

Autour du thème de la mesure

Joël Briand - François Colmez - Guy Brousseau.

Extrait de Document pour les formateurs, qui accompagne les annales du CRPE 1998.

La rédaction des annales 1998 a mis en évidence certaines ambiguïtés relatives aux questions sur la mesure. Il a alors semblé nécessaire de faire un état des lieux à l'intention des formateurs ainsi que de formuler quelques recommandations, pour préciser les attentes vis à vis des PEI. Il est apparu nécessaire de s'interroger sur les abus de langage qu'il est normal d'accepter. L'article commence par l'examen de quelques extraits de sujets, puis propose une mise au point mathématique.

1. Examen des sujets 1998 et du traitement de la mesure

a) Longueur et mesure :

Sujet de Bordeaux 98

Un grand cube est constitué de 512 petits cubes identiques juxtaposés, de 2 cm de côté chacun. Quelle est, en centimètres, la longueur d'une arête du grand cube ? Quel est, en litres, son volume ? Quelle est, en décimètres carrés, son aire ?

Il s'agit de la mesure en cm et non de la longueur¹.

Sujet de Bordeaux 98

Il est écrit : « En déduire la longueur en millimètres du côté d'un octogone régulier ».

Il s'agit de la mesure en millimètres et non de la longueur.

Sujet d'Orléans 98

Page 2 Exercice 2
Une unité de longueur est fixée.
On constitue un puzzle en découpant.....
Les longueurs sont toutes égales à 5.

L'énoncé est incorrect : il introduit une unité de longueur qu'il ne nomme pas et écrit : les longueurs sont toutes égales à 5. Il faut le signaler et rectifier, par exemple en nommant cette unité u et en écrivant 5u. Ce qui évitera de passer

¹ NDLR : ce qui est écrit en italique correspond aux remarques faites, par les auteurs de cet article, concernant les énoncés des sujets du CRPE.

Grandeurs et mesure

subrepticement au centimètre carré au lieu de u^2 (manifestement en contradiction avec les dimensions du dessin fourni par le sujet).

Sujet de Rouen 98 (2^{ème} sujet)

Exercice 1

- a) « quelles relations doivent vérifier les dimensions x et y d'un rectangle de la famille F »
b) « si une dimension d'un rectangle R de la famille F est 3 cm, quelle est l'autre dimension ? »

L'énoncé laisse entendre que x et y sont des longueurs ; il sera plus commode de décider que x et y sont les mesures en cm des côtés d'un rectangle.

On dira ainsi correctement

- Ce segment a pour longueur 11 cm ou est de longueur 11 cm
- La longueur de ce segment est 11 cm
- La mesure en cm de ce segment est 11

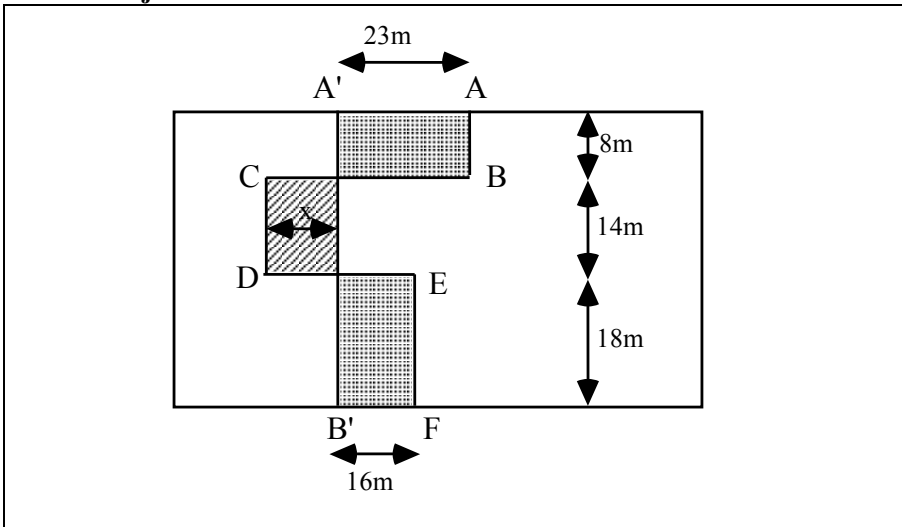
Par contre sont incorrectes des phrases telles que :

- La mesure de ce segment est 11 cm
- La longueur de ce segment est 11 en cm
- Dans les écritures symboliques : $3 \times 4 = 12$ cm est à proscrire.

b) Cohérence texte - dessin :

Il y a souvent aussi un problème de cohérence entre le texte et le dessin.

Sujet de Nice 97



D'après le dessin, conforme au sujet, x est une longueur et non une mesure ; ce qui compliquerait la rédaction, si on suivait cette indication.

