CONCOURS
SEPTEMBRE 2011

CORRIGÉS

GROUPEMENT 1 – septembre 2011

EXERCICE 1

Affirmation 1

Prenons un contre exemple : soit $x = \frac{1}{100}$ un nombre positif

Sa racine carrée est $\sqrt{x} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}$

On a donc $\sqrt{\frac{1}{100}} > \frac{1}{100}$.

L'affirmation 1 est fausse

Autre méthode : étude du cas général

Soit x un nombre positif. On veut étudier le signe de $x - \sqrt{x}$. On sait que, quel que soit $x \geq 0$, $\sqrt{x} \geq 0$ donc $x + \sqrt{x} \geq 0$.

Donc le signe de $x - \sqrt{x}$ est le même que celui de $(x - \sqrt{x}) \times (x + \sqrt{x})$.

$(x - \sqrt{x}) \times (x + \sqrt{x}) = x^2 - x = x(x-1)$, et comme $x \geq 0$, $x - \sqrt{x}$ est du signe de $x - 1$

On en conclut que, quel que soit $x \geq 0$,

$x - \sqrt{x} > 0$ si et seulement si $x > 1$

et $x - \sqrt{x} < 0$ si et seulement si $0 < x < 1$

et $x - \sqrt{x} = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 1$

Donc tout nombre de]0,1[est strictement inférieur à sa racine, ce qui contredit l'affirmation 1.

Remarque :

Pour le concours, on préfèrera la première méthode plus courte, moins générale et donc moins risquée.

Affirmation 2

Une fraction est irréductible si son dénominateur et son numérateur sont premiers entre eux, c'est-à-dire qu'ils n'ont aucun diviseur commun autre que 1.

En utilisant les critères de divisibilité classiques, on remarque que la somme des chiffres du numérateur est 30 et celle du dénominateur est 39. Ces deux nombres ont donc 3 comme diviseur commun, par conséquent la fraction n'est pas irréductible.

L'affirmation 2 est fausse.

Autre méthode :

Pour vérifier si le dénominateur et le numérateur de la fraction sont premiers entre eux ou non, on peut chercher le PGCD, par exemple par l'algorithme d'Euclide, et ~~à~~ vérifier s'il est égal à 1 (la méthode se révèle extrêmement fastidieuse ici).

201 134 546 112 = 1 x 145 261 781 121 + 55 872 764 991
145 261 781 121 = 2 x 55 872 764 991 + 33 516 251 139
55 872 764 991 = 1 x 33 516 251 139 + 22 356 513 852
33 516 251 139 = 1 x 22 356 513 852 + 11 159 737 287
22 356 513 852 = 2 x 11 159 737 287 + 37 039 278
11 159 737 287 = 301 x 37 039 278 + 10 914 609
37 039 278 = 3 x 10 914 609 + 4 295 451
10 914 609 = 2 x 4 295 451 + 2 323 707
4 295 451 = 1 x 2 323 707 + 1 971 744
2 323 707 = 1 x 1 971 744 + 351 963
1 971 744 = 5 x 351 963 + 211 929
351 963 = 1 x 211 929 + 140 034
211 929 = 1 x 140 034 + 71 895
140 034 = 1 x 71 895 + 68 139
71 895 = 1 x 68 139 + 3 756
68 139 = 18 x 3 756 + 531

3 756 = 7 x 531 + 39
531 = 13 x 39 + 24
39 = 1 x 24 + 15
24 = 1 x 15 + 9
15 = 1 x 9 + 6
9 = 1 x 6 + 3
6 = 2 x 3 + 0

On a donc PGCD (201 134 546 112 ; 145 261 781 121) =3 donc la fraction n'est pas irréductible.

Remarque :
Cette seconde méthode est à éviter, sauf si on n'en a pas trouvé d'autre.

Affirmation 3

Dans cette expérience aléatoire, on a 55 chocolats en tout. Le nombre de cas possibles est 55.
On souhaite tirer un chocolat blanc : on a 20 cas favorables.
La probabilité de tirer un chocolat blanc est le rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles, soit $\frac{20}{55} = \frac{4}{11}$.

