leq c$), mesures de longueur des côtés d'un triangle rectangle, il y a au moins l'un d'eux qui est un nombre pair.

EXERCICE 3

Remarques préalables :

- *Cette propriété peut être considérée comme une généralisation du théorème de la droite des milieux dans un triangle.*
- *Cette propriété permet aussi de justifier l'utilisation du « guide âne » ou « machine à partager », instrument couramment employé au cycle 3 pour partager un segment en n parties égales (n segments de même longueur).*
- *Nous n'avons pas voulu utiliser les expressions « côtés parallèles » ; « côtés perpendiculaires » ; « côtés égaux » car un côté est un segment ; ni voulu utiliser «angle » quand il signifie « secteur angulaire ».*



Méthode 1 :
On va utiliser le théorème de Thalès.
Appelons E, F, G et H quatre sommets alignés de ces trois rectangles. L'énoncé dit que les trois rectangles ont mêmes dimensions, et en particulier EF = FG = GH.
Les droites (EA), (FB), (GC) et (HD) sont parallèles car ce sont les supports de côtés des trois rectangles.
On est dans les conditions du théorème de Thalès : la droite (EH) se projette sur la droite (AD) parallèlement à la direction de (EA), et on peut écrire les égalités suivantes.

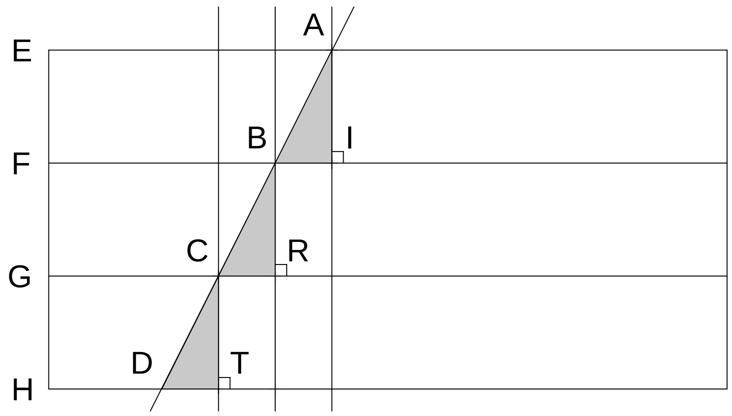
$$\frac{EF}{EH} = \frac{AB}{AD} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{FG}{EH} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{3} \qquad \text{donc } \mathbf{AB = BC = CD}$$
$$\frac{GH}{EH} = \frac{CD}{AD} = \frac{1}{3}$$

Méthode 2 :
On va utiliser le théorème de Thalès appliqué au triangle et le théorème de la droite des milieux dans un triangle.
Soit la droite passant par A et perpendiculaire aux droites supports des « longueurs » des trois rectangles : on obtient les trois points I, J et K. Les quatre points A, I, J et K sont alignés et la droite (AK) est parallèle aux deux droites supports des « largeurs ».
Les quadrilatères (AEFI), (IFGJ) et (JGHK) sont des parallélogrammes car leurs côtés sont deux à deux sur des parallèles et on a donc les égalités :
AI = EF = FG = IJ = GH = IK
(Remarque : bien sûr on peut dire que ces trois quadrilatères sont des rectangles car chacun d'eux a trois angles droits !).
On peut alors par exemple appliquer le théorème de la droite des milieux au triangle ACJ : I est le milieu du côté [AJ] et la droite (BI) est parallèle à la droite (CJ), donc B est le milieu du côté [AC].
On a donc AB = BC.
On peut alors utiliser le théorème de Thalès dans le triangle ADK car par exemple la droite (CJ) est parallèle à la droite (DK) et on peut écrire :

$$\frac{CD}{AD} = \frac{JK}{AK} = \frac{1}{3}$$

CD vaut $\frac{1}{3}$ de AD donc AC vaut $\frac{2}{3}$de AD, et comme AC = AB + BC et AB = BC, on peut conclure finalement **AB = BC = CD = $\mathbf{\frac{1}{3}}$ AD.**

Méthode 3 :
On peut aussi utiliser le troisième cas d'isométrie ("d'égalité") des triangles : deux triangles sont isométriques s'ils ont respectivement un côté de même longueur compris entre deux secteurs angulaires respectivement de même angle.



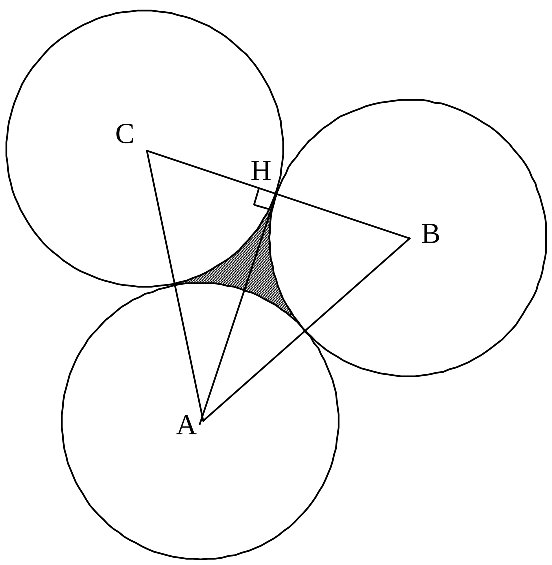
Soient les droites passant par A, par B et par C, chacune étant perpendiculaire aux droites supports des « longueurs » des trois rectangles : on obtient les points I, R et T. Par construction les 3 triangles ABI, BCR et CDT sont rectangles respectivement en I, en R et en T.
On démontre comme précédemment (cf. méthode 2) que les longueurs AI et EF, BR et FG, CT et GH sont toutes égales ; en particulier : AI = BR = CT.
Les droites (AI), (BR) et (CT) sont parallèles, car elles sont perpendiculaires à des parallèles, donc elles “forment” avec la droite sécante (AD) des secteurs angulaires correspondants, par conséquent les angles correspondants sont égaux :

$\widehat{BAI} = \widehat{CBR} = \widehat{DCT}$

En conclusion les 3 triangles ABI, BCR et CDT ont respectivement un côté de même longueur (AI = BR = CT), “encadré” par des secteurs de mêmes angles :
$\widehat{BAI} = \widehat{CBR} = \widehat{DCT}$ et $\widehat{BIA} = \widehat{CRB} = \widehat{DTC} = 90°$.
Ces trois triangles sont donc isométriques, et leurs trois côtés ont respectivement même longueur, en particulier leur hypoténuse :

AB = BC = CD

EXERCICE 4



Puisque les cercles ont même rayon r et sont tangents deux à deux, on peut écrire :

AB = BC = CA = 2r.

Le triangle ABC est donc équilatéral, et les trois secteurs de disque de centre A, B et C ont donc un angle de 60° (ou $\frac{\pi}{3}$ radians).

Ces 3 secteurs de disque ont donc même angle et même rayon, et par conséquent une même aire appelée *Aire (secteur)*.

On calcule l'aire $\mathcal{A}$ de la partie intérieure au triangle par différence entre l'aire *Aire (ABC)* du triangle ABC et les 3 aires des secteurs de disque d'angle 60° et de centres A, B et C :

$\mathcal{A}$ = *Aire (ABC)* – 3×*Aire (secteur)*.

Calcul de *Aire (ABC)* :

On applique la formule de l'aire d'un triangle ($\frac{\text{“base”} \times \text{“hauteur”}}{2}$).

La mesure de la base par exemple BC est 2r, et la mesure h de la hauteur [AH] est obtenue en utilisant les propriétés du triangle équilatéral et le théorème de Pythagore. En effet une hauteur est aussi médiane et partage le triangle ABC en 2 triangles rectangles isométriques. On peut appliquer le théorème de Pythagore par exemple au triangle ABH : $AH^2 + BH^2 = AB^2$ donc $AH^2 = AB^2 – BH^2$.

Soit $h^2 = (2r)^2 – r^2 = 3r^2$ h est positif donc $h = r\sqrt{3}$

Aire (ABC) = $\frac{1}{2} \times 2r \times r\sqrt{3} = r^2\sqrt{3}$.

Calcul de *Aire (secteur)* :

On utilise la proportionnalité ente l'aire d'un secteur de disque et son angle. L'aire du disque de rayon r est $\pi \times r^2$ et son angle est 360°, l'aire du secteur de même rayon et d'angle 60° est donc de 6 fois moins.

Aire (secteur) = $\frac{1}{6} \times \pi \times r^2$.

Calcul de $\mathcal{A}$:

$\mathcal{A} = r^2\sqrt{3} - 3 \times \frac{1}{6} \times \pi \times r^2 = r^2\sqrt{3} – \frac{1}{2}\pi \times r^2$

$\boldsymbol{\mathcal{A} = r^2(\sqrt{3} – \frac{\pi}{2})}$**.**

Remarque :

$\mathcal{A}$ est bien une aire car $\sqrt{3} – \frac{\pi}{2}$ est un nombre positif.

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

Remarque préalable :
L'énoncé laisse penser que cet exercice est une activité de classe, or ce n'est qu'un exercice.
Son défaut principal est de ne présenter aucun enjeu pour l'élève.
Il faut espérer qu'une activité de classe a été conduite avec de réelles pièces et de réelles valises, pour qu'au moins l'exercice fasse appel à un vécu.
On peut encore s'interroger sur les compétences évaluées à travers cet exercice.

Question 1

L'élève regarde une feuille et écoute une consigne orale qui commence justement par « Tu vois … » et qui veut donner du sens aux images, dessins de la feuille présentée : des pièces dans des valises et d'autres valises avec des étiquettes.
La reconnaissance de ces trois formes ne peut être un objectif ; par la vue le très jeune enfant discrimine ces trois dessins. La connaissance des mots "rond, triangle, carré" donnés dans la consigne orale n'intervient nullement dans la tâche demandée à l'élève.
Ce qui est déterminant pour réaliser cette tâche, c'est de comprendre qu'il lui faut mettre ensemble ce qui est "pareil". Il doit également comprendre que l'étiquette de la valise vide désigne la classe des dessins-pièces. Il lui faut donc identifier les trois symboles dessinés sur les étiquettes et les associer aux dessins-pièces correspondants.

Objectif mathématique prioritaire : être capable de classer les dessins selon leur forme (rond, carré et triangle) dans des classes déjà désignées par une étiquette-symbole.

Connaissance préalable nécessaire : avoir compris le sens de l'étiquette-symbole désignant un ensemble de pièces, autrement dit avoir compris la notion de collection désignée par une étiquette.

Remarques :
- *On pourrait admettre la réponse savoir discriminer visuellement les trois formes l'une de l'autre (même si cela est acquis dès la Petite Section).*
- *La réalisation de cette tâche demande aussi la maîtrise de ce qu'on appelle l'énumération, connaissance constitutive du comptage, qui permet à l'élève de savoir qu'il a pris en compte toutes les pièces d'une certaine collection (ici valise ou forme), une seule fois et sans en oublier.*

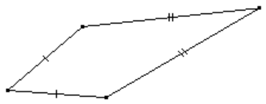
Question 2
Production de Clémence

Points positifs	Points négatifs	Hypothèse(s) sur les procédures utilisées
La tâche est bien comprise : elle a classé les dessins des trois pièces dans les trois valises en respectant le symbole de l'étiquette. C'est correct pour les ronds et les carrés.	Oubli d'un triangle.	On peut supposer qu'elle a voulu remplir entièrement la première valise (de gauche) avec des ronds, puis qu'elle a compris que ce n'était pas la tâche demandée. Alors - soit elle a dénombré les six ronds des valises du haut et a barré les ronds en trop, - soit elle a coché successivement les six ronds au fur et à mesure qu'elle les énumérait dans les valises du haut (ce n'est pas cohérent avec ce qu'elle a fait pour les deux autres formes). Ensuite elle aurait dessiné dans la valise "carré", le carré de la première valise du haut, puis les trois carrés de la seconde valise. Enfin elle aurait barré et dessiné (ou dans l'ordre inverse) chaque triangle des valises du haut, oubliant un triangle, sans doute celui qui n'est pas barré dans la première valise.

Question 3
Autre procédure

L'élève pourrait s'occuper l'une après l'autre de chaque valise du haut, barrant et dessinant dans la valise appropriée du bas successivement chaque dessin-pièce de la première valise du haut, puis faisant de même pour la seconde et la troisième valise.

SECOND VOLET (8 POINTS)

<u>Remarques préalables :</u>
Les annexes et la séance présentées utilisent les termes “carré” et “rectangle” dans le registre familier, usuel en cycle 1 et début de cycle 2 (prédominance du perceptif) ; on peut alors effectivement classer ou colorier de 2 couleurs, carrés et rectangles.
Mais au cours du cycle 3 on devra peu à peu mettre en avant les propriétés vérifiées grâce à divers instruments : par exemple, le dessin A est un dessin de rectangle car il a un angle droit et ses côtés opposés ont même longueur, mais bien sûr le dessin du carré B vérifie aussi ces propriétés, c‘est donc un rectangle particulier.
Conséquence : on ne peut pas classer carrés et rectangles en deux classes disjointes, ni les colorier de deux couleurs distinctes.
L’étape B3 de l’annexe 2 porte implicitement sur les quadrilatères qui ont des angles droits ; en effet les figures qui ont quatre côtés égaux ne sont pas des carrés, mais des losanges ; de même, les figures qui ont leurs côtés égaux deux à deux ne sont pas des rectangles, mais des parallélogrammes (côtés opposés égaux) ou des quadrilatères du type  *(côtés consécutifs deux à deux égaux).*

Question 1
Objectif principal de la séance

Mettre en évidence les propriétés concernant les angles droits et les longueurs des côtés de quadrilatères en les vérifiant à l’aide d’instruments (dont l’équerre) et en les formulant afin de caractériser les carrés et les rectangles.

<u>Remarque :</u>
La compétence I.O. cycle 2 associée est : vérifier si une figure est un carré ou un rectangle en ayant recours aux propriétés et en utilisant les instruments.

Question 2
Six connaissances préalables nécessaires

<u>Remarque :</u>
Nous avons élargi la liste des connaissances, cependant le candidat ne doit en choisir que six parmi celle-ci.

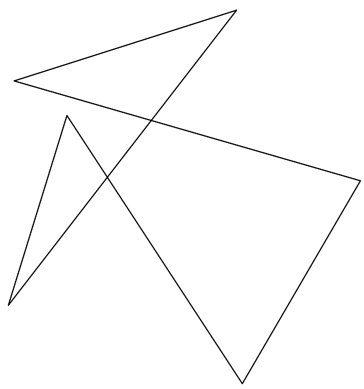
La fiche pédagogique très succincte sous-entend que les élèves ont déjà des savoirs et savoir-faire, puisqu’ils sont nécessaires au déroulement de la séance. En reprenant dans l’ordre cette fiche, on peut relever :

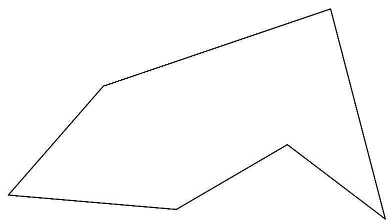
- Savoir effectuer des tracés à la règle (non graduée).
- Savoir ce qu’est une ligne brisée fermée.
- Savoir ce qu’est un côté de polygone.

- Savoir ce qu'est un angle (ou plutôt un sommet) de polygone.
- Reconnaître perceptivement un angle droit.
- Savoir se servir d'une équerre pour vérifier qu'un angle est droit.
- Savoir contrôler l'égalité de deux longueurs à l'aide d'instruments.
- Savoir ce que signifie « classer » (en particulier que tous les objets considérés doivent être dans une classe et qu'un objet ne peut appartenir à deux classes).

Question 3
Nature des figures obtenues en A

Une ligne brisée fermée conduit à tracer le dessin d'un polygone. Mais ce polygone a peu "de chances" d'être convexe ou même non croisé, si le maître laisse toute liberté aux élèves. Identifier côtés et sommets n'est alors pas simple !
Voici l'exemple d'un polygone croisé, et d'un polygone non croisé mais non convexe :





Question 4
Activité de l'élève

Tout d'abord remarquons encore que la fiche pédagogique est très succincte et que les tâches principales des quatre phases identifiées par la fiche sont énoncées de façon prescriptive par un verbe à l'infinitif.
- La première phase, avec consigne orale et contraintes matérielles fortes (demi-feuille blanche, règle et crayon), est une activité ouverte qui invite l'élève à donner libre cours à sa créativité. Cette phase permet aux élèves d'entrer dans l'activité, elle permet d'obtenir un ensemble riche de polygones différents. Cependant celle-ci peut provoquer (cf. question 3) des difficultés pour la phase 2.
- Les trois phases suivantes semblent très fortement dirigées par le maître qui ne **laisse aucune initiative à l'élève.**

Dans la phase 2 : le maître demande et les élèves exécutent.

Dans les phases 3 et 4, le maître fait et les élèves écoutent.

Dans ce cas, la conclusion : « un polygone a au moins trois côtés » est donnée par le maître.
On peut cependant imaginer qu'à la lecture de cette fiche le maître voudra faire participer ses élèves pour la phase 3 : il peut alors, après avoir affiché toutes les

productions au tableau, répartir ses élèves en groupes de 3 et leur demander un classement.
Dans ce cas, la conclusion : « un polygone a au moins trois côtés » peut être découverte par les élèves.

En fait tout dépend de la manière dont le maître gère les phases : soit le travail est très dirigé, les enfants sont de simples exécutants, et on sait qu'un bon nombre d'entre eux apprend peu ou n'apprend rien, soit certaines phases vont permettre de donner plus de responsabilités aux élèves dans la découverte et construction de leurs apprentissages ; exemple de savoir pouvant alors émerger : « un polygone a autant de sommets que de côtés ».

Question 5
Procédures pour vérifier l'égalité des longueurs

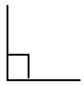
Il est indiqué que l'élève peut utiliser les instruments de son choix pour vérifier l'égalité des longueurs de côtés :

- Utilisation d'une bande de papier blanc (ou d'une ficelle bien tendue) appelée gabarit de longueur : il aligne une extrémité de sa bande avec une extrémité du côté et fait un repère sur sa bande, correspondant à l'autre extrémité du côté. Puis il reporte sa bande le long du côté (dont il a évalué perceptivement que la longueur était la même) et vérifie les alignements des repères.
- Utilisation de la règle graduée pour mesurer les longueurs : il compare alors les mesures des longueurs, ce qui n'est pas judicieux ici, car la mesure n'apporte aucune information utile à la tâche. De plus l'élève sera confronté à la difficulté d'aligner la graduation zéro avec une extrémité du côté. S'il se trompe et aligne l'extrémité de la règle graduée, cela ne nuit pas à la tâche, mais il n'utilise pas la mesure et se sert de sa règle graduée comme d'un gabarit de longueur.
- Utilisation d'une feuille de papier calque : il décalque les deux extrémités d'un côté, trace ou non le segment, et reporte le calque sur le côté à vérifier.
- Utilisation d'un compas : cet instrument doit être introduit en dernière année de cycle 2 pour parler correctement du cercle qui est au programme. On peut aussi l'utiliser en CE1 pour comparer des longueurs, même si cette compétence relève du cycle 3.

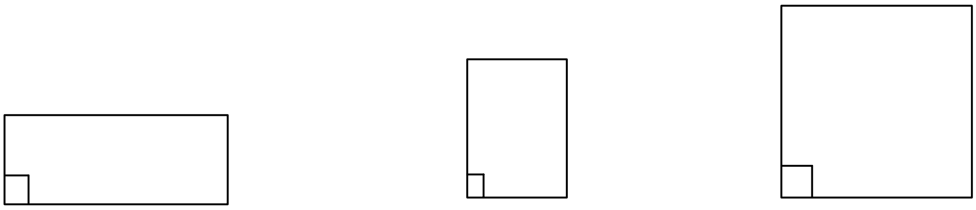
Question 6
Obstacles à l'activité de l'élève

L'activité est définie dans le texte du B de l'annexe 2 : il s'agit de dire que ces dessins sont ceux de quadrilatères, de repérer les angles droits et de les marquer en rouge suivant le symbole indiqué, de vérifier l'égalité des longueurs de côtés, de réaliser la consigne de l'exercice b, de nommer alors les carrés, les rectangles, de réaliser la consigne de l'exercice c, et de classer les figures en marquant le nom de chaque famille (cf. remarque préalable).

La consigne a) peut provoquer un réel obstacle car elle montre un angle droit dans une position et une orientation prototypiques :



Les élèves peuvent alors ne reconnaître que les angles droits des figures C, E et G et sans doute uniquement un seul des quatre angles droits.



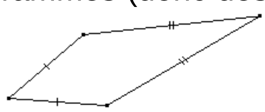
C E G

La consigne b) quant à elle, est plus difficile d'interprétation pour un élève :
- Attribue-t-on deux couleurs pour un rectangle non carré ? (interprétation attendue par l'auteur)
- Attribue-t-on une couleur par quadrilatère (ayant au moins deux côtés de même longueur) ? Par exemple une seule couleur pour les quatre côtés des rectangles qui ont des longueurs 2 à 2 égales.
- Ou bien attribue-t-on une couleur par longueur identifiée ? Par exemple les côtés du carré B ont même longueur que deux côtés du rectangle I.

Remarque :
La consigne c) ne présente pas à nos yeux d'obstacle pour l'activité de l'élève, mais elle peut devenir un obstacle dans la gestion des apprentissages du cycle 3 concernant l'emboîtement des classes de quadrilatères.

Question 7
Erreur mathématique induite par l'étape 3 de la partie B de l'annexe 2

La caractérisation des carrés et des rectangles écrite dans l'étape 3 de la partie B de l'annexe 2 est fausse, fausse bien sûr en général, mais fausse aussi pour le cas particulier des quadrilatères de cet exercice (car est présent le losange non carré F qui possède à la fois « quatre côtés égaux » et des côtés « égaux deux à deux ») :

- Les quadrilatères qui ont quatre côtés de même longueur ne sont pas forcément des carrés, il y a aussi les losanges ! Les élèves pourront donc avec raison colorier le losange F en jaune comme les carrés B, D, G.
- Les quadrilatères qui ont des côtés de même longueur deux à deux ne sont pas forcément des rectangles : il y a aussi des parallélogrammes (donc des carrés et des losanges) et des quadrilatères du type  (côtés consécutifs deux à deux de même longueur). Les élèves pourraient donc colorier en vert tous les quadrilatères de cet exercice sauf le quadrilatère H.

BORDEAUX, CAEN, CLERMONT-FERRAND, LIMOGES, NANTES, ORLÉANS-TOURS, POITIERS, RENNES

Note préliminaire :
Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS)
MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1

Question 1a
Nombre de garçons

Soit n ce nombre de garçons.
Dans l'établissement les garçons sont externes ou demi-pensionnaires.
Comme 35% d'entre eux sont externes le restant, soit 65%, est constitué de garçons demi-pensionnaires. Ils sont au nombre de 78.
D'où $78 = \frac{65}{100} \times n \quad n = \frac{7800}{65}$
Le nombre de garçons dans l'établissement est 120.

Question 1b

	Nombre de garçons	Nombre de filles	Total
Nombre de demi-pensionnaires	78	**77**	**155**
Nombre d'externes	**42**	**63**	**105**
Total	120	**140**	260

Les garçons externes sont donc au nombre de 120 – 78 = 42.
Le nombre total de filles est de 260 – 120 = 140.
Comme 45% des filles sont externes, il y en a donc $140 \times \frac{45}{100} = 63$.
Les filles demi-pensionnaires sont donc au nombre de 140 – 63 = 77.

Le nombre total de demi-pensionnaires est de 78 + 77 = 155.
Le nombre total d'externes est de 42 + 63 = 105.

Question 2

a) **Pourcentage d'externes :** 105 externes pour 260 élèves soit un pourcentage de $\frac{105}{260}$ Arrondi à l'unité près il est de **40%.**

Le pourcentage d'externes est 40%.

b) **Pourcentage de garçons externes :** 42 pour 260, soit un pourcentage arrondi à l'unité près de **16%.**

Le pourcentage de garçons externes est 16%.

c) **Pourcentage des élèves qui sont des garçons ou des externes :**
il y a (78 + 42 + 63) élèves de ce type pour 260 élèves soit un pourcentage arrondi à l'unité près de **70%.**
Le pourcentage des élèves qui sont des garçons ou des externes est 70%.

Question 3
Nombre d'élèves scolarisés dans cet établissement en 2003-2004

Soit p le nombre d'élèves scolarisés en 2003-2004.
Entre 2003-2004 et 2004-2005 (effectif total de 260) l'augmentation a été de 4%, on a donc :

$260 = p + \frac{4}{100}p$ $260 = 1{,}04\ p$ $p = \frac{260}{1{,}04}$ $\mathbf{p = 250}$

Il y avait 250 élèves scolarisés dans cet établissement en 2003-2004.

EXERCICE 2

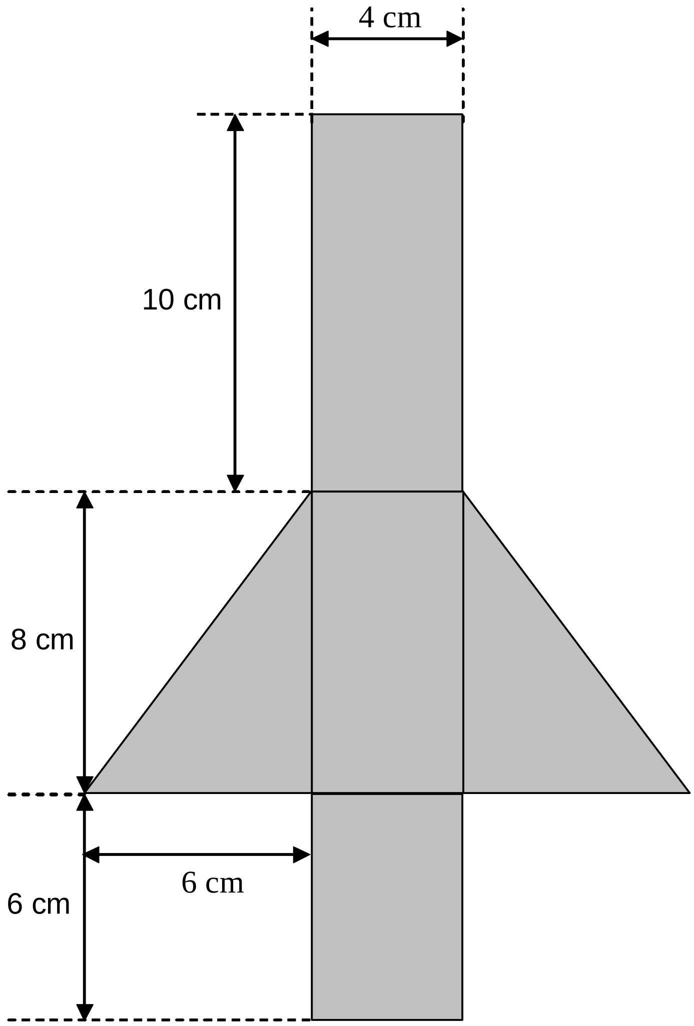
Question 1
Calcul de DI

ABCDHEFG est un parallélépipède rectangle, sa face ABCD est donc un rectangle et le triangle IDC est rectangle en C d'hypoténuse le segment [DI].
En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle DIC on a :
$DI^2 = IC^2 + CD^2$
Comme IC = 8 et CD = 6
$DI^2 = 8^2 + 6^2$ $DI^2 = 64 + 36$ $DI^2 = 100$
soit DI = 10 (car DI est positif).
La longueur DI est 10 cm.

Question 2

Patron du prisme n°1 à l'échelle $\frac{1}{2}$

Les faces de ce prisme sont : trois rectangles de dimensions 10 cm sur 4 cm, 8 cm sur 4 cm et 6 cm sur 4 cm ; deux triangles rectangles isométriques de dimensions 8 cm, 6 cm et 10 cm. Un patron à l'échelle $\frac{1}{2}$ pourrait être le suivant :



Question 3
Volume du prisme n°1 ($V_{prisme1}$)

On sait que : $V_{prisme1}$ = aire (base) x hauteur

Aire (base) = $\frac{1}{2}$ (DC x CI) et hauteur = DH

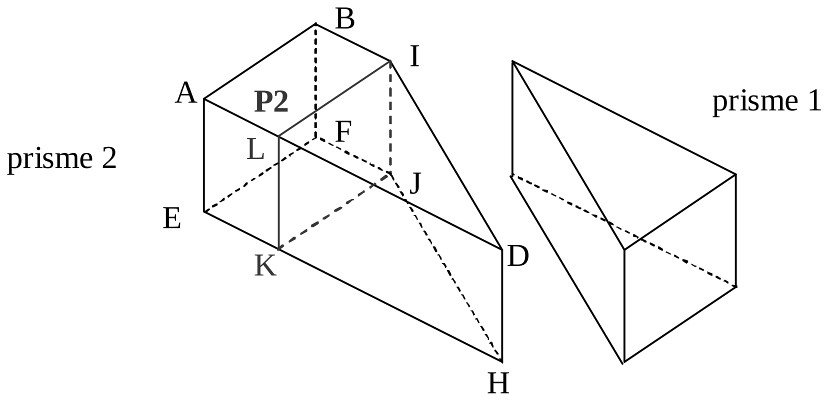
Donc $V_{prisme1} = \frac{1}{2}$ (DC x CI x DH) soit $V_{prisme1} = \frac{1}{2}$ (6 x 8 x 4) cm^3 = 96 cm^3

Ce volume $V_{prisme1}$ est aussi la moitié de celui d'un parallélépipède rectangle de dimensions DC, CI et DH.

Le volume du prisme n°1 est 96 cm^3.

Question 4
Calcul de BI

<u>Méthode géométrique :</u>



Le prisme 2 peut est décomposé en :

- un parallélépipède rectangle ABILEFJK appelé P2 de dimensions AB (égale à DC), AE (égale à DH), et BI.
- un prisme ILDJKH appelé prisme 3 de dimensions identiques au prisme 1.

On doit avoir : $V_{\text{prisme 2}} = 2\ V_{\text{prisme 1}}$ (a)
Comme $V_{\text{prisme 2}} = V_{P2} + V_{\text{prisme3}}$ avec $V_{\text{prisme 3}} = V_{\text{prisme 1}}$
on a $V_{\text{prisme 2}} = V_{P2} + V_{\text{prisme1}}$ (b)

avec (a) et (b) on en déduit la relation $V_{P2} = V_{\text{prisme1}}$

soit comme $V_{P2} = DC \times DH \times BI$ et $V_{\text{prisme 1}} = DC \times DH \times \frac{1}{2} CI$ (question n°3)

on a : $DC \times DH \times BI = DC \times DH \times \frac{1}{2} CI$

et donc $BI = \frac{1}{2} CI$

La longueur BI est 4 cm.

<u>Méthode algébrique et formules :</u>
Soit y la longueur BI.
Nous pouvons alors exprimer le volume du prisme 2 (produit de l'aire de la base trapézoïdale ABID par la longueur de la hauteur [DH]).
Comme l'aire du trapèze ABID est le demi-produit de la somme des longueurs des bases ([BI] et [AD]) par la longueur de la hauteur [AB], on a donc :

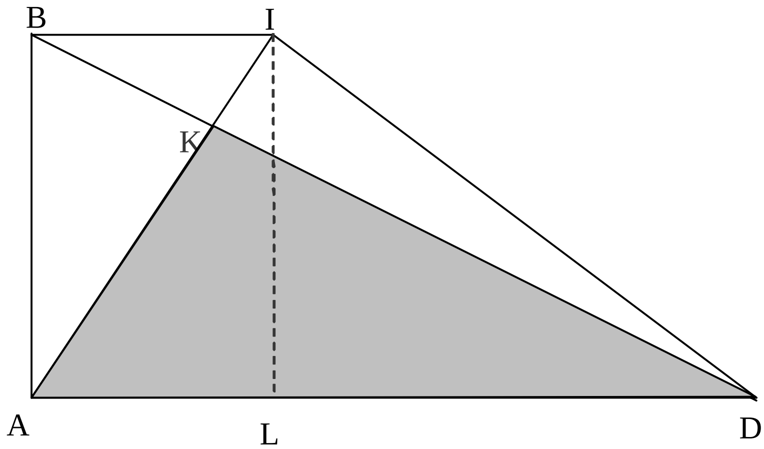
$$V_{\text{prisme2}} = \frac{1}{2}[y + (y + 8)] \times 6 \times 4$$

La relation $V_{\text{prisme 2}} = 2\ V_{\text{prisme1}}$ se traduit alors par l'équation :

$$(y + 4) \times 6 \times 4 = 6 \times 8 \times 4$$

soit $y + 4 = 8$ et $y = 4$.
La longueur BI est 4 cm.

Question 5
Comparaison des aires de ABK et KID



Les triangles ABD et AID ont la même aire. En effet leur « base » [AD] est commune et les hauteurs relatives à cette base, respectivement [BA] et [IL], dans les deux triangles sont isométriques.
En effet BA = IL car (BI) et (AD) sont parallèles et cette longueur commune BA est donc la distance entre deux droites parallèles [(AB) perpendiculaire à (AD) et (BI) ; (IL) perpendiculaire à (AD) et (BI)].

Ainsi $A_{ABD} = A_{AID}$ (on note l'aire du triangle ABD par A_{ABD}).
Les aires de ces deux triangles peuvent être décomposées en utilisant l'aire commune du triangle AKD :
$A_{ABD} = A_{ABK} + A_{AKD}$ $\qquad$ $A_{AID} = A_{AKD} + A_{KID}$
0n en déduit donc que : $A_{ABK} = A_{KID}$

Les aires des triangles ABK et KID sont égales.

EXERCICE 3

Question 1
Nombre d'enfants

Soit n, entier naturel, le nombre d'enfants recherché.
Traduisons les contraintes :
Maximum de cent enfants (a) : $n \leq 100$
Groupés par trois, il en reste deux ; donc il existe un entier naturel k tel que :
(b) : $n = 3k + 2$
Groupés par quatre, il en reste un ; donc il existe un entier naturel j tel que :
(c) : $n = 4j + 1$
Groupés par cinq, il en reste deux ; donc il existe un entier naturel m tel que :
(d) : $n = 5m + 2$
Les trois dernières contraintes traduisent que les restes respectifs dans les divisions euclidiennes de n par 3, 4 et 5 doivent être 2, 1 et 2.

<u>Méthode 1</u>
Examinons les contraintes sur les restes dans l'ordre inverse, car la contrainte (d) conduit à moins de possibilités :

- les contraintes (d) et (a) nous permettent de ne retenir pour n que les nombres entiers 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37,… 77, 82, 87, 92, 97 (les nombres se succèdent de 5 en 5).
- la contrainte (c) restreint les possibilités à 17, 37, 57, 77 (les nombres se succèdent de 20 en 20 car 20 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 et 20 = 5 + 5 + 5 + 5).
- la contrainte (b) restreint les possibilités à **17 et 77** (les nombres possibles vont se succéder de 60 en 60 car 60 = **3 x 4** x 5).

Le nombre 17 ne peut pas être retenu car la contrainte de réussir à former plusieurs équipes avec le même nombre d'enfants (au moins 2) impose que n ne soit pas premier.
Le nombre d'enfants recherché est donc 77.

<u>Méthode 2</u>

- Les contraintes (b) et (d) signifient que n - 2 est un multiple à la fois de 3 et de 5, n-2 est donc multiple de leur PPCM qui est 15.
- La contrainte (a) restreint les possibilités.

