CONCOURS
SEPTEMBRE 2012

CORRIGÉS

GROUPEMENT 1– SEPTEMBRE 2012

La calculatrice est autorisée pour cette épreuve.

EXERCICE 1 :

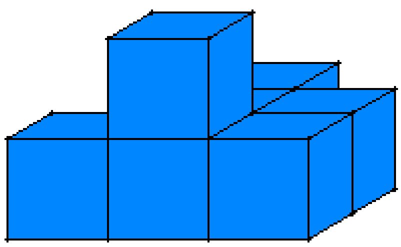
Affirmation 1 : faux.
D'après les notations de la figure, les trois carrés sont de mesures d'aires respectives $32cm^2$, $64cm^2$ et $100cm^2$. Si la construction de cette figure était possible, comme les trois carrés enferment un triangle rectangle (codage d'un angle droit dans le triangle et cela est précisé dans l'énoncé), la relation de Pythagore devrait être vérifiée et donnerait : 100=64+32, ce qui est faux.

Affirmation 2 : faux.
18 est multiple de 6 et de 9 mais pas de 54.
Remarque : la propriété vraie que l'on montre généralement nécessite une hypothèse. Elle s'énonce ainsi : Lorsque *b* et *c* sont deux nombres premiers entre eux, alors tout nombre *a* qui est multiple de b et multiple de c, est aussi multiple de *bc*.

Affirmation 3 : vrai.
On a x+y=400. D'où (x+3) (y+3)= xy + 3x + 3y + 9 = xy + 3(x+y) + 9 =xy + 3(400) + 9=xy+1209 .

Affirmation 4 : faux.
Si on suppose que chaque vache mange la même quantité par jour, et si on note R la quantité de réserve alors R nourrit 8 vaches en 20 jours, R/20 nourrit 8 vaches par jour, et R/160 nourrit 1 vache par jour.
Donc pour nourrir 10 vaches en 1 jour il lui faut 10 R/160, soit R/16, et pour 10 vaches en 18 jours il lui faut 18R/16. Comme 18R/16> R, il lui faut donc plus que sa réserve.

Affirmation 5 : vrai.
On construit une première couche de cube avec les cubes disposés comme sur la vue de dessus. Puis on rajoute un cube en seconde couche, avec la face ajustée sur le cube du milieu de la première rangée.



Affirmation 6 : faux.
Examinons tous les cas possibles de positionnement de la parenthèse ouvrante (et pour chacun de ces cas envisageons tous les positionnements de la parenthèse fermante).

1) (devant 8
   (8×7)+3×5=71
   (8×7+3)×5=295
   (8×7+3×5)=71
2) (devant 7
   8×(7+3)×5=400
   8×(7+3×5)=176
3) (devant 3
   8×7+(3×5)=71
   On observe que le nombre 283 n'est jamais obtenu.

Remarque : il faut trouver un algorithme d'énumération de tous les cas possibles.

EXERCICE 2 :

1. D $\in$ [AB] donc DB = AB-AD. Comme AB = 1 et AD = x on a : **DB = 1 − *x*.**
Le triangle ABC est isocèle rectangle en A,
on a donc $\widehat{BAC} = 90°\ et\ \ \widehat{ACB} = \widehat{ABC} = \frac{180°-90°}{2} = 45°$.
ADEF étant un rectangle, on déduit que ses quatre angles sont droits, en particulier (AD) $\perp$(DE) et donc, comme A, D et B sont alignés, on a également (BD) $\perp$(DE). **BDE est donc rectangle** en D avec $\widehat{DBE}$ = 45° car $\widehat{ABC}$ = $\widehat{DBE}$.
Donc $\widehat{DEB} = 180° - \widehat{BDE} - \widehat{DBE} = 180° - 90° - 45° = 45°$. Donc BDE a deux angles égaux (à 45°) et est par conséquent **isocèle** en D.
Donc **DE = DB = 1 − *x*.**
L'aire du rectangle ADEF où DE=1-*x* et AD = *x* vaut : $f(x) = x \times (1-x) = x - x^2$

2. (a) Dans B2 on a pu mettre une des formules suivantes :
"=A2*(1-A2)" ou « =A2 – A2*A2 » ou « =A2- PUISSANCE(A2 ;2) » ….
Ou toute autre formule revenant au même calcul.

2. (b) Non !
Pour les 11 valeurs de *f(x)* sur [0;1] on remarque que f croît sur [0 ;5] et décroît sur [0,5 ; 1]. On est donc sûr que le maximum est atteint sur]0,4 ; 0,6[. Mais il peut être atteint sur]0,4 ; 0,5[, sur]0,5 ; 0,6[ou en 0,5. Seule une étude continue au voisinage de 0,5 peut lever l'ambiguïté.

3. (a)
On développe l'expression donnée dans l'énoncé :
$$-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = -\left(x^2 - 2\times\frac{1}{2}\times x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} = -x^2 + x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = -x^2 + x = f(x)$$

(b) Un carré est toujours positif.
On a donc $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, d'où $-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$ et $-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$; donc pour tout x, on a $f(x) \leq \frac{1}{4}$.
Cette valeur de $\frac{1}{4}$ est atteinte lorsque $-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = 0$, c'est-à-dire lorsque $x = \frac{1}{2}$.
Donc $\frac{1}{4}$ est maximum de *f(x)* atteint pour $x = \frac{1}{2}$. **L'aire maximale recherchée est $\frac{1}{4}$.**

(c) La fonction f atteint son maximum en $x = \frac{1}{2}$. Dans ce cas AD = $x = \frac{1}{2}$ et DE = 1 – x = 1 - $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$
Donc le rectangle ADEF est un carré.

PARTIE B

1.
Comme G est le projeté orthogonal de D sur [BC] et que D varie sur [BA], G varie entre B (projeté orthogonal de B sur [BC] et J projeté orthogonal de A sur [BC]. Comme ABC est isocèle en A, (AJ) hauteur est aussi médiatrice donc J est milieu de [BC].
Donc G varie entre B et J où J est milieu de [BC].
On a donc 0≤ *BG* ≤BJ , d'où 0≤ x ≤ ½ BC
Or, d'après le théorème de Pythagore dans ABC rectangle en A :
$AB^2 + AC^2 = BC^2$, soit BC = $\sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{2}$.
Donc BJ = ½ BC = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et ***x* prend ses valeurs dans l'intervalle [0 ; $\frac{\sqrt{2}}{2}$].**

2. Déterminons les dimensions du rectangle DEFG.
Par symétrie par rapport à (AJ) dans le triangle isocèle BAC, BG = AF =x.
Donc **GF =** BC – BG – AF = BC – 2BG **= $\sqrt{2}$ - 2*x* .**
Le triangle BGD est rectangle isocèle en G.
En effet, l'angle en G est droit (DEFG es tun rectangle), l'angle en B vaut 45° (le triangle ABC est rectangle isocèle en A), donc l'angle en D vaut aussi 180°–90°–45°= 45°.
Donc **DG=**BG**=*x*.**
L'aire de DEFG vaut : **g(x) =** DG × GF = x × ($\sqrt{2}$ − 2 x) **= $x\sqrt{2}$ − $2x^2$.**