$\frac{4}{11}$ et $\frac{4}{7}$ sont deux fractions ayant même numérateur mais des dénominateurs différents, donc $\frac{4}{11} \neq \frac{4}{7}$ c'est-à-dire $\frac{20}{55} \neq \frac{4}{7}$.

L'affirmation 3 est fausse.

Affirmation 4

En 2009, 25 millions de bagages ont été perdus ; en 2008, 32,8 millions.
On peut calculer l'augmentation relative de 25 à 32,8.
$\frac{32{,}8}{25}$ = 1,312 soit une augmentation relative de 0,312 ou 31,2 %. En 2009, on a donc 32,8 millions de bagages égarés, soit 31,2% de plus qu'en 2008.
L'affirmation 4 est fausse.

<u>Autre présentation :</u>
En traduisant les données en pourcentages, on est dans une situation de proportionnalité, on peut s'aider d'un tableau en recherchant la quatrième proportionnelle.

Nombre de bagages perdus	En 2009	En 2008
En millions	25	32,8
En pourcentage par rapport à 2009	100	?

La valeur cherchée est $\frac{100 \text{ x } 32{,}8}{25}$ = 131,2 soit une augmentation relative de 31,2.

<u>Autre méthode : vérification de la valeur du taux.</u>
Appliquons une augmentation de 23,8% à 25.

$25 \text{ x } \frac{23{,}8}{100} + 25 = 5{,}95 + 25 = 30{,}95$.

Le résultat obtenu n'est pas 32,8.

Remarque :
En dehors de l'inexactitude de l'affirmation, les données présentées ne sont pas satisfaisantes. En effet, le volume total de bagages n'est pas précisé. Supposons qu'en 2009 le trafic aérien se soit contracté de moitié par rapport à 2008. On a alors en 2009 la perte de bagages qui ne s'est pas contracté de moitié (car 25 n'est pas la moitié de 32,8), et par conséquent la situation de la perte des bagages se serait plutôt détériorée de 2008 à 2009. Comme on le voit sur cet exemple, suivant l'indicateur de comparaison pris, on peut arriver à une conclusion contraire.

Affirmation 5

On cherche les multiples de 545 compris entre 11 000 et 12 000
On a 10 900 = 20 × 45 < 11 000 < 21 × 545 < 22 × 545 < 12 000 < 12 535 = 23 × 545
D'autre part, 2180 = 4 × 545
4 et 21 sont premiers entre eux donc le PGCD de 21 × 545 et 4 × 545 est bien 545.
Le nombre 11445 est compris entre 11000 et 12000 et le PGCD de 11445 et 2580 est 545.
L'affirmation 5 est vraie.

Remarque :
11990 = 22 × 545 = 11 × 2 × 545 = 11 × 1090
2180 = 4 × 545 = 2× 2 × 545 = 2 × 1090
Donc le PGCD de 11990 et 2580 est 1090 : 11990 ne peut pas être une solution remplissant les conditions de l'affirmation 5.

Affirmation 6

On suppose que la densité (ou masse volumique) du bois est constante, c'est-à-dire qu'elle est la même quel que soit l'endroit du bois considéré. Dans ce cas, la masse de bois est proportionnelle au volume qu'il occupe (dans un rapport constant qui est justement la masse volumique).
24 kg = 8 × 3 kg = 2^3 × 3 kg. Donc la grande boule a sa masse 8 fois plus grande que la petite ; par proportionnalité, les volumes des deux boules sont dans un rapport 8 soit 2^3. On peut donc en conclure que l'agrandissement de la petite boule à la grande boule est de rapport 2 : dans un agrandissement, lorsque les longueurs sont doublées, les aires sont quadruplées et les volumes sont octuplés.
De manière générale, dans un agrandissement ou une réduction de rapport k, les longueurs sont multipliées par k, les aires par k^2 et les volumes par k^3.
S'il faut 900g de peinture pour recouvrir la grosse boule, il en faut 4 fois moins pour recouvrir la petite (puisque les aires sont dans un rapport 4 et que la masse de peinture est proportionnelle à la surface à peindre). Il faut donc 225 g de peinture pour recouvrir la petite boule.
L'affirmation 6 est fausse.

Remarque :
Dans cet exercice il faut faire attention à ne pas s'emmêler les pinceaux, en ayant les deux jambes sur la sphère terrestre.