Ce qui explique le texte dans la correction : « Nous désignerons par x la mesure, l'unité étant le mètre, de la longueur cherchée ».

Si, sur le dessin figurent des indications de longueurs connues (3 cm) et une longueur inconnue notée x , alors x désigne une longueur et non une mesure. On ne peut donc pas utiliser la même lettre x pour désigner la mesure.

Si on veut travailler avec des nombres (mesures) il faut donc introduire une nouvelle lettre et écrire, par exemple, $x = a$ cm, faire les calculs avec le nombre a et en conclusion écrire : $x = \dots$ cm.

On peut aussi travailler sur les grandeurs et écrire une aire sous la forme : 3 cm (multiplié par) x . Mais ce qui est de loin le plus commode, c'est, dès l'énoncé, porter sur le dessin non pas x mais x cm, ce qui fait de x une mesure (un nombre).

c) Lettres dans formules :

Dans les formules, le choix des lettres est généralement consacré par l'usage et a une fonction mnémotechnique (B ou b pour base, h pour hauteur, R pour rayon, A pour aire, V pour volume). Par ailleurs, ces lettres peuvent désigner :

- Soit des grandeurs,
- Soit des nombres, mesures de ces grandeurs ; dans ce cas, dans le cours du calcul, on sous-entend les unités, QUI DOIVENT ÊTRE COHÉRENTES.

Pour les angles c'est la même chose :

L'angle droit n'a pas pour mesure 90° ou $\pi/2$ rad ; il est égal à 90° et il est égal à $\pi/2$ rad. On peut écrire $90^\circ = \pi/2$ rad, comme on écrit $1 \text{ m} = 1000 \text{ mm}$ ou $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$. L'expression « angle de 90° » est correcte.

d) Abréviations :

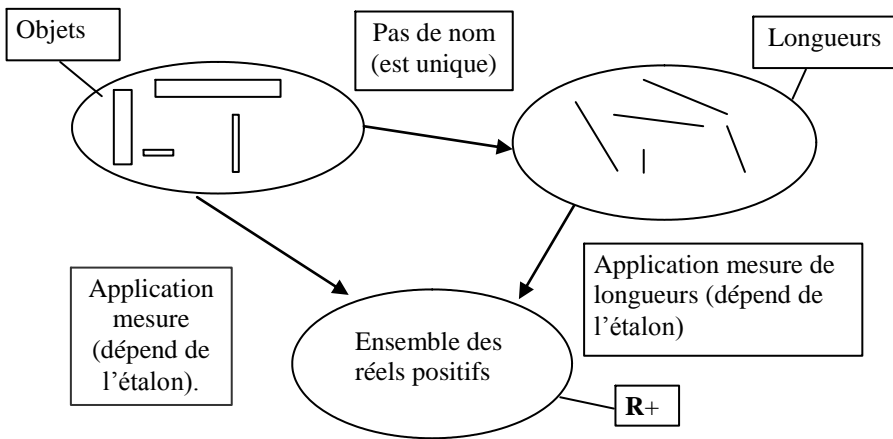
Le symbole du litre est L (majuscule) pour éviter la confusion avec le nombre 1 qui ne se distingue pas, très souvent, de la lettre l (minuscule). Alors le symbole de centilitre est cL. C'est le seul symbole majuscule utilisé en tant qu'initiale de nom commun ; par contre les initiales de noms propres sont systématiquement majuscules. Ces normes sont celles de l'AFNOR ; elles sont internationales et ont valeur légale.

2. Mise au point théorique

Le modèle mathématique comporte trois ensembles : les objets, les grandeurs, les nombres et trois applications.

- La première à chaque objet associe sa grandeur, pour une grandeur donnée (par exemple, à un segment sa longueur, à une surface son aire).
- La deuxième à chaque objet associe sa mesure : c'est la modélisation d'un protocole expérimental qui permet d'obtenir le rapport entre la grandeur de l'objet générique et la grandeur d'un objet étalon choisi arbitrairement et dont la grandeur est appelée unité ; il y a donc autant d'application de ce type que de choix d'objet étalon, alors que la première application est unique.
- La troisième associe à chaque grandeur sa mesure pour la grandeur unité choisie (le rapport de ces grandeurs). Ce nombre est un réel positif.

Ces applications ne sont pas indépendantes : la deuxième est la composée de la première par la troisième. On peut aussi considérer que l'ensemble des grandeurs est le quotient de l'ensemble des objets par la relation d'équivalence, indépendante de l'unité choisie, "a même mesure que" (mais ceci est hors de propos dans l'enseignement élémentaire).