3.
a) L'aire g(x) vaut 0,2, ce qui correspond à une ordonnée 0,2 sur l'axe des ordonnées de la représentation graphique de la courbe de g. On cherche x tel que *g(x)*=0,2. La droite horizontale

d'équation y = 0, 2 coupe la courbe de la fonction g en deux points d'abscisses x_1 et x_2, dont les coordonnées vérifient y= g(x) et y=0,2. On obtient x_1 et x_2, en projetant orthogonalement ces points d'intersection sur l'axe des abscisses. Graphiquement on lit $x_1 \approx 0,2$ et $x_2 \approx 0,5$. Il y a donc, graphiquement, deux positions possibles pour le point G.
Remarque : garder les traits de construction sur le graphique pour servir de justification !

b) L'aire *g(x)* est maximale lorsque la courbe de g admet un sommet. Graphiquement, on lit une valeur x_m correspondant au sommet de la courbe pour $x_m \approx 0,35$ et $g(x_m) \approx 0,25$.
La garantie de la précision de lecture au centième près ne peut être confirmée que par le calcul.

c) La lecture graphique semble indiquer que le maximum x_m se situe au milieu de l'intervalle $[0 ; \frac{\sqrt{2}}{2}]$.
On conjecture donc que $x_m = \frac{\sqrt{2}}{4}$ et dans ce cas $g(x_m) = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{2} - 2(\frac{\sqrt{2}}{4})^2 = \frac{1}{4}$.
Démontrons rigoureusement que $\frac{1}{4}$ est maximum.
$\frac{1}{4} - g(x) = \frac{1}{4} - \sqrt{2}\,x + 2x^2 = (\frac{1}{2} - \sqrt{2}\,x)^2 > 0$ pour $x \neq \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.
Donc $\frac{1}{4}$ est bien un maximum, atteint pour $x_m = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Comme la fonction g est une fonction quadratique on sait qu'elle a un seul maximum.
Dans ce cas, DG = $x_m = \frac{\sqrt{2}}{4}$ et GF = $\sqrt{2} - 2x = = \sqrt{2} - 2\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Donc GF=2DG donc le rectangle n'est pas carré (c'est un demi-carré).

<u>Autre démonstration</u> : On sait que DG = x, est l'un des côtés de DEFG.
Si DEFG était un carré lorsque l'aire est maximale, cette aire $g(x_m)$ serait égale au carré de DG = x_m.
Or la lecture graphique donne d'une part $g(x_m) \approx 0,25$ et d'autre part $x_m^2 \approx 0,35^2 \approx 0,1225$.
Ces deux valeurs sont suffisamment éloignées pour que l'on puisse conclure que DEFG n'est pas un carré (et on remarque là aussi que 0,1225 est la moitié de 0,25).

<u>EXERCICE 3 :</u>

1. On utilise le critère de divisibilité d'un nombre par 11 : A_n est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme de ses chiffres de rang pair et la somme de ses chiffres de rang impair est divisible par 11.
Si n est pair, A_n possède un nombre pair de chiffres, cette différence vaut 0, qui est divisible par 11, donc, d'après le critère de divisibilité par 11, **A_n est divisible par 11.**
Si n est impair, A_n possède un nombre impair de chiffres, la différence vaut 1 qui n'est pas divisible par 11, donc, d'après le critère de divisibilité par 11, **A_n n'est pas divisible par 11.**

2.
Si A_n est divisible par 33, comme 33 se décompose en 33=3×11, alors il est divisible par 3 et par 11.

D'après la question 1, pour que An soit divisible par 11 il faut que n soit pair, donc divisible par 2.
D'après le critère de divisibilité par 3, pour que A_n soit divisible par 3 il faut que la somme de ses chiffres, c'est-à-dire ici n , soit divisible par 3.
Comme 2 et 3 sont premiers entre eux pour que n soit à la fois multiple de 2 et de 3, il faut qu'il soit multiple de 6, donc de la forme n=6p.

Réciproquement si n=6p, alors n est pair et d'après la question 1, A_n est multiple de 11. De plus n, somme des chiffres de A_n, est multiple de 3, donc A_n est multiple de 3. Comme 3 et 11 sont premiers (et donc premiers entre eux), A_n est multiple de 3×11=33.

Donc : A_n est multiple de 33 si et seulement si n est multiple de 6.

GROUPEMENT 2 – SEPTEMBRE 2012

La calculatrice est autorisée pour cette épreuve.

EXERCICE 1 :

1. Affirmation 1 : pour tout nombre entier naturel n, le nombre $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7
Pour tout entier naturel *n* on a

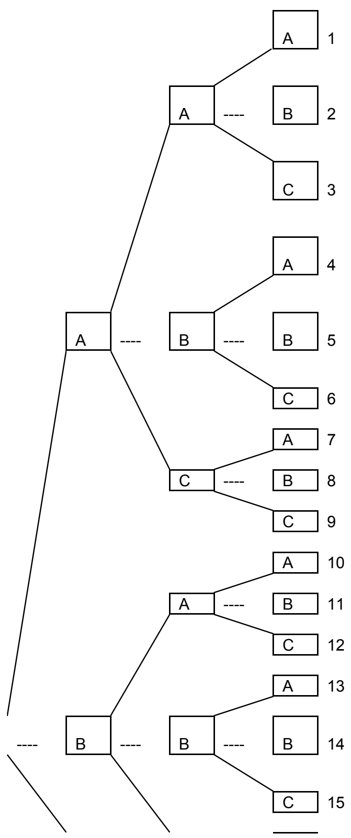
$$\begin{aligned} 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} &= 2^n(1 + 2 + 2^2) \\ &= 2^n(1 + 2 + 4) \\ &= 2^n \times 7 \end{aligned}$$

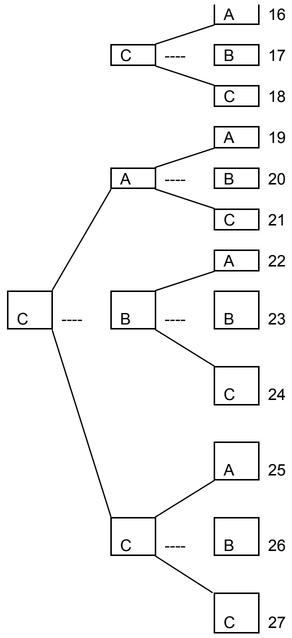
donc $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.
L'affirmation 1 est vraie.
Remarque :
Il ne suffit pas de vérifier sur plusieurs exemples.

2. Affirmation 2 : La probabilité que toutes les réponses soient justes est $\frac{1}{27}$.

Martin a trois réponses possibles pour la première question dont une seule bonne réponse donc il y a une chance sur trois pour que Martin donne la bonne réponse à la première question. De même pour la deuxième et pour la troisième question. Les événements « donner la réponse juste à une question donnée » sont indépendants. La probabilité pour que Martin donne les tois bonnes réponses au hasard est donc $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$.
L'affirmation 2 est vraie.