Cela permet de retenir pour n - 2 les valeurs possibles suivantes : 15 ; 30 ; 45 ; 60 ; 75 ou 90.
Ce qui donne n = 17, ou 32 ou 47 ou 62 ou 77 ou 92.

- La contrainte (c) signifie que n n'est pas un multiple de 4 et que dans la division euclidienne de n par 4, le reste est 1.

Examinons les valeurs trouvées :
17 = (4 x 4) + 1 ; ce nombre est donc possible.
32 est un multiple de 4, il ne convient pas.
47 = (11 x 4) + 3, il ne convient pas.
62 = (15 x 4) + 2, il ne convient pas.
77 = (19 x 4) + 1, ce nombre est donc possible.
92 est un multiple de 4, il ne convient pas.

Or, il est indiqué que les moniteurs arrivent à former des équipes. 17 étant premier, il n'est divisible que par 1 et par lui même, il ne convient donc pas.
Le nombre d'enfants est donc 77.

Question 2
Nombre d'équipes ainsi formées

77 = 7 x 11
On peut donc envisager deux possibilités :
7 équipes de 11 enfants ou **11 équipes de 7 enfants.**

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

Question 1
Quatre compétences mises en jeu

Il s'agit pour l'élève de résoudre implicitement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.
Soient x le nombre de cartes postales de Lily et y celui de Zoé, les deux contraintes se traduisent respectivement par les équations :

$$\begin{cases} x + y = 180 & \text{première contrainte} \\ x + 10 = y & \text{seconde contrainte} \end{cases}$$

La solution est x = 85 et y = 95.

Ce problème permet de développer chez l'élève ses capacités à chercher car la procédure experte n'est pas à sa portée.
Les quatre compétences[1] demandées pourraient être :

- **Chercher** et produire **une solution originale** dans un problème de recherche.
- Résoudre un problème en utilisant ses **connaissances** sur les nombres naturels et **sur les opérations étudiées.**
- Mettre en œuvre **un raisonnement,** articuler les différentes **étapes** d'une solution.
- **Formuler et communiquer sa démarche** et ses résultats par écrit.

<u>Remarque :</u>
Les candidats doivent fournir uniquement quatre compétences, sinon ils risquent d'être pénalisés pour non respect de la consigne.
Nous pouvons cependant citer d'autres compétences (les deux premières étant issues des IO 2002) :

- *Contrôler la **pertinence** ou la **vraisemblance** d'une solution.*
- ***Trier, organiser** des données numériques ou les informations de l'énoncé.*
- *Être capable de lire un énoncé à deux contraintes et de le comprendre.*
- *Être capable de tenir compte de deux contraintes.*
- *Être capable d'effectuer mentalement ou avec l'aide de l'écrit des calculs additifs ou soustractifs.*
- *Être capable de donner une signification au terme « de plus ».*
- *Être capable de produire une procédure personnelle basée sur des essais et ajustements successifs.*
- *etc.*

[1] Les compétences ont été choisies dans le document d'application des programmes 2002 du cycle 3.

Question 2
Description et analyse des procédures dans trois productions

	Description	Analyse
a	L'élève choisit de donner 50 et 60 respectivement à chacun des deux enfants respectant ainsi une différence de 10 qu'il est capable d'énoncer comme étant une contrainte donnée. Il poursuit fictivement sa distribution à chacun des deux élèves par 3 ajouts successifs de 10, 10 et encore 15. Il traduit ses actions fictives par deux écritures additives 50+10+10+15 et 60+10+10+15 et une formulation correcte. Il calcule en ligne les deux sommes et vérifie par un calcul additif posé en colonnes que la somme totale est bien de 180. Tous ces calculs sont exacts.	L'élève prend en compte correctement la première contrainte (différence de 10) et ajuste chacun des 2 nombres en conservant cette différence (ajout d'un même nombre au deux nombres initiaux) pour parvenir aux bons résultats. **Sa méthode est efficace et lui permet d'obtenir les bons résultats** : il a une bonne représentation du problème et semble contrôler à chaque ajout l'état de sa somme par rapport à 180. La **description** de sa démarche de résolution est **très explicite**. **Une phrase de conclusion est écrite.**
b	L'élève envisage une répartition initiale équitable de 90 à chacun en respectant la seconde contrainte. Il ajuste ensuite la quantité de Lili à 80 pour tenir compte de la différence de 10. Il lui reste 10, perçu comme complément à la centaine de 90. Il partage équitablement ce nombre en ajoutant 5 à chacun des deux enfants. Il décrit sa procédure qu'il termine par une mise en évidence des deux résultats et ne pose aucun calcul.	L'élève **trouve les bons résultats.** Il prend en compte successivement la première puis la seconde contrainte. Sa **démarche est correcte et il semble calculer mentalement certains résultats.** Sa **description est moins aisée** et il confond dizaines et unités dans l'expression 90 dizaines. Son double titre est difficile à interpréter. **Une phrase de conclusion est écrite.**
c	L'élève envisage une répartition initiale équitable de 45 à chacun et vérifie si la somme 90 ne dépasse pas le total de 180. Il obtient, sans calcul posé, l'écart à 180 et répartit ce nombre 90 en 50 + 40 en tenant compte de la seconde contrainte. Il vérifie que la somme totale est de 180 et conclut correctement. La schématisation proposée rend compte de sa démarche. Celle-ci est décrite.	L'élève **trouve les bons résultats.** Il procède par essai et ajustement en vérifiant la compatibilité de son essai avec la première contrainte et en tenant compte dans son ajustement de la seconde contrainte. Sa **démarche est correcte et il semble calculer mentalement certains résultats.** La **description** de sa démarche de résolution est **très explicite**. **Une phrase de conclusion est écrite.**

Question 3a
Interprétation de la démarche de l'élève d

- Le calcul :

Le premier calcul additif (180 + 10) posé en colonnes semble correspondre au désir d'ajouter les deux nombres écrits en chiffres dans le texte, le « 10 cartes postales de plus » a peut-être été interprété comme 10 à ajouter.
Le second calcul soustractif (190 - 10) posé en colonnes est peut-être dû au désir de retrouver le 180 du texte.

- Le schéma :

Le lien avec la zone « calcule » semble improbable.
Le trait semble indiquer une volonté de partager entre Lili et Zoé la collection symbolisée par des paquets de 10.
La **réponse écrite** proposée **respecte cette répartition** (90 et 100 pour les 19 paquets de dix en 9 et 10 paquets) **mais est erronée** car elle ne respecte pas la première contrainte.
Par contre la démarche suivie est difficile à interpréter. On ne sait pas si le schéma est antérieur ou postérieur au calcul posé, mais la réponse au problème est cohérente avec le schéma.

On pourrait penser que l'élève a fait

- une première répartition en 9 paquets pour Lili et 8 pour Zoé qui ne respecte aucune contrainte (un paquet de plus pour Lily peut-être dû à une interprétation erronée du « de plus que Lily »).
- un premier ajout de 10 pour respecter le total de 180 ?
- un second ajout de 10 pour respecter la deuxième contrainte mais qui fait perdre la première.

Il conclut avec une phrase cohérente avec ce qu'il a produit.

Question 3b
Aides possibles

- Première aide : **explicitation de l'énoncé,** en particulier du « de plus » et **reformulation** par des élèves.
- Deuxième aide : utilisation d'un **matériel organisé en paquets de 10 (sacs de jetons)**. (L'une des difficultés sera alors d'accepter de partager équitablement un paquet de dix en deux paquets de 5).

L'enseignant aura alors le choix de faire entrer l'élève dans le problème en respectant l'une ou l'autre des 2 contraintes.
Il doit avoir à l'esprit les différentes procédures des élèves a) b) et c).

- Une autre aide consisterait à reformuler l'énoncé sous la forme suivante :

« J'ai 180 cartes et je veux toutes les distribuer à Zoé et Lily. Zoé doit avoir 10 cartes de plus que Lily. Comment faire ? »
Demander alors à l'élève de commencer la distribution avec des jetons et de continuer en schématisant. Il peut ainsi réussir en donnant rapidement 10 de plus à Zoé.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Ensemble des extraits

Question 1a
Contenu mathématique sous-jacent

L'ensemble des extraits a pour contenu le **domaine de la géométrie** plane et plus précisément la **description** de figures géométriques planes (carré, rectangle et cercle) et les **programmes** de construction associés.

Question 1b
Cinq objectifs d'apprentissage différents

<u>*Remarque :*</u>
Les compétences associées du programme sont les suivantes : tracer une figure à partir d'une description, d'un programme de construction ; décrire une figure en vue de l'identifier dans un lot de figures ou de la faire reproduire sans équivoque.

Les objectifs peuvent être choisis parmi la liste suivante :

- savoir construire une figure décrite par un programme de construction ;
- savoir écrire un programme de construction d'une figure ;
- savoir associer une figure à sa description ;
- savoir décomposer une figure complexe en sous-figures en vue de la construire ou de l'identifier ;
- savoir comprendre ou utiliser à bon escient le vocabulaire usuel de la géométrie : segment, milieu, longueur, cercle, centre, rayon, carré, côté, axe de symétrie, parallèle et angle droit…
- savoir interpréter des désignations de points par des lettres.

<u>*Remarque :*</u>
Prérequis : - savoir interpréter des longueurs exprimées en mm ou cm (donner une signification à 0,5 cm).
- savoir utiliser les instruments de géométrie pour prendre des mesures ou tracer des figures simples.

Piste de recherche

Question 2a
Activité de l'élève

<u>*Remarque :*</u>
Il est difficile d'apprécier l'activité de l'élève car l'on ne dispose pas du livre du maître où est proposée une mise en oeuvre.

En fait, celui-ci suggère une rédaction du message par groupes de deux ou trois élèves avant d'utiliser le manuel.

On peut supposer :

- une lecture du texte (lire et comprendre) ;
- une réponse aux questions posées dans un ordre défini par l'énoncé ;
- une recopie du texte à trous qui est complété en s'aidant des questions précédentes et des mots utilisés dans le texte.

Ces tâches laissent peu de part à l'initiative de l'élève.

Question 2b
Autre organisation de la séance

- Faire vivre aux élèves la situation de produire par groupes de deux ou trois un message permettant de reproduire la figure.

En fonction de la connaissance que le maître a de ses des élèves, il devra différencier :

- en fournissant ou non du matériel annexe (ici les deux carrés de base aux bonnes dimensions),
- en aidant certains groupes…

Il se donnera les moyens de recueillir leurs messages pour une exploitation collective (transparents et (ou) affiches).

- Exploitation collective de 2 ou 3 productions.

L'objectif est ici de parvenir collectivement à un message opérationnel.
L'enseignant pourra faire découvrir la non pertinence d'une ou de deux productions, puis il choisira de faire améliorer collectivement la dernière.
Au cours de cette synthèse le maître pourra relancer le travail par groupe de deux à l'oral. Le groupe de deux dispose du lot de deux carrés, l'un donne des ordres au second qui doit les suivre pour positionner correctement les deux carrés.

- Utilisation éventuelle du manuel (message de la piste de recherche) pour un contrôle individuel de la compréhension de chacun.

<u>Remarque :</u> *Une autre organisation qui utilise deux figures de départ.*

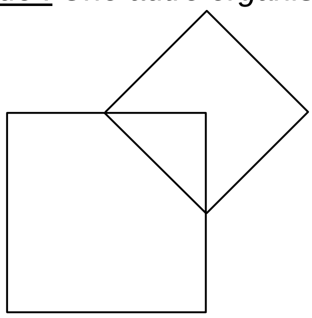


Figure 1

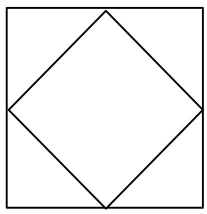


Figure 2

Travail par groupes de deux ou trois élèves dans une configuration émetteur-récepteur.

La moitié de la classe possède la figure 1. L'autre moitié la figure 2 par exemple.

<u>Phase 1 :</u> Les élèves doivent écrire un message qui doit permettre à l'autre groupe de tracer la figure qu'il n'a pas.
<u>Phase 2 :</u> Les messages sont échangés et une première figure est produite. Celle ci est renvoyée aux émetteurs avec un commentaire.
<u>Phase 3 :</u> Si la figure est correcte, les émetteurs ont produit un écrit acceptable, sinon ils doivent écrire de nouveau un message et le renvoyer aux récepteurs.
<u>Phase 4 :</u> Après ces régulations, le maître choisit deux ou trois messages corrects, mais dont les phrases sont trop redondantes ou n'utilisent pas le vocabulaire mathématiques adapté. En collaboration avec les élèves et à partir de leurs écrits, il aide les élèves à rédiger un programme collectif correct.
<u>Phase 5 :</u> Compléter le message de la piste de recherche pourra faire l'objet d'un contrôle individuel.

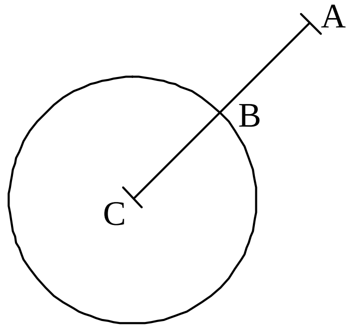
Applications 1 et 2

Question 3a
Quatre difficultés pour l'application 1

Elles peuvent être choisies, au nombre de quatre, parmi :
- méconnaissance des notions de rectangle et de diagonale ;
- incompréhension du rôle des lettres et de leur placement ;
- difficultés de compréhension des longueurs exprimées en cm ;
- difficulté de construction du rectangle (les instruments ne sont pas précisés) ;
- de façon plus générale : difficultés de lecture (mais l'on peut supposer que la consigne de travail et le message seront lus à haute voix).

Question 3b
Quatre difficultés pour l'application 2

<u>Remarques :</u>
1. *Rien ne dit dans l'énoncé qu'il s'agit de construire la figure à la même échelle. Selon l'interprétation faite par l'élève, cela constitue ou non une difficulté ;*
2. *L'orientation dans la feuille de la figure (cercle et segment) n'a pas d'importance (cf. figure ci-dessous).*



Les difficultés peuvent être choisies, au nombre de quatre, parmi :

- méconnaissance du vocabulaire géométrique : segment, extrémités, milieu ; cercle, centre et rayon ;
- repérage de B comme milieu du segment [AC] ;
- identification du centre du cercle, du rayon du cercle ;
- incompréhension du rôle des lettres ;
- difficultés de rédaction du message : consignes de construction du segment et du cercle, positionnement relatif des 2 figures ; succession des étapes (cercle et segment ou segment et cercle).

Question 3c
Pertinence du mot « application »

Nous définissons application comme réalisation de tâches similaires dans le même contexte.
Dans ce cas nous pouvons relever les incohérences suivantes :

- pour l'application 1, les objets géométriques en jeu sont différents et l'élève n'a pas appris à effectuer un tracé mais à compléter un programme de construction ;
- pour l'application 2, l'élève n'a pas rencontré le vocabulaire relatif au cercle et n'a pas eu l'occasion d'écrire un programme complet de construction.

Cependant pour l'application 2, dans la piste de recherche, l'élève a travaillé ce qu'était un message sous forme de programme de construction permettant de construire une figure en utilisant des points particuliers.

Question 4
Savoirs et savoir-faire dans les exercices 3 et 4

Remarques :

1. *La tâche de l'exercice 3 consiste à associer une figure à sa meilleure description choisie parmi trois. (La tâche met essentiellement en jeu la compréhension de la notion d'axe de symétrie. Les deux autres descriptions sont exactes mais offrent plusieurs possibilités de positionnement des deux carrés. Il faut donc choisir la description 2).*
2. *La tâche de l'exercice 4 consiste à associer une description à une figure choisie parmi quatre. L'information « cercle passant par un centre » suffit à choisir la bonne figure (ici B).*
3. *L'analyse précise des tâches montre que seules sont indispensables les notions d'axe de symétrie, de cercle défini par son centre et son rayon et la connaissance des axes de symétrie du carré, car le contrat didactique en usage suppose que les deux questions ont une réponse unique possible*.

Les savoirs et savoir-faire supposés nécessaires à ces tâches sont :

- connaître les termes géométriques : carré, côté ; cercle, centre et rayon ; parallèle et axe de symétrie ; intérieur.

- connaître certaines propriétés du carré : ses axes de symétrie et ce que représente le centre.
- savoir analyser une figure plane.
- connaître la signification du mot « moitié ».

Plus généralement, il s'agit de comprendre les consignes mais cette difficulté peut être levée par l'enseignant.

Remarques :

- *connaître le système d'expression des longueurs et en particulier la signification de la virgule dans le nombre 0,5 ;*
- *savoir mesurer des longueurs.*

Ces savoirs et savoir-faire ne semblent pas indispensables car seul varie dans l'exercice 4 le positionnement relatif des 3 figures : droite, « petit cercle », « grand cercle ».
Deux savoir-faire qui pourraient être utiles :

- *faire des essais de figure pour l'exercice 3 ;*
- *marquer les centres des cercles pour l'exercice 4.*

Question 5
Ordre de succession des applications, exercices et problèmes

Remarque :
Cet ordre dépend fortement de la progression suivie par le manuel et par le maître de la classe dont nous ignorons tout.

Un ordre pourrait être le suivant :

1. Les exercices 3 et 4 car il s'agit de descriptions. La réponse aux questions peut aider à développer l'idée du positionnement relatif de plusieurs figures.

Remarque :
Pour l'exercice 3 la notion de « meilleure description » pose problème.

2. L'application 1 puis le problème 6 car il s'agit de suivre des programmes de construction. Le rectangle et l'une de ses diagonales s'avèrent plus faciles à construire qu'un triangle rectangle et un cercle avec un positionnement particulier.

3. Le problème 5 puis l'application 2 ou bien l'application 2 puis le problème 5. Dans le problème 5 il s'agit de compléter un programme de construction en ajoutant deux éléments à la première consigne (« O est le milieu commun des deux segments de [MP] et [QN] et ils ont la même longueur »). Ces ajouts sont très difficiles car il faut faire abstraction de la figure déjà tracée et connaître les propriétés relatives aux diagonales d'un rectangle qui le caractérisent. Dans l'exercice 2, il s'agit d'écrire la totalité d'un programme de construction.

Remarque :
D'autres propositions peuvent être envisagées si elles sont justifiées. Par exemple :
1. *Travail sur la lecture de programmes de construction et la construction des figures associées : problème n°6 ; exercice d'application n°1 ;*
2. *Travail sur la « lecture description » de figures : exercices n°3 et 4 ;*
3. *Travail sur l'écriture de programmes de construction : exercice d'application n°2 ; problème n°5.*

Question 6
Aide-mémoire construit avec les élèves

Pour décrire une figure :
- je dois identifier les sous-figures, connaître leur nom et le vocabulaire particulier décrivant certaines de leurs propriétés ;
- je dois indiquer comment les figures sont positionnées les unes par rapport aux autres (je peux éventuellement utiliser des lettres pour nommer des points).

Illustration : exercice n°4.

Pour rédiger un programme de construction :
- je dois identifier des sous-figures ;
- je dois utiliser un vocabulaire de géométrie pour écrire des consignes permettant de construire les sous-figures ;
- je peux indiquer les mesures ;
- je dois indiquer comment les figures sont positionnées les unes par rapport aux autres (je peux éventuellement utiliser des lettres pour nommer des points).

Illustration : exercice d'application n°2.

Pour construire une figure décrite par un message :
- je peux réaliser une figure à main levée en lisant et exécutant les consignes dans l'ordre, afin de mieux positionner le point de départ de la figure sur ma feuille de papier ;
- je dois maîtriser le vocabulaire de la géométrie ;
- je dois savoir utiliser les instruments adaptés ;
- je dois exécuter dans l'ordre les consignes.

Illustration : problème 6.

PARIS, CRÉTEIL, VERSAILLES

Note préliminaire :
Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

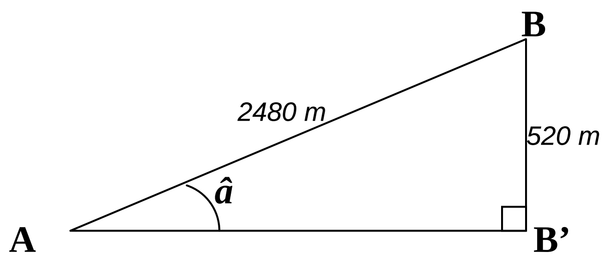
PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS)
MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1

Question 1
Pente du câble

Le calcul de la hauteur du dénivelé BB' correspond à la différence entre les altitudes respectives des points B et B'. Puisque les points B' et A sont à la même altitude, on obtient :
BB' = 2620 – 2100 = 520.
La hauteur du dénivelé est de 520 m.



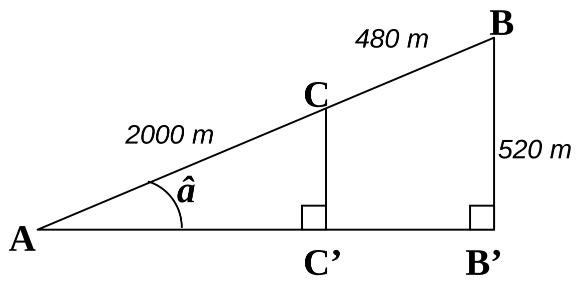
<u>Méthode 1 :</u> Utilisation du théorème de Pythagore
Le triangle ABB' étant rectangle en B', le théorème de Pythagore nous conduit à l'égalité suivante : $AB'^2 + B'B^2 = AB^2$.
D'où $AB'^2 = 2480^2 - 520^2$, ainsi $AB' = \sqrt{5\,880\,000} = 200\sqrt{147}$
On en déduit la pente du câble : $\frac{BB'}{AB'} = \frac{520}{200\sqrt{147}} = \frac{13}{5\sqrt{147}}$, soit environ 0,2144.
Cette pente est donc environ de 21,44%.

<u>Méthode 2 :</u> Utilisation des relations trigonométriques
Dans le triangle ABB' rectangle en B', on a : $\sin \hat{a} = \frac{520}{2480}$. On en déduit une valeur approchée de l'angle $\hat{a}$ à 10^{-5} près : $\hat{a} \approx 12,09891$.
La pente cherchée correspond à la tangente de l'angle $\hat{a}$: $\tan \hat{a} \approx 0,214361$.
Cette pente est donc environ de 21,44%.

<u>*Remarque :*</u>
Bien que ce ne soit pas précisé dans l'énoncé, le recours aux valeurs approchées était ici indispensable pour répondre à la question. Le choix du degré d'approximation était laissé à l'appréciation du candidat.

Question 2a

Sachant que BC vaut 480 m, on déduit immédiatement :
AC = 2480 – 480 = 2000.



<u>Méthode 1 :</u> Utilisation du théorème de Thalès.
Les droites (CC') et (BB') sont toutes deux perpendiculaires à la droite (AB'). Elles sont donc parallèles entre elles.
De plus, les points A, C, B et A, C', B' sont respectivement alignés.

D'après le théorème de Thalès, on peut écrire : $\frac{AC}{AB} = \frac{CC'}{BB'}$.

D'où : $\frac{2000}{2480} = \frac{CC'}{520}$

$CC' = \frac{520 x 2000}{2480}$

CC' ≈ 419,35

On en déduit que CC' est égale à 419 m à 1 m près par défaut.

<u>Méthode 2 :</u> Utilisation des relations trigonométriques.
Les deux triangles ACC' et ABB' étant respectivement rectangles en C' et B', on peut écrire :

$$\begin{cases} \sin \hat{a} = \frac{BB'}{AB} = \frac{520}{2480} \\ \sin \hat{a} = \frac{CC'}{AC} = \frac{CC'}{2000}. \end{cases}$$

On en déduit : $CC' = \frac{2000 x 520}{2480}$.

Donc CC' est égale à 419 m à 1 m près par défaut.

Question 2b
Altitude au point C

L'altitude *h* au point C correspond à l'altitude du point A à laquelle on ajoute le dénivelé CC'. Ainsi *h* = 2100 + CC'.
On sait que : CC' ≈ 419,3. Donc h ≈ 2519,3.
L'arrondi de ce nombre à 1 près est 2 519.
Ainsi l'altitude au point C est d'environ 2 519 m.

<u>Remarque :</u>
Pour déterminer l'arrondi d'une valeur à 10^{-n} près, il est nécessaire de connaître le chiffre de la $(n+1)^{ième}$ décimale de cette valeur. Si ce chiffre est égal à 0, 1, 2, 3 ou 4, l'arrondi à 10^{-n} près correspond à la valeur approchée par défaut à 10^{-n} près.
Si ce chiffre vaut 5, 6, 7, 8 ou 9, alors l'arrondi à 10^{-n} près correspond à la valeur approchée par excès à 10^{-n} près.
Par exemple, d'après la calculatrice, $\pi \approx 3{,}1415926$. Ainsi l'arrondi de π à 10^{-2} près est égal à 3,14, et l'arrondi de π à 10^{-3} près est égal à 3,142.

Question 3a

Puisque E est le milieu du segment [AC], on a : EC = $\frac{AC}{2} = \frac{2000}{2}$ = 1 000**.**

Donc EC est égal à 1000 m.

Question 3b
Durée du parcours EC

<u>Méthode 1 :</u>
On sait que : $vitesse = \frac{distance}{durée}$, notée $v = \frac{d}{t}$.

Ce qui est équivalent à : $t = \frac{d}{v}$.

Ainsi : $t = \frac{1000}{5} = 200$.
La cabine met donc 200 s pour parcourir la distance EC.
Or 200 = 3 x 60 + 20, de sorte que 200 s = 3 min 20 s.
La cabine parcourt donc la distance EC en 3 minutes 20 secondes.

<u>Méthode 2 :</u>
Pour parcourir 5 m, la cabine met 1 s, donc pour parcourir un trajet 200 fois plus long (200 x 5 = 1 000 m), il lui faut 200 fois plus de temps, c'est-à-dire 200 s.
Or 200 = 3 x 60 + 20, de sorte que 200 s = 3 min 20 s.
La cabine parcourt donc la distance EC en 3 minutes 20 secondes.

EXERCICE 2

<u>Remarque :</u>
Dans l'énoncé de cet exercice, il n'y a aucune indication concernant les modalités de choix des dalles : doit-on prendre une <u>seule taille</u> de dalles, ou peut-on au contraire poser <u>plusieurs tailles différentes</u> de dalles ?
Dans le second cas, il existe un si grand nombre de possibilités que cette interprétation nous semble improbable. Dans ce corrigé, nous supposons donc que les dalles choisies doivent être toutes <u>de la même taille</u>.

Recherche des dalles utilisables

Exprimons tout d'abord les dimensions de la pièce en cm :

8,70 m = 870 cm et 4,20 m = 420 cm.

Pour carreler la pièce avec des dalles entières, il faut que les dimensions de la pièce (longueur et largeur) soient des multiples de la longueur du côté des dalles choisies. Autrement dit, la longueur du côté des dalles choisies doit diviser la longueur **et** la largeur de la pièce.

Méthode 1 :
Il est facile de vérifier que 870 est divisible par 15, 29 et 30, mais pas divisible par 12, ni 45. On obtient : 870 = 15 x 58
870 = 29 x 30
De même 420 est divisible par 12, 15, et 30, mais pas divisible par 29, ni 45. On obtient : 420 = 12 x 35
420 = 15 x 28
420 = 30 x 14
En conclusion, les seules dalles qu'il est possible d'utiliser sont celles dont les côtés ont pour longueur 15 cm ou 30 cm.

Méthode 2 :
Notons ***d*** la dimension des dalles. Alors ***d*** doit être diviseur commun à 870 et à 420.
Recherche de tous les diviseurs de 870 et de 420 :

870 = **1** x 870	420 = **1** x 420
870 = **2** x 435	420 = **2** x 210
870 = **3** x 290	420 = **3** x 140
870 = **5** x 174	420 = 4 x 105
870 = **6** x 145	420 = **5** x 84
870 = **10** x 87	420 = **6** x 70
870 = **15** x 58	420 = 7 x 60
870 = 29 x **30**	420 = **10** x 42
	420 = 12 x 35
	420 = 14 x **30**
	420 = **15** x 28
	420 = 20 x 21

Parmi tous ces diviseurs, on repère (en gras) ceux qui sont communs à 870 et à 420.
Parmi ces diviseurs communs, les seuls qui correspondent à la longueur d'un côté de dalle sont 15 et 30.
En conclusion, les seules dalles qu'il est possible d'utiliser sont celles dont les côtés ont pour longueur 15 cm ou 30 cm.

Méthode 3 :
Notons d la dimension des dalles. Alors d doit être diviseur commun à 870 et à 420.
Donc d doit être un diviseur du PGCD de 870 et de 420.

$$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$870 = 2 \times 3 \times 5 \times 29.$$

Donc PGCD(420 ; 870) = 2 x 3 x 5 = 30.

Ainsi, les seules dalles qu'il est possible d'utiliser sont celles dont les côtés ont pour longueur 15 cm ou 30 cm.

Remarque :
*Le raisonnement **erroné** qui consiste à diviser l'aire de la pièce par l'aire d'une dalle, donne, avec les valeurs numériques proposées ici, les mêmes réponses à la question posée. Une solution basée sur ce raisonnement est mathématiquement inacceptable.*
Par exemple, si on considère une nouvelle pièce de largeur 870 cm et de longueur 2940 cm, les dalles carrées dont les côtés mesurent 14 cm ont une aire qui divise effectivement l'aire de la nouvelle pièce :

Aire d'une dalle (en cm^2) : $14 \times 14 = 2^2 \times 7^2$

Aire de la pièce (en cm^2) : $870 \times 2940 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2$

Donc $870 \times 2940 = (2^2 \times 7^2) \times 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 29$.

Cependant, 14 n'est pas un diviseur de 870. Il est donc impossible de n'utiliser que des dalles entières de cette taille pour carreler la nouvelle pièce.

Coût minimal de l'achat

Méthode 1 :
Pour couvrir une dalle de 30 x 30, il faut 4 dalles de 15 x 15. Donc pour carreler la pièce, il faudrait quatre fois plus de dalles de 15 x 15 que de dalles de 30 x 30.
On constate que le prix d'une dalle de 30 x 30 est inférieur à deux fois le prix d'une dalle de 15 x 15.
On a donc intérêt à choisir les dalles de 30 x 30.

D'après la question précédente, on sait : 870 = 29 x 30 et 420 = 30 x 14.
On place donc 29 dalles sur la longueur et 14 sur la largeur, soit au total 406 dalles :
29 x 14 = 406.
Chaque dalle coûtant 2,30 €, le prix total en euros est : 406 x 2,3 = 933,80 .
Le coût minimal de cet achat sera donc de 933,80 €.

Méthode 2 :
On calcule le prix pour le choix des dalles de 15 x 15.
D'après la question précédente, on sait : 870 = 15 x 58 et 420 = 15 x 28.
On place donc 58 dalles sur la longueur et 28 sur la largeur, soit au total 1624 dalles : 58 x 28 = 1624.
Chaque dalle coûtant 1,20 €, le prix total en euros est : 1624 x 1,2 = 1948,80 .

On calcule le prix pour le choix des dalles de 30 x 30.
D'après la question précédente, on sait : 870 = 29 x 30 et 420 = 30 x 14.
On place donc 29 dalles sur la longueur et 14 sur la largeur, soit au total 406 dalles :
29 x 14 = 406.
Chaque dalle coûtant 2,30 €, le prix total en euros est : 406 x 2,3 = 933,80 .
Le coût minimal de cet achat sera donc de 933,80 €.

EXERCICE 3

Méthode 1 : Mise en équation
On note $\boldsymbol{r}$ le nombre de points de pénalités suite à un refus du cheval et $\boldsymbol{b}$ le nombre de points de pénalités suite à la chute d'une barre. Les nombres $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{b}$ sont donc des nombres strictement positifs.
L'énoncé nous conduit au système de deux équations, à deux inconnues, suivant :

$$\begin{cases} 2r + 3b = 18 & (1) \\ 1r + 4b = 19 & (2) \end{cases}$$

De (2) on obtient : $r = 19 - 4b$.
Par substitution de r par cette valeur dans l'équation (1), on obtient :
$2 \times (19 - 4b) + 3b = 18$.
Soit $38 - 18 = 8b - 3b$
Ou $20 = 5b$
C'est-à-dire $b = 4$.
On en déduit $r = 19 - 16 = 3$.
La pénalité pour un refus est donc de 3 points, celle pour la chute d'une barre de 4 points.

Méthode 2 :
En comparant les scores de Pierre et de Jean, on remarque qu'en remplaçant un refus par une chute de barre, on augmente le score d'un point. :

	Refus	Chutes de barre	Pénalités
Pierre	2	3	18
Jean	1	4	19
Donc	*0*	*5*	*20*

On en déduit que 5 chutes de barre pénalisent de 20 points.
Une chute de barre coûte donc 4 points de pénalité.
En reprenant le score de Jean, on calcule qu'un refus coûte 3 points.
En conclusion, la pénalité pour un refus est de 3 points, celle pour la chute d'une barre de 4 points.

Remarque :
En admettant qu'une pénalité est nécessairement un nombre entier, un raisonnement par essai/ajustement sur une des valeurs (refus ou chute de barre) permettait ici de trouver la solution.
Exemple :
- si une chute de barre « coûte » 1 point, alors le score de Jean nous indique qu'un refus « coûte » 15 points, ce qui est incompatible avec le score de Pierre
- si une chute de barre « coûte » 2 points…
Néanmoins, l'énoncé ne garantissait pas a priori *des solutions entières.*

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

Remarque :
Il s'agit d'un problème de division - partition dans le cadre des mesures de capacité : recherche de la valeur d'une part (la contenance d'un bidon), connaissant le nombre de parts (5 bidons) et la valeur de toutes les parts (9 l d'huile).
Exprimé en litres, le résultat obtenu 9/5 = 1,8 est un nombre décimal.

Question 1
Explicitation des procédures mises en œuvre

Remarque :
Derrière le terme de « procédures », nous expliciterons à la fois les procédures de résolution et les procédures de calculs. Dans le sujet, l'analyse des erreurs n'était pas demandée, mais nous l'ajoutons pour la formation du candidat.

Procédure de Cindy :
Cindy dessine les 5 bidons d'huile dans lesquels elle va essayer de répartir les 9 litres d'huile.
Elle distribue d'abord 1 litre d'huile dans chaque bidon (elle note « 1 » sous chaque bidon), et calcule mentalement le total versé et le reste (4 litres).
Comme il reste moins d'un litre par bidon, elle distribue un demi-litre (noté « 0,5 » sous chaque bidon).
Un nouveau calcul mental lui permet de conclure que dans chaque bidon, il y a 1,5 l d'huile et qu'il reste encore 1,5 litres (sous-entendu à distribuer) : elle l'écrit sans les unités de mesure.

Production de Paul :
Paul utilise un schéma correct pour traduire le problème. Cependant, il ne reconnaît pas un problème de division (mauvaise interprétation du schéma ?). Il considère que chaque bidon contient 9 litres d'huile. Il écrit en ligne la multiplication 9 x 5 et en donne le résultat. Il conclut par « 45 l en tout ».

Production de Manon :
Manon reconnaît un problème de division et utilise la méthode experte : elle pose et effectue correctement la division de 9 par 5 (en posant les soustractions intermédiaires). Sa phrase de conclusion, correcte, reprend les termes de l'énoncé.

Production de Benjamin :
Benjamin dessine les cinq bidons, mais semble ne pas s'en servir pour la résolution.
Il reconnaît un problème de division et pose la bonne opération.
Néanmoins son résultat est incorrect : pour le calcul des dixièmes, il place un « 0 » simultanément au dividende et au quotient.
Il conclut par une phrase.