Le vocabulaire n'est pas satisfaisant

- Il n'y a pas de mot, pour désigner chaque application, autre que le nom des éléments de l'ensemble d'arrivée (on serait obligé de dire, par exemple, application longueur) ; ce qui induirait une confusion entre cette application et

l'image d'un élément par cette application ; mais en fait, on ne parle pas de l'application.

- C'est le même mot "mesure" qui sert pour les deux dernières applications, et, qui plus est, pour toutes les grandeurs.

Convenons de :

- ne pas appeler grandeur ce qui est une mesure (un nombre)
- ne pas appeler mesure ce qui est une grandeur
- ne pas mélanger dans une expression ou une égalité des grandeurs et des nombres.

Remarques

- Toute relation entre grandeurs génère une relation entre mesures (la même) à condition que les unités soient cohérentes : si, par exemple les longueurs sont mesurées en pouce, les aires doivent l'être en pouce carré.

- En particulier, le rapport de deux grandeurs de même nature est le même nombre que le rapport de leurs mesures (quelle que soit l'unité).

- Par contre le quotient de deux grandeurs de natures différentes est une grandeur et non pas un nombre.

Exemple : $6 \text{ m}^2/3 \text{ km} = 2 \text{ m}^2/\text{km} = 2\text{km.m}/\text{km} = 2 \text{ mm}$;

ce qu'on peut écrire aussi : $6 \text{ m}^2/3 \text{ km} = 2 \text{ m}^2/1 \text{ km} = 2\text{mm}$. $1\text{km}/1 \text{ km} = 2 \text{ mm}$;
ou en faisant d'abord des conversions : $6 \text{ m}^2/3 \text{ km} = 6\text{m}^2/3000 \text{ m} = 0,002 \text{ m} = 2 \text{ mm}$.

*Complément : Texte de Guy Brousseau.
Extrait des annales du CRPE de 1995, p.263.*

La mesure

La mesure et le mesurage sont des pratiques complexes bien que très anciennes. Le mot mesure est employé dans des sens très différents. Pour éviter les malentendus, quelques termes techniques sont indispensables. Il faut maintenir clairs leurs différents emplois **par l'usage** :

1. Il faut d'abord distinguer l'objet matériel, support de la mesure (un petit pain par exemple), le type de « grandeur » (son poids, son prix?) et l'objet souvent immatériel de la mesure (sa « longueur », son diamètre). Et ceci, même lorsqu'on commet des abus pour éviter des expressions ridicules (on pourrait dire « la longueur de la longueur du petit pain », c'est à dire la longueur - type de mesure - de la longueur – segment le plus long contenu dans l'objet – du petit pain).

Grandeurs et mesure

2. La mesure d'un objet est aussi la classe de tous les objets immatériels équivalents du point de vue de ce type mesure : segments susceptibles de coïncider par un déplacement, masses s'équilibrant dans une pesée, etc.

3. L'emploi mathématique du mot « mesure » est limité aux cas où les objets sont « mesurables » c'est à dire où ils possèdent certaines propriétés (la température n'est pas une mesure en ce sens) qui permettent de faire correspondre à ces objets des nombres réels positifs. Cette correspondance s'appelle une *mesure*, c'est une fonction. L'image d'un objet mesurable par une mesure s'appelle aussi sa mesure : c'est donc un nombre. La mesure des mathématiciens ne comprend pas d'indication d'unité. C'est parce que l'objet de la théorie de la mesure ne dépend pas des unités choisies.

4. Dans les situations concrètes, au contraire, la mesure d'un objet est formée d'un couple: (un nombre; une unité de mesure socialement convenue ou un étalon improvisé). On pourrait appeler ce couple *mesure concrète*.

5. Le mesurage est l'opération par laquelle on veut

- soit assigner à un objet « une » mesure concrète. En fait, on doit se contenter d'un intervalle d'incertitude : soit un encadrement, soit une valeur approchée ou estimée et une approximation (un intervalle de confiance, une « erreur maximum » etc.). On pourrait appeler *mesure effective* le triplet (unité de mesure, valeur approchée, intervalle, d'approximation).

- soit réaliser un objet dont la mesure concrète a été donnée (dessiner un segment de droite de longueur 8 cm). La précision est alors une indication fournie avec l'objet.

6. L'indication d'une mesure, même concrète et effective, est, généralement, insuffisante pour indiquer la « grandeur de l'objet » au sens de sa taille relativement aux objets de même nature (si ces derniers ne sont pas familiers, par exemple : une vitesse de sédimentation de 75). Cette « mesure » (qui n'a pas besoin d'unité) s'exprime par la rareté » de la mesure concrète, par exemple par le pourcentage d'objets de cette famille plus grands ou plus petits que l'objet en question.