<u>*Autre méthode :*</u>
On peut utiliser un arbre. Les réponses à chaque question sont nommées A, B, C. On liste toutes les réponses possibles AAA, AAB, AAC, ABA,…..CCC. Cela correspond à l'arbre suivant :





Une seule combinaison correspond aux trois réponses justes. L'arbre admet 27 issues. Il y a donc une chance sur 27 pour que Martin donne les tois bonnes réponses.

Affirmation 3 : La probabilité que toutes les réponses soient fausses est $\frac{1}{3}$**.**

Pour chaque question, il y a 2 réponses fausses possibles sur 3 et donc la probabilité que toutes les réponses soient fausses est $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{8}{27}$.
L'affirmation 3 est fausse.

Remarque :
Attention ce n'est pas l'événement contraire du précédent

3. Affirmation 4 : Le rapport entre l'aire du disque central et l'aire grisée dans la figure de gauche est égal au rapport entre l'aire du carré central et l'aire grisée dans la figure de droite.

L'aire du disque central est $\pi \times 5^2 = 25\pi$ (en cm^2) ; l'aire grisée correspond à :
$\pi \times 25^2 - \pi \times 20^2 = \pi \times (625 - 400)$ soit 225π (en cm^2).

Le rapport entre l'aire du disque central et l'aire grisée est donc $\frac{25\pi}{225\pi} = \frac{1}{9}$.

L'aire du carré central est $10^2 = 100$ en cm^2
L'aire de la partie grisée est $50^2 - 40^2 = 2500 - 1600$ soit 900 (en cm²).

Le rapport entre l'aire du carré central et l'aire grisée est donc $\frac{100}{900} = \frac{1}{9}$. Les deux rapports sont égaux. **L'affirmation 4 est vraie.**

<u>Autre méthode :</u>
On note *r* le rayon du disque central. L'aire du disque central vaut πr^2 et l'aire de la zone hachurée dans la figure de gauche vaut $\pi \times (5r)^2 - \pi \times (4r)^2 = \pi \times 9r^2$. Le rapport de l'aire du disque central sur l'aire grisée est donc $\frac{\pi r^2}{\pi 9r^2} = \frac{1}{9}$**.**
De même, on note *a* le côté du carré central dans la figure de droite. L'aire du carré central est *a²*. L'aire de la partie grisée est $(5a)^2 - (4a)^2 = 9a^2$. Le rapport entre l'aire du carré central et l'aire grisée est donc $\frac{a^2}{9a^2} = \frac{1}{9}$ **.** Les deux rapports sont égaux.

<u>Autre méthode :</u>

Dans un agrandissement, si les dimensions d'une figure sont multipliées par k, son aire est multipliée par k^2. Soit A l'aire du disque central. Comme le rayon du plus grand des disques blancs est 4 fois plus grand que le rayon du disque central, l'aire du grand disque blanc est $16 \times A$. Le rayon du plus grand disque est 5 fois celui du disque central donc l'aire du grand disque est $25 \times A$.
L'aire de la zone grisée, différence entre les aires de ces deux disques est donc égale à :
$25A - 16A = 9A.$
Le rapport de l'aire du disque central sur l'aire grisée est donc $\frac{A}{9A} = \frac{1}{9}$.
On fera un raisonnement exactement identique sur les carrés pour montrer que le rapport de l'aire du carré central sur l'aire grisée est également $\frac{1}{9}$.

EXERCICE 2 :

1. BATU est un rectangle
Montrons d'abord que le quadrilatère BATU est un parallélogramme. Pour cela nous allons démontrer que ses côtés sont deux à deux sur des parallèles.
Par construction des points B et U, les droites (BU) et (ER) sont parallèles. T et A sont des points de (ER), on en déduit que (BU) est parallèle à (TA).
Démontrons le parallélisme des droites (BM) et (CP).

1ère méthode : avec la réciproque du théorème de Thalès
CRPE est un carré, donc $RC = RP$. Par construction on a $BP = MC$ et par conséquent $RM = RB$.
Les rapports $\frac{RM}{RC}$ et $\frac{RB}{RP}$ sont donc égaux. Les points R, M, C et R, B, P sont alignés dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, on peut affirmer que les droites (BM) et (CP) sont parallèles.

2ème méthode : avec les propriétés de la symétrie orthogonale
La droite (ER) est un axe de symétrie du carré car c'est une de ses diagonales. P et C sont symétriques par rapport à cet axe et les segments [PR] et [RC] sont symétriques. Le symétrique de M est donc sur le segment [PR] et sa distance à P est égale à CM (conservation des longueurs), il est donc confondu avec le point B. Par définition de la symétrie d'axe (ER), on peut affirmer que les droites (CP) et (MB) sont perpendiculaires à l'axe (ER) et par conséquent elles sont parallèles entre elles.

Le quadrilatère BATU a ses côtés opposés parallèles deux à deux, donc c'est un parallélogramme.
De plus CRPE est un carré donc les diagonales (ER) et (PC) sont perpendiculaires. Ainsi les droites (TA) et (UT) sont perpendiculaires.
Le parallélogramme BATU a un angle droit et par conséquent c'est un rectangle.

2. a. Intervalle de variation de x
Le point M appartient au segment [CR] et M est distinct de C et de R.
Donc x varie dans l'intervalle ouvert]0 ; 40[.

2. b. Expression de UB en fonction de x
1ère méthode : avec Pythagore
D'après la question précédente, le triangle PUB est rectangle en U et l'angle $\widehat{UPB}$ = 45° car [PC] qui est une diagonale du carré est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{EPR}$.
Le triangle PUB est donc rectangle isocèle, en effet la somme des angles dans un triangle étant égale à 180°, on a $\widehat{UPB} = 45°$; $\widehat{PUB} = 90°$ donc $\widehat{PBU} = 45°$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle PUB, on a :
$BP^2 = PU^2 + UB^2$ avec $PU = UB$ et $BP = CM = x$ d'où $x^2 = 2UB^2$ et $UB^2 = \frac{x^2}{2}$.
On en déduit que $\boldsymbol{UB = \frac{\sqrt{2}}{2}x}$.

2ème méthode : avec Thalès

CRPE est un carré donc $CR = RP = 40$. Par construction $PB = CM = x$.
D'autre part, $ER = \sqrt{2}PR$, donc $ER = 40\sqrt{2}$ (par Pythagore) et $TR = 20\sqrt{2}$.
D'après la question précédente, (BU) est parallèle à (RT). Les points P, B, R et P, U, T sont alignés dans cet ordre. (BU) est parallèle à (RT). Le théorème de Thalès implique $\frac{PB}{PR} = \frac{UB}{TR}$.
Ainsi $\frac{x}{40} = \frac{UB}{20\sqrt{2}}$. Ceci implique $\boldsymbol{UB = \frac{\sqrt{2}}{2}x}$**.**

Remarque
On peut aussi utiliser la trigonométrie avec par exemple $\sin \widehat{UPB} = \frac{BU}{BP} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. c. Expression de TU en fonction de x
1[ère] méthode : avec Pythagore
[PC] est une diagonale du carré de côté [CR] donc $PC = \sqrt{2}CR$ (par Pythagore). T est le milieu de [PC], donc $PT = \frac{\sqrt{2}}{2}CR$. La première méthode de la question précédente donne $PU = UB = \frac{\sqrt{2}}{2}x$, on en déduit que $UT = \frac{\sqrt{2}}{2}CR - \frac{\sqrt{2}}{2}x$, donc $\boldsymbol{UT = \frac{\sqrt{2}}{2}(40 - x)}$**.**