Remarque :
Seule la division euclidienne est au programme du cycle 3. Cependant, des situations de recherche d'un quotient décimal mettant en œuvre des procédures

personnelles doivent être proposées, notamment dans des contextes de mesure, par conversion d'unités. C'est en $6^{ème}$ que l'algorithme de la division sera repris et prolongé au cas du quotient décimal.

Question 2

Deux questions à Cindy

Après l'analyse faite dans la question précédente, il semble important pour Cindy de travailler sur la poursuite de la recherche.
On pourrait donc lui demander :

- « Avec ce qu'il reste, peux-tu encore verser une même quantité d'huile dans chaque bidon ? »
- « Sais-tu combien de décilitres représentent 1,5 litres ? »

Deux questions à Benjamin

Il s'agit dans ce cas, de lui faire modifier le résultat du calcul qui est erroné.

- « Comment peux-tu vérifier le résultat de ta division ? »
- « Quel résultat trouverais-tu si on t'avait demandé de répartir 90 décilitres dans les 5 bidons ? »

SECOND VOLET (8 POINTS)

Question 1
Les intentions de l'enseignant sur l'ensemble des documents

Le maître souhaite :
- faire émerger les caractéristiques d'un patron de cube (document 1) ;
- faire reconnaître un patron de cube parmi différentes représentations (document 2) ;
- faire travailler le passage du plan (le patron) à l'espace (document 3).

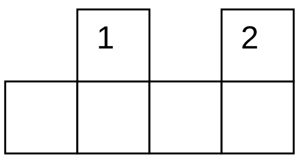
Question 2
La signification du mot « patron »

Un « patron » d'un solide est une surface plane d'un seul tenant qui, par pliage, permet de reconstituer le solide, sans recouvrement de ses faces.

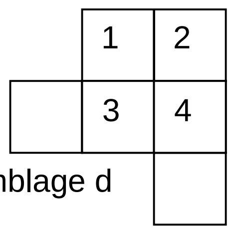
<u>Remarque :</u>
En classe, ce ne sont pas les connaissances formelles (définitions) qui sont visées mais des connaissances fonctionnelles : on ne cherchera pas à faire retenir par les élèves une telle définition.

Question 3
Les assemblages b, c et d

L'assemblage **c** n'est pas un patron du cube parce qu'il comporte 7 carrés, alors qu'un cube n'a que 6 faces carrées.
Pour l'assemblages **b**, les faces 1 et 2 vont se chevaucher lorsqu'on va reconstituer le solide.
Pour l'assemblage **d**, les faces 1, 2, 3 et 4 ont un sommet en commun, ce qui est impossible, puisque la somme des angles issus de ce sommet étant égale à 4 x 90° = 360°, les quatre faces sont alors dans le même plan.
b et **d** ne sont donc pas non plus des patrons du cube (voir figure ci-dessous).



Assemblage b



Assemblage d

Question 4
Comparaison des exercices 1 et 2

<u>Concernant la présentation :</u>
Dans les deux exercices, on trouve une consigne écrite suivie du dessin de différents assemblages de carrés. Cependant :

- dans l'exercice 1, on a en plus la présence d'un cube représenté en perspective ;
- l'exercice 1 comporte 5 assemblages alors qu'il y en a 7 dans l'exercice 2 ;
- dans l'exercice 2, les « traits de pliage » sont représentés par des pointillés alors que ce sont des traits pleins dans l'exercice 1 ;
- les figures sont plus grandes dans l'exercice 1 que dans l'exercice 2 ;
- dans l'exercice 1, un des assemblages est formé de 7 carrés alors que tous ceux de l'exercice 2 n'en possèdent que 6.

<u>Concernant la consigne</u> :

- Le statut des objets : dans l'exercice 1, on parle d'« assemblages de carrés », alors que dans l'exercice 2 on parle de « figures ».
- La formulation : dans l'exercice 1, la question est fermée : il s'agit de trouver *les deux seuls* patrons de cube. Dans l'exercice 2, le nombre de solutions n'est pas indiqué.
- La réponse attendue : dans l'exercice 1, les élèves doivent reproduire deux assemblages, alors que dans l'exercice 2, ils doivent reproduire sur papier quadrillé les figures permettant de construire le cube et vérifier en essayant de le construire effectivement.

<u>Remarque :</u>
Connaître le nombre exact de solutions peut limiter la recherche (« j'en ai déjà deux, donc je ne regarde pas les autres »). Dans le cas contraire chaque figure proposée doit faire l'objet d'une analyse de la part de l'élève.

<u>Concernant la vérification :</u>
Dans l'exercice 1 aucune vérification n'est évoquée.
A contrario, dans l'exercice 2, l'élève doit vérifier ses propositions par reconstruction du cube à partir des patrons. La reproduction de ces patrons est facilitée par l'utilisation du papier quadrillé.

<u>Remarque :</u>
Dans l'énoncé de l'exercice 1, il semble que la vérification ne soit pas du ressort de l'élève, mais elle apparaît effectivement dans le déroulement proposé dans le livre du maître : l'analyse de l'énoncé d'un exercice ne peut en aucun cas refléter la mise en œuvre de sa résolution en classe.

Question 5
Justification de l'exercice 3

Dans l'exercice 2, il est demandé à l'élève d'anticiper le résultat d'une construction à partir du « développement à plat » du solide en repérant les éventuelles superpositions de faces.
Dans l'exercice 3, il s'agit de situer des faces voisines du cube *les unes par rapport aux autres* sur le patron et dans une représentation du cube en perspective.
Cependant, la résolution de l'exercice 3 nécessite le passage d'une représentation du cube en dimension 2 (le patron) à un autre de type de représentation du cube en dimension 2 (la perspective), ce qui est difficile sans l'intermédiaire de l'objet lui-même.
Cet exercice peut donc être considéré comme un prolongement de l'exercice 2, à condition que les élèves aient au préalable travaillé la lecture de représentations en perspective.

Question 6
Justification de l'exercice 4

À l'issue de l'exercice 2, l'élève possède un patron de cube à partir de la figure E, patron qu'il peut manipuler pour reconstruire le dé.
Dans l'exercice 4, il s'agit de repérer les faces opposées et la vérification se fait par construction.
Ainsi, proposer l'exercice 4 à la suite de l'exercice 2, permet une continuité de l'apprentissage : reconnaître des patrons du cube, puis travailler plus précisément sur les positions relatives des différentes faces d'un de ces patrons.

Question 7
Prolongement

À l'école primaire, il est possible de travailler sur d'autres patrons que ceux du parallélépipède rectangle ou du cube. En effet, il est spécifié dans les documents d'applications que *« (…) les activités qui permettent de construire ces compétences* [percevoir un solide, construire un solide,…] *peuvent concerner d'autres solides (prisme, pyramide,…) (…) ».*
On pourra donc envisager par exemple, après la description de la pyramide à base carrée, de prendre l'empreinte de ses faces, puis d'en faire construire un patron.
En revanche, on ne pourra pas demander à l'élève de *savoir reconnaître* un patron de pyramide à base carrée, compétence non exigible au cycle 3.

DIJON, NANÇY-METZ, REIMS, STRASBOURG

Note préliminaire :
Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS)
MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1

Méthode 1 :
Soient N le nombre de caisses rangées et t la durée en heures mise par le magasinier pour les ranger à 50 caisses par heure ; alors on obtient N = 50 x t.
Si le magasinier range 60 caisses à l'heure, il met 15 minutes de moins (ou $\frac{1}{4}$ h car $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$), donc on obtient N = 60 x (t - $\frac{15}{60}$) = 60t – 15 .
On a alors l'équation : 50t = 60t - 15 ; d'où 10 t = 15 ; t = 1,5.
Il met donc 1,5 h soit 1 h 30 min pour ranger les caisses.
Il a donc débuté à 10 heures.

Méthode 2 :
Soient H l'heure (en écriture décimale) à laquelle le magasinier a commencé et N le nombre de caisses rangées.
S'il range 50 caisses à l'heure, il travaille pendant une durée de (11,5 – H) h.
Mais s'il range 60 caisses à l'heure, il travaille pendant une durée plus courte, égale à (11,25 – H) h car 15 min = $\frac{1}{4}$ h = $\frac{25}{100}$ h.
Exprimons le nombre N de deux façons :
N = 50 (11,5 - H) et N = 60 (11,25 - H)
On obtient l'équation 50 (11,5 - H) = 60 (11,25 - H) d'où H = 10.
Il a donc débuté à 10 heures.

Méthode 3 :
Soient N le nombre de caisses rangées, t_1 la durée en heures mise par le magasinier pour les ranger à 50 caisses par heure, t_2 la durée en heures mise par le magasinier pour les ranger à 60 caisses par heure.

On peut donc écrire : $t_1 = \frac{N}{50}$ $t_2 = \frac{N}{60}$.

Et on sait que t_2 est inférieur de 15 minutes à t_1.

Or 15 min = $\frac{15}{60}$ h d'où l'équation :

$$t_1 - t_2 = \frac{15}{60} \qquad \frac{N}{50} - \frac{N}{60} = \frac{15}{60} \qquad 6N - 5N = 5 \times 15.$$

Donc N = 75 On en déduit que $t_1 = \frac{75}{50} = 1,5$.

Quand le magasinier finit à 11 h 30, il a travaillé 1,5 h ou 1 h 30, il a donc commencé son travail à 10 h.

Le magasinier a commencé son travail à 10 h.

EXERCICE 2

<u>Remarque préalable :</u>
Dans cet exercice, la décomposition du nombre en produit de facteurs premiers permet parfois de résoudre le problème.

Question 1
Un mot dont le poids est 18

18 = 1 x 3 x 6 ou 18 = 1 x 2 x 9 ou 18 = 1 x 2 x 3 x 3 (avec un nombre de facteurs 1 qui peut être plus important).
Comme B et O valent 2 et comme I et V valent 9, il suffit donc de trouver un mot comportant un B ou un O et un I ou un V ainsi que des A ou des N qui valent 1.
Il y a certainement beaucoup de mots possibles. Nous proposons le mot « **SAC** » ; le mot « **BAIN** » ; le mot « **BAI** ».
Nous pouvons aussi partir de la décomposition 18 = 1 x 3 x 6 et trouver d'autres mots : « **CAS** » ; « **PAS** » ; « **PANS** ».

Question 2
Un mot de trois lettres dont le poids est supérieur à 500

Il y en a également beaucoup, nous proposons :
« **RIZ** » qui pèse 585 ; **« LIT** » qui pèse 756 ; « **LYS** » qui pèse 864 ; « **MIL** » qui pèse 1404 ; « **KIT** » qui pèse 693 ; …

Question 3
Un mot dont le poids est 48

48 = 1 x 6 x 8 ; 48 = 1 x 2 x 3 x 8 ; 48 = 1 x 2 x 2 x 2 x 2 x 3
Il y a certainement beaucoup de mots possibles. Nous proposons le mot « **POU** » ; le verbe « **SU** » ; le mot « **US** ».

Question 4
Un mot dont le poids est 47

47 = 1 x 47, 47 est un nombre premier et aucune lettre ne possède un poids de 47.

Il est donc impossible de trouver un tel mot.

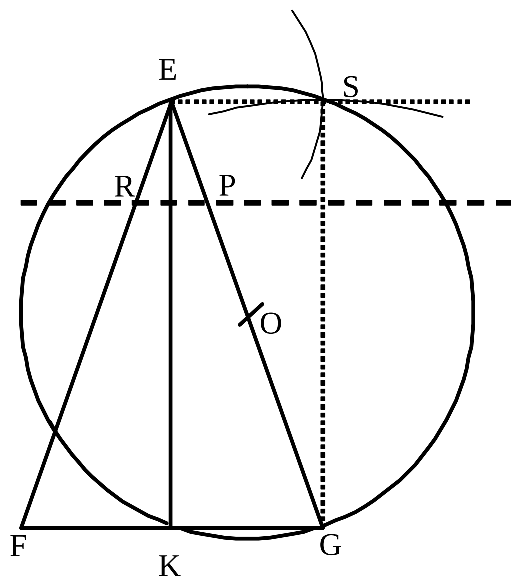
Question 5
Un mot dont le poids est 46

46 = 1 x 2 x 23, 23 est un nombre premier et aucune lettre n'a un poids de 23.

Il est donc impossible de trouver un tel mot.

EXERCICE 3

Question 1
Figure en vraie grandeur



Question 2
EKG est un triangle rectangle.

Par construction, [EG] est le diamètre du cercle et K appartient au cercle. Le triangle EKG est donc rectangle car inscrit dans un demi-cercle.

Question 3
K est le milieu de [FG].

L'angle $\widehat{EKG}$ est un angle droit car le triangle EKG est un triangle rectangle. [EK] est donc la hauteur du triangle EFG, issue de E. Ce triangle étant isocèle en E, cette hauteur est à la fois médiatrice et médiane. Le point K est donc situé au milieu du segment [FG].

Question 4
Valeur exacte de EK

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle EKG rectangle en K, nous avons :
$EK^2 + KG^2 = EG^2$;
$EK^2 = EG^2 - KG^2$;
$EK^2 = 6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32$;
$EK = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ (car EK est une longueur).
La valeur exacte de EK est donc $4\sqrt{2}$ cm.

<u>*Remarque :*</u>
Aucune valeur approchée n'était demandée. Il ne faut donc pas en donner, sinon le candidat peut être sanctionné.

Question 5
Construction du point S

Par définition de la translation, on sait que ESGK est un parallélogramme (deux côtés opposés parallèles et isométriques).

Il s'agit donc de tracer la parallèle en E au segment [KG] :
- tracer un arc de cercle de centre E et de rayon KG,
- tracer un arc de cercle de centre G et de rayon KE,
- ces deux arcs se coupent au point S.

Question 6
Le quadrilatère ESGK est un rectangle.

La figure ESGK est un parallélogramme. Ce parallélogramme possède de plus un angle droit en K, **c'est donc un rectangle.**

<u>*Remarque :*</u>
On aurait pu construire S comme point diamétralement opposé de K.

Question 7
ESKG est inscrit dans le cercle (C).

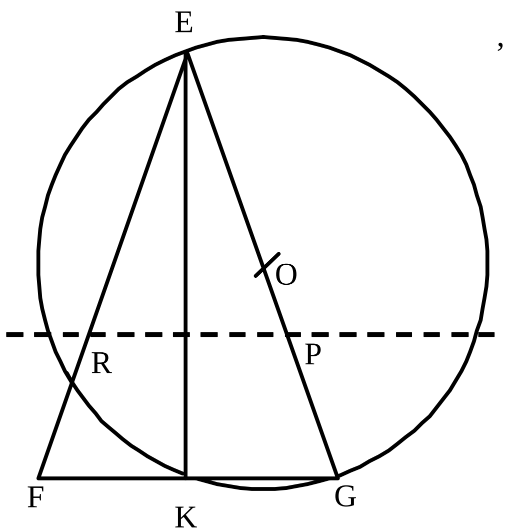
<u>Méthode 1 :</u>
Comme le quadrilatère est un rectangle, l'angle en S est droit. EG est l'hypoténuse du triangle SEG. Il existe donc un cercle qui passe par ces trois points et qui a pour diamètre EG. C'est le cercle (C) tracé initialement, donc **ESKG est inscrit dans ce cercle.**
<u>Méthode 2 :</u>
On sait qu'un rectangle est inscrit dans le cercle de diamètre une diagonale, le segment [EG] est un diamètre de (C) donc **ESKG est inscrit dans le cercle(C).**

Question 8
Position du point P pour que le triangle EPR et le trapèze RPGF aient le même périmètre

La droite (PR) est parallèle à la droite (FG). Les droites (PG) et (RF) se coupent en E. D'après le théorème de Thalès dans les triangles EFG et ERP, on a donc :
$\frac{EP}{EG} = \frac{ER}{EF}$. Or EG = EF (EFG isocèle en E), donc **EP = ER.**
Or PG = EG - EP = EF - ER = RF parce que les points E, R et F (respectivement les points E, P et G) sont alignés.
Ainsi **PG = RF.**

Soit x la longueur du segment [EP], x = EP et x = ER.
Soit y la longueur du segment [RP], y = RP.
Le périmètre du triangle EPR vaut 2x + y ;
Le périmètre du trapèze RPGF est RP + PG + GF + FR et on a PG = RF = 6 cm - x ;
donc le périmètre du trapèze RPGF est égal à y + (6 cm - x) + 4 cm + (6 cm - x).
Les deux périmètres sont égaux si et seulement si 2x + y = y + 2(6 cm - x) + 4 cm ;
soit 4x = 16 cm ; $x = \frac{16 \text{ cm}}{4}$; x = 4 cm.

Les deux périmètres sont égaux si et seulement si EP = ER = 4 cm, ce qui donne la figure suivante :



DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

La réponse au problème posé est 23 souris (23 x 0,2 = 4,6).

Question 1
Procédure suivie, qualités et erreurs éventuelles

Remarque :
Il était indiqué en caractères gras, dans le sujet que la réponse devait être présentée sous forme de tableau. Les candidats qui n'ont pas suivi ce conseil ont été pénalisés.

	Procédure suivie	Qualités	Erreurs éventuelles
E1	Cet élève a reconnu qu'il s'agissait d'un **problème de division.** Il pose la division de 4,6 par 200 (en fait il effectue la division de 4,6 par 2) et écrit une égalité.	Il conclut qu'on ne peut pas « couper une souris » et arrondit son résultat par excès. **Conclusion conforme à son raisonnement.**	Il a fait une erreur d'unités et divise des kilogrammes par des grammes : **absence de conversion.** Il commet également une **erreur dans la technique de la division** qu'il interprète comme une division par 2. **Le résultat est erroné.**
E2	Il fait un **essai additif et des essais multiplicatifs en utilisant un résultat intermédiaire.** Il tente d'atteindre 4600 comme résultat d'un calcul multiplicatif.	Première qualité : Il ne travaille pas que par additions de 200, mais sait **aller plus vite en utilisant des multiplications**. Deuxième qualité : Il **convertit correctement** les kilogrammes en grammes.	Il commet une **erreur de calcul** en effet, 1200 x 3 = 3600 et pas 4600. Il a ajouté une retenue. Il commet également une autre **erreur** et calcule 6 + 3 au lieu de 6 x 3. **Le résultat est erroné.**

E3	Il commence par faire un dessin, puis additionne 200 jusqu'à obtenir 1000 g qui valent 1 kg La procédure est basée sur un calcul additif puis il déduit son **résultat à l'aide d'une procédure mentale.**	Première qualité : Il **sait interpréter son calcul** et revenir au nombre de souris. Il semble faire la suite du problème de tête car il trouve 23 souris sans explications complémentaires. Deuxième qualité : Sa **conversion kg/g est bonne.**	Pas d'erreur, mais il fournit peu d'explication et il n'y a pas de phrase conclusion. **Le résultat est juste**.
E4	La procédure suivie n'est pas visible sur la feuille, mais nous pouvons supposer qu'il a débuté comme l'élève E3 et mis en relation 1000 g avec 5 souris et donc 4000 g avec 20 souris. **Le calcul semble être mental.**	Le calcul mental montre que cet élève **n'a guère besoin de poser d'opération.**	L'erreur réside dans le fait que mentalement il a soustrait 4000 de 4600 et trouvé 6 au lieu de 600. Nous pouvons penser à une **mauvaise compréhension des écritures à virgule** (pour cet élève 4,6 kg semble signifier 4 kg et 6 g. **Le résultat est erroné.**
E5	Cet élève a reconnu qu'il s'agissait d'un **problème de division.** Après avoir posé une soustraction qu'il barre, il pose effectivement la division correcte de 4,6 divisé par 0,2 et conclut en utilisant le résultat trouvé.	Première qualité : **avoir reconnu que la soustraction posée ne donnait pas le bon résultat.** L'élève est donc capable de réfléchir et de déceler une erreur. Deuxième qualité : les unités sont bonnes : il convertit les grammes en kilogrammes pour avoir une cohérence**.** **Bonne conversion.**	Il commet une **erreur dans la technique opératoire de cette division.** (Celle-ci est hors programme depuis les nouveaux textes officiels de 2002.) On peut penser qu'il calcule correctement 3 x 2 et soustrait 6 de la partie décimale ; puis calcule 2 x 2 et soustrait 4 de la partie entière. **Le résultat est erroné.**

E6	**Il a reconnu un problème de division**. Il pose cette division et l'effectue correctement.	Première qualité : Il construit un tableau de conversions pour ne pas se tromper et rédige ce qu'il fait. **Bonne conversion.** Deuxième qualité : Il justifie correctement sa division, et explique le résultat obtenu par une phrase. Il rédige une phrase de conclusion **Bonne rédaction.**	Pas d'erreur. **Le résultat est juste.**
E7	Cet élève pose deux additions qu'il effectue correctement. **Tâtonnement à base d'additions.** Cette procédure n'est pas menée à son terme.	Il **conclut correctement** ayant ajouté cinq fois 200, qu'il y a 5 souris de 200 g.	Son erreur semble être due à une confusion : 400 + 600 ne vaut pas 4600 (problème de numération) ; Ou à une erreur de conversion (4 kg ne vaut pas 400 g) . **Le résultat est erroné.**
E8	Cet élève **procède par essais multiplicatifs croissants**. Le choix rapide du multiplicateur 23 est surprenant. Nous pouvons supposer que si la dernière multiplication avait donné un nombre supérieur à 4600, il aurait diminué ce nombre. Il semble donc savoir procéder par encadrements.	Première qualité : **Bonne conversion g/kg.** deuxième qualité : **Bonne compréhension du problème.**	Pas d'erreur si ce n'est l'ajout d'une virgule dans la dernière multiplication posée. (En fait, la virgule lui permet de valider cette réponse en retrouvant la donnée de départ.) **La démarche logique est non explicitée.** **Le résultat est juste.**

SECOND VOLET (8 POINTS)

<u>Solution du problème :</u>

Coffres	*Tapisseries*	*Épées*	*Trésor*	*Gardes*	*Femme de ménage*
3500	*840*	*50*	*1960*	*74550*	*900*

La somme que son ennemi doit lui rembourser est 81800 écus.

Question 1 - Analyse du problème

Question 1a
Genre du problème et niveau de classe

Les différentes fonctions de la résolution de problèmes donnée par les textes officiels de 2002 sont :

- ♦ *Problèmes « pour apprendre » : leur résolution vise la construction d'une nouvelle connaissance.*
- ♦ *Problèmes « pour s'entraîner », destinés à permettre le réinvestissement de connaissances déjà travaillées, à les exercer.*
- ♦ *Problèmes « pour approfondir », plus complexes que les précédents, dont la résolution nécessite la mobilisation de plusieurs catégories de connaissances.*
- ♦ *Problèmes « pour chercher », centrés sur le développement des capacités à chercher : pour résoudre ces problèmes, les élèves ne connaissent pas encore de solution experte et l'apprentissage de celle-ci n'est pas encore un objectif visé.*

Il semble que d'après cette catégorisation, ce problème appartienne à la troisième classe : **c'est un problème pour approfondir, de type complexe qui sera résolu en plusieurs étapes.** En effet il y a non seulement des difficultés de lecture que nous développerons ultérieurement, mais aussi des calculs sur des grands nombres (qui restent entiers), la compréhension du vocabulaire tel que « tiers » (fractions)…
Ce problème pourra utilement être proposé en fin de cycle 3 : CM1 ou CM2 de préférence, car il fait intervenir comme nous l'avons dit précédemment plusieurs connaissances.

Question 1b
Quatre compétences de fin de cycle relatives aux mathématiques

<u>Remarque :</u>
La question demandait quatre compétences, nous en citons davantage, cependant le candidat pouvait être pénalisé s'il en avait cité plus de quatre.

- Résoudre un problème en utilisant les connaissances sur les nombres naturels et sur les opérations étudiées.
- Savoir mettre en correspondance les informations utiles à la résolution d'un problème.
- Maîtriser les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction des entiers.
- Maîtriser la technique opératoire de la multiplication des entiers.
- Maîtriser la technique opératoire de la division des entiers.
- Maîtriser le sens de ces opérations.
- Mettre en œuvre un raisonnement, articuler les différentes étapes d'une démarche.
- Connaître les expressions comme « moitié », « tiers » et savoir les utiliser dans des calculs.

Question 1c
La tâche essentielle des élèves

C'est certainement **une tâche de lecture compréhension, avec sélection des données numériques pertinentes, mais aussi une tâche de planification et d'organisation de la démarche.** Il s'agit de décomposer le problème en différents sous-problèmes qui doivent être résolus pour arriver à répondre à la question non posée explicitement (les élèves devront la formuler).

Question 2 - Les trois formes de texte

Question 2a
Les trois formes de texte et leur hiérarchie

L'annexe 2.1 présente **une bande dessinée de six vignettes avec un texte « narratif dramatisé ».** Il comporte des interjections telles que « morbleu !» ; « ouf !», « Palsambleu !» et utilise le style direct.

L'annexe 2.2 présente la même bande dessinée avec un texte narratif de **style indirect « apuré ».**

L'annexe 2.3 est **un texte narratif classique** (succession de paragraphes et sauts de ligne) illustré par une image qui permet de situer l'époque de l'histoire.

L'annexe 2.3 semble la plus simple car elle présente un texte narratif épuré qui présente davantage les caractéristiques habituelles d'un problème de mathématiques : la dernière phrase, malgré sa longueur permet de récapituler ce qu'il faut chercher et doit donner l'occasion de formuler la question du problème. Cependant l'annexe 2.2 peut aussi être considérée comme simple car les illustrations permettent de bien cerner les différents sous-problèmes. Mais « rembourser la totalité de ce qui a été volé » n'est pas assez explicite pour bien comprendre ce qu'il faut chercher.
L'annexe 2.1 est la plus difficile des trois propositions car c'est un écrit littéraire qui incorpore le style direct et le style indirect avec un niveau de langue complexe.

« Ils me paieront jusqu'au dernier écu ce qu'ils me doivent » ne permet pas de prendre en compte de façon évidente la perte du travail du personnel pendant un mois.

Remarque concernant l'annexe 2.2 :
Une difficulté peut apparaître car il n'est pas fait explicitement référence au fait que le salaire des gardes et de la femme de ménage est mensuel. Seule la durée (un mois) de l'absence du Chevalier Noir permet de le comprendre.

Hiérarchie du moins complexe au plus complexe : 2.3 ; 2.2 ; 2.1

Question 2b
Trois éléments source de difficultés dans l'annexe 2.3

Remarque :
La question demandait trois éléments source de difficultés, nous en citons davantage, cependant le candidat pouvait être pénalisé s'il en citait plus de trois.

Dans chacun des six paragraphes nous pouvons trouver un élément source de difficultés pour les élèves :

- paragraphe 1 : l'expression « qu'il paie chacun 710 écus par mois » peut être une expression difficile à comprendre pour les élèves ;
- paragraphe 2 : l'expression « 3500 écus l'ensemble » ;
- paragraphe 3 : l'expression « chacune d'elle valait la moitié d'un flambeau » ;
- paragraphe 4 : l'expression « il ne reste que 2 épées à 5 écus pièce sur la douzaine » ;
- paragraphe 5 : expression « le tiers de ses 5880 écus » ;
- paragraphe 6 : phrase très longue et difficile à comprendre avec des données inutiles « le comte de Ballard et ses hommes, les chevaliers d'Onc et de Zamor ». La question n'est pas clairement explicitée.

Question 2c
Deux modalités différentes d'utilisation de ces documents

Remarque :
Davantage de modalités sont proposées ici, mais le candidat ne devait en citer que deux.

Modalité 1 :
Mise en place d'ateliers différenciés de résolution de problèmes. Le maître prévoit des groupes selon les compétences de ses élèves en français et donne l'énoncé correspondant à celles-ci.
Une première phase est celle d'appropriation du texte :

- lecture silencieuse et compréhension individuelle.
- reprise collective dans chaque groupe qui permet au maître de s'assurer d'une bonne compréhension de l'histoire, il questionne les élèves pour savoir s'ils ont compris, il explique éventuellement les mots ou les tournures difficiles.

Une <u>deuxième phase</u> est une phase de recherche qu'il semble préférable de mener par groupes de trois élèves. Les élèves doivent produire une affiche qui explique leur démarche de résolution (écrit de communication).
Une <u>troisième phase</u> de validation consisterait en l'exposition des affiches et les commentaires des élèves :

- une première validation des sous-problèmes peut être menée collectivement.
- une nouvelle phase de recherche individuelle pourrait être proposée afin que chaque élève rédige sa solution finale.
- une validation du problème global.

<u>Remarque :</u>
Nous avons eu la volonté d'utiliser les trois écrits, mais nous sommes conscients que cette mise en œuvre pédagogique semble difficile à mener.

<u>Modalité 2 :</u>
Les mêmes phases et la même gestion de classe peut être proposée avec un énoncé de problème unique : celui de l'annexe 2. 3.

<u>Modalité 3 :</u>
Usage de l'un de ces trois textes en atelier : le maître assure un étayage auprès d'un groupe en difficulté en français, alors que les autres élèves travaillent en ateliers sur des sujets différents.
A la suite de ce travail, le maître peut retrouver la modalité 2.

<u>Modalité 4 :</u>
Les élèves travaillent par groupe de trois et ont à leur disposition les trois énoncés. Le maître indique qu'il s'agit d'un même problème à résoudre. Les élèves pourront résoudre le problème en s'appuyant sur l'apport spécifique de chacun des trois textes.

Question 3 - La fiche d'aide

Question 3a
Moment et objectif

Il semble qu'il pourrait être opportun de la distribuer après des temps de lecture individuelle, de recherche individuelle ou collective du questionnement.

L'objectif est de favoriser la compréhension du texte en particulier des annexes 2.1 et 2.2 dont elle reprend la forme. La fiche permet d'aider, par un questionnement, à trouver les informations utiles et pertinentes pour résoudre le problème. Elle aide aussi (cases n°4 et n°6) au choix des opérations. Enfin, elle permet de structurer la démarche.

Question 3b
Le chiffre 1 dans la case située en bas et à droite

Nous pouvons constater que les cases numérotées 2, 3, 4, 5 et 6 posent des questions en parallèle aux vignettes correspondantes des deux documents 2.1 et 2.2 qui sont des bandes dessinées (mais aussi à chacun des paragraphes de l'annexe 2.3). Chaque case renvoie à un sous-problème énoncé dans la BD ou dans le texte.
La dernière case 1 est celle qui contient la question, la dernière de l'histoire, celle qui va donner du sens à l'ensemble et générer le questionnement de chaque vignette 2, 3, 4, 5 et 6.
Le 1 signifie aux élèves qu'il faut commencer par lire cette vignette pour débuter la résolution.

Question 4
Réécriture

Remarque :
Dans notre conception de la réponse à cette question, la réécriture ne doit pas gommer les difficultés d'ordre mathématique du problème.

Le chevalier Noir a été volé et son ennemi a emprisonné ses domestiques. Il veut se faire rembourser et pour cela, il calcule la totalité de ce qu'on lui a pris.
Pour les meubles
- 5 coffres payés 3500 écus en tout,
- 6 tapisseries, chacune valant la moitié de 280 écus,
- 10 épées à 5 écus pièce,

Pour le trésor : le tiers de 5880 écus.
Pour les domestiques :
- 105 gardes payés chacun 710 écus,
- une femme de ménage payée 900 écus.

Combien son ennemi doit-il lui rembourser ?

GRENOBLE

Note préliminaire :
Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS)
MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1

Question 1
Nature des triangles AKB et ALB

Les triangles AKB et ALB sont deux triangles rectangles.

Note :
Cette réponse correspond au cas de figure proposé sur le sujet. Elle suppose d'admettre implicitement le fait que le point M ne soit pas situé sur la droite (AB), ni sur les droites tangentes au cercle passant par les points A et B et perpendiculaires à (AB).

Le triangle AKB est inscrit dans un demi-cercle de diamètre [AB], il est donc rectangle en K, et [AB] est l'hypoténuse de ce triangle.
Il en est de même pour le triangle ALB.

Question 2

La droite (BK) est perpendiculaire à la droite (AK), c'est-à-dire également à la droite (AM). On en déduit que la droite (BK) est la hauteur issue du sommet B dans le triangle AMB.
De même, la droite (AL) est perpendiculaire à la droite (LB), c'est-à-dire également à la droite (MB). On en déduit que la droite (AL) est la hauteur issue du sommet A dans le triangle AMB.
La droite perpendiculaire à (AB) passant par M est la troisième hauteur du triangle AMB. Les trois hauteurs d'un triangle sont des droites concourantes en un point appelé orthocentre du triangle. Appelons H ce point.

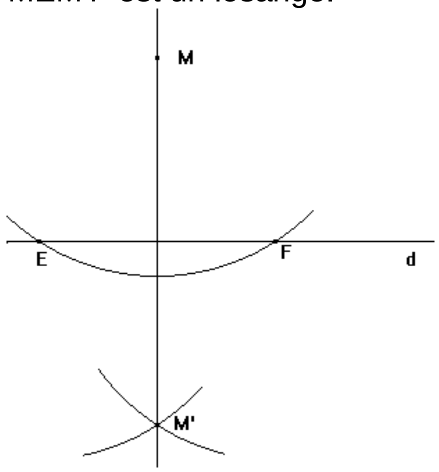
Les droites (AL), (BK) et la perpendiculaire à (AB) passant par M sont concourantes en H.

En conclusion, pour tracer la droite perpendiculaire à (AB) passant par M, il suffit de tracer l'intersection H des droites (AL) et (BK), puis de tracer la droite passant par M et H. La droite (MH) est perpendiculaire à (AB).

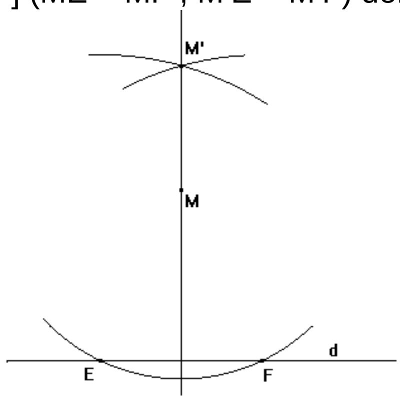
Question 3
Autre construction de la perpendiculaire à (AB) passant par M

Soit d une droite, et un point M. Le principe consiste à tracer sur d, à l'aide d'un compas, deux points équidistants du point M. Appelons-les E et F (il suffit pour cela de choisir un écartement de compas supérieur à la distance de M à d). Tracer ensuite la médiatrice du segment [EF]. Cette droite est perpendiculaire à [EF], donc à la droite d. Cette construction se fait à l'aide d'un compas et d'une règle non graduée.

<u>Construction 1 :</u>
La figure ci-dessous représente une construction où l'on a gardé le même écartement de compas. Dans ce cas particulier et commode, M et M' sont équidistants de E et de F (ME = MF = M'E = M'F). La première et la dernière égalité montrent que (MM') est la médiatrice de [EF], donc que les droites (MM') et (EF) sont perpendiculaires. De plus, MEM'F est un losange.