2[ème] méthode : avec Thalès
Les points P, B, R et P, U, T sont alignés dans cet ordre. (BU) est parallèle à (RT). La seconde méthode de la question précédente donne PT = 20$\sqrt{2}$. Le théorème de Thalès implique $\frac{PB}{PR} = \frac{PU}{PT}$.
Ainsi $\frac{x}{40} = \frac{PU}{20\sqrt{2}}$**.** Ceci implique $PU = \frac{\sqrt{2}}{2}x$. On déduit $UT = PT - PU = 20\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x$
donc $\boldsymbol{UT = \sqrt{2}(20 - \frac{1}{2}x)}$**.**

2. d. Aire du rectangle BATU en fonction de x
L'aire du rectangle BATU vaut $A(x) = BU \times UT$ donc $A(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x \times \frac{\sqrt{2}}{2}(40 - x)$.
On en déduit $\boldsymbol{A(x) = \frac{x(40-x)}{2}}$**.**

3. Valeur graphique de x pour laquelle l'aire est maximale
L'aire maximale lue sur le graphique vaut 200 et on lit la valeur de $\boldsymbol{x}$ correspondante qui est 20.

4. a. Expression de $A(x)$
On a trouvé $A(x) = \frac{x(40-x)}{2}$ en question 2.d.
Pour démontrer l'égalité, on va développer l'expression $\frac{-(x-20)^2}{2}$ + 200 :

$$\begin{aligned} \frac{-(x-20)^2}{2} + 200 &= \frac{-1}{2}(x^2 - 40x + 400) + 200 \\ &= \frac{-1}{2}(x^2 - 40x) - \frac{400}{2} + 200 \\ &= \frac{-1}{2}(x^2 - 40x) \\ &= \frac{1}{2}x(40 - x) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boldsymbol{A(x) = \frac{-(x-20)^2}{2} + 200}$.

4. b. Aire maximale
Le carré d'un nombre est toujours positif, donc $\frac{-(x-20)^2}{2}$ est négatif.
Pour que $A(x) = \frac{-(x-20)^2}{2} + 200$ soit maximale, il faut que $\frac{-(x-20)^2}{2}$ soit minimum c'est à dire nul.
$\frac{-(x-20)^2}{2} = 0$ équivaut à $(x - 20) = 0$, c'est-à-dire $x = 20$.
L'aire maximale est atteinte pour $\boldsymbol{x = 20}$**.**

4. c. BATU est un carré
Quand l'aire $A(x)$ est maximale, $CM = x = 20$.
La question 2.b. donne $UB = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ donc $UB = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 20 = 10\sqrt{2}$.
La question 2.c. donne $UT = \frac{\sqrt{2}}{2}(40 - x)$ donc $UT = \frac{\sqrt{2}}{2}(40 - 20) = 10\sqrt{2}$.
Le rectangle BATU a deux côtés consécutifs de même longueur, ainsi **le rectangle BATU est un carré.**

EXERCICE 3 :

1. a. Nombre d'ascendants de degré 3
Au degré 3, il y a **8 ascendants**.

Remarque
On peut justifier de la manière suivante : chaque personne a 2 ascendants, donc un total de 2 au degré 1, un total de 4 au degré 2 ($2 + 2$ ou 2^2), un total de 8 au degré 3 ($2 + 2 + 2 + 2$ ou 2×2^2 ou encore 2^3).

1. b. Nombre d'ascendants de degré n
Au degré n, il y a **2^n ascendants**.

Remarque
On peut justifier de la manière suivante (récurrence).
Au degré 1 il y a 2^1 ascendants. Si on suppose que pour un entier n il y a 2^n ascendants alors au degré $(n + 1)$ il y a 2×2^n ascendants (2 parents pour chacun des 2^n ascendants de degré n). Or $2 \times 2^n = 2^{n+1}$. La propriété est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier n.

2. a. Expression du numéro de descendant d'un homme de numéro P
Un homme a toujours un numéro pair. Le nombre P est donc pair. Le descendant direct d'un homme numéroté P dans l'arbre généalogique de Françoise a pour numéro $\mathbf{\frac{P}{2}}$.

Remarque
Pour justifier ce fait, on peut raisonner en remontant l'arbre généalogique. Le père d'une personne numérotée a a pour numéro $2a$ et sa mère a pour numéro $2a + 1$.

2. b. Expression du numéro de descendant d'une femme de numéro m
Une femme a toujours un numéro impair. Le nombre m est impair. Le mari de cette femme a pour numéro $\mathrm{m} - 1$ et son descendant direct a pour numéro $\mathbf{\frac{m-1}{2}}$ grâce à la question précédente.

2. c. Condition(s) sur d pour que Dominique et Camille soient de même sexe
Premier cas : Dominique et Camille sont des hommes
Le numéro de Dominique d est pair et le numéro de Camille $\frac{d}{2}$ est aussi pair. Ceci signifie que $\frac{d}{2}$ est divisible par 2 (ou est un multiple de 2) donc que d est divisible par 4 ou est un multiple de 4. Ainsi il existe un entier k tel que $d = 4k$. (Réciproquement, si $d = 4k$ alors Dominique et Camille ont chacun un numéro pair, donc ce sont des hommes).
Deuxième cas : Dominique et Camille sont des femmes
Le numéro de Dominique d est impair et le numéro de Camille $\frac{d-1}{2}$ est aussi impair. Ceci signifie que $\frac{d-1}{2} - 1$ est pair, donc $\frac{d-3}{2}$ est pair (ou multiple de 2). Ainsi il existe un entier k tel que $\frac{d-3}{2} = 2k$ ou encore $\mathrm{d} - 3 = 4\mathrm{k}$ donc $\mathrm{d} = 4\mathrm{k} + 3$. (Réciproquement, si $\mathrm{d} = 4\mathrm{k} + 3$ alors $\frac{d-1}{2} - 1$ et $\frac{d-1}{2}$ sont impairs donc Dominique et Camille sont des femmes).

Condition pour que Dominique et Camille soient de même sexe : $\boldsymbol{d = 4k}$ **ou** $\boldsymbol{d = 4k + 3}$.

Remarque
On peut exprimer le résultat ci-dessus de différentes manières.
Pour que Dominique et Camille soient de même sexe, il faut et il suffit que soit d soit d – 3 soit un multiple de 4.
Il faut et il suffit que d ou d–3 soit divisible par 4 (« ou » exclusif).

3. Descendance du numéro 191
<u>*1ère méthode :*</u>
La personne porte le numéro 191, c'est donc une femme et son mari porte le numéro 190.
Cherchons son degré d'ascendance en situant 191 parmi les puissances de 2 :

$$128 < 191 < 256, \text{ donc } 2^7 < 191 < 2^8$$

La personne se situe au degré 7. Dans ce degré, il y a $2^7 = 128$ ascendants de Françoise. La première moitié est du côté du père de Françoise et la seconde moitié du côté de sa mère. 64 est la moitié de 128 : les personnes de numéro 128 à $(128 + 63)$ sont du côté du père de Françoise et les personnes de numéro $(128 + 64)$ à 255 sont du côté de la mère de Françoise. La personne de numéro $191 = 128 + 63$ est **du côté du père de Françoise**.