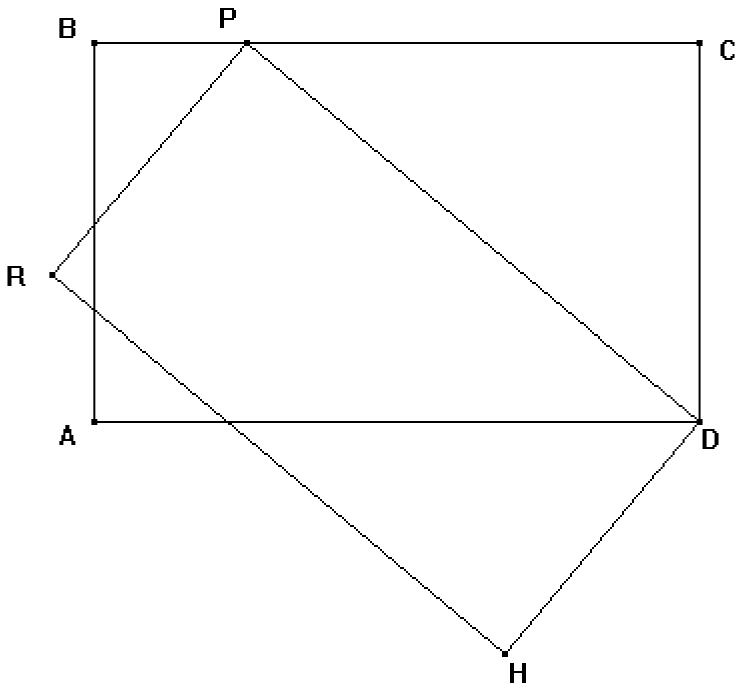
<u>Construction 2 :</u>
La figure suivante montre une autre construction possible lorsque la place manque pour tracer le symétrique de M par rapport à d : deux arcs de cercles de centres E et F, et de même rayon distinct de EM, se coupent en M'. La droite (MM') est la médiatrice du segment [EF] (ME = MF ; M'E = M'F) donc elle est perpendiculaire à d.



EXERCICE 2

Question 1
Tracé du quadrilatère DPRH

Le quadrilatère DPRH est un rectangle. On connaît la longueur de deux de ses côtés : DH = 4 cm et PR = 4 cm. Il reste à déterminer la longueur des autres côtés.
Pour cela, nous allons construire le rectangle ABCD (longueur 8 cm et largeur 5 cm), placer le point P sur le segment [BC] à 2 cm du point B afin de tracer [PD] qui constitue la longueur de DPRH.
On achève alors la construction du rectangle DPRH en traçant la perpendiculaire à (PD) passant par P sur laquelle on place le point R à 4 cm de P dans le demi-plan de frontière (PD) contenant le point A ; on fait de même pour obtenir le point H. On peut aussi construire le point H comme le symétrique de P par rapport au milieu de [RD].



Question 2
Calcul de PH

DPRH est un rectangle. Le triangle PDH est donc rectangle en D et [PH] est son hypoténuse.
En appliquant le théorème de Pythagore dans ce triangle, on a : $PH^2 = PD^2 + DH^2$.
On connaît la longueur DH, hauteur du parallélépipède, égale à 4 cm. Il faut donc calculer PD^2. Considérons pour cela le triangle PCD rectangle en C.
Appliquons le théorème de Pythagore dans ce triangle : $PD^2 = PC^2 + CD^2$.
PC = BC - BP, donc PC = 6 cm et CD = 5 cm. On en déduit $PD^2 = 36 + 25$ et par suite
$PH^2 = 36 + 25 + 16$, soit donc $PH^2 = 77$
La valeur exacte de PH est $\sqrt{77}$ cm.

Question 3
Volume du prisme ABPDEFRH

La mesure du volume V du prisme s'obtient en multipliant la mesure de l'aire de la base ABPD par la mesure de la hauteur associée DH (L'arête [DH] est perpendiculaire à la face ABPD), ces mesures étant exprimées avec des unités correspondantes, en l'occurrence respectivement en cm^2, pour l'aire, et cm, pour la hauteur.
Calculons l'aire de ABPD : ABPD est un trapèze rectangle (il a deux angles droits en A et B), ses bases sont [AD] et [BP] et sa hauteur [AB].

Son aire est donnée par la formule : aire(ABPD) = $\frac{1}{2}(BP + AD)\times AB$

On obtient la mesure en cm² de l'aire(ABPD) : $\frac{1}{2}(2 + 8)\times 5 = 25$.

Remarque :
On peut aussi utiliser : Aire (ABPD) = aire (ABCD) - aire (CDP)

On calcule le volume, V = aire(ABPD) x DH, d'où V = 25 x 4 cm^3.
Le volume du prisme ABPDEFRH est égal à 100 cm^3.

EXERCICE 3

Question 1a

Calcul de la note obtenue au sixième devoir : La moyenne des notes obtenues par Luc aux cinq premiers devoirs est $\frac{12+5+18+11+19}{5} = \frac{65}{5}$ ce qui est égal à 13.

Méthode 1 :
La sixième note étant égale à la moyenne des précédentes, la moyenne pour les six devoirs est inchangée et est égale à 13.

Méthode 2 :
Un calcul effectif donne $\frac{65+13}{6} = \frac{78}{6}$ et $\frac{78}{6} = 13$.

Donc, **la moyenne de Luc est égale à 13**.

Question 1b

Il n'est pas possible à Luc d'atteindre une moyenne qui prenne la valeur 15.

Méthode 1 :
Appelons n la note qu'il obtient au sixième devoir. Il faudrait alors que la moyenne des six notes $\frac{65+n}{6}$ soit égale à 15.

Or $\frac{65+n}{6}=15$ équivaut à 65 + n = 90 et par conséquent n = 25.
Comme une note ne peut pas être supérieure à 20, l'hypothèse que Luc ait 15 de moyenne grâce au sixième devoir est impossible.

Méthode 2 :
Attribuons la note maximale, c'est-à-dire 20, au sixième devoir de Luc : Sa moyenne finale serait alors égale à $\frac{65+20}{6}$, c'est-à-dire à environ 14,17 et ce nombre est inférieur à 15. Il n'est donc pas possible que Luc obtienne 15 de moyenne grâce à la note de son sixième devoir.

Question 2a

Si la valeur de y a augmenté de 25% par rapport à celle de x, alors **y = 1,25x**.
En effet y = x + $\frac{25}{100}$x et donc y = (1 + $\frac{25}{100}$)x

Question 2b

La moyenne des notes de Julie est égale à 12,5. Donc 12,5 = $\frac{20+15+4+9+x+y}{6}$
Additionnons les nombres et remplaçons y par son expression en fonction de x :
12,5 = $\frac{48+x+1{,}25x}{6}$ ce qui est équivalent à $12{,}5=\frac{48+2{,}25x}{6}$;
ou encore à 12,5 x 6 = 48 + 2,25 x *soit* 75 - 48 = 2,25 x ; on en tire x = 12.
Calcul de y : si x = 12, alors *y* = 1,25*x*. On obtient : y = 15.
La réponse est donc : x = 12 et *y* = 15.

Note :
On peut vérifier : $\frac{20+15+4+9+12+15}{6}=12{,}5$

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

Question 1
Explication de la fréquence des erreurs à la question b)

Cinq élèves sur six ont répondu correctement à la question a), et un seulement, Hichem, à la question b). Les deux questions portent sur l'addition de deux nombres décimaux.
Dans la première question, le nombre de chiffres après la virgule est le même pour les deux nombres, par conséquent, dans le calcul en colonne, les décimales de même rang s'alignent automatiquement si on aligne les chiffres par la droite, comme on le fait dans l'addition des entiers.
Par contre, dans la deuxième question, les deux nombres ont des parties décimales n'ayant pas le même nombre de chiffres. C'est un cas où les erreurs sont plus fréquentes car opérer comme s'il s'agissait d'une addition de nombres entiers ne conduit pas au résultat correct. Cette situation nécessite soit de s'appuyer sur la signification fractionnaire des décimales (dixièmes, centièmes, millièmes) pour aligner les chiffres de même rang des parties décimales, soit de mettre les parties décimales « au même format » en complétant celle qui possède le moins de chiffres par un ou plusieurs zéros à droite et additionner ainsi des chiffres de même rang. On peut encore privilégier l'alignement des virgules et accepter le décalage éventuel des chiffres des parties décimales.

Question 2

Une écriture mathématique fausse est présente dans le travail d'Anthony.

Parmi les cinq productions qui aboutissent à la même réponse correcte, quatre d'entre-elles sont des additions disposées en colonne. Anthony ne procède pas ainsi. Il effectue des calculs séparés sur la partie entière et sur la partie décimale, et ses calculs sont disposés en ligne. Il additionne les parties décimales comme des entiers 32 + 87 puis ajoute une virgule, transformant le nombre 119 en 1,19. De ce fait, l'égalité 32 + 87 = 1,19 est fausse.

Commentaire sur la démarche d'Anthony :

Anthony sait que la réponse correcte ne peut être qu'un nombre décimal, avec une partie décimale constituée de deux chiffres à droite de la virgule, et que cette partie décimale provient de la somme des parties décimales des deux termes : Il additionne 32 centièmes et 87 centièmes, ce qui donne effectivement une unité et 19 centièmes. La troisième ligne de ses calculs correspond à l'addition d'un nombre entier (23) et d'un nombre décimal (1,19), addition qu'il réalise correctement.
La présence de calculs en ligne exprime un calcul réfléchi tandis que les additions en colonnes correspondent à l'application de procédures automatisées qui peuvent être exécutées sans donner de sens aux étapes intermédiaires.

Question 3
Usages du chiffre 0

Hichem écrit deux chiffres 0 pour mettre les parties entières et décimales des deux nombres au même format. Cela lui permet d'aligner, pour les additionner, des chiffres de même rang. Si cette procédure est appropriée pour les parties décimales, elle est inutile pour les parties entières, mais elle n'influe pas sur le résultat. En effet, le chiffre 0 qui est écrit à gauche de 15 ne fait que marquer explicitement l'absence d'unités de centaines dans le nombre 15,672.
Jonathan tente lui aussi de mettre les parties entières et décimales des deux nombres au même format. Cette procédure est appropriée pour les parties décimales : le chiffre 0 écrit à droite de 352,21 marque explicitement l'absence de millièmes dans ce nombre, ce qui permet ensuite d'additionner en colonne les chiffres de même rang des parties décimales. Par contre, le chiffre 0 qui est écrit à droite de la partie entière modifie sa valeur. Ainsi, 15 est remplacé par 150. Jonathan applique, à tort pour les parties entières, un procédé semblable à celui qu'il a utilisé pour les parties décimales. Cela entraîne un résultat erroné.

Remarque :
Un troisième chiffre 0 est obtenu dans le résultat de l'addition. Ce chiffre marque simplement l'absence d'unités de dizaines dans l'expression chiffrée du résultat.

Question 4
Comparaison des travaux de Sylvain, Anthony et Thibaut

Ces trois élèves opèrent séparément sur les parties entières et sur les parties décimales entre elles, en les traitant comme des nombres entiers. Leurs résultats sont donc erronés.

Sylvain aligne verticalement les chiffres des unités de même rang des parties entières, en commençant par les unités, ce qui est correct. Il applique le même principe pour les parties décimales, ce qui l'amènera à additionner entre elles des unités de rang différent. 352 unités et 21 centièmes devient 352 unités et 21 millièmes ! Il comble le vide sous le chiffre 6 par un tiret qui joue le rôle d'un chiffre 0.

Anthony dispose ses calculs en ligne. Après avoir additionné séparément les parties entières et les parties décimales, il essaie de produire un résultat sous forme de nombre décimal avec deux chiffres à droite de la virgule. Sa procédure ne tient pas compte de ce que représentent chacun des chiffres des deux nombres.

Thibaut procède comme Anthony, mais gère les additions en « colonne ».

Question 5
Mauvais usage de la virgule dans le travail d'Alexandra

Alexandra a correctement effectué la somme des deux nombres décimaux pour la question a. Pour la question b, elle remplace 15,672 par le nombre 156,72. Ce déplacement de la virgule lui permet de se ramener à une addition où les nombres ont le même nombre de décimales, ce qu'elle sait faire. Les virgules étant désormais alignées, Alexandra peut continuer son calcul en calculant comme si elle avait affaire à des nombres entiers. Alexandra ne place pas de virgule dans la somme 50 893 qu'elle a obtenue.

<u>Remarque :</u>
Cette transformation de 15,672 en 156,72 n'est probablement pas une erreur d'inattention et est volontaire : Alexandra sait que lorsque les nombres ont le même nombre de décimales, les virgules sont alignées et l'addition peut s'effectuer facilement. Elle essaie donc de se placer dans ce cas de figure qu'elle maîtrise bien.

Question 6
Explication de l'erreur de Thibaut

Thibaut additionne séparément les parties décimales et les parties entières, sans doute en procédant dans cet ordre. 32 + 87 = 119 puis 8 + 15 qui après hésitation et rature donne 23. La virgule est placée sous les deux précédentes, la réponse finale de Thibaut est 23,119.
Thibaut n'a pas transformé 119 centièmes en une unité et 19 centièmes.
L'erreur de Thibaut peut être liée :

- à une interprétation de la virgule comme une simple séparation entre deux nombres entiers ;
- à l'assimilation de la partie décimale à un nombre entier dont les chiffres ne sont pas mis en relation avec les unités décimales correspondantes (dixièmes, centièmes) ;
- à l'application de règles qui ont leur domaine de validité dans l'ensemble des nombres entiers.

La connaissance des nombres entiers naturels et des principes de calcul dans cet ensemble est donc un obstacle pour l'apprentissage des nombres décimaux, exprimés à l'aide des écritures à virgule.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Question 1
Différence entre longueur et mesure

La longueur est une grandeur (caractère propre à une famille d'objets). On compare des objets selon leur grandeur. La mesure de la longueur d'un objet est un nombre : c'est le rapport entre la grandeur de cet objet et celle d'un étalon, choisi comme unité.

<u>Remarques :</u>
La masse, la durée, la contenance sont d'autres exemples de grandeurs étudiées au cycle deux.
*Dans les annexes B3 et B4, il y a confusion entre grandeur et mesure ; par exemple, dans l'annexe B3, au §2 : Mesure de a = …..**u*** (…..***u** est une longueur !)*

Question 2
Commentaire du terme « recherche »

Une « recherche » exige qu'une question préalable soit posée, constituant un problème, et que l'élève engage des procédures personnelles, qu'elles soient pratiques, expérimentales ou intellectuelles, pour tenter de proposer une réponse à ce problème. L'élève, en recherchant une telle solution, engage ses propres connaissances et sa responsabilité.
Ce terme de « piste de recherche » paraît donc inadapté ici, dans la mesure où les tâches des élèves sont complètement définies par les consignes : il est demandé à l'élève d'exécuter ces tâches, de répondre à des questions qu'il ne se pose pas lui-même, et les moyens de répondre sont fournis ou largement suggérés, ne lui laissant guère d'initiative personnelle.

<u>Remarque :</u>
On pourra se reporter, pour approfondir le sujet de cette question, au document d'accompagnement des programmes intitulé « les problèmes pour chercher » précisant et détaillant les conditions et les principes de la mise en œuvre de ces situations.

Question 3a
Trois stratégies de comparaison de longueur de segments

- Les élèves peuvent tout simplement se fier à leur perception visuelle pour ranger les segments selon leur longueur. En effet, les longueurs sont sensiblement différentes, et l'œil suffit pour les discriminer.
- Les élèves reportent la longueur d'un segment sur le bord d'une bande de papier, selon la méthode suggérée par le dessin du manuel, et comparent les

autres segments avec cette longueur, en déplaçant la bande à côté de chacun des autres segments. Ils peuvent ainsi mettre en évidence que le segment f est le segment le plus long, puis comparer d et e, sans recours à une mesure, sans utiliser les nombres. C'est un exemple de méthode de comparaison indirecte des segments selon leur longueur.

- Les élèves effectuent ce que le manuel leur demande de faire (mesurer avec l'unité u) et rangent les segments en respectant l'ordre des mesures obtenues : en utilisant l'unité u, la mesure de c est égale à 2, celle de e est égale à 3, celle de d est égale à 4 et celle de f à 5.

Question 3b
Pertinence de l'introduction de l'unité

Ce manuel est destiné à des élèves de CE1. Dans le programme du cycle 2, on attend que les élèves découvrent la notion de mesure comme un autre moyen de comparer des longueurs. Le principe du mesurage à l'aide d'un étalon est une étape nécessaire pour donner du sens par la suite à l'utilisation d'une règle graduée.

Remarque :
L'introduction de l'utilisation d'une unité de mesure est intéressante lorsque les conditions de la situation rendent inopérante toute autre procédure de comparaison directe ou indirecte, ce qui n'est pas le cas dans la situation proposée dans l'annexe B3 où, juste avant, les élèves ont mis en oeuvre d'autres moyens économiques et appropriés. L'introduction du mesurage dans ce contexte n'en montre pas l'intérêt.

Question 3c
Choix des mesures des segments

Les mesures des segments « c, d, e, f » sont égales à 2, 4, 3 et 5. Elles sont toutes des nombres entiers.

Ces nombres sont familiers aux enfants du cycle deux. On attend qu'ils puissent ranger les mesures des segments, c'est-à-dire les nombres, par ordre croissant. Ces nombres sont consécutifs, ce qui est proche de ce que les élèves retrouveront sur les graduations d'un instrument usuel comme le double décimètre ou un mètre.
Une autre raison de ce choix est sans doute aussi d'éviter de placer les élèves dans une situation inhabituelle pour eux, et peut-être déstabilisante, celle d'imaginer qu'il peut y avoir un nombre compris entre deux nombres entiers consécutifs.

Question 4
Intérêt de l'utilisation d'unités différentes dans la construction de règles graduées

Les élèves du premier groupe qui ont construit une règle graduée avec l'unité **u** vont obtenir des mesures égales à 2, 3, 4, 1 pour les segments a, b, c, d. Les élèves du second groupe qui ont construit une règle graduée avec l'unité **v** vont obtenir des

mesures égales à 4, 6, 8, 2 pour ces mêmes segments, c'est-à-dire des mesures doubles des précédentes.
L'intérêt de cette démarche est de mettre en évidence à l'issue d'un débat entre les deux groupes d'élèves :

- qu'une mesure de longueur dépend de l'unité utilisée ;
- qu'un changement d'unité entraîne l'obtention de mesures différentes pour les mêmes objets ;
- qu'on ne peut évoquer une mesure sans mentionner l'unité qui a servi à l'obtenir.

Remarque :
Au cycle deux, il semble difficile de parvenir à une analyse plus fine telle que « avec une unité deux fois plus petite, les mesures sont deux fois plus grandes ».

Question 5a
Objectifs suivis dans le document annexe B2

L'objectif est de sensibiliser les élèves aux conditions qui permettent d'obtenir une mesure correcte relative à une unité. Le mesurage et l'utilisation d'un instrument de mesure nécessitent le respect de certains principes qui doivent faire l'objet d'un apprentissage :

- premier principe : le report de l'unité doit être effectué sans intervalles vides, par une mise « bout à bout » des étalons ;
- second principe : il faut faire coïncider une des extrémités du premier étalon avec une des extrémités de l'objet à mesurer ;
- troisième principe : respecter l'alignement des unités mises bout à bout (alignement implicitement respecté ici)

José et Pauline ne respectent pas le premier principe, Olivier ne respecte pas le second. Le dessin représentant le procédé d'Olivier pourrait servir à illustrer, plus tard, l'importance du positionnement de la graduation 0, positionnement décalé par rapport à l'extrémité d'une règle.

Question 5b
Intérêt de la graduation initiée du côté gauche dans l'annexe B4

Le document de l'annexe B4 montre comment construire une règle graduée, et les nombres entiers 0, 1, 2, 3… sont écrits de gauche à droite dans l'ordre croissant. Cet ordre est implicite. Les enfants réalisent alors un objet ressemblant aux instruments usuels de mesure de longueur (double décimètre, règle graduée, mètre…), mais aussi semblable à la frise numérique probablement affichée dans leur salle de classe.

Remarque :
La formulation de cette question nous paraît particulièrement ambiguë : une bande en elle-même ne possède ni gauche, ni droite. Le référent est lié à la latéralité de l'élève qui la fabriquerait, à celle du lecteur qui observe l'image.

Question 6a
Stratégies d'utilisation d'une règle dont les graduations 0, 1 et 2 sont effacées

Rappel : Il s'agit de mesurer un segment de longueur égale à 8 cm.

- Les élèves peuvent, dans ce cas, compter les centimètres situés entre les deux traits correspondant aux extrémités du segment. Les élèves déterminent ainsi le nombre d'étalons visibles entre les extrémités sans se référer aux graduations.
- Les élèves peuvent faire coïncider une extrémité du segment avec le repère d'une graduation accompagnée d'un nombre lisible (prenons 3 par exemple), lire le nombre correspondant à l'autre extrémité du segment (ce sera 11 dans notre exemple) et calculer la différence entre ces deux nombres : 11 – 3 = 8. ou bien 3 + 8 = 11. Cette méthode revient à déterminer un écart, en nombre d'unités, entre deux graduations.

Remarque :
La première stratégie nécessite de l'attention dans le comptage, la deuxième stratégie fait appel à un calcul en général accessible aux élèves en fin de cycle deux. Il est clair que selon la longueur à mesurer, l'une ou l'autre de ces deux procédures s'avèrera plus pertinente que l'autre.

Question 6b
Annexe B2, approche de la notion de graduation en classe de CP

Le contenu de l'annexe B2 tente de rendre visible dans l'espace les traces de reports successifs d'un étalon arbitraire, d'usage non conventionnel : les images montrent tous les crayons utilisés, toutes les gommes, et plusieurs traces de pas dans la « piste de recherche ». Cela ne se produit généralement pas ainsi dans une situation réelle. Le but visé est de sensibiliser les élèves, par le biais d'images, au principe du report d'un étalon, au comptage du nombre de reports de la grandeur unité, étape préalable à la notion de graduation où seules les extrémités des unités seront visibles sous forme de traits en face desquels sont écrits les nombres de reports effectués depuis l'origine.

Question 7a
Conséquences d'un changement d'étalon

L'objectif visé, au niveau du CP, est de faire prendre conscience que le nombre de reports de la grandeur unité dans une grandeur donnée, c'est-à-dire la mesure, dépend du choix de l'étalon. Le bureau a la même longueur que 7 crayons de Marc, et que 10 crayons de Laura. L'élève doit comprendre en lisant l'énoncé (un dessin pour la mesure de Marc et le texte du bas de page pour la mesure effectuée par Laura) qu'il s'agit du même bureau, et donc qu'il est possible d'obtenir des mesures différentes pour un même objet, et donc que les mesures dépendent de l'unité choisie.

Question 7b
Difficultés pour répondre à la question posée

Les élèves peuvent éprouver des difficultés d'ordre divers : elles peuvent être liées à la forme complexe de la présentation des informations nécessaires (dessin ou écrit), à la lecture et l'interprétation des données, à la compréhension de la situation évoquée. En effet :

- L'expression « un autre crayon » ne donne aucune information positive et directe. Pour répondre, il faut interpréter correctement la phrase « Elle trouve 10 crayons », comprendre que le nombre 10 est le résultat d'une mesure effectuée, comparer ce nombre avec le nombre de crayons **exprimant** (ce mot est écrit en gras sur le manuel) la longueur en crayons de Marc, nombre qui doit être écrit par l'élève à l'emplacement réservé, et, enfin, conclure.
- Le crayon de Laura n'est pas dessiné. Comment peut-on savoir s'il est plus court puisqu'on ne le voit pas, alors que le crayon de Marc est visible sur un dessin ? Le fait qu'il ne soit pas dessiné peut renforcer l'idée qu'il s'agit du même type de crayon.

<u>Note :</u>
Il est clair que si les deux types de crayons étaient dessinés, la question perdrait alors tout son sens et tout intérêt, mais, dans la situation proposée, l'anticipation nécessaire à l'analyse du problème est-elle à la portée des élèves ?

- *Le bureau, représenté par une bande blanche sur l'illustration, peut sembler difficile à identifier.*
- *La contradiction apparente due au fait que la mesure est inversement proportionnelle à la taille de l'étalon.*

Question 7c
Une situation pour remédier aux difficultés évoquées

On peut proposer aux élèves une situation de mesurage effectif par report d'étalons différents. Il s'agit de faire vivre la situation plutôt que de travailler sur une description d'une situation fictive. On vise alors à remédier aux difficultés de représentation de la situation.

<u>Première phase :</u>
Les élèves sont répartis en groupes disposant chacun de bandes de carton de longueur et de couleur différentes. Ils disposent d'un nombre suffisant de bandes pour recouvrir et même dépasser les longueurs à mesurer (les élèves d'un même groupe ont des bandes d'une même longueur, et d'une même couleur).
Les élèves mesureront un ou plusieurs objets (choisis de sorte que toutes les mesures puissent être exprimées avec des nombres entiers naturels) avec leurs bandes unités (par report) et écriront les mesures obtenues.
Ils le feront séparément de façon à ce que leurs résultats ne soient pas connus des élèves des autres groupes avant une mise en commun collective.

<u>Deuxième phase :</u> Mise en commun
Le professeur affiche au tableau les mesures obtenues pour chaque longueur, par exemple :

	Objet A	Objet B	Objet C
Groupe 1	9	3	6
Groupe 2	6	2	4
Groupe 3	12	4	8

Les bandes unités sont dans une boîte. Après avoir amené les élèves à s'interroger sur le fait qu'un même objet ait plusieurs mesures, différentes, le professeur leur propose de retrouver quelle est la sorte de bandes unités qui correspond à chaque série de mesures.

<u>Troisième phase :</u> comparaison des résultats et bilan collectif
L'objectif visé est de faire prendre conscience que le nombre de reports de la grandeur unité dans une grandeur donnée dépend du choix de l'étalon adopté.

LILLE

Note préliminaire :
Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

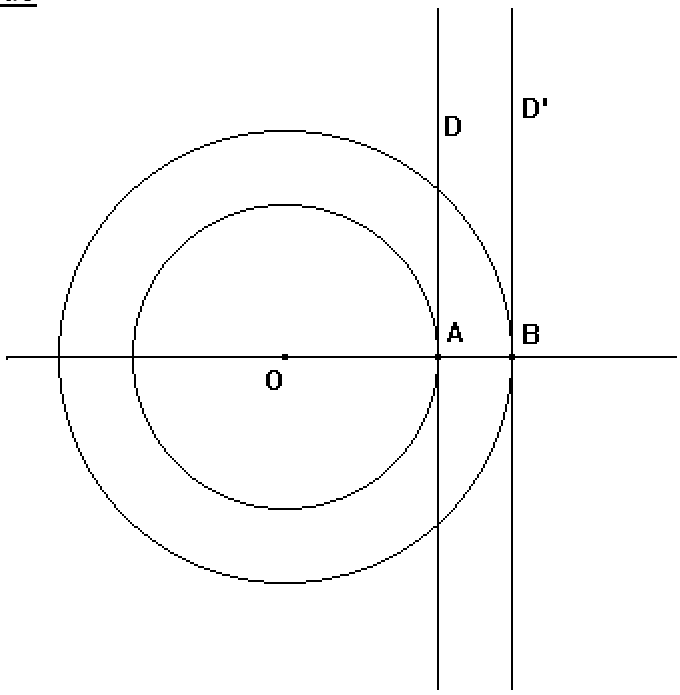
PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS)
MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1

Question préliminaire

<u>Première partie</u>



<u>Deuxième partie</u>
Les droites (D) et (D') sont perpendiculaires aux droites (OA) et (OB). Comme les points O, A, B sont alignés, les droites (OA) et (OB) sont une seule et même droite. Les droites (D) et (D') sont alors perpendiculaires à la même droite que l'on peut nommer (OA) ou (OB), donc les droites (D) et (D') sont parallèles.

Question 1a
(BG) et (CF) sécantes

<u>Méthode 1 :</u>
Deux droites sont soit parallèles, soit sécantes. Etudions l'éventualité : (BG) // (CF).
Supposons que (BG) et (CF) soient parallèles. La droite (GH) qui est perpendiculaire à (BG) est alors aussi perpendiculaire à (CF). Or (EF) est perpendiculaire à (CF), donc (GH) et (EF), qui sont toutes deux perpendiculaires à (CF), sont parallèles. Ce qui est en contradiction avec la donnée : (EF) et (GK) sont sécantes en K.
L'hypothèse que (BG) et (CF) soient parallèles est donc fausse et par conséquent, **(BG) et (CF) ne peuvent être que sécantes en un point O.**

<u>Méthode 2 :</u>
(BG) est perpendiculaire à (GH) et d'après les hypothèses, (GH) est tangente en G à l'arc de cercle $\overset{\frown}{FG}$, donc (BG) est une droite portant un rayon du cercle auquel appartient l'arc d'extrémités F et G.
De même, (CF) et (FE) sont perpendiculaires et d'après les hypothèses, (EF) est tangente à l'arc d'extrémités F et G donc (CF) est une droite portant un rayon du cercle sur lequel se trouve l'arc d'extrémités F et G.
Les droites (BG) et (CF) étant les supports de deux rayons distincts d'un même cercle, elles se coupent au centre de ce cercle.

Question 1b

Comme (AB) est tangente à l'arc $\overset{\frown}{BC}$ en B, (AB) est perpendiculaire au rayon d'extrémité B du cercle qui porte l'arc $\overset{\frown}{BC}$. De même, comme (BG) est perpendiculaire à (AB), ce rayon est porté par la droite (BG).
Comme (CD) est tangente à l'arc $\overset{\frown}{BC}$ en B, (CD) est perpendiculaire au rayon d'extrémité C du cercle qui porte l'arc $\overset{\frown}{BC}$. D'autre part, (CF) est perpendiculaire à (CD), donc le rayon d'extrémité C est porté par la droite (CF).
Le centre du cercle d'arc $\overset{\frown}{BC}$ est donc le point d'intersection des droites (BG) et (CF), c'est à dire le point O.
Comme (GH) et (EF) sont tangentes à l'arc $\overset{\frown}{GF}$, respectivement en G et F, on démontre par un raisonnement similaire (voir méthode 2, question 1a) que le centre du cercle d'arc $\overset{\frown}{GF}$ est le point d'intersection des droites (BG) et (CF), c'est à dire O.
On peut conclure que $\overset{\frown}{GF}$ et $\overset{\frown}{BC}$ sont deux arcs appartenant à deux cercles de même centre O.

Question 2
$\widehat{GOF}$ = 60° et les triangles GOF et BOC sont équilatéraux.

Dans le quadrilatère convexe OGKF, la somme des angles est égale à 360°.
Comme (OG) est perpendiculaire à (GK) et (OF) est perpendiculaire à (FK), les angles $\widehat{OFK}$ et $\widehat{OGK}$ sont des angles droits, donc ils mesurent chacun 90°.
On a donc : $\widehat{GKF} + \widehat{OGK} + \widehat{OFK} + \widehat{GOF} = 360°$
avec $\widehat{GKF} = 120°$, $\widehat{OFK} = 90°$ et $\widehat{OGK} = 90°$.

On en déduit que : $\widehat{GOF} = 360° - (120° + 90° + 90°)$, d'où $\widehat{GOF} = 60°$.
Comme OG = OF (car G et F sont sur un même cercle de centre O), le triangle OGF est isocèle de sommet O.

On en déduit que les deux angles $\widehat{OGF}$ et $\widehat{OFG}$ sont égaux.
La somme des angles du triangle OGF étant égale à 180°, on a :

$\widehat{GOF} + \widehat{GOF} + \widehat{OFG} = 180°$, avec $\widehat{GOF} = \widehat{OFG}$ et $\widehat{GOF} = 60°$.

On en déduit que $\widehat{GOF} = \widehat{OFG} = (180°-60°) : 2$ c'est à dire : $\boldsymbol{\widehat{GOF} = \widehat{OFG} = 60}°$.
Le triangle OGF dont les trois angles mesurent chacun 60° **est donc un triangle équilatéral.**
Comme OB = OC (car B et C sont sur un même cercle de centre O), le triangle OBC est isocèle de sommet O dont l'angle au sommet $\widehat{BOC}$, qui n'est autre que $\widehat{GOF}$, mesure 60°. Le raisonnement précédent, utilisé pour le triangle OGF, s'applique donc au triangle BOC, **ce qui permet de conclure que le triangle BOC est équilatéral.**

Question 3a

Avec les données dont on dispose, un programme de construction peut être le suivant :
1) On construit un rectangle AHGB de longueur donnée et de diagonale donnée.
On trace un segment [GH] de 80 cm de longueur. On construit la droite perpendiculaire en G à (GH), puis sur cette droite, on détermine, à l'aide du compas, le point B à 90 cm du point H. On détermine ensuite le point A comme intersection de la perpendiculaire en B à (BG) et de la perpendiculaire en H à (GH).
Il ne reste plus qu'à joindre les points B,A,H,G dans cet ordre pour obtenir le rectangle.
2) On a établi que le triangle GOF est équilatéral donc OF = OG = FG.
Comme FG = 40 cm, il résulte : OG = 40 cm.
On en déduit le placement du point O sur la droite (BG) : on le place, tel que G soit entre B et O, à une distance de 40 cm de G. On obtient ainsi le côté BO du triangle équilatéral BOC.
3) Avec le compas, on construit le triangle équilatéral de côté BO : le troisième sommet est le point C.

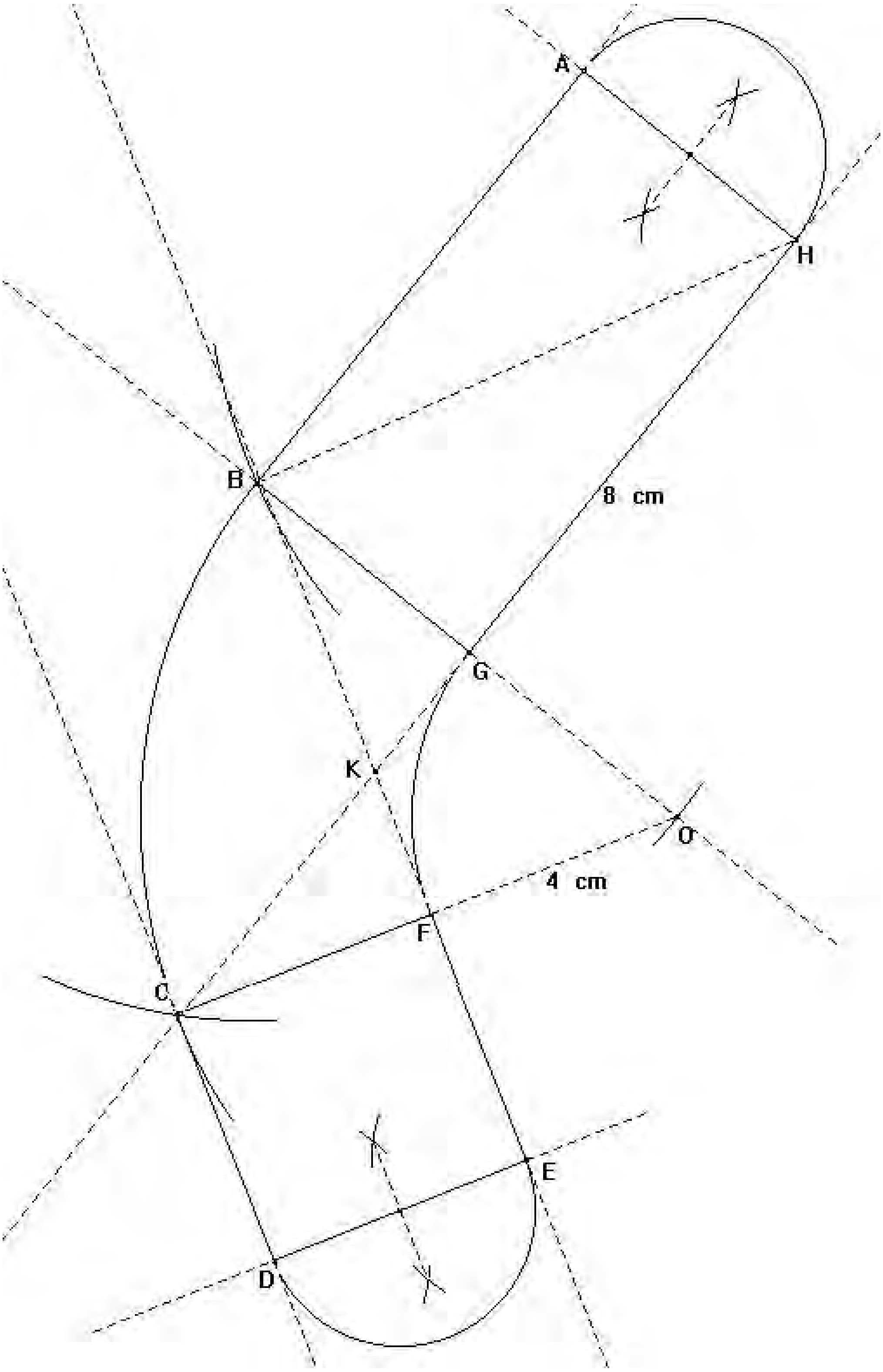
Question 3b (voir figure page suivante)

Question 4
Longueurs des segments [BG] et [OB]

Dans le triangle BGH rectangle en G, d'après le Théorème de Pythagore, on a :
$BH^2 = BG^2 + GH^2$ avec : BH = 90 cm et GH = 80 cm.
D'où : $BG^2 = 90^2 - 80^2$, soit $BG^2 = 1700$ d'où $\mathbf{BG = \sqrt{1700}\ cm = 10\sqrt{17}\ cm}$.
Les points O, G, B étant alignés dans cet ordre : OB = BG + GO.
Comme GO = 40 cm, on a $\mathbf{OB = (10\sqrt{17} + 40)\ cm}$.

Plan à l'échelle 1/10ème du dessus du mini-bar

La construction utilise le compas , l'équerre et la règle graduée.



Question 5
Aire du dessus du mini bar

AHGB étant un rectangle, AH = BG = $10\sqrt{17}$ cm.
Les points O, F, C étant alignés, OC = OF + FC.
Les points O, G, B étant alignés, OB = OG + GB. Or OC = OB et OF = OG car les triangles BOC et GOF sont équilatéraux. On en déduit : FC = GB = $10\sqrt{17}$ cm.
Le quadrilatère CFED ayant quatre angles droits, c'est un rectangle.
d'où DE = CF = $10\sqrt{17}$ cm.
L'aire du mini-bar est la somme des aires des différentes surfaces suivantes :

- deux demi-disques de même diamètre DE ou AH. Leur réunion forme un disque de rayon $\frac{DE}{2} = \frac{10\sqrt{17}}{2}$ cm = $5\sqrt{17}$ cm.
  La mesure de son aire, en cm², est : $\pi.(5\sqrt{17})^2 = 425.\pi$
- un rectangle de dimensions 80 cm et $10\sqrt{17}$ cm. La mesure de son aire, en cm², est : $80 \times 10\sqrt{17}$, soit $800\sqrt{17}$.
- une surface dont l'aire est la différence entre l'aire d'un sixième de disque de rayon $(40 + 10\sqrt{17})$ cm et d'un sixième de disque de rayon 40 cm.
  Son aire, en cm², est donc égale à :
  $\frac{\pi}{6}((40 + 10\sqrt{17})^2 - 40^2) = \frac{\pi}{6}(1700 + 800\sqrt{17})$
- un rectangle de dimensions 40 cm et $10\sqrt{17}$ cm. La mesure de son aire, en cm², est : $400\sqrt{17}$.

L'aire totale exacte est donc : $1200\sqrt{17} + 425\pi + \frac{\pi}{6}(1700 + 800\sqrt{17})$

En utilisant ce résultat et en utilisant une calculatrice, on obtient 8900,1039….

L'aire totale est donc, au cm² prés par excès : 8901 cm².

<u>Remarque :</u>
En prenant 41,3 comme valeur approchée en cm pour BG, c'est à dire pour $10\sqrt{17}$ et 3,14 comme valeur approchée pour le nombre π, on obtient à l'affichage d'une calculatrice, le nombre 8909,26. Cette valeur approchée que l'énoncé demande d'utiliser pour les calculs ne permet pas d'obtenir une précision du cm² pour la mesure de l'aire totale.

Question 6
Longueur du placage.

La longueur de placage nécessaire correspond au périmètre de la surface du dessus du mini-bar.
Celui-ci est la somme des longueurs suivantes :

- la longueur d'un cercle de diamètre $10\sqrt{17}$ (réunion des deux demi-cercles), soit $10\pi\sqrt{17}$ cm.
- deux longueurs de 80 cm, soit 160 cm.
- deux longueurs de 40 cm, soit 80 cm.

- la longueur de l'arc $\overset{\frown}{BC}$, représentant un sixième de la longueur du cercle de centre O et de rayon $(40 + 10\sqrt{17})$ cm, soit $\frac{2\pi}{6}(40 + 10\sqrt{17})$ cm
- la longueur de l'arc $\overset{\frown}{FG}$, représentant un sixième de la longueur du cercle de centre O et de rayon 40 cm, soit $\frac{2\pi}{6}$ 40 cm, c'est à dire : $\frac{40\pi}{3}$ cm.

La mesure de la longueur totale cherchée est donc, en cm, de :

$$240 + 10\pi\sqrt{17} + \frac{2\pi}{6}(40 + 10\sqrt{17}) + \frac{40\pi}{3}$$

$$\text{soit : } 240 + \frac{80\pi}{3} + \frac{40\pi}{3}\sqrt{17}$$

En prenant 41,3 comme valeur approchée en cm pour BG, c'est à dire pour $10\sqrt{17}$ et 3,14 comme valeur approchée pour le nombre π, on obtient, avec une calculatrice, le nombre affiché 496,642 donc la valeur approchée du périmètre au cm prés par excès est 497cm.

La longueur de placage est de 497 cm, à un cm prés par excès.

EXERCICE 2

Il s'agit d'un système de numération de position en base « cinq », c'est à dire d'un système d'écriture en ligne avec des caractères de valeur croissante de droite à gauche, où une unité d'un certain rang représente cinq unités du rang immédiatement à sa droite. Cinq symboles suffisent pour coder tous les entiers.

Question 1a
Transcription dans notre système du nombre noté par les Cincofiles « □□□ »

Le symbole □ représente quatre unités du rang où ce symbole est présent.
Ainsi le nombre noté □□□ se décode de droite à gauche de manière suivante :

- quatre « unités ».
- quatre unités du 2^{e} rang, c'est à dire quatre « paquets » de cinq « unités »
- quatre unités du 3^{e} rang c'est à dire quatre « paquets » de cinq fois cinq unités.

Dans notre système de numération en base dix, ce nombre s'obtient par le calcul suivant : 4 x 5 x 5 + 4 x 5 + 4 = 100 + 20 + 4.
Ce nombre est 124.

Remarque :
Avec une notation utilisant les puissances de la base, on écrirait : $4 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 4$

Question 1b
Transcription dans le système Cincofile du nombre que nous notons « 273 »

Le caractère d'un certain rang est le nombre obtenu comme reste de la division euclidienne par 5 du nombre d'unités de ce rang, en base dix.

En repérant les rangs de droite à gauche, on a ainsi :

- Au premier rang (unités simples) : 273 = 5 x 54 + **3** signe : ∇
- Au deuxième rang, avec 54 unités : 54 = 5 x 10 + **4** signe : □
- Au troisième rang, avec 10 unités : 10 = 5 x 2 + **0** signe : ●
- Au quatrième rang : **2** unités signe : ∧

Le nombre que nous notons « 273 » se code dans le système Cincofile : « ∧●□∇»

<u>Autre méthode :</u>
On peut aussi utiliser l'écriture du nombre en base 5 :

$$273 = 2\times 125 + 4\times 5 + 3 \text{ donc } 273 = 2\times 5^3 + 4\times 5^1 + 3 .$$

Son écriture en base 5 est donc $(2043)_{\text{cinq}}$. Avec les signes utilisés dans le système Cincofile, l'écriture devient « ∧●□∇».

Question 2a
Nombre qui précède « ∇□● »

Le nombre qui précède s'obtient en enlevant « une unité du premier rang ».
Comme le signe ● de ce rang indique qu'il n'y a pas d'unité simple disponible, il faut l'obtenir en prélevant une unité du rang immédiatement supérieur (à gauche) dont le symbole devient ∇.
Au premier rang, on a alors, une fois l'unité déduite du paquet de cinq : □.
Le nombre qui précède le nombre « ∇□● » est donc : « ∇∇□ ».

<u>Note :</u>
On applique en fait un principe analogue à celui, usuel, de la retenue.

Question 2b
Successeur de « ∧□□ »

Pour obtenir le nombre qui suit, il suffit d'ajouter une unité du premier rang aux quatre unités (symbole □) déjà présentes, ce qui constitue un paquet de cinq unités de ce rang, soit une unité du deuxième rang.
Au deuxième rang, on a alors une nouvelle unité qui s'ajoute aux quatre unités déjà présentes (symbole □), constituant ainsi un paquet de cinq unités, soit une unité du rang supérieur qui, s'ajoutant aux deux unités déjà présentes (symbole ∧), fournit trois unités de ce rang, qui sont codées ∇**.** Ainsi aux deux premiers rangs, il n'y a plus d'unités.
Le nombre qui suit le nombre « ∧□□ » est donc : « ∇●● ».

<u>Remarque concernant les questions 2a et 2b :</u>
En se plaçant dans le cadre d'un système de numération de position en base 5, on peut utiliser l'écriture $(340)_{cinq}$ du nombre codé « ∇□● ». Le nombre qui le précède est : $(340)_{cinq}$ - 1. Par un calcul qui s'appuie sur un raisonnement analogue à celui qui précède, il résulte que ce nombre est $(334)_{cinq}$, qui s'écrit « ∇∇□ ».
De même, « ∧□□ » est le codage de $(244)_{cinq}$. Pour calculer le nombre qui suit, on ajoute 1à ce nombre : $(244)_{cinq} + 1 = (300)_{cinq}$. Ainsi le nombre cherché est « ∇●● ».

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

Question 1
Question 2
Question 3

Les réponses aux trois questions sont regroupées, ainsi que le propose la consigne, dans le tableau suivant :

	Description de la production écrite	**Informations manquantes ou inutiles**	**Compétences des élèves**
Jonathan-Corentin	Les faces des dés sont dessinées. Les nombres correspondant au total de chaque lancer des trois dés sont écrits. On ne sait pas qui a fait chaque lancer. Le nom du gagnant est écrit.	Manquantes : les lancers ne sont pas attribués. On ne peut donc pas vérifier qui est le gagnant. Inutiles : le dessin d'une main.	Compréhension d'une succession de consignes Dénombrement d'une collection de « points ». Ecriture en chiffres d'un nombre inférieur ou égal à dix. Comparaison des nombres et détermination du plus grand nombre.
Quentin-Théo	Dessin de collections de points relevés sur les faces des dés mais sans dessin des dés. Une même face est visualisée par un « contour fermé ». Au dessous de chaque description de lancer est écrit le nom d'un enfant. A côté du nom est écrit le score de chacun.	Les informations répondent exactement à ce qui est demandé. Elles permettent de vérifier que le gagnant est bien Quentin.	Compréhension d'une succession de consignes. Dénombrement d'une collection de « points ». Représentation d'une collection de points du dé en faisant abstraction des faces et des configurations des points. Ecriture en chiffres d'un nombre inférieur ou égal à treize. Comparaison des nombres et détermination du plus grand nombre.

	Description de la production écrite	**Informations manquantes ou inutiles**	**Compétences des élèves**
Brandon-Tiffany	Seuls sont notés les scores obtenus et le nom du gagnant.	Les informations indiquant comment chacun des scores a été obtenu (décomposition des points de chaque face) et l'attribution des scores sont absentes. On ne peut donc pas vérifier qui est le gagnant.	Les enfants savent peut-être dénombrer des collections de points obtenues sur chaque face des trois dés. Ils savent écrire des nombres en chiffres. Comme les scores ne sont pas attribués, on n'a aucune garantie que les enfants ont su comparer les nombres de points obtenus.
Loïc-Sandra	Pour chaque lancer, les nombres de points de chaque face des dés et les totaux correspondants sont écrits en chiffres.	Les lancers et les scores ne sont associés à aucun nom d'enfant, c'est à dire ne sont pas attribués aux deux enfants. On ne peut pas vérifier qui est le gagnant.	Les enfants ont su dénombrer les collections de points présents sur chaque face du dé et transcrire les nombres en chiffres. Comme l'un des totaux est erroné, on peut penser qu'ils ne disposent pas de moyen fiable pour déterminer une somme de trois nombres à un chiffre à partir de leurs écritures en chiffres.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Question 1
Thème du chapitre

Le thème du chapitre est la mesure des longueurs.

Question 2
Organisation du chapitre et démarche pédagogique

L'organisation du chapitre fait apparaître une phase de découverte de la notion de mesure, une leçon au cours de laquelle cette notion sera définie et institutionnalisée, une phase « exercice » pouvant contenir des travaux d'application et d'entraînement, et enfin, une phase où la notion sera utilisée à l'occasion d'un jeu.
Cette organisation semble laisser une part d'initiative à l'élève dans la phase de découverte avant de proposer une institutionnalisation de ce qui a été découvert. Elle semble s'inspirer d'une démarche constructiviste.

Question 3
Quatre tâches de l'élève (trois premiers écrans de la découverte)

Deuxième écran :

- associer les éléments du corps humain qui sont dessinés et nommés aux éléments de son propre corps et imaginer l'action qu'il mènerait lui-même avec les parties de son corps pour mesurer la longueur de la barque.
- choisir l'une des parties comme unité et simuler mentalement le report de cette unité d'un bout à l'autre de la barque.

Troisième écran :

- identifier, par report visuel ou par report matériel, la longueur entre les traits les plus espacés comme la longueur donnée par une coudée.
- repérer le nombre de « longueurs-coudées » contenues dans la longueur associée à la barque et décider du choix du nombre à fournir en réponse à la consigne « environ », compte-tenu du fait que la longueur totale correspond à plus de deux coudées et moins de trois.

Question 4
Analyse des réponses exactes mais différentes des élèves 1 et 2.

Pour les mesures en coudées et en pouces, l'élève 1 choisit le nombre entier d'unités immédiatement supérieur à la longueur à mesurer (mesure par excès) alors que l'élève 2 choisit le plus grand nombre entier d'unités contenu dans la longueur à mesurer (mesure par défaut).

La réponse attendue, exprimée par le terme « environ » est le nombre entier d'unités le plus proche de la longueur réelle, qu'il soit inférieur ou supérieur à cette longueur.

Question 5
Effet de la multiplicité des bonnes réponses sur les élèves de cycle 3

Un même élève de cycle 3, après avoir proposé comme réponses, 2 ou 3 et constaté que l'ordinateur accepte ces réponses, peut être amené, en s'interrogeant sur ce que représentent ces nombres 2 et 3, à prendre conscience que la longueur exacte est comprise entre 2 et 3 (c'est à dire à saisir l'encadrement de la longueur par deux entiers consécutifs) et que, parce qu'on recherche un nombre entier d'unités, on peut répondre soit 2, soit 3 selon le point de vue que l'on choisit : « plus de » ou « moins de ». En se plaçant d'un point de vue constructiviste, on peut penser que cela va contribuer à faire saisir à l'élève la nécessité d'utiliser d'autres nombres, non entiers, pour répondre à ce type de question ou d'utiliser une unité de mesure plus petite.

Question 6
Compétences que cette leçon veut faire acquérir

- connaître les unités du système métrique et les équivalences entre elles.
- savoir lire une mesure d'une longueur, en utilisant plusieurs unités, à partir la position d'un repère sur une règle graduée.
- savoir mesurer la longueur d'un segment, à l'aide d'une règle graduée en mm, en l'exprimant en cm et mm.
- savoir utiliser un tableau d'unités, appelé tableau de conversion dans la page 4, pour exprimer une longueur à l'aide de différentes d'unités.

Question 7
Danger des conversions d'unité dans un tableau

L'utilisation d'un tableau de conversion, en déplaçant la virgule, transforme les tâches de conversion en des actions automatisées, ne nécessitant pas de connaître les relations entre les différentes unités, sans mobiliser de raisonnement.

Une autre méthode pour l'aide aux conversions

La connaissance des relations entre les unités constitue à la fois un moyen de faire les conversions et un moyen de contrôle.
Savoir qu'une unité est dix fois plus grande que celle qui la suit et dix fois plus petite que celle qui la précède permet de comprendre et de mémoriser les relations entre les unités qui permettront aux enfants de construire les raisonnements conduisant aux conversions.
Par exemple : 1 km c'est 10 hm (relation de base), or 1 hm c'est 10 dam,
donc 1 km c'est 10 fois 10 dam ou bien 100 dam,
or 1 dam c'est 10 m, donc 1 km c'est 100 fois 10 m ou bien 1000 m.

Question 8
Quatre compétences prioritaires et connaissances culturelles pour réussir les exercices

- connaître l'ordre de grandeur des unités du système métrique.
- être capable de faire une estimation de l'ordre de grandeur du rapport entre certaines longueurs présentes dans la vie courante et les unités usuelles.
- savoir que pour exprimer une longueur donnée, on choisit habituellement une unité telle que le rapport entre cette longueur et l'unité soit le plus petit possible.

Ainsi une distance entre deux villes ne s'exprimera pas en cm, pas plus que le diamètre d'une canalisation d'eau en kilomètres !

- avoir une idée de la taille, en rapport avec les différentes unités, de certaines grandeurs relevant de connaissances culturelles, issues par exemple de la géographie (longueur de la Loire, profondeur du bassin d'Arcachon…) ou du vécu (taille du grand-frère, taille d'un grain de sable…).

- savoir utiliser un tableau de conversion.

Question 9
Accord des exercices avec les programmes de cycle 3

L'exercice 1 semble se rattacher à la compétence : « choisir l'unité appropriée pour exprimer le résultat d'un mesurage ».
Cependant, dans le programme, il est bien précisé que les élèves doivent être placés dans des situations où ils doivent réellement mesurer à l'aide d'instruments des grandeurs « physiques » telles que tour de cou, taille, longueur d'une pièce…et qu'ils doivent, à cette occasion, faire le choix de l'unité appropriée, en relation avec l'instrument utilisé.
L'exercice 1, où il s'agit de « deviner » quelle est l'unité appropriée, sans qu'il y ait présence des objets ni activité de mesurage de ces objets par les élèves, n'est pas, de ce fait, en accord avec le programme de cycle 3.

Pour l'exercice 2, la compétence en jeu semble être : « estimer une mesure (ordre de grandeur »). Cependant, dans les commentaires explicitant cette compétence, il est précisé que l'objectif est de permettre aux élèves d'associer à certaines unités des grandeurs d'objets - témoins (par exemple, ainsi que le précise le commentaire, 1 m, c'est un grand pas).
Ainsi, la compétence d'estimation visée par les programmes s'acquiert par la mémorisation de grandeurs de référence issues de l'environnement des élèves.
L'exercice 2 met en jeu des connaissances d'ordre culturel, concernant des grandeurs qui se situent hors du champ de la perception des élèves, grandeurs qui ne peuvent donc s'inscrire comme références dans l'esprit des élèves.

Pour l'exercice 3, la compétence en jeu est la connaissance des unités légales du système métrique mais il est remarqué que « les exercices de transformations de mesures par des changements d'unités ne doivent pas occuper une place excessive… ».

Question 10
Travail préalable des compétences nécessaires pour le jeu

Pour répondre correctement, un élève doit comprendre qu'il doit comparer les trois réponses proposées à la mesure de longueur donnée en référence et se dire que pour ce faire, il a besoin d'exprimer les longueurs à comparer dans la même unité.
La tâche de conversion comme fin en soi a été travaillée auparavant, mais la tâche de comparaison de longueurs n'étant pas exprimée avec la même unité, qui nécessite des conversions, n'a fait l'objet d'aucun travail.

Question 11
En quoi cette partie peut-elle être considérée comme un jeu ?

Cette partie a l'apparence d'un jeu dans la mesure où la réussite est soumise à la réalisation d'une tâche en dehors du domaine mathématique, en l'occurrence la reformulation correcte d'une information, qui conduit à une tâche mathématique (comparaison de longueurs par conversion dans la même unité).
Cette situation se rapproche plutôt d'un « jeu de rôle » qui fait appel à une tâche mathématique.

Note :
En fait, l'intitulé de jeu semble abusif. La situation n'est rien d'autre qu'un exercice de contrôle de connaissances présenté sous un habillage différent : Il faut choisir la proposition vraie parmi trois suggestions, et si l'on sait réaliser les conversions on peut « gagner », sinon… Par ailleurs, l'un des principes du jeu est de pouvoir effectuer librement plusieurs parties successives ; ici, on voit mal l'intérêt qu'il peut y avoir à « rejouer » plusieurs fois de suite dès lors que les réponses correctes auront été reconnues.

Question 12
Particularités de l'usage du logiciel

L'élève est autonome face aux tâches qui lui sont proposées. Il doit proposer une réponse qui sera validée ou réfutée par le logiciel. Lorsque le logiciel répond que la réponse est fausse, l'élève doit examiner ce qu'il a proposé et tenter de comprendre pourquoi c'est faux pour ensuite proposer une autre réponse.
Cela doit l'amener à comprendre par lui-même les raisons de son erreur à condition qu'il dispose des connaissances nécessaires. Un tel logiciel ne peut être utilisé que dans une perspective d'entraînement concernant des connaissances déjà enseignées, puisqu'il faut que l'élève ait une maîtrise suffisante de ces connaissances pour tirer parti d'une erreur et rectifier de lui-même.

LYON

Note préliminaire :
Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1

Question 1
Nombre de chiffres de $72{,}4116 \times 10^{28}$

Méthode 1 :
Multiplier par 10^{28}, c'est multiplier par 28 facteurs égaux à 10.
$72{,}4116 \times 10^{28} = 724\,116 \times 10^{24}$
On obtient l'écriture décimale de $72{,}4116 \times 10^{28}$ en plaçant 24 zéros à droite de l'écriture du nombre 724 116.
Ce nombre s'écrit donc avec 30 chiffres.

Méthode 2 :
Le nombre 72,4116 est strictement compris entre 10 et 100 :
$$10 < 72{,}4116 < 100$$
Donc, on a : $10 \times 10^{28} < 72{,}4116 \times 10^{28} < 100 \times 10^{28}$
Soit : $10^{29} < 72{,}4116 \times 10^{28} < 10^{30}$
Comme pour tout entier n, 10^n est le plus petit entier naturel s'écrivant avec n + 1 chiffres, on peut conclure que :
L'écriture du nombre $72{,}4116 \times 10^{28}$ dans notre système de numération décimale utilise 30 chiffres.

Question 2

Méthode 1 :
Le calcul de 97^{26} à l'aide de la calculatrice donne :
$97^{26} \approx 4{,}5 \times 10^{51}$
c'est à dire que : 97^{26} est compris entre $4{,}5 \times 10^{51}$ et $4{,}6 \times 10^{51}$
Un raisonnement identique à celui de la question 1 permet d'affirmer que les nombres $4{,}5 \times 10^{51}$ et $4{,}6 \times 10^{51}$ s'écrivent avec 52 chiffres.
Donc le nombre 97^{26} s'écrit lui aussi avec 52 chiffres.

Cela permet de conclure que :

La proposition « 97^{26} s'écrit avec moins de 55 chiffres » est vraie.

Méthode 2 :

On peut majorer 97 par 100, c'est à dire 10^2, soit : $97 < 10^2$
Cela permet d'écrire : $97^{26} < (10^2)^{26}$ soit $97^{26} < 10^{52}$
(on a utilisé la propriété : pour tous entiers a et b, $(10^a)^b = 10^{a.b}$)
10^{52} s'écrit avec 53 chiffres (le chiffre 1 suivi de 52 fois le chiffre 0), donc le nombre 97^{26} s'écrit avec moins de 53 chiffres et **la proposition de l'énoncé est donc vraie.**

EXERCICE 2

Question 1
Nombre d'entiers naturels à 2 chiffres, à 3 chiffres, à 4 chiffres

Méthode 1 :

Les entiers naturels s'écrivant avec 2 chiffres sont ceux compris entre 10 et 99 ; il y en a 90 (10 commençant par 1, 10 commençant par 2, …, 10 commençant par 9).
Les entiers naturels s'écrivant avec 3 chiffres sont ceux compris entre 100 et 999 ; il y en a 900 (100 commençant par 1, 100 commençant par 2, …, 100 commençant par 9).
Les entiers naturels s'écrivant avec 4 chiffres sont ceux compris entre 1000 et 9999 ; il y en a 9000 (1000 commençant par 1, 1000 commençant par 2, …, 1000 commençant par 9).
Donc, Il y a 90 nombres à 2 chiffres, 900 nombres à 3 chiffres et 9000 nombres à 4 chiffres.

Méthode 2 :

On a 9 choix possibles pour le premier chiffre (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) et un choix de plus, soit 10 pour les chiffres suivants, puisqu'on convient de ne jamais écrire de chiffre 0 à gauche dans l'écriture décimale d'un entier naturel (voir remarque introductive de l'énoncé).
Donc : $9 \times 10 = 90$ pour les nombres à 2 chiffres ;
$9 \times 10 \times 10 = 900$ pour les nombres à 3 chiffres ;
$9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$ pour les nombres à 4 chiffres.

Méthode 3 :

Le plus grand des entiers naturels à deux chiffres est 99, le plus grand des entiers naturels à un chiffre est 9. Le nombre d'entiers naturels à deux chiffres est :

$$99 – 9 = 90.$$

Le plus grand des entiers naturels à trois chiffres est 999, le plus grand des entiers naturels à deux chiffres est 99. Le nombre d'entiers naturels à trois chiffres est :

$$999 – 99 = 900.$$

Le plus grand des entiers naturels à quatre chiffres est 9999, le plus grand des entiers naturels à trois chiffres est 999. Le nombre d'entiers naturels à quatre chiffres est : $9999 – 999 = 9000$.

Question 2a
Nombre d'entiers naturels à 3 chiffres tous identiques

Il y a 9 entiers naturels à 3 chiffres dont les trois chiffres sont identiques :
111 ; 222 ; 333 ; 444 ; 555 ; 666 ; 777 ; 888 ; 999.

Question 2b
Nombre d'entiers naturels à 3 chiffres tous différents

Méthode 1 :

On a 9 choix pour le premier chiffre (n'importe quel chiffre sauf 0), puis 9 choix encore pour le deuxième chiffre (n'importe quel chiffre sauf celui choisi comme chiffre des centaines) et enfin 8 choix pour le troisième chiffre (n'importe quel chiffre sauf ceux choisis pour les centaines et pour les dizaines) d'où :

9 x 9 x 8 = 648

Il y a donc 648 nombres à 3 chiffres tous différents.

Méthode 2 :

L'ensemble des entiers naturels à trois chiffres est composé des entiers naturels à trois chiffres distincts et des entiers naturels qui s'écrivent avec au moins deux chiffres égaux. Dans un premier temps, on compte le nombre d'entiers naturels ayant au moins deux chiffres égaux. Dans la première centaine, il y a les entiers :

100	110	121	131	141	151	161	171	181	191
101	111	122	133	144	155	166	177	188	199
	112								
	113								
	114								
	115								
	116								
	117								
	118								
	119								

Dans chaque centaine on dénombre ainsi 28 entiers naturels ayant au moins deux chiffres égaux : 10 dont les chiffres des dizaines et des centaines sont identiques, 9 dont les chiffres des dizaines et des unités sont identiques, 9 dont les chiffres des unités et des centaines sont identiques.

Au total, on a 28 x 9 = 252 entiers naturels avec au moins deux chiffres égaux. La question 1 nous donne 900 entiers naturels à trois chiffres, ainsi on a :

900 – 252 = **648 entiers naturels à trois chiffres qui s'écrivent avec trois chiffres différents.**

Question 2c
Nombre d'entiers naturels à 3 chiffres ayant exactement deux chiffres différents

<u>*Remarque :*</u>
Le texte de l'énoncé de cette question est redondant. En effet, si un nombre à 3 chiffres a exactement 2 chiffres différents, l'un des deux est forcément répété deux fois.

<u>Méthode 1 :</u>
Considérons la partition suivante de l'ensemble des 900 nombres à trois chiffres :

- o Ceux dont l'écriture utilise 3 chiffres différents (il y en a 648 d'après la question 2b) ;
- o Ceux dont l'écriture utilise exactement 2 chiffres différents ;
- o Ceux dont les trois chiffres sont identiques (on a vu à la question 2a qu'il y en a 9).

Le nombre recherché est donc: 900 - 648 - 9 = 243.
Il y a 243 nombres à trois chiffres dont l'écriture utilise exactement 2 chiffres différents.

<u>Méthode 1 bis :</u> (si méthode 2 à la question précédente)
Parmi les entiers à trois chiffres, les entiers qui s'écrivent avec exactement deux chiffres différents sont les entiers qui s'écrivent avec exactement deux chiffres égaux.
D'après la question 2b on sait qu'il y a 252 entiers naturels qui s' écrivent avec au moins deux chiffres égaux. Parmi ces entiers, il y a ceux qui s'écrivent avec trois chiffres égaux (ils sont au nombre de 9 par la question 2a) et ceux qui s'écrivent avec exactement deux chiffres égaux. Ainsi, ces derniers sont au nombre de :
252 – 9 = **243**.

<u>Méthode 2 :</u>
Si le chiffre non répété est celui des centaines, on a 9 possibilités pour celui-ci (le zéro est exclu) et 9 possibilités pour le chiffre répété (n'importe quel chiffre sauf celui choisi comme chiffre des centaines), soit 9 x 9 = 81 possibilités.
Si le chiffre non répété est celui des dizaines, on a 10 possibilités pour celui-ci ; ensuite :

- o Si le chiffre choisi pour les dizaines est différent de 0, on a 8 possibilités pour le chiffre répété (n'importe quel chiffre distinct de 0 et du chiffre choisi pour les dizaines), soit 9 x 8 = 72 possibilités.
- o Si le chiffre choisi pour les dizaines est 0, on a 9 possibilités pour le chiffre répété (n'importe quel chiffre distinct de 0).

Soit au total 81 possibilités lorsque le chiffre non répété est celui des dizaines.
Si le chiffre non répété est celui des unités, un raisonnement similaire conduit à 81 possibilités.
On a donc : 81 + 81 + 81 = **243 entiers naturels à 3 chiffres ayant exactement deux chiffres différents.**

<u>Méthode 3 :</u>

Si le chiffre répété est 0, il est obligatoirement utilisé pour les dizaines et les unités, et on a alors 9 possibilités pour le chiffre des centaines, soit 9 nombres du type recherché.

Si le chiffre répété est différent de 0, alors :

- o Soit le chiffre non répété est celui des centaines et on a 8 possibilités pour celui-ci (on exclut 0 et le chiffre répété), soit 9 x 8 = 72 nombres du type recherché.
- o Soit le chiffre non répété est celui des unités ou celui des dizaines et on a 9 possibilités pour celui-ci (on exclut seulement le chiffre répété), soit 2 x 9 x 9 = 162 nombres du type recherché.

Au total on : 9 + 72 + 162 = **243 nombres du type recherché**.

<u>Méthode 4 :</u>

Les nombres à trois chiffres dont l'écriture utilise exactement 2 chiffres différents ont trois formes possibles :

aab aba abb avec a chiffre autre que 0, b chiffre distinct de a

On a donc pour chaque forme, 9 choix pour a et 9 choix pour b, d'où 9 x 9 possibilités de nombres pour chacune des 3 formes, soit au total :

3 x 9 x 9 = **243 nombres à 3 chiffres dont l'écriture utilise exactement 2 chiffres différents.**

Question 2d

Pourcentage de nombres à 3 chiffres ayant au moins un chiffre répété

Les nombres à 3 chiffres ayant au moins un chiffre répété sont ceux des questions 2a et 2c : ceux ayant trois chiffres identiques et ceux ayant exactement deux chiffres répétés ; il y en a donc : 9 + 243 = 252.

<u>Variante 1 :</u>

La méthode 2 de la question 2b donne le nombre d'entiers naturels ayant au moins deux chiffres égaux : 252.

<u>Variante 2 :</u>

Les nombres à 3 chiffres ayant au moins un chiffre répété sont ceux qui n'ont pas trois chiffres distincts ; il y en a donc : 900 – 648 = 252.

Il y a ainsi 252 nombres à trois chiffres ayant au moins un chiffre répété parmi 900 nombre à trois chiffre. Leur proportion est donc :

$$\frac{252}{900} = 0{,}28 \quad \text{soit } 28\%.$$

La proposition « Parmi les nombres à 3 chiffres, il y en a 28% qui ont au moins un chiffre répété » est donc vraie.

EXERCICE 3

Question 1

Volume de la statue

La statue occupe le même volume que l'eau débordant du vase lors de l'immersion.

On peut répondre à la première question sans utiliser la donnée de la masse du vase vide (500g). Nous donnons une méthode qui n'utilise pas cette donnée et une méthode qui l'utilise.

Méthode 1 :

La différence entre les deux pesées du vase représente la masse ajoutée, c'est à dire la masse de la statue diminuée de la masse de l'eau ayant débordé ; on a donc :
2600 g – 2300 g = 340 g – masse de l'eau chassée
D'où la masse d'eau chassée du vase par la statue : 340 g – 300 g = 40 g

Méthode 2 :

Sans la statue, la masse d'eau contenue dans le vase est : 2300 g – 500 g = 1800 g
(masse du vase plein d'eau - masse du vase vide)
Lorsqu'on immerge la statue dans le vase, une partie de l'eau qu'il contient déborde et la masse d'eau contenue dans le vase est alors : 2600 g – 500 g – 340 g = 1760 g
(masse totale diminuée de la masse du vase vide et de la masse de la statue)
La masse de l'eau chassée du vase lors de l'immersion de la statue est donc :
1800 g – 1760 g = 40 g

La masse volumique de l'eau étant 1 g/cm^3, on peut conclure que le volume occupée par l'eau qui a débordé, c'est à dire le volume de la statue est de 40 cm^3.
Le volume de la statue est donc 40 cm^3.

Question 2
Masse volumique de la statue

La statue a une masse de 340 g pour un volume de 40 cm^3 ; sa masse volumique est le quotient de la masse par le volume, soit $\frac{340\text{ g}}{40\text{ cm}^3} = 8{,}5\text{ g/cm}^3$
Comme 1 kg = 1000 g et 1 l = 1000 cm^3, on a : 1 kg/l = 1 g/cm^3
La masse volumique de la statue est donc 8,5 g/cm^3 ou 8,5 kg/l.

Remarque :
Sans avoir recours à la généralité 1 kg/l = 1 g/cm^3 il suffit de refaire le calcul $\frac{0{,}34\text{ kg}}{0{,}04\text{ l}} = 8{,}5\text{ kg/l}$.

Question 3
Masse volumique du nouveau liquide

Le volume occupé par le nouveau liquide est le même que celui occupée par l'eau lorsque le vase était rempli d'eau.
On a vu que le vase contenait 1800 g d'eau ; la masse volumique de l'eau étant 1 g/cm^3, cela correspond à un volume de 1800 cm^3.
1800 cm^3 du nouveau liquide ont une masse de 1940 g – 500 g = 1440 g
(masse du vase plein – masse du vase vide)
d'où la masse volumique du nouveau liquide :

$$\frac{1440\text{ g}}{1800\text{ cm}^3} = 0{,}8\text{ g/cm}^3$$

La masse volumique du nouveau liquide est donc 0,8 g/cm^{3}ou 0,8 kg/l.