<u>*2ème méthode :*</u>
On cherche les numéros des descendants de la femme numéro 191 :
Le descendant direct de la femme numéro 191 a pour numéro $\frac{191-1}{2} = 95$ qui est encore une femme.
Le descendant direct de la femme numéro 95 a pour numéro $\frac{95-1}{2} = 47$, c'est encore une femme.
Le descendant direct de la femme numéro 47 a pour numéro $\frac{47-1}{2} = 23$, c'est encore une femme.
Le descendant direct de la femme numéro 23 a pour numéro $\frac{23-1}{2} = 11$, c'est encore une femme.
Le descendant direct de la femme numéro 11 a pour numéro $\frac{11-1}{2} = 5$, c'est encore une femme.
Le descendant direct de la femme numéro 5 a pour numéro $\frac{5-1}{2} = 2$, il s'agit du **père de Françoise**.

Remarque
Dans cette méthode, on aurait pu conclure dès le numéro 5 *ou* 11 *grâce à l'arbre généalogique.*

4. Nombre d'hommes sur le chemin qui relie Claude à Françoise
On cherche les descendants directs de Claude. On pourra ainsi compter le nombre d'hommes (ceux qui ont un numéro pair) sur le chemin reliant Claude à Françoise.
Le descendant direct du numéro 257 a pour numéro $\frac{257-1}{2} = 128$, c'est un homme.
Le descendant direct du numéro 128 a pour numéro $\frac{128}{2} = 64$, c'est un homme.
Le descendant direct du numéro 64 a pour numéro $\frac{64}{2} = 32$, c'est un homme.
Le descendant direct du numéro 32 a pour numéro $\frac{32}{2} = 16$, c'est un homme.
Le descendant direct du numéro 16 a pour numéro $\frac{16}{2} = 8$, c'est un homme.
Le descendant direct du numéro 8 a pour numéro $\frac{8}{2} = 4$, c'est un homme.
Le descendant direct du numéro 4 a pour numéro $\frac{4}{2} = 2$, c'est un homme, le père de Françoise.
Il y a **7 hommes sur le chemin qui relie Claude à Françoise.**

<u>COMPLÉMENTS SUR L'EXERCICE 3 :</u>

On peut aller à l'adresse : http://www.guide-genealogie.com/guide/numerotation.html pour quelques informations sur la numérotation dans un arbre généalogique.

La méthode « de Sosa » est présentée ici dans notre système de numération habituel de base 10. Cette présentation, quoique simple, n'est pas la plus parlante.
Comme la méthode s'appuie sur un arbre binaire, une interprétation en base 2 va permettre de gagner à la fois en compréhension et en efficacité.
Pour commencer ce travail de transposition, reprenons la numérotation proposée en écrivant les premiers nombres en base 2.
On obtient :

Degré 2	*Père 100*	*Mère 101*	*Père 110*	*Mère 111*
Degré 1	*Père 10*		*Mère 11*	
		1 Françoise		

Ainsi il apparaît qu'en base 2 : les ascendants de degré 1 correspondent aux nombres à 2 chiffres, les ascendants de degré 2 correspondent aux nombres à 3 chiffres. Nous démontrerons plus bas la généralité de ce résultat. Affinons nos observations sur l'algorithme d'élaboration de l'arbre généalogique.
Pour cela les réponses à la question 2 de l'énoncé fournissent un bon point de départ.
Dire qu'un homme de numéro p a pour descendant direct la personne de numéro la moitié de p, donc $\frac{p}{2}$, peut se reformuler dans l'autre sens en disant que dans l'arbre toute personne de numéro k a pour ascendant masculin, donc pour père, la personne de numéro $2k$.
De même, dire qu'une femme de numéro m a pour descendant direct la personne de numéro la moitié de $m-1$, donc $\frac{m-1}{2}$, peut se reformuler en disant que dans l'arbre toute personne de numéro k a pour ascendant féminin, donc pour mère, la personne de numéro $2k+1$.
Traduisons ces deux affirmations en base 2.
En base 2 tous les nombres ont une écriture commençant par le chiffre 1. On note $k = \overline{1a_1a_2a_3 \dots a_n}^2$ l'écriture en base 2 du numéro d'une personne (où $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sont tous des chiffres égaux à 0 ou à 1):

- Pour obtenir le numéro du père de cette personne, il faut prendre le double de k. Or en base 2, multiplier par 2, c'est multiplier par $\overline{10}^2$. Cela revient à ajouter un 0 en chiffre des unités. Ainsi le père de cette personne a pour numéro $\overline{1a_1a_2a_3 \dots a_n0}^2$.
- Pour obtenir le numéro en base 2 de la mère de cette personne, il faut commencer par prendre le double de k, on retrouve $\overline{1a_1a_2a_3 \dots a_n0}^2$, puis ajouter 1 aux unités ce qui donne finalement : $\overline{1a_1a_2a_3 \dots a_n1}^2$.

En résumé, on obtient un procédé simple d'élaboration de l'ensemble de l'arbre lorsque l'on écrit tous les numéros en base 2. La règle est la suivante :
<u>En base 2, on passe du numéro d'une personne à celui de son père en ajoutant un 0 en chiffre des unités et on passe au numéro de sa mère en ajoutant un 1 en chiffre des unités.</u>

Exemple 1: Considérons la personne de numéro $\overline{1011}^2$
a) $\overline{1011}^2$ a pour père $\overline{10110}^2$ et pour mère $\overline{10111}^2$.
$\overline{1011}^2$ a pour grand père paternel $\overline{101100}^2$, pour grand-mère paternelle $\overline{101101}^2$, pour grand père maternel $\overline{101110}^2$ pour grand-mère maternelle $\overline{101111}^2$.
b) En utilisant cette règle dans le sens « descendance », on obtient sur ce même exemple :
$\overline{1011}^2$ est la mère de $\overline{101}^2$, qui est la mère de $\overline{10}^2$, qui est le père de 1 (ici Françoise).
Ainsi l'écriture en base 2 permet d'affirmer par simple lecture que $\overline{1010}^2$ est le père de la mère du père de Françoise.

D'une certaine façon, l'écriture en base 2 permet de donner très vite le « chemin d'ascendance (ou de descendance) » qui relie Françoise à l'un de ses aïeux.

Exemple 2 : Considérons l'aïeul de numéro $\overline{1001110}^{2}$ (soit $2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = 78$ en base 10). Les aïeux successifs reliant Françoise à cet aïeul sont :

- $\overline{10}^{2}$ (soit 1×2^1 en base 10)
- $\overline{100}^{2}$ (soit $1 \times 2^2 = 4$ en base 10)
- $\overline{1001}^{2}$ (soit $1 \times 2^3 + 1 = 9$ en base 10)
- $\overline{10011}^{2}$ (soit $1 \times 2^4 + 1 \times 2^1 + 1 = 19$ en base 10)
- $\overline{100111}^{2}$ (soit $1 \times 2^5 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 = 39$ en base 10)
- $\overline{1001110}^{2}$ (soit $1 \times 2^6 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 = 178$ en base 10)

En lisant les chiffres de l'écriture en base 2 de droite à gauche, donc en commençant par le chiffre des unités, on peut affirmer par simple lecture que cet aïeul est le père de la mère de la mère du père du père de Françoise.