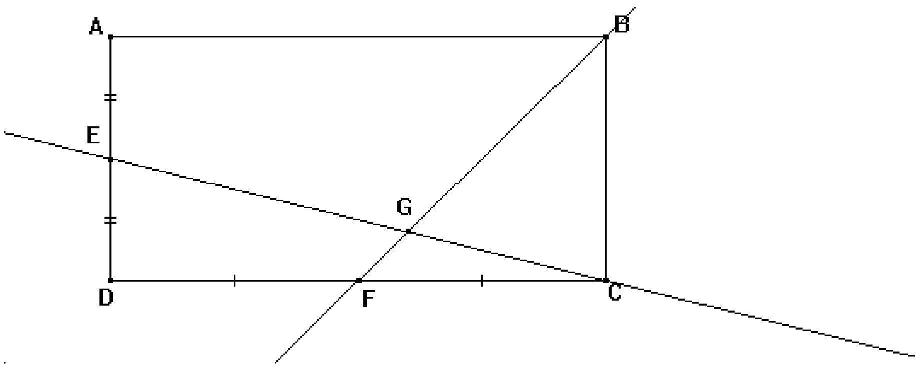
Autre méthode :

Le rapport des masses volumiques de deux liquides est égal au rapport des masses occupées par le même volume de ces liquides, d'où :

$$\frac{\text{Masse volumique nouveau liquide}}{\text{Masse volumique eau}} = \frac{1440\text{ g}}{1800\text{ g}} = 0{,}8$$

EXERCICE 4

Question 1
Croquis de la configuration



Question 2
Aire du triangle DEC …

Méthode 1 :

Le triangle DEC est rectangle en D, puisque ABCD est un rectangle ; donc :

Aire (triangle DEC) = $\frac{\text{DE x DC}}{2}$

E étant le milieu du segment [AD], on a : DE = $\frac{\text{AD}}{2}$

D'où Aire (triangle DEC) = $\frac{\frac{\text{AD}}{2}\text{ x DC}}{2} = \frac{\text{AD x DC}}{4} = \frac{1}{4}$ Aire (rectangle ABCD)

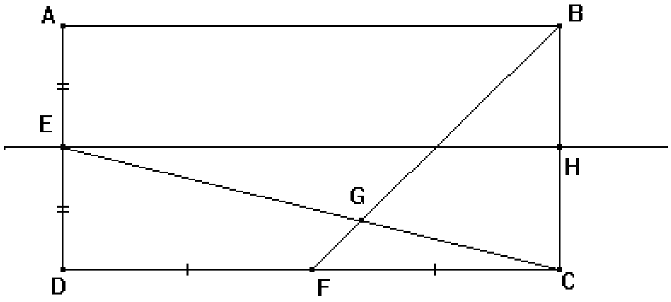
L'aire du triangle DEC est le quart de l'aire du rectangle ABCD.

Méthode 2 :

Une diagonale d'un rectangle partage celui-ci en deux triangles rectangles de même aire, donc l'aire du triangle ADC est la moitié de l'aire du rectangle ABCD.
Les triangles ADC et EDC sont deux triangles rectangles en D ; ils ont en commun [DC] côté de l'angle droit ; l'autre côté de l'angle droit est [AD] pour le triangle ADC et [DE] pour le triangle EDC et on a : ED = $\frac{\text{AD}}{2}$ car E milieu de [AD].

Les triangles rectangles EDC et ADC ont donc une base en commun et les hauteurs correspondantes dans le rapport $\frac{1}{2}$; leurs aires sont donc aussi dans le rapport $\frac{1}{2}$.
L'aire du triangle EDC est donc la moitié de l'aire du triangle ADC qui est elle, la moitié de l'aire du rectangle ABCD, d'où le résultat demandé.

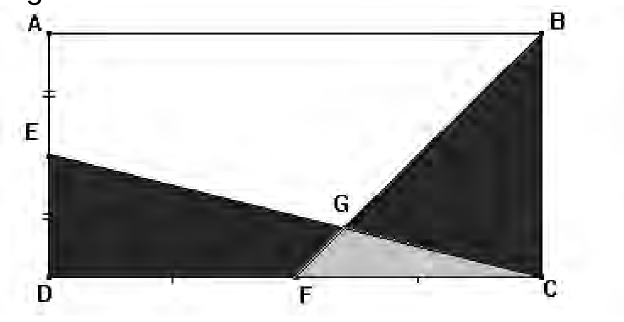
Méthode 3 :
Soit H le point d'intersection entre la parallèle à (DC) passant par E et (BC). Une diagonale d'un rectangle partage celui-ci en deux triangles rectangles de même aire, donc l'aire du triangle EDC est la moitié de l'aire du rectangle DEHC. De plus E est le milieu de [AD] donc l'aire du rectangle DEHC est la moitié de l'aire du rectangle ABCD. Ainsi l'aire du triangle EDC est le quart de l'aire du rectangle ABCD.



Question 3
Comparaison des aires du triangle BCG et du quadrilatère EDFG

Par un raisonnement analogue à celui de la question 2, on peut établir que :
L'aire du triangle BCF est le quart de l'aire du rectangle ABCD.
Donc les aires des triangles EDC et BCF sont égales.
Lorsqu'on enlève à chacun de ces triangles la partie commune aux deux surfaces (le triangle GFC), on obtient donc des surfaces de même aire.
Donc le quadrilatère EDFC et le triangle BCG ont la même aire.

Figure illustrant le raisonnement effectué :



Remarque :
On peut aussi formuler ainsi le raisonnement effectué :

$$Aire(BCF) = \frac{FC \times BC}{2} = \frac{\frac{DC}{2} \times BC}{2} = \frac{DC \times BC}{4} = \frac{1}{4} Aire(ABCD) = Aire(EDC)$$

$$Aire(EDFG) = Aire(EDC) - Aire(GFC) = Aire(BCF) - Aire(GFC) = Aire(BCG)$$

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

Question 1
Procédure experte permettant de résoudre le problème posé

Il faut 9 litres d'huile pour remplir 5 bidons identiques.
Le calcul du quotient décimal de 9 par 5 donne donc la contenance en litres de chacun de ces bidons :
$9 : 5 = 1{,}8$
La contenance de chacun des bidons est donc 1,8 litres.

Autre procédure experte possible :

Soit x la mesure de la contenance en litres d'un bidon, on a : $9x = 5$, d'où $x = \frac{9}{5}$.

La procédure experte pour résoudre le problème passe par le calcul du quotient décimal de 9 par 5 ; ce calcul peut être effectué de différentes manières :

- Utilisation de l'algorithme de la division euclidienne, prolongé au quotient décimal
- Utilisation de l'égalité de fractions : $\frac{9}{5} = \frac{18}{10}$ puis passage de l'écriture fractionnaire $\frac{18}{10}$ à l'écriture à virgule 1,8.

Remarque :
Une autre procédure efficace aurait été de dire que remplir 5 bidons avec 9 litres, c'est comme remplir 10 bidons avec 18 litres…soit 1,8 litres par bidon (la division par 10 est plus simple que la division par 5).

La procédure de mise en équation n'est pas envisageable en fin du cycle 3 ; elle relève des apprentissages au collège.
Pour le calcul du quotient décimal de 9 par 5, la procédure utilisant l'algorithme de la division euclidienne ne peut être exigible en fin de cycle 3 ; en effet, on peut se référer, par exemple au document d'application des programmes de 2002 pour le cycle 3 :

> *« L'algorithme de la division sera repris dans le programme de 6ème et prolongé au cas du quotient décimal.*
> *Le calcul d'un quotient décimal issu de la division de deux entiers ou d'un décimal par un entier n'est donc pas une compétence exigible au cycle 3. »*

Cependant, ce calcul, ramené au calcul de $\frac{18}{10}$, rentre dans le cadre des compétences exigibles en fin de cycle 3. La procédure s'appuie sur les compétences ci-dessous exigibles en fin de cycle 3 :

- Diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1000.

- Connaître et utiliser des écritures fractionnaires et décimales de certains nombres : 0,1 et $\frac{1}{10}$, …
- Passer pour un nombre décimal, d'une écriture fractionnaire (fractions décimales) à une écriture à virgule (et réciproquement).

<u>Remarques :</u>
La question telle qu'elle est formulée conduit à plusieurs réponses différentes qui peuvent toutes être acceptables, si elle sont justifiées en s'appuyant sur les programmes.
En effet, il n'y a pas une seule procédure experte pour résoudre l'exercice : passer ou non par la mise en équation ne peut être hiérarchisé ici en termes d'expertise ; le calcul du quotient décimal peut relever d'une procédure experte non exigible en fin de cycle 3 (l'utilisation de l'algorithme de la division euclidienne prolongé au quotient décimal) comme d'une procédure experte exigible en fin de cycle 3 (le passage de l'écriture fractionnaire $\frac{9}{5}$ à l'écriture à virgule 1,8).
Des élèves pourraient aussi avoir recours à la division euclidienne de 90 par 5 après avoir converti 9 l en 90 dl ; ils obtiendraient alors la réponse 18 dl qu'ils resterait à convertir en litres.

Question 2
Procédures d'Anouk et Bastien

Anouk et Bastien démarrent la résolution du problème de façon similaire :
- Bonne représentation du problème s'appuyant sur une procédure graphique (dessin) ;
- Partage des litres entiers : ils commencent tous deux par répartir 5l entre les cinq bidons (1 l dans chaque bidon).

Cependant, ils ne parviennent pas au même résultat, car leurs procédures vont diverger pour le partage des 4 litres restants.

<u>Anouk :</u>
Après avoir placé 1 l dans chaque bidon, il lui reste 4l à répartir ; elle les convertit en demi-litres (*« 4 litres = 8 demis »*) ; elle répartit alors 5 demi-litres dans les 5 bidons (un demi-litre par bidon) et elle s'arrête et conclut :

« 1,5 litres et reste 3 demi-litres. »

Dans cette procédure :
- Elle se place dans la résolution d'un problème de partage avec reste, l'unité de base, apparemment insécable, étant pour elle le demi-litre, alors que le problème posé est un problème de partage sans reste (on remplit complètement 5 bidons identiques avec 9 litres d'huile).
- Même si la réponse est formulée à l'aide d'une écriture à virgule (*« 1,5 litre »*), les nombres décimaux ne sont pas mobilisés : pas de passage au décilitre, ni d'utilisation du dixième de litre.
- Aucun calcul n'est mis en oeuvre pour résoudre le problème ; on est du début à la fin dans le mime du remplissage des 5 bidons à l'aide des 9 litres (d'abord un litre, puis un demi-litre dans chaque bidon).

Bastien :
Son dessin montre un début de résolution semblable au travail d'Anouk : il place un litre dans chaque bidon. Pour les 4 litres restants, il les partage exactement entre les 5 bidons et fournit une réponse exacte (1,8 litre) ; pour cela :

- Il fait appel à la division de 4 par 5.
- Il utilise alors l'algorithme de la division euclidienne qu'il prolonge au quotient décimal ; il mobilise ici les décimaux.
- Il termine en vérifiant sa réponse en posant la multiplication de 1,8 par 5.

Remarque :
On peut aussi imaginer que Bastien ne mobilise pas les décimaux lors du calcul du quotient de 4 par 5 : il convertit 4 l en 40 dl, effectue la division de 40 par 5 et convertit le résultat 8 dl en 0,8 l, et ne mobilise les décimaux qu'au stade de cette conversion, puis dans la multiplication posée pour vérifier sa réponse.

Question 3
Productions de Céline, Dylan et Émilie

La caractéristique commune à ces trois procédures est le tâtonnement. Cependant deux des trois enfants débouchent, au terme de la mise en œuvre de leur procédure personnelle sur une réponse exacte (Dylan et Émilie), tandis que la troisième (Céline) fournit une réponse fausse.

Céline :
Au début, elle tente de résoudre le problème en faisant des essais qu'elle teste par des additions (additions de 5 termes égaux à 2,5, puis la même chose avec 2,2 ; il semble y avoir eu un autre essai avant 2,5 : on en a la trace dans les superpositions d'écriture dans cette première addition).
Cette procédure est probablement perçue comme trop lourde, car elle l'abandonne.
Elle reconnaît alors le problème comme relevant de la division. Elle ne maîtrise pas ce type de problème :

- Elle hésite sur le choix du dividende et du diviseur : elle commence par écrire une division par 9, qu'elle rature puis pose la division de 9 par 5 ; on ne sait pas si c'est le sens du problème qui lui a permis d'arrêter son choix ou une représentation de la division dans laquelle le dividende est forcément supérieur au diviseur.
- Elle se trompe dans l'interprétation du reste, qu'elle considère comme la partie décimale du quotient.

Elle termine par une tentative inachevée de vérification : l'addition de 5 termes égaux à 1,4 est posée mais non effectuée.
Elle répond en faisant une phrase et sans oublier l'unité, mais sa réponse est erronée.

Dylan :
Il procède lui aussi par essais successifs mis en œuvre à l'aide de calculs additifs.
Sa procédure de calcul se caractérise par :

- Une stratégie de calcul réfléchi s'appuyant sur la décomposition de 5 en 2 + 2 + 1 pour calculer plus facilement la somme de cinq nombres égaux.

- Sans doute, le recours au calcul mental, car il ne laisse pas trace sur sa copie de la totalité des résultats des calculs liés à ses essais (par exemple, pour l'essai de 1,65, il écrit deux fois 1,65 + 1,65 = 3,30 puis barre pour passer à un autre essai ; on peut penser qu'un calcul mental rapide l'a convaincu que cet essai n'était pas le bon.
- L'utilisation de sa connaissance des doubles.

Il persévère dans sa stratégie en ajustant ses essais, jusqu'à ce qu'il parvienne à un essai concluant.
Il donne alors la bonne réponse (1,80), mais il oublie l'unité.

Émilie :
Ses essais successifs sont mis en œuvre à l'aide de calculs multiplicatifs (multiplications par 5 posées). On peut penser qu'elle procède par ajustements raisonnés avec des essais dont on ne peut déterminer l'ordre à partir des traces écrites.
Sa réponse (1,8 litre) est correcte, mais elle ne formule pas de phrase pour répondre à la question posée.

SECOND VOLET (8 POINTS)

<u>ÉTUDE DE L'ANNEXE 3 : ACTIVITÉ DE REPRODUCTION</u>

<u>Remarque préliminaire :</u>
Les questions de cette partie font référence aux modèles notés B et C de l'annexe 3. Or sur l'annexe 3, les trois modèles présentés ne sont pas référencés. Cette situation nous a conduit à proposer un corrigé de ces questions pour chacune des trois figures.

Question 1

Deux procédures expertes pour reproduire exactement chacun des modèles

<u>Remarques :</u>
1. *Il s'agit de reproduire exactement (dimensions comprises) en utilisant seulement une règle, une équerre et un compas. Comme aucun instrument de mesure de longueur n'est disponible (une règle n'est a priori pas graduée), il faudra utiliser le compas pour reporter certaines longueurs et respecter les dimensions lors de la reproduction.*
2. *Les procédures ci-dessous ont un préalable : la vérification instrumentale du fait que les modèles sont respectivement un carré, un rectangle et un triangle rectangle inscrits dans un cercle.*
3. *Pour chacun des modèles, on numérote les procédures afin de clarifier le texte lorsqu'on s'y réfèrera dans la question suivante.*

<u>Carré inscrit dans un cercle :</u>
- Procédures commençant par le tracé du cercle :
  - Variante 1 :

On repère le centre et le rayon du cercle en traçant sur le modèle les diagonales du carré : le centre est à l'intersection de celles-ci ; on peut alors utiliser le compas pour reporter le rayon et tracer le cercle.
On trace deux diamètres perpendiculaires du cercle ; les sommets du carré sont les extrémités de ces diamètres. (<u>procédure C1</u>)
  - Variante 2 :

On reporte avec le compas le diamètre du cercle (diagonale du carré) ; on construit le milieu de ce diamètre à la règle et au compas (tracé de la médiatrice du diamètre) et on trace le cercle.
On trace ensuite un deuxième diamètre du cercle perpendiculaire à celui du début ; les sommets du carré sont les extrémités de ces deux diamètres. (<u>procédure C2</u>)
- Procédure commençant par le tracé du carré :

À partir du modèle, on reporte la longueur d'un côté, puis on trace des droites perpendiculaires au segment tracé passant par les extrémités A et B de celui-ci ; sur chacune on reporte dans le même demi-plan de frontière la droite (AB), la longueur du côté du carré ; on obtient ainsi les deux autres sommets C et D du carré.

On trace le cercle passant par les sommets du carré ; son centre est l'intersection des diagonales du carré. (<u>procédure C3</u>)

<u>Rectangle inscrit dans un cercle :</u>

- o Procédures commençant par le tracé du cercle :
  - Variante 1 :

On repère le centre et le rayon du cercle en traçant sur le modèle les diagonales du rectangle : le centre est à l'intersection de celles-ci ; on peut alors utiliser le compas pour reporter le rayon et tracer le cercle.
On place à l'aide du compas sur le cercle deux points A et B, extrémités d'un segment dont la longueur est celle d'un côté du rectangle.
On trace les diamètres du cercle passant respectivement par les points A et B ; les extrémités de ces diamètres fournissent les deux autres sommets D et C du rectangle. (<u>procédure R1</u>)

  - Variante 2 :

On reporte avec le compas le diamètre du cercle (diagonale du rectangle) ; on construit le milieu de ce diamètre à la règle et au compas (tracé de la médiatrice du diamètre) et on trace le cercle.
On reporte la longueur d'un côté du rectangle depuis le modèle, ce qui permet de tracer un arc de cercle centré à une extrémité du diamètre tracé et ayant pour rayon la longueur d'un côté du rectangle ; une des deux intersections avec le cercle fournit un troisième sommet du rectangle ; on obtient le quatrième en traçant le diamètre passant par ce point. (<u>procédure R2</u>)

- o Procédure commençant par le tracé du rectangle

À partir du modèle, on reporte la longueur d'un côté du rectangle, puis on trace des droites perpendiculaires au segment tracé passant par les extrémités A et B de celui-ci ; sur chacune on reporte dans le même demi-plan de frontière la droite (AB), la longueur du côté du deuxième côté du rectangle ; on obtient ainsi les deux autres sommets C et D du rectangle.
On trace le cercle passant par les sommets du rectangle ; son centre est l'intersection des diagonales du rectangle. (<u>procédure R3</u>)

<u>Triangle rectangle inscrit dans un cercle :</u>

- o Procédure commençant par le tracé du cercle :

On reporte avec le compas le diamètre du cercle (hypoténuse du triangle rectangle) ; on construit le milieu de ce diamètre à la règle et au compas (tracé de la médiatrice du diamètre) et on trace le cercle.
On reporte la longueur d'un côté de l'angle droit du triangle depuis le modèle, ce qui permet de tracer un arc de cercle centré à une extrémité du diamètre tracé et ayant pour rayon la longueur d'un côté de l'angle droit du triangle ; une des deux intersection avec le cercle fournit le troisième sommet du triangle. (<u>procédure T1</u>)

- o Procédures commençant par le tracé du triangle :
  - Variante 1 :

On trace le triangle par report des longueurs à l'aide du compas ; puis on construit le milieu O du plus grand côté en traçant sa médiatrice ; on trace alors le cercle circonscrit dont le centre est ce point O. (<u>procédure T2</u>)

- Variante 2 :

Avec l'équerre, on trace un angle droit, puis on reporte les longueurs des côtés de l'angle droit ; on peut alors tracer l'hypoténuse. On construit alors le milieu O de celle-ci et on trace le cercle circonscrit dont le centre est ce point O. (procédure T3)

- Variante 3 :

On trace d'abord un rectangle comme dans la procédure R3 dont les longueurs des côtés sont celles des côtés de l'angle droit du triangle de la figure modèle ; on obtient le triangle en traçant une diagonale (hypoténuse du triangle) et on continue ensuite comme dans T2 et T3. (procédure T4)

Propriétés des figures utilisées

Carré :
Pour C1 et C2 : la caractérisation du carré comme quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires, de même longueur et se coupent en leur milieu.
Pour C3 : la caractérisation du carré par ses angles droits et ses côtés de même longueurs pour le tracé du carré ; puis des propriétés des diagonales d'un rectangle (elles ont même longueur et se coupent en leur milieu) pour le tracé du cercle.

Rectangle :
Pour R1 et R2 : la caractérisation du rectangle comme quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu.
Pour R3 : la caractérisation du rectangle par ses angles droits et ses côtés opposés de même longueur pour le tracé du rectangle ; puis des propriétés des diagonales d'un rectangle (elles ont même longueur et se coupent en leur milieu) pour le tracé du cercle.

Triangle :
Pour T1 : caractérisation du triangle rectangle comme triangle inscrit dans un demi-cercle, l'un de ses côtés (l'hypoténuse) étant un diamètre du cercle.
Pour T2 et T3 : tout triangle rectangle est inscrit dans un cercle dont un diamètre est son hypoténuse.
Pour T4 : la caractérisation du rectangle par ses angles droits et ses côtés opposés de même longueur pour le tracé du rectangle, puis du triangle rectangle ; puis la même propriété que pour T2 et T3, lors du tracé du cercle.

Question 2
Difficultés des procédures proposées pour un élève de CM2

Toutes les procédures impliquent pour l'élève qui les met en œuvre :

- Une analyse de la figure et l'identification perceptive ou à l'aide des instruments de ses différents éléments et de leurs propriétés :

Pour le carré et le rectangle, les angles droits seront facilement identifiés de façon perceptive, alors que l'identification du diamètre du cercle non tracé passe par l'utilisation implicites de propriétés de la figure.
Pour le triangle, le diamètre (tracé) est plus facile à identifier, alors que l'identification de l'angle droit passera sans doute par une vérification instrumentale (équerre).

L'absence de la règle graduée parmi les instruments utilisés dans les différentes procédures augmente la difficulté pour un élève de CM2, en particulier pour identifier le centre des cercles.

- Une bonne utilisation des instruments :

Dans les procédures proposées, la difficulté sera principalement l'utilisation du compas pour le report de longueurs ; mais cet usage du compas relève bien du programme du cycle 3.

La procédure C1 (comme la procédure R1) est envisageable pour un élève de CM2 ; mais c'est une procédure difficile car elle nécessite :

- Le tracé des diagonales sur le modèle ;
- L'utilisation implicite de la caractérisation des quadrilatères par leurs diagonales, dont la justification théorique n'est évidemment pas envisageable pour les élèves de CM2 ;
- Pour C1, le repérage de la perpendicularité des diagonales.

La procédure C2 (comme les procédures R2 et T1) est difficile pour un élève de CM2, car elle nécessite l'utilisation du compas pour trouver le milieu d'un segment. D'après les programmes, cette compétence relève du collège. Une autre difficulté prévisible pour cette procédure est la construction d'un point comme intersection de deux cercles.

La procédure C3 (comme la procédure R3) est envisageable pour un élève de CM2 ; elle nécessite l'utilisation de l'équerre pour tracer des angles droits, du compas pour reporter des longueurs et tracer un cercle. La seule difficulté peut résider dans l'identification du centre du cercle comme intersection des deux diagonales du carré (ou du rectangle).

La procédure T2 relève du collège et non du cycle 3 ; en effet, la construction d'un triangle à l'aide du compas n'est pas exigible à la fin du cycle 3.

La procédure T3 repose essentiellement sur l'utilisation de l'équerre, le report de longueur à l'aide du compas et le tracé d'un cercle ; la seule difficulté est la détermination du milieu d'un segment sans règle graduée ; si on autorise cet instrument de mesure ou le recours au pliage, cette procédure est sans doute la plus envisageable au CM2 ;

La principale difficulté de la procédure T4 réside dans la nécessité d'inclure la figure modèle dans une sur-figure, difficulté qui sera atténuée si le modèle avec le rectangle est présenté simultanément aux élèves. Une fois cette difficulté surmontée, cette procédure est possible au CM2, car elle met uniquement en jeu (comme R3) des compétences qui doivent être disponibles en fin de cycle 3.

ÉTUDE DES ANNEXES 3, 4 ET 5

Question 1a
Incitations des élèves à utiliser la procédure attendue

Dans l'énoncé de l'exercice :
- La consigne écrite « Que dois-tu tracer ? » incite à utiliser un instrument de tracé plutôt qu'un instrument de mesure.
- La phase collective orale évoquée dans le livre du maître au cours de laquelle l'enseignant précise qu'« un phare tourne ».
- Le tracé d'un « rayon » du cercle solution sur la figure de l'énoncé.
- La disposition des bateaux autour du phare.

Dans le contexte du support proposé :
- Le titre de la page : cercle.
- Les objectifs en bas de page qui évoquent le tracé d'un cercle.
- La figure de l'exercice C qui fait apparaître des cercles.

Enfin un élément déterminant pour les élèves sera sans doute leur connaissance du cercle comme ensemble de points à la même distance d'un point donné (le centre) et leur capacité à la mobiliser (image mentale et représentation classique des écrans radars dans les films et les dessins animés).

Question 1b
Autres procédures utilisables

1. Comparaison de la distance au phare de chaque bateau avec la portée de phare matérialisée sur la figure par le segment marqué « 30 km » ; celle-ci peut se faire :
   - Soit par la mesure sur la figure des différentes distances ;
   - Soit à l'aide du compas (ou d'une bande papier) utilisé pour transporter la distance du phare au bateau 1 et la comparer aux autres distances.
2. Tracé de cercles de rayon « la portée du phare » et centrés sur chaque bateau.

Question 1c
Pertinence du support proposé par rapport à l'objectif visé

Avec ce support, la procédure attendue n'est pas forcément la plus rapide : en effet, une fois éliminés les bateaux qui sont visiblement soit dans la zone de portée du phare (les numéros 1, 2, 5 et 6), soit en dehors (les numéros 8 et 3), les quelques comparaisons de longueurs qu'il reste à effectuer sont rapides et efficaces.
De plus, la situation proposée nécessite une modélisation pour passer de la « réalité » représentée au domaine géométrique ; certaines ambiguïtés de la situation ne favorisent pas cette modélisation :
- L'orientation du bateau a-t-elle une importance ? Les bateaux voient-ils le phare s'ils lui tournent le dos ?

- Pour voir le phare, le bateau doit-il être entièrement dans la zone de visibilité du phare ou en partie seulement ? La situation peut inciter les enfants à tracer des cercles centrés sur chaque bateau, mais où choisir le centre ?

Il y a aussi ambiguïté sur l'objectif visé au travers de la situation proposée : le cercle, comme le titre de la leçon l'annonce ou le disque qui correspond à la zone de portée du phare.
Enfin, on peut relever l'irréalisme de la situation : à l'échelle proposée pour la distance de 30 km, certains bateaux mesureraient plus de 15 km.

Question 2a
Explication du choix de l'enseignant

Support :

- Avec ce support, on est directement dans le domaine géométrique : on évite les obstacles liés à la modélisation (passage de la réalité aux points de la géométrie), au caractère factice de la réalité présentée et à l'échelle de la figure.
- La présence d'un grand nombre de points rend les procédures autres que celle qui est visée (le tracé d'un cercle de centre A et de rayon 5 cm) très coûteuses dans leur mise en oeuvre.
- Le support ne contient aucun élément inducteur (pas de titre, pas d'objectif annoncé, …) à la différence de qu'on a vu dans le support de l'annexe 4.

Dispositif :

- L'éloignement et la non disponibilité du support affiché au tableau conduit les élèves à expliciter une méthode plutôt qu'à la mettre en œuvre.
- Le travail par équipe de deux réduit le nombre de propositions à examiner dans la phase collective et incite les élèves à débattre pour se mettre d'accord sur une méthode ; cela prépare le débat qui suivra cette phase de formulation.
- Le support affiché favorise une exploitation collective des méthodes proposées par les différents groupes.

Consigne :

- Les mots employés situent clairement (comme le support) la situation dans le domaine de la géométrie : « tous les points », « à exactement 5cm du point A », mais ne trahissent pas la procédure qu'on veut faire construire aux élèves dans la situation proposée.
- Celle-ci insiste aussi sur la formulation d'une méthode.
- Le mot « rapidement » induit une recherche d'économie qui doit amener les élèves à rejeter certaines procédures.
- L'expression « exactement » évite la confusion entre cercle et disque qui était possible dans la situation précédente.

Question 2b
Conception du cercle visée

Les deux activités visent à mettre en évidence le cercle comme **ensemble de points équidistants du centre.**
Auparavant, les élèves pouvaient avoir une conception du cercle liés aux instruments : **figure tracée à l'aide d'un compas** ou des conceptions davantage liées à la perception : **reconnaissance globale de la forme** (à ce stade, disque et cercle ne sont pas distingués ; ce sont des « ronds »), **figure sans côté ou sans angle** ou encore **figure qui est toujours courbée de la même façon** (par opposition à d'autres lignes courbes fermées comme l'ovale ou l'ellipse).

Question 3
Trois difficultés pour la question B de l'annexe 4 et leurs causes

On peut relever deux sortes de difficultés :

- Des difficultés liés à la formulation mathématique de la tâche :
    - Le point O dont parle la première consigne de tracé ne figure nulle part : les élèves doivent prendre l'initiative de le placer et de le repérer par un signe (point, croix, …).
    - La confusion disque/cercle peut conduire certains élèves à traduire « point A sur le cercle » en plaçant celui-ci à l'intérieur du cercle.
    - « place un point A sur le cercle » suppose que l'élève conçoit le cercle comme un ensemble de points et pas seulement comme une « forme géométrique ».
    - L'utilisation de lettres pour nommer les points est une réelle difficulté renforcée ici par l'omission du mot point dans la consigne « trace une droite passant par O et A » : certains élèves peuvent tracer une droite passant par les lettres O et A ; de plus, l'usage du déterminant « une » au lieu de « la » permet de supposer qu'il existe plusieurs droites solutions.
    - La confusion droite/segment peut conduire des élèves à ne tracer que le segment [OA] et à ne pas obtenir le point B intersection de la droite et du cercle.
    - La difficulté à concevoir un point comme intersection de deux lignes (point B).
- Des difficultés liés au support de l'activité :
    - La référence à l'exercice A et à son contexte réel risque de parasiter la tâche de l'exercice B qui se situe, elle, explicitement dans le contexte géométrique. Cette référence est d'autant plus prégnante que, pour démarrer, les élèves doivent aller prélever une information sur le dessin de l'exercice A : donner cette information permettrait de recentrer la tâche des élèves autour de l'objectif de l'enseignant.

Question 4
Usage du déterminant « le » dans l'exercice C

L'utilisation de ce déterminant est pertinente deux fois (E est situé sur <u>le</u> cercle C_1 et O est <u>le</u> centre des cercles C_1 et C_2) car les cercles dont on parle sont bien définis. Mais l'utilisation de ce déterminant n'est pas pertinente dans les trois autres cas ; elle peut induire des idées fausses comme l'unicité du rayon d'un cercle (alors qu'il y a une infinité de segments joignant le centre à un point du cercle) et l'unicité du diamètre d'un cercle (alors qu'il y a une infinité de cordes contenant le centre).
Au lieu d'écrire « [OD] est le rayon du cercle (C) », il eut été préférable d'écrire « [OD] est **un** rayon du cercle (C) » ou « [OD] est **le** rayon du cercle (C) **d'extrémité O et D** ». Il aurait été intéressant de laisser l'élève libre du déterminant à employer (exemple : « [OD] est **……** du cercle (C) »).

<u>Remarque :</u>
Cette erreur dans le langage est d'autant plus regrettable que les mots « rayon » et « diamètre » peuvent avoir différents sens. Le rayon d'un cercle est en mathématiques la distance entre le centre du cercle et les points du cercle ; c'est donc une longueur. Dans ce cas il est unique et on peut effectivement dire « <u>le</u> rayon du cercle ». Un diamètre est soit une droite qui passe par le centre et dans ce cas on ne peut parler que d'<u>un</u> diamètre parmi d'autres, soit le double du rayon et dans ce cas c'est une longueur unique, comme le rayon, et on pourra dire « le diamètre du cercle ».

ÉTUDE DE L'ANNEXE 6

Question 1
Les ambiguïtés de la formulation de l'exercice 1 et leurs conséquences

De nombreuses ambiguïtés de l'exercice 1 sont liées à la formulation de l'exercice de géométrie en utilisant une situation « réelle », sans explicitation claire de la modélisation géométrique :

- La consigne « Fais le dessin en respectant les données » est ambiguë : l'auteur veut probablement faire représenter la situation du point de vue géométrique, mais certains élèves peuvent la comprendre comme une tâche de reproduction à l'identique du dessin « réel » de l'énoncé. (Doit-on dessiner une chèvre ? la même chèvre à plusieurs endroits différents ?)
  La consigne « explique ta méthode » peut alors déboucher pour certains sur l'évocation du coloriage du pré.
- La situation « réelle » présentée dans l'exercice induit une ambiguïté sur la réponse attendue : est-ce le cercle dessiné par la chèvre (supposée ponctuelle) en tirant sur la corde et en tournant autour du piquet ? Est-ce le disque délimité par le cercle précédent ? (cette réponse est sans doute plus conforme à la réalité, mais ne correspond pas à l'objet étudié dans la leçon) Est-ce une couronne autour du cercle (la chèvre tourne autour du piquet en tirant sur la corde et la tête de la chèvre oscille à droite et à gauche du cercle pour brouter) ? Sur le dessin du livre, la corde mesure 3 cm, mais la bouche de la chèvre est à une distance supérieure du piquet non précisée : la réponse

attendue doit-elle tenir compte de cette réalité (faut-il mesurer la distance du piquet à la bouche ?) ou doit-on faire abstraction de la réalité et fournir une réponse purement géométrique ?

- Le dessin du livre représente-t-il la totalité du pré ou doit-on imaginer qu'il se prolonge au-delà des limites du dessin ? Selon la façon dont on tranche ce point, la réponse à donner sera une portion de cercle ou de disque ou bien un cercle ou un disque complet.

Remarque :
Le dessin du livre adopte une convention inverse de celle utilisée à la page précédente (activité A) : dans un cas, la distance écrite est la distance sur le dessin ; dans l'autre, c'est la distance réelle. Cela n'aura sans doute aucune incidence sur les réponses des élèves, mais cela ne clarifiera pas leurs idées sur ce qu'est un schéma.

Question 2
Deux erreurs possibles pour l'exercice 2 et leurs causes

- La confusion entre les diamètres et les « longues » cordes ; cela est lié à une conception uniquement perceptive des diamètres d'un cercle : *ce sont de longues cordes.*
- L'élève nomme les rayons au lieu des diamètres, car il confond les deux termes.
- L'élève identifie bien les objets géométriques demandés (les diamètres), mais il ne maîtrise pas suffisamment les notations utilisées (une lettre pour désigner un point, juxtaposition de deux lettres pour désigner un segment) pour les nommer.
- Il peut répondre 2 à la première question et « ce sont des diamètres » à la deuxième question (c'est effectivement le nom qu'on leur donne mais ce n'est pas ce que l'on attend comme réponse).

Question 3
Trois difficultés possibles pour l'exercice 5

- Le point O n'est pas donné ; l'élève doit prendre l'initiative de le placer et de le repérer par un signe.
- On demande le cercle de diamètre [OA] ; il y a là un risque de confusion avec le rayon induit par le fait que le centre d'un cercle est souvent appelé O et renforcé par la première tâche (tracé d'un cercle de centre O et…).
- Le maniement des instruments : tracé des cercles avec le compas, précision des mesures (rayon du premier cercle, placement du point A et recherche du milieu de [OA], centre du deuxième cercle).
- Le cercle de la figure de l'exercice précédent risque de parasiter le travail de certains élèves : c'est un cercle de centre O ; il y a un point A sur cette figure et il est sur le cercle de centre O.