De façon générale, on peut tirer plusieurs conséquences directes de la règle énoncée plus haut :

- A l'exception de la personne qui est à la racine de l'arbre généalogique, qui a toujours le chiffre 1, le chiffre des unités du numéro d'une personne indique son sexe : 0 pour un homme, 1 pour une femme.

- Comme on ajoute un chiffre (0 ou 1) à chaque fois que l'on monte d'un degré dans l'arbre, le nombre de chiffres placés derrière le 1 initial indique le degré d'ascendance de la personne considérée.
  - ✓ Ainsi la personne de numéro $\overline{1a_1a_2a_3 \ldots a_n}^{2}$ est de degré n.
  - ✓ Tous les nombres de $n + 1$ chiffres correspondent à un ascendant de degré n.

- Plus généralement les chiffres successifs du numéro d'une personne indiquent le sexe des ascendants (ou descendants) successifs placés entre Françoise et cette personne.
  - ✓ Si une personne a pour numéro $\overline{1a_1a_2a_3 \ldots a_n}^{2}$, dans le chemin d'ascendance de Françoise vers cette personne, a_1 indique le sexe de son ascendant de degré 1, a_2 indique le sexe de son ascendant de degré 2, a_3 indique le sexe de son ascendant de degré 3, …..
  - ✓ Si une personne a pour numéro $\overline{1a_1a_2a_3 \ldots a_n}^{2}$, dans le chemin de descendance de cette personne vers Françoise, a_{n-1} indique le sexe de son descendant direct vers Françoise de degré $n - 1$, a_{n-2} indique le sexe de son descendant direct vers Françoise de degré $n - 2$, …

<u>**Résolution en base 2 de l'exercice 3 :**</u>

1. a. Nombre d'ascendants de degré 3

Le nombre d'ascendants de degré 3 correspond au nombre de nombres de la forme $\overline{1a_1a_2a_3}^{2}$.
Il y a deux choix possibles pour a_1 (0 ou 1), il y a deux choix possibles pour a_2 et il y a deux choix possibles pour a_3. En tout il y a donc $2 \times 2 \times 2 = 8$ choix possibles.

1. b. Nombre d'ascendant au degré n

Le nombre d'ascendants de degré n correspond au nombre de nombres de la forme $\overline{1a_1a_2a_3 \ldots a_n}^{2}$.
Il y a deux choix possibles pour a_1, deux choix possibles pour a_2 ,…, deux choix possibles pour a_n.
En tout il y a donc $2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^n$ choix possibles.

2. a. Expression du numéro de descendant d'un homme de numéro P

2. b. Expression du numéro de descendant d'une femme de numéro m

En base 2, il suffit d'enlever le dernier chiffre pour passer du numéro d'une personne à celui de son descendant direct. On répond ainsi simultanément au 2.a. et 2.b.

2. c. Condition(s) sur d pour que Dominique et Camille soient de même sexe

Considérons l'écriture en base 2 de $d = \overline{1a_1a_2a_3 \dots a_n}^2$. Le sexe de Dominique est indiqué par le chiffre des unités a_n, le sexe de son descendant direct Camille est indiqué par le chiffre qui le précède a_{n-1}. Dominique et Camille ont même sexe si (et seulement si) ces deux chiffres sont égaux. Dominique et Camille ont même sexe si (et seulement si) $a_n = a_{n-1}$.

Remarque
On pourrait se contenter de cette réponse, mais affinons.
Cela revient à dire que l'écriture du numéro de Dominique se termine soit par $\overline{\dots 00}^2$, soit par $\overline{\dots 11}^2$.

Dans toute base b, les nombres se terminant par $\overline{\dots 00}^b$ sont ceux divisibles par $\overline{100}^b = b^2$.

Donc en base 2, les nombres se terminant par $\overline{\dots 00}^2$ sont ceux divisibles par $2^2 = 4$, ce sont donc les multiples de 4, donc de la forme $d = 4k$.

Par ailleurs en base 2, si l'on ajoute 1 à un nombre se terminant par $\overline{\dots 11}^2$, on obtient un nombre se terminant par $\overline{\dots 00}^2$. Aussi les nombres se terminant par $\overline{\dots 11}^2$ en base 2, sont les nombres de la forme $d = 4k - 1$.
De façon plus générale on aurait pu s'appuyer sur le fait que dans toute base b, le nombre constitué par les 2 derniers chiffres d'un nombre donne son reste dans la division euclidienne par $\overline{100}^b = b^2$.

Dans toute base b, le reste de la division euclidienne de $\overline{1a_1a_2a_3 \dots a_n}^b$ par $\overline{100}^b$ est $\overline{a_{n-1}a_n}^b$. Ainsi en base 2, $\overline{a_{n-1}a_n}^2$ est le reste de la division euclidienne de $\overline{1a_1a_2a_3 \dots a_n}^2$ par $\overline{100}^2 = 4$. On peut donc affirmer que Dominique et Camille ont même sexe si le reste de $d = \overline{1a_1a_2a_3 \dots a_n}^2$ dans la division euclidienne par 4 est soit $\overline{00}^2 = 0$, soit $\overline{11}^2 = 3$.
Donc Dominique et Camille ont même sexe si (et seulement si) d est de la forme $d = 4k$ ou de la forme $d = 4k + 3$ (ce qui est équivalent à la forme $d = 4k - 1$).

3. Descendance du numéro 191

L'écriture en base 2 de 191 est $\overline{10111111}^2$.

Dans l'écriture en base 2 d'un nombre $\overline{1a_1a_2a_3 \dots a_n}^2$, le chiffre a_1 donne le sexe de l'ascendant de degré 1.
Ici on a $a_1 = 0$, donc la personne de numéro 191 est un ascendant du côté du père de Françoise.

4. Nombre d'hommes sur le chemin qui relie Claude à Françoise

On sait que $257 = 256 + 1 = 2^8 + 1$. L'écriture en base 2 de 257 est $\overline{100000001}^2$.

Dans l'écriture en base 2 d'un nombre $\overline{1a_1a_2a_3 \dots a_n}^2$ chaque chiffre a_i donne le sexe de l'ascendant de degré i sur le chemin de l'arbre qui relie Claude et Françoise. Le nombre d'hommes est donc donné par le nombre de chiffre a_i égaux à 0 dans cette écriture. En conséquence, il y a 7 hommes sur le chemin d'ascendance reliant Françoise à Claude.

GROUPEMENT 3 – SEPTEMBRE 2012

EXERCICE 1

Affirmation 1

Un prisme droit est constitué de deux faces polygonales superposables et parallèles (les deux bases) reliées par des faces rectangulaires. Ainsi, si la face polygonale a *n* côtés, alors le prisme a *n* faces rectangulaires. Le prisme est donc constitué en tout de (*n* + 2) faces.

<u>Justification 1 :</u> Exploration de la situation
Ce prisme a 3*n* arêtes (les n formées par les côtés de chacun des deux polygones à *n* côtés (soit 2 *n*) et les *n* constituées par les rectangles).
On aura 3 *n* = 2 (*n* + 2) seulement dans le cas où *n* = 4 (prisme droit dont la base est un quadrilatère).

<u>Justification 2 :</u> Un contre-exemple suffit.
On peut choisir un contre-exemple parmi tous les autres cas.
Prenons comme contre-exemple le prisme droit à base triangulaire (cas *n* = 3) : il a 5 faces et 9 arêtes (9 ≠ 2 x 5).

L'affirmation 1 est fausse

Affirmation 2

Les triangles ABD et ABC ont un côté commun ([AB]). En s'appuyant sur la formule du calcul de l'aire du triangle :

Si on choisit AB comme base.
Comme les droites (AB) et (DC) sont parallèles, tous les segments qui leur sont perpendiculaires et qui ont pour extrémités un point de (AB) et un point de (DC) ont la même longueur (la distance entre (AB) et (DC)). En particulier, les hauteurs respectives issues de D et de C de chacun des triangles sont égales. Ainsi les aires de chacun des triangles sont égales.

L'affirmation 2 est vraie

Remarque :
L'hypothèse « rectangle » dans la donnée « BADC est un trapèze <u>rectangle</u> », n'intervient pas. La propriété démontrée ci-dessus est donc vraie pour tout trapèze.

Affirmation 3

Avec les notations de l'énoncé, le volume du pavé initial est : V = *L* x *l* x *h*

Calculons le volume V' du pavé modifié :

Sa longueur est 1,5 x *L*, sa largeur *l* et sa hauteur 2 x *h*. Donc son volume V' est :

V' = 1,5 x *L* x *l* x 2 x *h*   V' = 3 x *L* x *l* x *h*   *V'* = 3 x *V*

Le volume du pavé droit a donc été multiplié par 3.

L'affirmation 3 est fausse.

Affirmation 4

On sait que la taille moyenne est la somme des tailles divisée par le nombre de personnes. À partir des informations données, on déduit que :

La somme des tailles des garçons est $10 \times 174\ cm = 1\ 740\ cm$

La somme des tailles des filles est $14 \times 162\ cm = 2\ 268\ cm$

Ainsi la taille moyenne des élèves de la classe, qui se calcule en divisant la somme des tailles des élèves (filles et garçons) par le nombre d'élèves est :

(1 740 cm + 2 268 cm) : 24 = 4 008 cm : 24 = 167 cm.

L'affirmation 4 est vraie.

Affirmation 5

Soient n et (n + 2) les deux nombres pairs consécutifs (la suite des nombre pairs : 0, 2, 4, 6, 8… est la suite des entiers obtenus par ajout de 2 à partir de 0).

Comme n est pair, il existe un entier k tel que n s'écrive sous la forme $2 \times k$ (un nombre pair est un multiple de 2).

Le produit de ces deux nombres pairs consécutifs est :

$n \times (n + 2) = 2 \times k \times (2 \times k + 2)$

$n \times (n + 2) = 4 \times k \times (k + 1)$

Comme k et (k + 1) sont deux nombres entiers consécutifs, l'un des deux (k ou (k + 1)) est pair, donc leur produit est pair. Il existe un entier p tel que ce produit s'écrive sous la forme $2 \times p$

$k \times (k + 1) = 2 \times p$

Et $n \times (n + 2) = 4 \times 2 \times p = 8 \times p$.

L'affirmation 5 est vraie.

Remarques :
- *Vérifier sur des exemples, aussi nombreux soient-ils, que cette affirmation est vraie ne suffit pas pour justifier qu'elle est toujours vraie…*
- *On aurait aussi pu considérer deux entiers pairs consécutifs 2n et 2n+2.*

EXERCICE 2

Propriété P :

« Un nombre entier naturel et la somme de ses chiffres ont le même reste dans la division euclidienne par 9. »

Question 1

En utilisant la propriété P :

La somme des chiffres de 164 330 258 647 est :

1 + 6 + 4 + 3 + 3 + 0 + 2 + 5 + 8 + 6 + 4 + 7 = 49

164 330 258 647 et 49 ont le même reste dans la division euclidienne par 9.

Comme 49 = 9 x 5 + 4 le reste de la division euclidienne par 9 de 49 est 4.

Le reste de la division euclidienne par 9 de 164 330 258 647 est 4.

Il est également possible d'utiliser P autant de fois que nécessaire jusqu'à avoir le reste :

La somme des chiffres de 49 est : 4 + 9 = 13

49 et 13 ont le même reste dans la division euclidienne par 9.

La somme des chiffres de 13 est : 1 + 3 = 4

13 et 4 ont le même reste dans la division euclidienne par 9.

Donc **le reste de la division euclidienne par 9 de 164 330 258 647 est 4**.

Pour répondre à cette question, il était aussi possible de calculer ce reste en posant la division :

```
1 6 4 3 3 0 2 5 8 6 4 7 | 9
  7 4                   |------------------------
    2 3                 | 1 8 2 5 8 9 1 7 6 2 7
      5 3               |
        8 0             |
          8 2           |
            1 5         |
              6 8       |
                5 6     |
                  2 4   |
                    6 7 |
                      4 |
```

Ou encore en utilisant la calculatrice et en justifiant les étapes présentes dans l'utilisation de la calculatrice.

Question 2

a) Si $\overline{\text{abcd}}$, avec a, b, c et d entiers naturels, est l'écriture en base dix de l'entier naturel N, on a :

N = 1000a + 100b + 10c + d

Or 1000 = 999 + 1 = 9 x 111 + 1

100 = 99 + 1 = 9 x 11 + 1

10 = 9 + 1 = 9 x 1 + 1

Donc N = 9 x 111a + a + 9 x 11b + b + 9 x c + c + d

N = a + b + c + d + 9 x (111a + 11b + c)

En posant k = 111a + 11b + c, k est bien un entier naturel car il s'écrit comme une somme d'entiers naturels, on obtient : N = a + b + c + d + 9k

b) Si r' est le reste de la division euclidienne de a + b + c + d par 9, il existe un entier naturel q' tel que :
a + b + c + d = 9q' + r'

N = a + b + c + d + 9k

N = 9q' + r' + 9k

N = 9 (q' + k) + r'

On en déduit que dans la division euclidienne de N par 9, (q' + k) est le quotient et r' est le reste.

Si r est le reste de la division euclidienne de N par 9, on a bien r = r'

Question 3

a) Un nombre entier naturel est divisible par 9 si et seulement si le reste dans la division euclidienne de ce nombre par 9 est 0.

Selon la propriété P, un nombre entier naturel sera divisible par 9 si et seulement si le reste dans la division euclidienne de la somme des chiffres de ce nombre par 9 est 0.