Intentions des auteurs

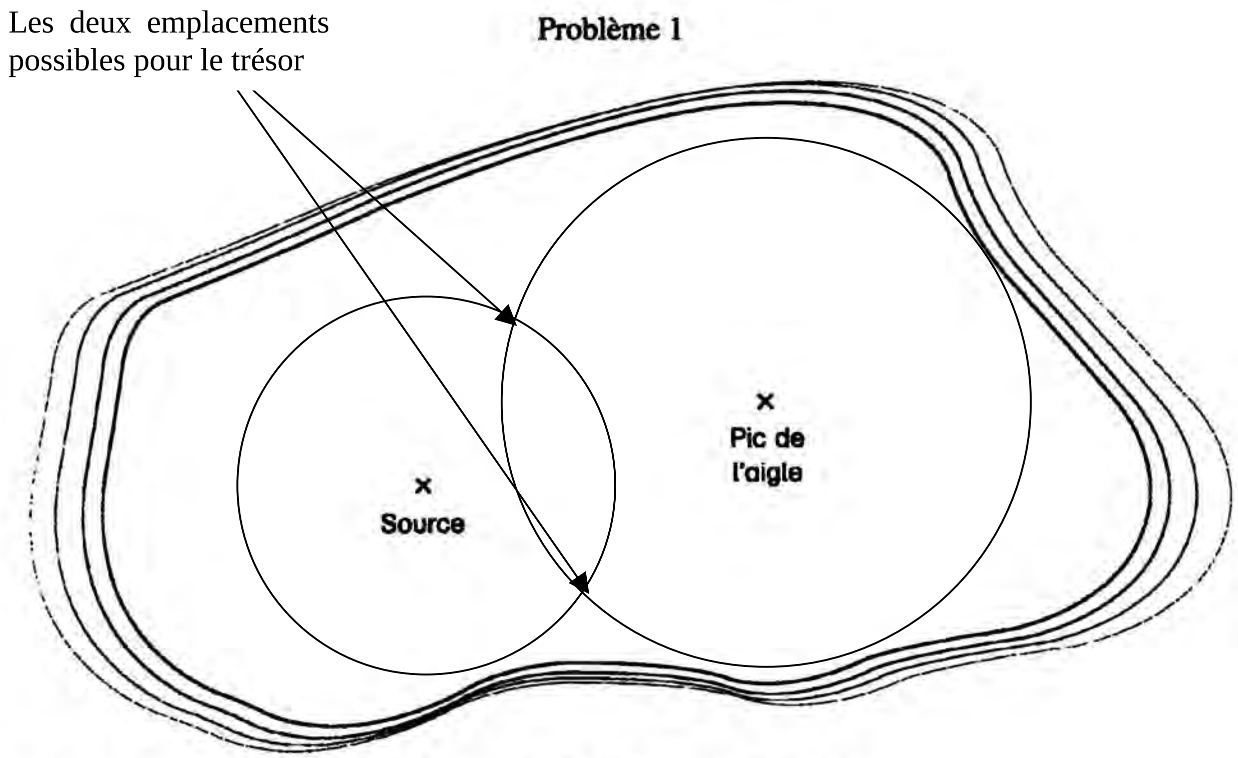
- Utilisation du vocabulaire relatif au cercle : centre, rayon, diamètre.
- Construction d'une figure à partir d'un petit programme de construction.
- Envisager deux constructions d'un cercle : à partir de la donnée de son centre et de la longueur d'un rayon ; à partir de la donnée d'un diamètre.
- Aller à l'encontre de certaines représentations répandues chez les élèves en leur montrant que :
    - le centre d'un cercle n'est pas toujours désigné par la lettre O.
    - lorsqu'il y a deux cercles dans une même figure, ils ne sont pas forcément concentriques.

ÉTUDE DE L'ANNEXE 7

Question 1
Emplacements possibles pour le trésor et la volière

Voir figure à l'échelle « 1 cm pour 100 m » ci-contre.
Il y a deux possibilités pour l'emplacement du trésor : les deux points d'intersection du cercle de centre « la source » et de rayon 250 m avec le cercle de centre « le pic de l'aigle » et de rayon 350 m ; ces deux points sont à l'intérieur de l'île.
Il y a une seule possibilité pour l'emplacement de la volière : on considère les deux points d'intersection du cercle de centre « le grand aquarium » et de rayon 300 m avec le cercle de centre « la fosse aux tigres » et de rayon 550 m ; un seul des deux points peut être retenu, car le deuxième est situé en dehors du zoo.

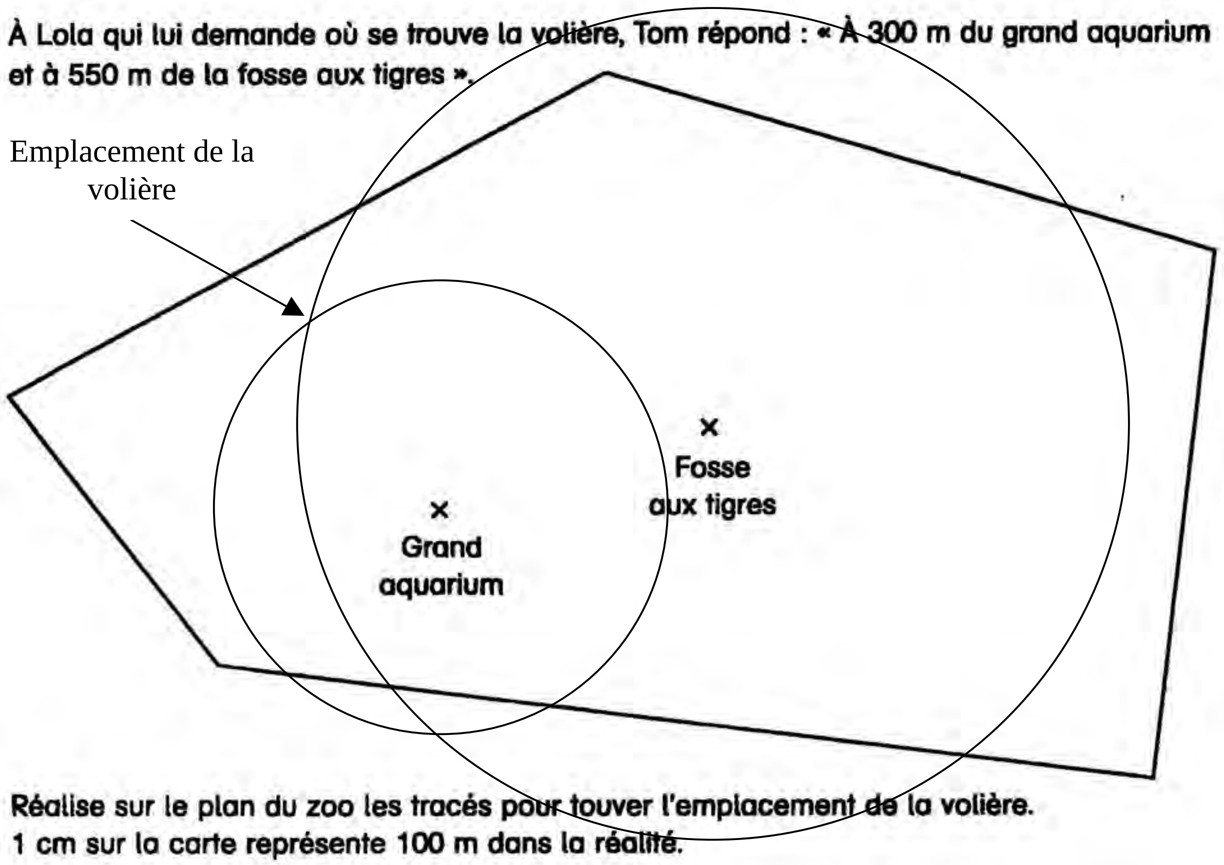
Problème 1



Réalise un tracé sur la carte pour indiquer où il faut chercher le trésor.
1 cm sur la carte représente 100 m dans la réalité.

Problème 2

À Lola qui lui demande où se trouve la volière, Tom répond : « À 300 m du grand aquarium et à 550 m de la fosse aux tigres ».



Réalise sur le plan du zoo les tracés pour touver l'emplacement de la volière.
1 cm sur la carte représente 100 m dans la réalité.

Question 2
Intérêt du dispositif pour la résolution successive des deux problèmes

Si on proposait ces deux problèmes à rechercher individuellement, les élèves pourraient s'engager dans une recherche de l'emplacement du trésor ou de la volière par tâtonnement (essais et ajustements successifs).
Le dispositif choisi pour le problème 1 (par 2 avec une seule des contraintes connues pour chaque élève, puis recherche de l'emplacement par superposition des deux cartes) incite les élèves à tracer des cercles, puis à trouver l'intersection de ces cercles lors de la superposition des deux cartes. Cela peut favoriser l'utilisation de cette même démarche lors de la recherche individuelle du problème 2 et inciter les élèves à ne plus recourir au tâtonnement.

LA RÉUNION

Note préliminaire :
Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

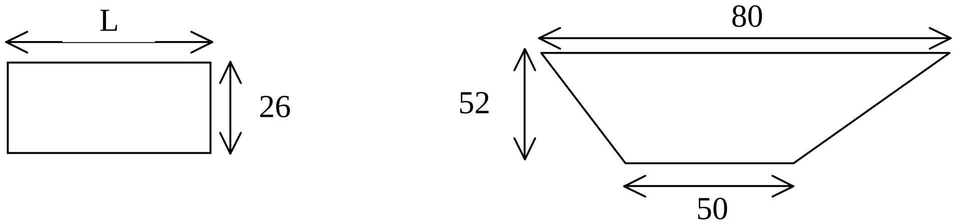
PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS)
MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1

<u>Remarque :</u>
Dans la formule qui donne l'aire d'un trapèze : $\frac{(B+b)xh}{2}$*, B et b représentent les longueurs des deux bases et h est la hauteur.*

Toutes les mesures de longueur sont exprimées en mètres.



Pour déterminer le prix d'un terrain, on multiplie son aire par son prix au mètre carré.
- Si L est la longueur du terrain rectangulaire, le prix en euro de ce terrain est :
  (26 x L) x 130
- Le prix en euro du terrain trapézoïdal est :
  $\frac{(80 + 50) \times 52}{2} \times 110 = 130 \times 26 \times 110$

Puisque les deux terrains ont le même prix de vente, L doit être solution de l'équation :

$$26 \times L \times 130 = 130 \times 26 \times 110$$

Par simplification de l'égalité on obtient L = 110. On constate que cette valeur est supérieure à la largeur 26, c'est donc bien la solution du problème.

La longueur du premier terrain est de 110 mètres.

<u>*Remarque :*</u>
Il est possible d'effectuer les calculs intermédiaires mais au vu des valeurs numériques données ici, cela ne paraît pas pertinent.

EXERCICE 2

Question 1

L'associé de 768 492 s'obtient en intercalant un 0 entre le chiffre des dizaines 9 et le chiffre des unités 2, c'**est donc 7 684 902**.

Question 2

On peut dire que **2005 est l'associé de 205**.

Question 3

a) On suppose que *n* est un entier divisible par 9.
On sait alors que la somme des chiffres de *n* est un nombre divisible par 9. Or, intercaler un 0 entre deux de ses chiffres ne change rien à leur somme, donc la somme des chiffres de son associé est aussi divisible par 9.
L'associé de *n* est donc divisible par 9.

b) La réciproque de la propriété démontrée précédemment est : « **Si l'associé d'un entier *n* est un nombre divisible par 9, alors *n* est divisible par 9** ».

c) Cette réciproque est vraie : la somme des chiffres de *n* est égale à la somme des chiffres de son associé donc dès que l'une est divisible par 9, l'autre l'est aussi.

Question 4

<u>*Remarque :*</u>
Énoncer une condition nécessaire et suffisante c'est énoncer une propriété équivalente à la propriété donnée (on peut relier les deux propriétés par l'expression « si et seulement si »).

Énoncé
Une condition nécessaire et suffisante pour que l'associé de *n* soit divisible par 4 est que **le chiffre des unités de *n* soit 0, 4 ou 8.**

<u>*Remarque :*</u>
On peut formuler différemment cette condition : par exemple « n se termine par 0, 4 ou 8 » ou « le chiffre des unités de n est un multiple de 4 » ou ….

Démonstration

Méthode 1 : par les critères de divisibilité
L'associé de *n*, noté *n'*, est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4 (critère de divisibilité par 4).
Or le chiffre des dizaines de *n'* est nécessairement 0, donc n' se termine par $\overline{0u}$, où *u* est le chiffre des unités de n'.
On peut donc dire que *n'* est divisible par 4 si et seulement si son chiffre des unités *u* est divisible par 4, donc si et seulement si *u* est égal à 0, 4 ou 8.

Comme *n* et *n'* ont le même chiffre des unités alors on peut dire que l'associé de ***n*** **est divisible par 4 si et seulement si le chiffre des unités de *n* est 0, 4 ou 8.**

Méthode 2 : par la notion de multiple
On montre tout d'abord que le reste *r* de la division euclidienne de *n* par 4 est entièrement déterminé par le chiffre des unités de *n*, noté *u*.
On note n' l'associé de *n*. Comme *n* est un nombre entier supérieur à 10, il peut s'écrire sous la forme $n = 10a + u$ avec *a* entier naturel non nul et *u* entier compris entre 0 et 9.
Alors *n'* s'écrit $n' = 100a + u$.
Or 100*a* est un multiple de 4 car $100a = 4 \times 25 \times a$.
Donc si *u* est un multiple de 4 alors *n'* est un multiple de 4 (c'est une somme de deux multiples de 4).
Réciproquement si *n'* est un multiple de 4 alors *u* est un multiple de 4 ($u = n' - 100a$ est une différence de deux multiples de 4).

Donc pour que *n'* soit un multiple de 4 il faut et suffit que *u* soit un multiple de 4.

Remarque :
Attention, il n'y a pas de relation entre la divisibilité de n par 4 et celle de n'. Exemples : 32 est divisible par 4 mais 302 ne l'est pas, et, inversement, 14 n'est pas divisible par 4 alors que 104 l'est.

Question 5

Méthode 1 :
On montre tout d'abord que le reste *r* de la division euclidienne de *n* par 5 est entièrement déterminé par le chiffre des unités de *n*, noté *u*.
Tout nombre *n* peut s'écrire sous la forme : $n = 10a + u$ où *a* représente le nombre de dizaines de *n*.
10*a* est un nombre divisible par 5 donc *n* et *u* ont le même reste dans la division euclidienne par 5.
On peut en déduire que : si $0 \le u < 5$ alors $r = u$
Si $5 \le u \le 9$ alors $r = u - 5$

Ainsi, on a montré que *r* est connu dès que *u* l'est.
Or, *n* et *n'* ont le même chiffre des unités, *u*.
Donc *n* et son associé ont le même reste dans la division euclidienne par 5 .

Méthode 2 :
On recherche les égalités exprimant les divisions euclidiennes de n et n' par 5. En reprenant les notations et égalités de la question précédente (méthode 2), on a :

$n = 10a + u$
$n' = 100\ a + u$,

ou encore :

$n = 5 \times (2\ a) + u \quad (1)$
$n' = 5 \times (20\ a) + u \quad (2)$

Si $0 \leq u < 5$ alors les égalités (1) et (2) caractérisent la division euclidienne de n et n' par 5. Dans ce cas, n et n' ont le même reste u dans la division euclidienne par 5.

Si $5 \leq u \leq 9$ les égalités (1) et (2) peuvent alors s'écrire :

$n = 5 \times (2\ a + 1) + (u - 5) \quad (1')$
$n' = 5 \times (20\ a + 1) + (u - 5) \quad (2')$

Comme $0 \leq u - 5 < 5$, (1') et (2') caractérisent la division euclidienne de n et n' par 5. Dans ce cas, n et n' ont le même reste u - 5 dans la division euclidienne par 5.

Donc *n* et son associé ont toujours le même reste dans la division euclidienne par 5 .

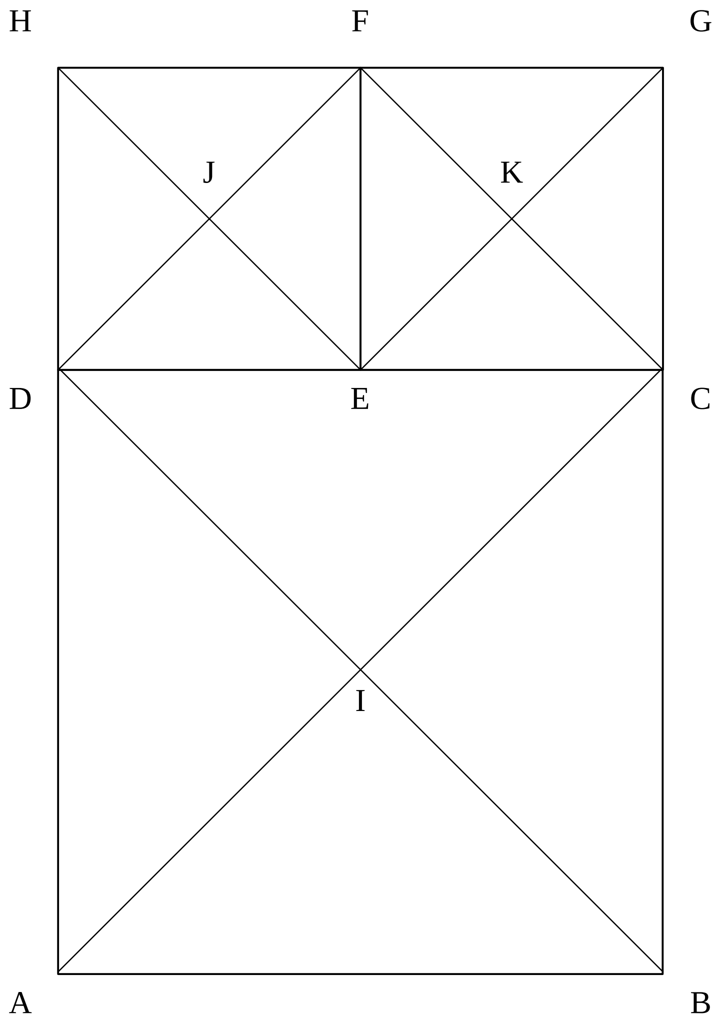
EXERCICE 3

Question 1
Figure et construction des points I,J et K

Remarque 1 :
L'énoncé ne précise pas les outils disponibles donc on peut a priori utiliser l'équerre pour la construction des perpendiculaires.

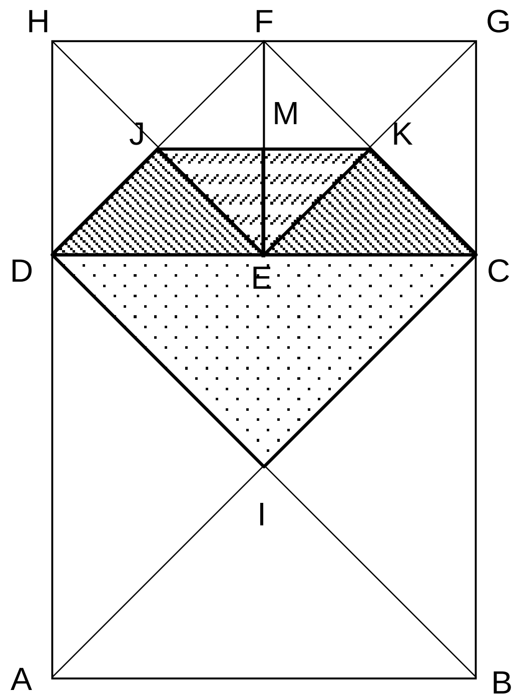
Remarque 2 :
Plusieurs données nécessaires à la construction doivent ici être déduites de la figure : c'est ainsi que l'on admettra les alignements des points A, D et H d'une part, D, E et C d'autre part, etc.
On peut aussi admettre que le point E est le milieu du segment [DC] et en déduire que les carrés DEFH et EFGC ont 4 cm de côté, ou préférer le justifier brièvement, bien que cela ne soit pas demandé :
Dans le carré DEFH on a EF = DE et dans le carré EFGC on a EF = EC. On en déduit que DE = EC et que, puisque les points D, E et C sont alignés, le point E est le milieu du segment [DC]. On a donc DE = 1/2 DC = 1/2 AB = 4 cm.

Dans un carré, le centre de symétrie est le point d'intersection des deux diagonales : c'est ainsi qu'on construit les points I, J et K.
(voir figure page suivante)



Question 2
Aire du pentagone ICKJD

NB : Toutes les mesures de longueur seront en cm et les mesures d'aire en cm².



Méthode 1 :
On note M le milieu du segment [FE].

L'aire du pentagone ICKJD est égale à la somme des aires des triangles ICD, EKC, KEM, MEJ, JDE.

Puisque les diagonales d'un carré partagent le carré en quatre surfaces de même aire :

- l'aire du triangle ICD est égale au quart de l'aire du carré ABCD :

La mesure de l'aire (ICD) est : $\frac{8^2}{4} = 16$

- l'aire du triangle EKC est égale au quart de l'aire du carré EFGC :

La mesure de l'aire (EKC) est : $\frac{4^2}{4} = 4$

De même, la mesure de l'aire (FEK) est 4.

- l'aire du triangle JDE est égale au quart de l'aire du carré DEFH :

La mesure de l'aire (JDE) est : $\frac{4^2}{4} = 4$

De même, la mesure de l'aire (JFE) est 4.

Le point J étant centre de symétrie du carré DEFH et le point M étant le milieu du segment [FE], la droite (JM) est la médiatrice du segment [FE] (le centre de symétrie d'un carré est le point d'intersection des médiatrices des côtés). Elle partage donc le triangle JFE en deux triangles superposables.

On en déduit que : Aire (MEJ) = $\frac{1}{2}$ Aire (JFE) = 2 cm²

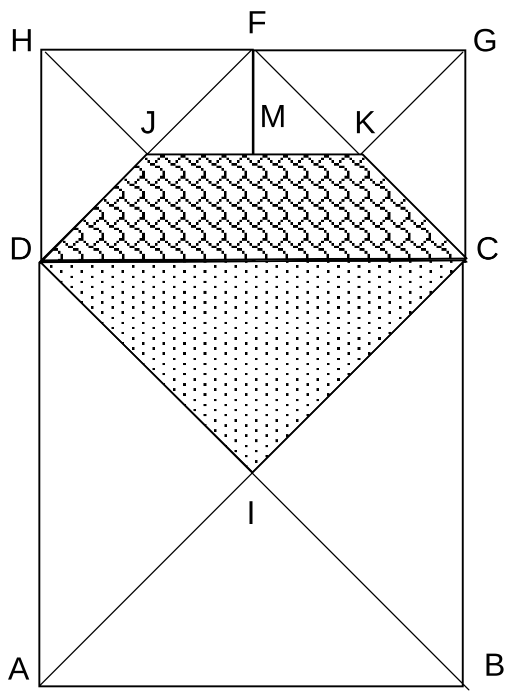
De même , dans le triangle FEK, on a Aire (KEM) = $\frac{1}{2}$ Aire (FEK) = 2 cm²

Aire (ICKJD) = Aire (ICD) + Aire (EKC) + Aire (JDE) + Aire (MEJ) + Aire (KEM)
= 16 cm² + 4 cm² + 4 cm² + 2 cm² + 2 cm²
= 28 cm²

Donc **l'aire du pentagone ICKJD est égale à 28 cm².**

Méthode 2 :

L'aire du pentagone ICKJD est égale à la somme des aires du triangle ICD et du quadrilatère DCKJ.



Aire (ICD) =16 cm² (voir calcul méthode 1).

On montre que DCKJ est un trapèze et on utilise la formule de calcul de l'aire d'un trapèze.

Dans le triangle CDF, les points J et K sont les milieux respectifs des côtés [DF] et [FC], donc les droites (JK) et (DC) sont parallèles et JK = DC/2 (théorème de la droite des milieux).

On en déduit que le quadrilatère DCKJ est un trapèze de bases DC = 8 cm et JK = 4 cm.

Sa hauteur est la moitié du côté du carré ECGF c'est-à-dire EM = FE/2 = 2 cm

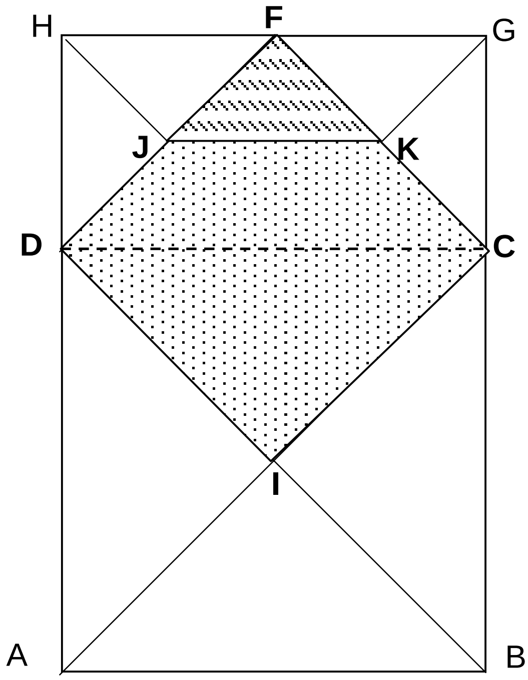
Donc Aire (DCKJ) = $\frac{(JK + DC) \times h}{2}$

D'où, la mesure de l'aire (DCKJ) :

$\frac{(4 + 8) \text{ x } 2}{2} = 12$

Aire du pentagone :
Aire (ICKJD) = Aire (ICD) + Aire (DCKJ) = 16 cm² + 12 cm² = 28 cm²
Donc **l'aire du pentagone ICKJD est égale à 28 cm^2.**

Méthode 3 :
L'aire du pentagone ICKJD est la différence entre l'aire du quadrilatère ICFD et celle du triangle FJK.



On montre tout d'abord que le quadrilatère ICFD est un carré.
On sait que la diagonale d'un carré de côté a mesure $a\sqrt{2}$.
- Les segments [ID] et [IC] sont des demi-diagonales du carré ABCD de côté 8,

donc ID = IC = $\frac{8\sqrt{2}}{2}$ cm = $4\sqrt{2}$ cm.
- Les segments [DF] et [FC] sont des diagonales respectives des carrés EFHD et ECGF de côté 4,

donc DF = DC = $4\sqrt{2}$ cm.

Le quadrilatère ICFD a ses quatre côtés de même longueur, c'est donc un losange.
De plus, ses côtés [IC] et [ID] sont perpendiculaires (demi-diagonales du carré ABCD).
On en conclut que ICFD est un carré dont la longueur du côté est $4\sqrt{2}$ cm.
Ainsi la mesure de l'aire (ICFD) est : $\left(4\sqrt{2}\right)^2 = 32$
Dans le triangle CDF, les points J et K sont les milieux respectifs des côtés [DF] et [FC], donc les droites (JK) et (DC) sont parallèles et JK = DC/2 (théorème de la droite des milieux).
On a donc JF = DF/2, KF = CF/2 et JK = DC/2, donc le triangle FJK est une réduction du triangle FDC à l'échelle 1/2.
On en déduit que : Aire (FJK) = Aire(FDC)/4.

Le segment [DC] est une diagonale du carré ICFD, donc :

$$\text{Aire (FDC)} = \frac{\text{Aire (ICFD)}}{2} = \frac{32}{2} \text{ cm}^2 = 16 \text{ cm}^2$$

Ainsi la mesure de l'aire (FJK) est : $\frac{16}{4} = 4$.

Aire (ICKJD) = Aire (ICFD) - Aire (FJK)
On en déduit que Aire (ICKJD) = 32cm² - 4 cm² = 28 cm².
Donc **l'aire du pentagone ICKJD est égale à 28 cm^2.**

Remarque :
Il existe encore bien d'autres manières de calculer ces différentes aires…

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

Résolution de l'exercice et analyse rapide des réponses des élèves

<u>Remarque :</u>
Ce travail n'est pas explicitement demandé mais il est nécessaire pour pouvoir analyser les réponses des élèves.

L'exercice vise à évaluer les connaissances des élèves relatives aux grandeurs abordées au cycle 2 (durée, masse (poids), longueur et volume (contenance)), et plus particulièrement, aux unités usuelles de mesure qui leur correspondent. En effet, le document d'application des programmes pour le cycle 2 précise : *« Il est important que l'élève repère la catégorie de grandeur à laquelle fait référence une situation donnée et qu'il soit capable de préciser les unités appropriées (mètre et centimètre pour les longueurs, gramme et kilogramme pour les masses, heure et minute ou mois, semaine et jour pour les durées). »*

En référence aux compétences des élèves évaluées ici, nous avons choisi de résumer l'analyse de leurs réponses à l'aide du tableau ci-dessous :

Réponse correcte attendue		Sophie	Pauline	Édouard
*Une journée de classe dure 6 **heures**.*	Grandeur bien identifiée Unité correcte	oui non	oui oui	non non
*La salle de classe mesure 10 **mètres** de long.*	Grandeur bien identifiée Unité correcte	oui non	oui oui	oui oui
*Un enfant de 8 ans pèse environ 25 **kilos**.*	Grandeur bien identifiée Unité correcte	oui oui	oui oui	oui oui
*Une séance de piscine dure environ 40 **minutes**.*	Grandeur bien identifiée Unité correcte	oui oui	oui non	non non
*Une plaquette de beurre pèse 250 **grammes**.*	Grandeur bien identifiée Unité correcte	oui oui	oui oui	oui non
*Un cahier mesure 17 **centimètres** de large.*	Grandeur bien identifiée Unité correcte	oui oui	oui non	non non
*François remplit le réservoir de la voiture avec 50 **litres** d'essence.*	Grandeur bien identifiée Unité correcte	oui oui	non non	non non

Travaux de Sophie

Les réponses de Sophie montrent qu'elle a su identifier la nature des grandeurs concernées par les situations proposées et qu'elle leur associe des unités de mesure appropriées, même si leur ordre de grandeur n'est pas exact. Ainsi les durées sont toutes exprimées en minutes, les longueurs en centimètres, les masses en grammes

et kilos (qu'elle écrit plus ou moins phonétiquement « gilont »), la contenance en litres.
On peut penser qu'elle a une bonne notion des unités utilisées dans sa vie quotidienne en dehors de l'école : son poids, celui d'une plaque de beurre et la contenance d'un réservoir d'essence.

Travaux de Pauline

Pauline repère bien les masses qu'elle exprime correctement en kilos (« guilau »), et en grammes (« grame »). Elle identifie aussi les durées mais ne les mesure qu'en heures (notées « heu » puis « heur »).
Pour ce qui concerne les longueurs, elle exprime bien en mètres la mesure de la salle de classe mais, pour la largeur du cahier, elle parle de « 17 longueurs » (« longer »), confondant ainsi la grandeur et son unité de mesure. On peut supposer qu'elle a été influencée par le terme « de large », qui, faisant référence à la largeur d'un rectangle, est généralement mis en lien avec la longueur de ce rectangle.
Sa dernière réponse (« 50 euros d'essence ») ne correspond pas à une unité de mesure de contenance mais fait référence à une situation de la vie courante : le plein d'essence est plus souvent mesuré par son coût plutôt que par son volume.

Travaux d'Édouard

Édouard n'a donné que deux réponses exactes : le poids d'un enfant de 8 ans et la longueur de la salle de classe. Il semblerait qu'il se soit placé davantage dans un contexte de la vie quotidienne que dans un contexte de « mesure de grandeurs en mathématiques ».
En effet, si le mot « pèse » évoque bien pour lui un poids et donc des kilos (y compris pour la plaquette de beurre), les autres verbes « mesure » et « dure », semblent disparaître devant les noms auxquels ils sont associés.
La séance de piscine « dure » 40 mètres (longueur plausible d'un bassin), le cahier « mesure » 17 pages (caractérisation ordinaire d'un cahier par son nombre de pages).
Les « 50 kilos d'essence » peuvent s'expliquer par une confusion classique entre volume et masse[1] .
Quant à la réponse donnée concernant la durée de la journée de classe, l'origine de l'erreur semble difficilement décelable !

[1] Pour un objet donné, les deux grandeurs sont proportionnelles, le coefficient de proportionnalité étant la masse volumique de l'objet considéré.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Question 1
Notion mathématique abordée

Tous ces documents abordent la multiplication de deux entiers, dont l'un au moins est strictement inférieur à 10. Les aspects travaillés sont :

- l'une de ses significations : une addition itérée peut s'écrire sous forme multiplicative ;
- la technique opératoire, en lien avec la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Question 2a
Compétences visées dans chaque document

Document A :
- savoir remplacer une addition itérée par une multiplication ;
- savoir reconnaître une situation multiplicative dans un problème ;
- savoir calculer un produit en se ramenant à une addition itérée.

Document B :
- Savoir calculer le produit d'un entier inférieur à 1000 par un entier inférieur à 10 :
  - connaître différentes méthodes ;
  - savoir utiliser la décomposition canonique des nombres ;
  - comprendre et utiliser la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ;
  - comprendre la technique usuelle de la multiplication posée et la gestion des retenues.
- Savoir associer l'usage de la multiplication au calcul d'une collection d'objets disposés dans une configuration rectangulaire.

Document C :
- savoir résoudre un problème multiplicatif par une méthode de son choix, un schéma pouvant être une aide.

Question 2b
Progression envisagée

Les programmes précisent que tout apprentissage mathématique doit partir de la résolution de problèmes.
Pour donner du sens à la notion visée, on commencera donc par résoudre, avec des méthodes personnelles, des problèmes multiplicatifs.
On choisira le document C, utilisable dès la fin du CP ou en début de CE1 puisque les nombres concernés sont dans un domaine numérique connu (4 à 6 dans « Je

découvre » ; 20 et 3 dans « Je m'entraîne »), ce qui favorise les procédures personnelles.

On pourra ensuite faire le lien entre les écritures additives produites par les élèves et les écritures multiplicatives correspondantes (document A, utilisable au CE1).
Ceci permettra de commencer à élaborer, à organiser, puis à mémoriser un répertoire multiplicatif.

On poursuivra par la mise en place de techniques de calcul pour effectuer des multiplications en s'appuyant sur les produits de référence, mémorisés ou fournis par la table de Pythagore.
On pourra alors utiliser le document B, en début de cycle 3 :

- la technique opératoire de la multiplication n'est pas exigible en fin de cycle 2, les produits devant être effectués par calcul réfléchi écrit ;
- les activités de ce document s'appuient sur la table de Pythagore ;
- le travail porte sur la multiplication par un entier à un chiffre.

Question 3a
Analyse des productions

Pour toutes les multiplications effectuées on peut constater que :

- cet élève connaît bien les produits de deux entiers inférieurs strictement à 10 ou il sait utiliser la table de Pythagore s'il l'a à sa disposition ;
- il effectue la multiplication posée en traitant d'abord les unités, puis les dizaines, puis les centaines ;
- il a compris qu'il devait « poser la retenue ».

Mais il fait systématiquement la même erreur. Il ajoute la retenue au nombre à multiplier <u>avant</u> d'effectuer le produit, au lieu d'ajouter cette retenue au produit obtenu : soit il n'a pas compris la signification de la retenue dans une multiplication, soit il n'arrive pas à la gérer dans cette opération.