On peut énoncer ainsi le critère de divisibilité par 9 d'un nombre entier naturel : **« Un nombre entier naturel est divisible par 9 si et seulement la somme des chiffres de ce nombre est divisible par 9. »**

b) Les diviseurs de 18 sont : 1, 2, 3, 6, 9 et 18.

Le plus grand commun diviseur de 18 et de 164 330 258 643 est l'un de ces nombres.

Explorons les possibilités en commençant par le plus grand des diviseurs de 18, à savoir 18.

164 330 258 643 n'est pas divisible par 18 car il n'est pas divisible par 2 (18 = 2 x 9)

(Un nombre impair ne peut pas être multiple d'un nombre pair.)

Pour savoir si 164 330 258 643 est divisible par 9, nous calculons la somme de ses chiffres :

1 + 6 + 4 + 3 + 3 + 0 + 2 + 5 + 8 + 6 + 4 + 3 = 45 et 4 + 5 = 9 qui est divisible par 9

D'après la question précédente, on peut donc conclure que 164 330 258 643 est divisible par 9.

9 est le plus grand commun diviseur de 18 et de 164 330 258 643.

PROBLEME

Partie A

1. En utilisant la propriété de Pythagore dans le triangle ABC, si la somme des carrés des longueurs des deux plus petits côtés est égale au carré de la longueur du plus grand côté, alors ce triangle est rectangle.
   $BC^2 = 600^2 = 360\,000$
   $AB^2 + AC^2 = 480^2 + 360^2 = 230\,400 + 129\,600 = 360\,000$
   Ainsi $BC^2 = AB^2 + AC^2$
   Le triangle ABC est donc rectangle en A.

2.
   a. Le triangle ABC est un demi-rectangle de longueur AB et de largeur AC.
      La mesure de son aire (l'unité d'aire étant le m²) est donc égale à :
      $\frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{1}{2} \times 480 \times 360 = 86\,400$
      (Cela revient à appliquer la formule de l'aire du triangle en prenant AB pour base.)
      La mesure de l'aire du triangle ABC est 86 400 m²

   b. La distance du point A à la droite (BC) est égale à la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
      On appelle H le pied de cette hauteur.
      La mesure de l'aire du triangle ABC peut s'écrire : $\frac{1}{2} \times BC \times AH$

Donc $\frac{1}{2} \times 600 \times \mathrm{AH} = 86\ 400$
On en déduit : AH = 288

La distance du point A à la droite (BC) est 288 m.

Partie B

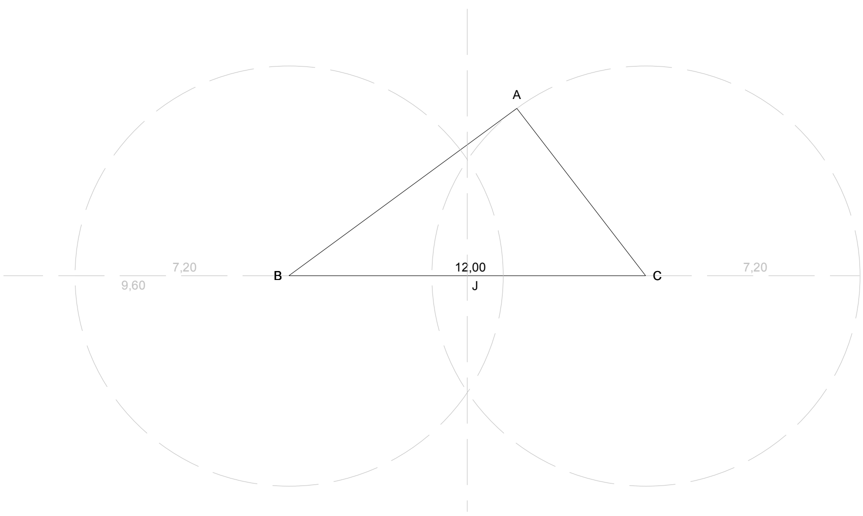
1. La distance parcourue par José est :
$$2 \text{ x } (600 + 480 + 360) = 2 \times 1440 \quad \text{soit } 2880 \text{ m} = 2{,}880 \text{ km}$$
En utilisant la formule d = v x t (où d est la distance parcourue en km, v est la vitesse en km/h et t est la durée en h), on a : 2,880 km = 8 km/h x t
Donc t = $\frac{2{,}880}{8} \text{h} = 0{,}36 \text{ h}$ et 0,36 x 3600 s = 1296 s 1296 s = 0 h 21 min 36 s
2.
   a. La formule donnée est fausse. Une seconde est un soixantième de minute et non un centième de minute. La formule est donc « =E$1/(C4+D4/60) »
   b. Le symbole $ placé devant le « 1 » indique que la référence à la ligne 1 du tableau est fixe. Ainsi en recopiant la formule vers le bas, la distance nécessaire au calcul de la vitesse reste 2880.

Partie C

1.
   a. Le point J situé à égale distance de A, B et C est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. C'est le point de concours des médiatrices de ses trois côtés. En effet :
   Comme le point J appartient à la médiatrice du côté [AB], il est ainsi à égale distance de A et de B, et on a JA = JB.
   Comme le point J appartient à la médiatrice du côté [AC], il est ainsi à égale distance de A et de C, et on a JA = JC
   Comme le point J appartient à la médiatrice du côté [BC], il est ainsi à égale distance de B et de C, et on a JB = JC
   Des trois égalités ci-dessus, on en déduit que : JA = JB = JC.

   Remarque : le centre du cercle circonscrit dans un triangle rectangle est le milieu de son hypoténuse. J est donc le milieu du côté [BC].

   b. Sur la construction à l'échelle 1/5000, les longueurs des côtés du triangle sont égales à : 9,6 cm, 7,2 cm et 12 cm.



(les traits de construction doivent être apparents)

2. Pour démontrer que le quadrilatère est un rectangle, il suffit de démontrer qu'il a trois angles droits.
   Dans le quadrilatère AKJI,
   - l'angle $\widehat{KAI}$ est droit car le triangle ABC est rectangle en A.
   - la droite (KJ) est la médiatrice du côté [AB] donc $\widehat{AKJ}$ est un angle droit.
   - la droite (KI) est la médiatrice du côté [AC] donc $\widehat{AIJ}$ est un angle droit.
     Le quadrilatère AKJI a donc trois angles droits, c'est un rectangle.

   Remarque : D'autres démonstrations sont envisageables.

3. Pour montrer que si l'infirmière du collège se déplace sur le segment [KI], elle reste à égale distance des deux postes installés en A et H, il faut (et il suffit) de montrer que la droite (KI) est la médiatrice du segment [AH].
   Dans le triangle ABC, I et K sont les milieux des deux côtés [AB] et [AC], donc la droite (IK) est parallèle au troisième côté [BC].
   La hauteur [AH] étant perpendiculaire au côté [BC] est donc aussi perpendiculaire à [IK].

   Dans le triangle ABH, la droite (IK) est parallèle au côté [BH] et passe par le milieu du côté [AB], elle passe donc aussi par le milieu du côté [AH].

   Donc, la droite (KI) passe par le milieu du côté [AH] et lui est perpendiculaire. C'est donc sa médiatrice.
   Ainsi, chaque point de la droite (KI) est à égale distance de A et de H.