Question 3b
Proposition d'aide

- Pour que cet élève comprenne la signification de la retenue, on peut lui proposer de poser les produits partiels, que ce soit par l'utilisation d'une configuration rectangulaire (cf. document B) ou par une technique posée « intermédiaire » qui met en évidence la nécessité et le sens des retenues.
  Exemple : calcul de 318 x 5

	3	1	8	
x			5	
		4	0	5 x 8
		5	0	5 x 10
1	5	0	0	5 x 300
1	5	9	0	5 x 318

- Pour l'aider à gérer les retenues, on peut lui proposer de ne pas les écrire au-dessus des chiffres de l'opération mais sur le côté, puis de les barrer dès la fin de leur utilisation. Il peut aussi utiliser ses doigts pour la gestion de ces retenues.

- Par ailleurs, une aide importante consiste aussi à lui fournir un élément de validation de son calcul en lui apprenant à estimer, par calcul mental, un ordre de grandeur du résultat.

SECOND CONCOURS INTERNE GROUPEMENT INTER-ACADÉMIQUE OUEST

Note préliminaire :
Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PARTIE 1
EXERCICE 8 DES DOCUMENTS A ET B

Question a

Cet exercice peut se proposer à la fin du cycle 2 et à la fin de l'année en CE1.

Remarque :
Il est écrit dans le document A qu'il s'agit d'un exercice proposé lors de l'évaluation à l'entrée du CE2. Si ce renseignement était donné aux candidats, la réponse ne pouvait pas être différente. En revanche, en l'absence de cette référence, on pourrait admettre une réponse qui donnerait cet exercice pour le CE2.

Question b

Le domaine mathématique est le repérage dans le temps et la mesure des durées.

Il s'agit ici d'évaluer la compétence de l'élève à trouver, dans un texte, des informations numériques concernant le repérage du temps et les durées.

Les savoirs nécessaires sont :
- savoir lire une heure sur une horloge (heure exacte ou heure et demie),
- savoir placer les aiguilles d'une horloge pour indiquer une heure exacte,
- savoir repérer mentalement le temps avec les heures et demi-heures et pouvoir avancer et reculer dans le temps avec ce repérage,
- savoir représenter une durée sur une “ frise ” dans laquelle le temps est repéré linéairement par les heures et les demi-heures.

Question c
Difficultés de l'exercice

La difficulté principale est de comprendre le texte et de se représenter la situation décrite en retrouvant à travers le récit le fil des évènements passés. Les informations n'arrivent pas dans le texte dans l'ordre chronologique.

<u>Une deuxième difficulté</u> est de trouver les informations numériques dans un texte où seul le chiffre 9 est visible, les autres informations numériques étant écrites en lettres.

<u>Une troisième difficulté</u> vient de la nécessité de distinguer et d'associer correctement :

- des informations qui sont des repères dans le temps : huit heure et demie (écrit en lettres) et 9 heure et demie,
- une information de durée (une demi-heure de retard).

Question d
Situation dans une démarche d'apprentissage

Il s'agit d'un exercice d'évaluation de l'apprentissage, plutôt à placer à la fin de l'apprentissage du repérage dans le temps en CE1.
Nous disons que cet exercice n'est pas à placer en cours d'apprentissage pour deux raisons :

- dans cette situation il n'y a aucune rétro-action qui permettrait à l'élève de valider ou d'invalider lui-même ses réponses, en lui donnant quelques indications pour recommencer son travail en cas d'erreurs,
- le texte sur lequel l'élève doit travailler est un récit comportant des dialogues, des onomatopées, beaucoup de détails descriptifs, bref un texte littéraire. Il est très intéressant à proposer aux élèves dans le cadre d'un travail interdisciplinaire, quand les savoirs disciplinaires ont été suffisamment acquis séparément pour être mobilisables ensemble.

PARTIE 2
ÉTUDE DES DOCUMENTS C, D ET E

Question I- a
Imprécisions et erreurs des productions

<u>Étienne :</u>
Il a tenu compte de toutes les consignes sauf une : le demi-cercle n'est pas au-dessus d'un carré mais sur un carré. Il est vrai que l'expression “ au-dessus ” n'est pas très explicite et il est possible qu'Etienne ait compris “ par-dessus ” .

<u>Flore :</u>
Deux consignes n'ont pas été suivies : le second carré n'est pas à l'intérieur du premier et ce n'est pas un demi-cercle qui est tracé mais un cercle entier.
De plus, celui-ci n'est pas au-dessus d'un carré, comme pour Étienne.

<u>Hugo :</u>
Les consignes sont entièrement respectées. Le demi-cercle est bien au-dessus d'un carré, le message ne précisant pas de quel carré il s'agit.

Gaspard :
Les consignes de tracé sont bien respectées. La contrainte de la dernière phrase ne l'est pas. Dans ce dessin il n'y a pas d'axe de symétrie. Une translation du petit carré et une autre translation du demi-cercle sont nécessaires pour avoir un axe de symétrie vertical.

Remarque :
La contrainte non respectée n'est pas formulée comme une instruction de tracé ; elle nécessite, pour être prise en compte, un retour sur les choix effectués par l'élève lors du tracé de la figure (position du petit carré à l'intérieur du grand, position et orientation du demi-cercle).

Question I- b
Réécriture du texte de Denis

Solution 1 :
Tracer un carré de 4 cm de côté.
Tracer un demi-cercle ayant pour centre le milieu d'un des côtés du carré, pour rayon 2 cm et situé entièrement à l'intérieur du carré.
La droite joignant le centre du demi-cercle et le centre du carré devra être l'axe de symétrie de la figure finale. Tracer un second carré de côté 2 cm à l'intérieur du grand carré, le centre du grand carré étant le seul point commun de ce petit carré avec le demi-cercle.

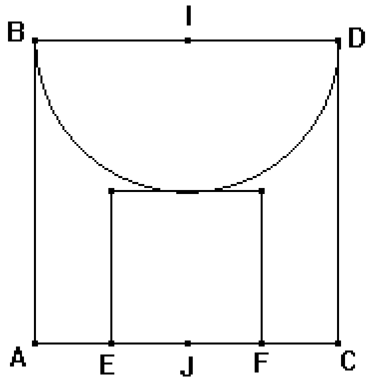
Solution 2 :
Tracer un carré de 4 cm de côté.
Tracer un demi-cercle ayant pour centre le milieu d'un des côtés du carré, pour rayon 2 cm et situé entièrement à l'intérieur du carré.
Sur le côté opposé au diamètre du demi-cercle, placer un segment de longueur 2 cm dont le milieu est le milieu du coté du carré sur lequel il est posé.
A l'intérieur du carré, tracer un second carré dont un côté est le segment de 2 cm tracé précédemment.

Question I- c
Tracé de la figure demandée

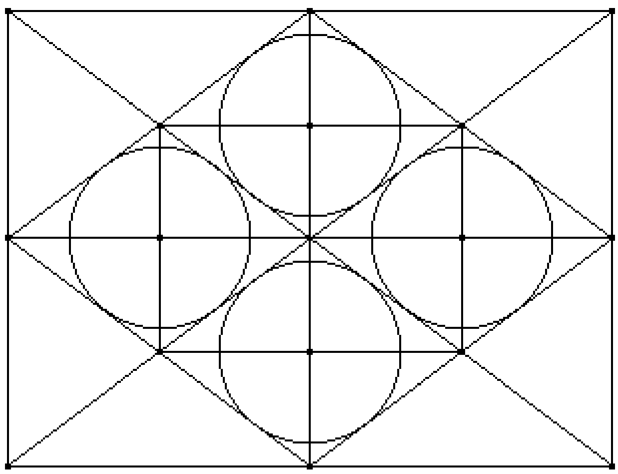
Remarque préalable :
Dans les constructions classiques dites " à la règle et au compas ", il faut utiliser la médiatrice pour tracer tous les angles droits. Donc ces constructions ne sont pas du niveau de l'école élémentaire.
Pour cette épreuve, les instruments autorisés sont la règle, le compas et l'équerre. D'autre part, dans la question I –c, le tracé demandé comporte la mention : " activité de l'élève ". En conséquence pour les constructions qui suivent nous utiliserons l'équerre pour tracer les angles droits et non la règle et le compas seuls.

Construction :
Construisons un angle droit de sommet A.
Sur les côtés de l'angle droit, plaçons les points B et C de sorte que AB = AC = 4 cm.

Construisons le quatrième sommet du carré comme l'intersection, distincte de A, du cercle de centre B et de rayon 4 cm et du cercle de centre C et de rayon 4 cm[1]. Nous traçons un axe de symétrie du carré en joignant les milieux I et J des côtés opposés (I milieu de [BD] et J milieu de [AC]).
Traçons un demi-cercle de rayon 2 cm, de centre I, à l'intérieur du carré.
Sur le côté [AC] du carré, de part et d'autre de J plaçons les points E et F de sorte que JE = JF = 1 cm.
Nous terminons le carré de côté EF = 2 cm en traçant deux angles droits de sommets E et F. Ce second carré est situé à l'intérieur du premier carré ACDB.



Question II –a
La figure proposée par Roxanne



[1] Nous donnons la construction du carré ACDB de 4 cm de côté en utilisant l'équerre une seule fois. Il est possible d'utiliser l'équerre deux fois en traçant aussi un angle droit en B et dans ce cas le point D est déterminé comme le point C, sans utiliser le compas. C'est ce que nous faisons pour le petit carré de côté 2 cm pour souligner la symétrie axiale. Mais pour ce petit carré on pourrait aussi utiliser l'équerre une seule fois et construire le quatrième sommet par l'intersection de deux cercles de rayon 2 cm.

Question II –b
Deux catégories de difficultés pour l'élève

<u>Difficultés liées aux consignes :</u>
1) Elles nécessitent, pour être comprises, une bonne maîtrise du vocabulaire géométrique : rectangle, losange, diagonale, milieu, cercle, centre, rayon, diamètre, intersection.
2) Elles correspondent à une vision globale de la figure, contrairement à une construction qui commencerait, par exemple, par un petit rectangle intérieur.
Après avoir tracé le rectangle avec ses diagonales et avoir placé les milieux des quatre côtés, il faut comprendre quels sont les points à joindre et voir les quatre losanges dans la figure. Il faut ensuite déterminer les rayons des cercles par tâtonnement car les élèves ne peuvent savoir que de façon intuitive que le centre du losange est équidistant des quatre côtés.

<u>Difficultés liées à l'utilisation des instruments :</u>
Il semble que la figure doive se faire sur papier blanc. Dans ce cas il est toujours difficile pour les élèves de tracer un rectangle de façon suffisamment précise, même avec une équerre, de sorte que l'imprécision du tracé de départ n'affecte pas les tracés suivants.
De même, le tracé précis des cercles dont seul le centre est donné n'est pas évident.

Question III –a
Domaine mathématique

Les documents proposés se situent dans le domaine de la géométrie métrique plane.

Question III –b
Vocabulaire mathématique visé

Les termes du vocabulaire mathématique que le maître souhaite introduire peuvent se classer selon trois catégories :
- le vocabulaire relatif au cercle (centre, rayon, diamètre) et le vocabulaire relatif aux éléments des quadrilatères (côtés opposés ou consécutifs, sommets, diagonales) ;
- le vocabulaire relatif aux relations d'incidence (exemple : point d'intersection des diagonales ou point commun entre le cercle et le losange dans le document D) ;
- le vocabulaire relatif aux relations topologiques (par exemple à l'intérieur ou à l'extérieur du carré dans le document C).

Question III –c
Domaines de connaissances mathématiques abordés

Nous en donnons quatre, mais le sujet n'en demandait que trois aux candidats :
- les propriétés de figures géométriques simples : cercle, carré, rectangle et losange ;
- la symétrie axiale ;

- les programmes de construction géométrique avec la règle, le compas et l'équerre ;
- la reproduction de figures géométriques à partir d'un modèle ou construction à partir d'un programme.

Question III –d

Ces activités s'adressent au cycle 3, classe de CM 2. En effet les élèves doivent apprendre à :

- comprendre un programme de construction assez complexe (documents C et D),
- déterminer si des constructions réalisées satisfont ou non un programme de construction donné (document C),
- réaliser un tracé à partir d'une figure donnée (document C) ou d'un programme de construction donné (document D),
- corriger un programme mal écrit (document C),
- rédiger eux-mêmes un programme de construction qui conduise à une seule figure possible (les trois documents).

Question III –e
Titre de la séquence

Le titre pourrait être : Description et construction de figures géométriques.

Remarque :
Il faut souligner que ces documents (particulièrement le E puis le C) peuvent être utilisés par le maître pour introduire une réelle activité de communication dans la classe.
Les élèves sont par groupes de 2. Un des deux élèves reçoit la figure sans que l'autre la voit. L'élève qui reçoit la figure (émetteur) rédige un programme de construction pour son camarade (récepteur) qui s'en sert pour tracer la figure. Ensuite les deux élèves comparent ensemble la réalisation au modèle fourni et essaient de comprendre pourquoi il y a une différence.
Il faut absolument recommencer ce processus plusieurs fois avec des figures différentes de sorte que chaque élève ait joué les deux rôles (émetteur et récepteur) pour que tous comprennent que celui qui ne voit pas le dessin peut interpréter de différentes façons un message imprécis.
Dans ce sujet, ceci aurait pu être l'objet d'une question aux candidats.

Question III –f
Travail interdisciplinaire envisageable

Ces activités peuvent s'inscrire dans un travail interdisciplinaire :
- français et mathématique (compréhension d'un texte et expression écrite)
- dessin et mathématique si le maître demande ensuite aux élèves d'associer la couleur avec les figures des documents C et D, voire de réaliser une frise ou un papier peint avec répétition du même motif.

SECOND CONCOURS INTERNE GROUPEMENT INTER-ACADÉMIQUE ÎLE DE FRANCE

Note préliminaire :
Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PARTIE 1
(VOIR ANNEXE 1)

Question 1 (sur l'activité)

Question 1a
Réponse précise au premier point de l'activité

Il s'agit de répondre à la question « *Explique ce que représente chaque ligne du tableau et le raisonnement de Louison. Quelle réponse peut-il apporter avec ce tableau ? ».*

Louison construit un tableau de proportionnalité, en reliant deux grandeurs entre elles : la première ligne représente le nombre de tours de pédalier effectués et la deuxième ligne donne la longueur (exprimée en mètres) parcourue par la roue.
Il suffit de multiplier les termes de la première ligne par 7 pour obtenir les termes correspondants de la 2$^{\text{ème}}$ ligne.
Le nombre 7 est le coefficient de proportionnalité qui représente la longueur parcourue par la roue du vélo en un tour de pédalier.

<u>Raisonnement de Louison</u>
Louison, après avoir mentalement converti 2,5 km en 2 500 m, construit un tableau en se disant qu'il lui suffira de multiplier le nombre de tours de pédaliers par 7 pour obtenir la distance parcourue. Il recherche donc le nombre de tours de pédalier qui permettent de parcourir 2500 mètres en faisant plusieurs essais qui visent à approcher le mieux possible cette distance. Ainsi pour 1000 et 500 tours, la distance parcourue est trop grande. Il essaie ensuite avec 300 tours, la distance est trop courte. Puis pour 400 tours, la distance est de nouveau trop grande. On peut remarquer que Louison n'a essayé qu'avec des centaines entières de tours de pédalier.

<u>Réponses possibles à l'aide du tableau</u>
À l'aide du tableau il peut donner la réponse à la question : « *Quelle est la distance parcourue par le vélo si on connaît le nombre de tours de pédaliers effectués ?* ».

Il peut aussi donner directement le nombre de tours de pédaliers nécessaires pour parcourir des distances trouvées précédemment (700 m, 7 000 m, etc.).

Question 1b
Deux procédures de calcul possibles pour poursuivre le travail

Il s'agit de trouver le nombre de tours de pédalier nécessaires pour parcourir la distance qui sépare l'école du domicile de Louison, soit 2 500 m, en s'appuyant sur la construction du tableau : il faudrait atteindre la valeur 2 500 m dans la deuxième ligne.

Voici les procédures possibles :

1- <u>Utilisation des propriétés de linéarité additives et multiplicatives liées au tableau de proportionnalité</u>

: 200

: 6

X 7	1	100	1000	500	300	400	50	5	2	357
	7	700	7000	3500	2100	2800	350	35	14	2499

: 6 **: 200**

Ainsi on s'approche à un mètre près de 2500 m. En faisant 357 tours entiers de pédaliers Louison aura parcouru 2499 m. Il lui restera un mètre à parcourir en faisant 1/7 de tour de pédalier.

2- <u>Utilisation du coefficient de proportionnalité</u>

X 7	1	100	?
	7	700	2500

Existe-t-il un nombre *n* tel que *n* x 7 = 2500 ?
On repère que 2 500 n'est pas un multiple de 7, donc il s'agit donc de trouver le multiple de 7 le plus proche.
On peut ainsi écrire 2 500 comme une somme de termes faisant apparaître le maximum de multiples de 7 : 2 500 = 2 100 + 350 + 49 + 1
Donc 2 500 = 7 x 300 + 7 x 50 + 7 x 7 + 1.
On en conclut qu'avec 357 tours de pédalier, Louison aura encore un mètre à parcourir pour effectuer la distance cherchée.

3- <u>On peut aussi procéder par essais et ajustements.</u>

Puisque 400 x 7 est plus grand que 2 500, et que 300 x 7 est plus petit, on calcule 350 x 7. Ce produit étant inférieur à 2 500, on calcule 360 x 7. On en déduit que le nombre cherché est compris entre 350 et 360.

Les calculs de 355 x 7 (plus petit que 2 500), puis 357 x 7 (plus petit que 2 500), puis 358 x 7(plus grand que 2 500) nous permettent de conclure.
En faisant 357 tours entiers de pédaliers Louison aura parcouru 2 499 m. Il lui restera encore un mètre à parcourir pour effectuer la distance cherchée.

Question 1c
Analyse de l'illustration

Sur le dessin, la mesure « 190 cm » représente le périmètre de la roue du VTT, c'est à dire la longueur parcourue en un tour de roue.
Or, cette distance est sans intérêt pour la question posée : un tour de pédalier ne correspond pas à un tour de roue mais dépend de la taille des différents plateaux (rôle des vitesses). Les élèves pourraient penser qu'un tour de pédalier correspond à un tour de roue (à moins qu'ils n'aient auparavant étudié le rôle des vitesses d'un vélo…).
Il y a donc incohérence avec les données précédentes et l'illustration va apporter de la confusion chez les élèves : ils risquent de vouloir utiliser cette « donnée inutile ».
Il semble donc préférable d'enlever l'illustration, à moins qu'un travail en physique ou en technologie sur le fonctionnement d'un VTT ait eu lieu préalablement avec les élèves.

Question 2 (sur l'exercice 1)

Question 2a
Compétences en calcul nécessaires pour aborder l'exercice

Selon les procédures mises en œuvre par les élèves, les calculs à effectuer peuvent utiliser :

- les multiples du nombre 4 ;
- le produit de nombres par 100 ;
- les décompositions d'écriture faisant intervenir des multiples de 4 ;
- les doubles et les moitiés ;
- la commutativité et l'associativité de la multiplication ;
- la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Par exemple, un élève peut dire :
2 000 = (5 x 400)   car 2 000 = 20 x 100 = (5 x 4) x 100 = 5 x 400.
Ou bien, il peut dénombrer le nombre de tours nécessaires en comptant mentalement 400, 800, 1200, 1600, 2000 (ce qui nécessite aussi de connaître les multiples de 4 ou de savoir les retrouver).

De même on peut calculer :   5 000 = 4 000 + 1 000 = 4 x 1 000 + 1 000
= 10 x 400 + 2 x 400 + 200
= 12 x 400 + 200.

Ou bien utiliser le résultat précédent et la proportionnalité entre le nombre de tours et la distance parcourue : pour 2000 mètres il faut 5 tours, donc pour 4000 mètres il faut 10 tours (2 fois plus), et pour 1000 mètres il faut 2 tours et demi (2 fois moins).

D'où :
pour 5000 mètres, il faut 12 tours et demi (10 + 2,5) et donc 5000 = 12 x 400 + 200.

Pour effectuer ces calculs,

- les élèves doivent bien maîtriser **le répertoire de 4 au-delà de 4 x 10** (cette compétence a été réactivée en calcul mental au début de la leçon) ;
- ils doivent savoir effectuer mentalement des produits par 100 ;
- ils doivent aussi être à l'aise sur la décomposition des nombres pour retrouver des produits connus ;
- ils doivent également maîtriser les propriétés de la multiplication (associativité et distributivité par rapport à l'addition notamment).

Ce sont à la fois des compétences de calcul automatisé (x 4 et x 100) et de calcul réfléchi.

Question 2b
Intérêt de l'exercice

Cet exercice propose une situation de partage équitable dans le cadre des mesures de longueur. Il va d'une part permettre de produire pour chaque distance proposée l'écriture attendue de la division euclidienne :

$a = b \times q + r$ avec $r < b$. b étant le diviseur, q le quotient et r le reste.

D'autre part, il donne du sens au quotient (q : nombre de tours complets) et au reste (r : distance qu'il reste à parcourir).

Il permet également de mettre en avant une procédure de recherche du quotient basée sur l'utilisation des multiples.

Question 3 (sur l'ensemble de la page)
Intérêts respectifs du calcul mental et du calcul instrumenté

Le calcul mental sous toutes ses formes donne un pouvoir d'anticipation sur les résultats à trouver. En utilisant les relations arithmétiques entre les nombres, le calcul mental (sous sa forme « calcul réfléchi ») va permettre de mettre en œuvre des stratégies rapides de résolution.
Par ailleurs, la pratique du calcul mental s'appuie sur les propriétés des opérations, ce qui en assure une première compréhension.

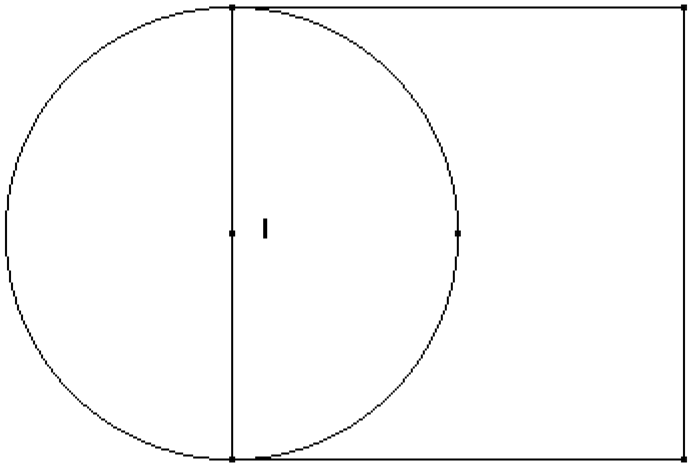
Le calcul instrumenté permet d'effectuer des calculs complexes, non maîtrisés encore par les élèves. La calculatrice soulage la tâche de l'élève, tout en lui permettant d'obtenir des réponses au problème posé. Par ailleurs, le calcul instrumenté permet d'effectuer des essais pour approcher les solutions d'un exercice.
En reprenant l'étude de l'activité, nous pouvons illustrer les propos précédents concernant la complémentarité du calcul mental et du calcul instrumenté.
Le tableau complété par Louison a pu être rempli uniquement par calcul mental puisqu'il s'agit de multiplier par 7 des centaines entières.

Mais pour la suite, quelle que soit la méthode utilisée (cf. question précédente), la calculatrice sera d'un bon secours. En effet, elle permettra de trouver (ou de vérifier) les décompositions additives de 2500 si on utilise les deux premières méthodes, ou d'effectuer les produits par 7 de nombres tels que 350, 357, … En allégeant les tâches de calcul, la calculatrice permet ici à l'élève de se concentrer uniquement sur la gestion de sa recherche et la signification des résultats obtenus.

PARTIE 2
(VOIR ANNEXE 2)

Question 1
Construction de la figure

Voici la figure qui était demandée aux élèves.



Quatre emplacements sont possibles pour le point I puisque le carré est composé de quatre côtés et qu'il y a un milieu par côté.
Cependant, quel que soit le côté choisi, on obtient toujours la même figure : seule change son orientation sur la feuille.

Question 2
Principales compétences mathématiques mises en œuvre

Pour réaliser cette construction, les élèves doivent connaître (vocabulaire et principales propriétés) et savoir construire (avec règle graduée, équerre et compas) les objets géométriques suivants :

- le carré (4 côtés de même longueur et 4 angles droits) ;
- le milieu d'un côté (un point qui partage un segment en deux segments de même longueur) ;
- le cercle (signification du centre et du rayon).

Ils doivent aussi savoir que, dans un programme de construction, chaque consigne est liée aux précédentes.

Question 3
Analyse des réponses des élèves pour la question b

a) 8 élèves sur 24 ont réussi la question b ce qui représente la fraction : $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

Ainsi un tiers des élèves ont réussi à placer correctement le point I.
Exprimé sous forme de pourcentage, ce score est donc d'environ 33,3%.

b) 15 élèves se sont trompés pour le placement du point I.

- Dans le premier cas, il y a confusion entre les termes « milieu » et « centre ». C'est une erreur fréquente liée à l'usage du langage commun qui utilise souvent le mot milieu pour désigner le centre, d'une ronde par exemple. Donc ici le milieu du côté du carré a été compris comme étant le centre du carré (intersection des deux diagonales). On peut penser aussi que l'expression « coté du carré » ait moins de poids que le mot « milieu ».

- Dans le deuxième cas, le point I est placé comme étant un sommet du carré. Cette fois-ci, la confusion est entre les termes « milieu » et « sommet ». Il est probable que le mot « côté » ait été plus significatif que « milieu » et ainsi le point I est placé à l'extrémité d'un des côtés.

- Dans le troisième cas, le point I est placé ailleurs. N'ayant pas les productions des élèves, l'analyse en est plus difficile.
  Si le point I se trouve sur un côté de carré, sans en être le milieu, il est possible que l'élève ne connaisse pas la signification du mot « milieu », ou que le mot « côté » ait été plus significatif que « milieu ».
  Si le point I est placé « à côté » du carré, il est ici encore probable que le mot « côté » ait été plus significatif que « milieu », mais cette fois avec la signification « à côté de ». Il est aussi possible que l'élève ait considéré qu'il s'agissait de deux constructions indépendantes à réaliser : d'une part, il construit le carré demandé, d'autre part, il construit un cercle de 3 cm de rayon et dont il nomme I le centre.

PARTIE 3
(VOIR ANNEXE 3)

Question 1
Deux solutions d'élèves utilisant des stratégies différentes

Voici différentes stratégies pour résoudre chacun des exercices de l'annexe 3 :

Exercice 1

Méthode 1
On calcule séparément le prix des croissants, puis celui des éclairs. On en déduit la somme dépensée, puis on cherche le complément à la dépense totale. Les sommes sont mises en centimes d'euro.
2 x 50 = 100 centimes donc 1 € pour les deux croissants ;
4 x 75 = 300 centimes donc 3 € pour les quatre éclairs.
3 + 1 + **…** = 5 donc le prix de la brioche est de 1 €.

Méthode 2
Le prix de la brioche se calcule directement par la différence de la somme totale (5 €) et du prix des croissants et des éclairs :
500 **-** (2 x 50 + 4 x 75) = 100 centimes donc 1 €.

Méthode 3
On soustrait successivement le prix des croissants, puis celui des éclairs (que l'on calcule comme pour la méthode 1) :
2 croissants coûtent 1 €, donc il « reste » 4 € pour les éclairs et la brioche.
4 éclairs coûtent 3 €, donc il « reste » 4 **-** 3 = 1 qui correspond au prix de la brioche.

Exercice 2

Méthode 1
On calcule le nombre de pommes, le nombre de poires, puis le nombre total de fruits. Enfin on compare ce nombre de fruits au nombre d'enfants.
18 x 6 = 108 représente le nombre de pommes ;
22 x 6 = 132 représente le nombre de poires ;
108 + 132 =240 représente le nombre total de fruits.
Il y a donc assez de fruits pour les 200 élèves.

Méthode 2
On calcule directement le nombre de fruits en remarquant que toutes les barquettes sont de 6 :
18 barquettes de 6 pommes et 22 barquettes de 6 poires, c'est la même chose que 40 barquettes de 6 fruits. Donc cela fait 240 (40 x 6) fruits.
Il y a donc assez de fruits pour les 200 élèves.

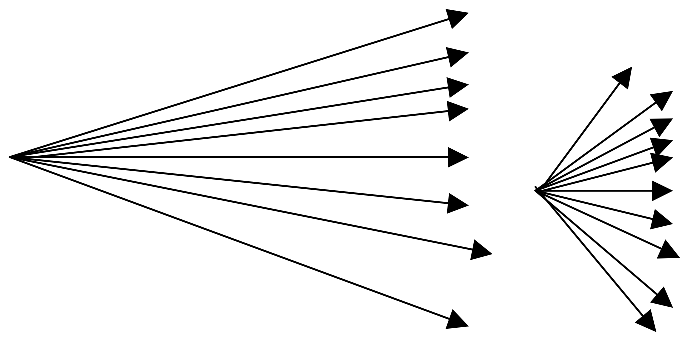
Méthode 3
Si on distribue toutes les pommes, cela permet de servir 108 (6×18) enfants.
Il reste donc 92 enfants à servir, soit moins de la moitié alors qu'il reste plus de la moitié de fruits (il y a plus de poires que de pommes) : on aura assez de fruits.
Variante 1 : 92 c'est moins de 100 et il reste plus de 18 barquettes donc plus de 100 fruits.
Variante 2 : On peut aussi calculer le nombre de poires disponibles et le comparer aux 92 enfants qui restent.

Exercice 3

Méthode 1
On calcule le nombre de glands par grosse branche : $8 \times 10 = 80$
On en déduit le nombre de glands total sachant qu'il y a 8 grosses branches :
8 x 80 = 640, donc il y a 640 glands.

Pour cette méthode, on peut aussi utiliser un arbre à calculs :

grosse branche	*petites branches*	*glands*
1	**8**	**80**



Pour une grosse branche, on obtient 80 glands, pour 8 grosses branches on obtient 640 (8 x 80) glands.

Méthode 2
On cherche le nombre de petites branches : 8 x 8 = 64.
On en déduit le nombre de glands sachant qu' il y a 10 glands par petites branches, c'est à dire 640 glands.

Exercice 4

Méthode 1
On calcule l'économie faite pour un ballon (50 centimes) et on en déduit l'économie pour les 12 ballons.
12 x 50 = 600 donc une économie de 6 €.

Méthode 2
On calcule l'économie totale par la différence entre le prix initial à payer et le prix effectivement payé pour l'ensemble des ballons.

12 x 3 - 12 x 2,50 = 36 - 30 = 6
L'économie est donc de 6 €.

Exercice 5

Méthode 1
En déduisant du périmètre le double de la largeur, on obtient le double de la longueur. On en déduit la mesure de la longueur.
15 + 15 + L + L = 100
Ainsi deux longueurs mesurent 70 (100 – 30) m. Donc une longueur mesure la moitié de 70 m soit 35 m.

Méthode 2
En déduisant du demi-périmètre la mesure de la largeur, on obtient la mesure de la longueur.
Le demi-périmètre vaut 50 m donc la longueur vaut 35 (50 – 15) m.

Dans les deux méthodes, on peut s'aider d'un schéma représentant le rectangle.

Exercice 6

Méthode 1
On cherche la consommation journalière d'une famille de 5 personnes, puis on en déduit la consommation annuelle de la famille.
(12 x 5) x 365 = 219 000
En une année de 365 jours, la famille consomme 219 000 litres d'eau.

Méthode 2
On calcule la consommation annuelle d'une personne, puis on en déduit la consommation annuelle de la famille.
(120 x 365) x 5 = 219 000
En une année de 365 jours, la famille consomme 219 000 litres d'eau.

Remarque :
Pour l'ensemble des exercices précédents, les élèves peuvent recourir à des schémas qui peuvent, pour certains, constituer une aide.

Question 2
Intérêt pédagogique de ce type de réflexion

L'intérêt pédagogique de ce type de réflexion - la recherche de plusieurs stratégies pour résoudre un même problème - est de montrer qu'un problème peut être envisagé de différentes façons selon la compréhension que l'on s'en fait. Même si la résultat final est unique, les procédures pour l'atteindre peuvent être variées. Il n'y a donc pas de résolution modèle :

- cela peut inciter les élèves à poursuivre leur recherche avec des procédures personnelles lorsqu'ils ne savent pas reconnaître (ou mettre en œuvre) « la » bonne procédure ;
- cela montre aussi aux élèves qu'il est parfois possible de vérifier leurs résultats en utilisant une autre méthode.

De plus, si l'on met en évidence les liens entre les différentes méthodes utilisées, cela peut renforcer chez les élèves la connaissance (et l'utilisation) des propriétés mathématiques.
Par exemple dans l'exercice 2 va apparaître la relation :
$18 \times 6 + 22 \times 6 = (18 + 22) \times 6$.
De même, dans l'exercice 6, on vérifie les propriétés de commutativité et d'associativité de la multiplication : $(120 \times 365) \times 5 = (120 \times 5) \times 365$.

Enfin, cette démarche d'enseignement peut favoriser les échanges entre les élèves et leur permettre d'accepter plus facilement le point de vue d'autrui : ainsi ils seront plus aptes à modifier leur propre point de vue et à adopter la méthode du voisin lorsque celle-ci s'avèrera plus efficace que la leur.

Question 3
Organisation pédagogique à mettre en place

Le nombre important d'exercices dans cette page de manuel, peut conduire à deux utilisations différentes :

- soit la sélection d'un ou deux exercices spécifiques, avec un travail des élèves sur des stratégies différentes ;
- soit la proposition de tous les exercices avec un simple travail de résolution, la multiplicité des méthodes apparaissant lors de la mise en commun.

Voici plusieurs propositions d'organisation pédagogique.

<u>Proposition 1</u>
L'enseignant choisit un seul exercice qui lui semble assez riche pour le choix des stratégies de résolution.
Il demande aux élèves, qu'il a regroupés par deux, de résoudre le problème et de rédiger leur solution sur une affiche.
Il organise une mise en commun à partir des affiches produites par les élèves en regroupant les stratégies communes.
À partir des différentes stratégies des élèves, il fait argumenter les solutions.
Il termine en synthétisant les propriétés mises en œuvre par les différentes procédures.

<u>Proposition 2</u>
L'enseignant choisit de ne donner aux élèves que les exercices 3 et 6 ou bien les exercices 2 et 4.
Les élèves doivent résoudre seuls chacun des deux exercices choisis.
Il regroupe les élèves par 4 et leur demande de confronter leurs résultats, puis leurs démarches.

Après avoir repéré les différentes stratégies utilisées par les élèves, il transcrit au tableau ces stratégies pour une mise en commun rapide.
Il termine en synthétisant les propriétés mises en œuvre par les différentes procédures.

<u>Proposition 3</u>
L'enseignant distribue la totalité des exercices aux élèves et leur demande de résoudre chacun d'eux (il demande une seule stratégie pour chaque exercice).
Les élèves font leur recherche sur leur cahier de brouillon et vont à leur rythme.
Le maître observe les procédures de ses élèves.
Il profite du moment de récréation, par exemple, pour sélectionner le ou les exercices sur lesquels va porter la mise en commun.
De retour en classe, la mise en commun se fera à partir de la transcription faite par le maître de solutions d'élèves.
Il termine en synthétisant les propriétés mises en œuvre par les différentes procédures.
Dans ce cas, le maître essaye de gérer l'hétérogénéité de ses élèves : certains feront tous les exercices, d'autres n'en feront que quelques-uns.