EXERCICE 2

1. Exemple de triplets pythagoriciens

a) $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$
On peut donc affirmer que **(3, 4, 5) est un triplet pythagoricien**.

b) Pour tout n entier positif non nul :
$(3n)^2 + (4n)^2 = 9n^2 + 16n^2 = (9 + 16)n^2 = 25n^2 = 5^2n^2 = (5n)^2$

c) On peut déduire de la question précédente que pour tout n entier non nul, ($3n$, $4n$, $5n$) est un triplet pythagoricien pour tout n entier positif non nul .
En particulier, si $3n$ est supérieur à 1000, $4n$ et $5n$ le seront. On peut par exemple choisir n = 500 pour obtenir le triplet (1500, 2000, 2500) qui est un triplet pythagoricien.

2. Utilisation du tableur pour formuler une conjecture

a) La colonne D présente la valeur de b qui est égale à $y^2 - x^2$, x étant dans la colonne A et y dans la colonne B. On peut donc entrer en D2 la formule : = B2^2 – A2^2.
Les références B2 et A2 sont en adressage relatif : on ne considère pas la valeur absolue de la cellule (sinon on aurait noté A2 et B2) mais la formule relative qui donne sa valeur. Lorsqu'on recopie la formule vers le bas, elle s'incrémente du nombre de lignes descendu (par exemple si on copie en D5 soit 3 lignes plus bas, la formule copiée devient B5^2 – A5^2).

b) C12 = 2 × 4 × 5 = 40
D12 = $5^2 - 4^2$ = 25 – 16 = 9

E12 = 5² + 4² = 25 + 16 = 41
F12 = 40² + 9² = 1600 + 81 = 1681
G12 = 41² = 1681

c) En examinant les résultats du tableau, on remarque que les deux dernières colonnes contiennent les mêmes nombres par ligne.

On peut donc conjecturer que chacun des triplets (a, b, c) définis dans cette question est un triplet pythagoricien.

Pour x et y entiers positifs ($x < y$), on a

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2xy)^2 + (y^2 - x^2)^2 \\ &= 4x^2y^2 + y^4 - 2y^2x^2 + x^4 \\ &= y^4 + 2y^2x^2 + x^4 \\ &= (y^2)^2 + 2y^2x^2 + (x^2)^2 \\ &= (y^2 + x^2)^2 \\ &= c^2 \end{aligned}$$

Donc le triplet (a , b , c) est bien un triplet pythagoricien.

3. Triplets pythagoriciens constitués de trois entiers consécutifs

Pour tout nombre entier n > 0, les nombres n-1, n et n+1 sont trois nombres entiers consécutifs. Ils forment un triplet pythagoricien si $(n - 1)^2 + n^2 = (n + 1)^2$

On a alors : $n^2 - 2n + 1 + n^2 = n^2 + 2n + 1$

$n^2 - 4n = 0$

$n(n - 4) = 0$

Il y a deux solutions, $n = 0$ et $n = 4$. La première solution n'est pas compatible avec la contrainte initiale ($n > 0$), la seconde permet de mettre en évidence **le seul triplet pythagoricien constitué de trois entiers consécutifs, (3, 4, 5). Il n'en existe donc pas d'autres**.

EXERCICE 3

1. AH = 5 et CH = 12

H est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC donc (AH) ⊥ (AB)
Le triangle AHC est rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore :

AH² + CH² = AC² = 13² (1)

Le triangle BHC est rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore :

BH² + CH² = BC² = 15² (2)

On peut soustraire membre à membre ces deux égalités.
(2) – (1) : BH² - AH² = 15² - 13².
Comme H est un point du segment [AB] :
BH = AB – AH soit BH = 14 – AH.
On a donc (14 – AH)² - AH² = 15² - 13²
En utilisant l'identité remarquable a² - b² = (a - b)(a + b), on a :

(14 – AH – AH)×(14 – AH + AH) = 56

Soit (14 – 2AH) × 14 = 56

14 – 2AH = 4

2AH = 10

AH = 5

D'après l'égalité (1) : 5² + CH² = 169
Donc CH² = 169 – 25

CH = 12 (CH est une valeur positive, la solution -12 est exclue)

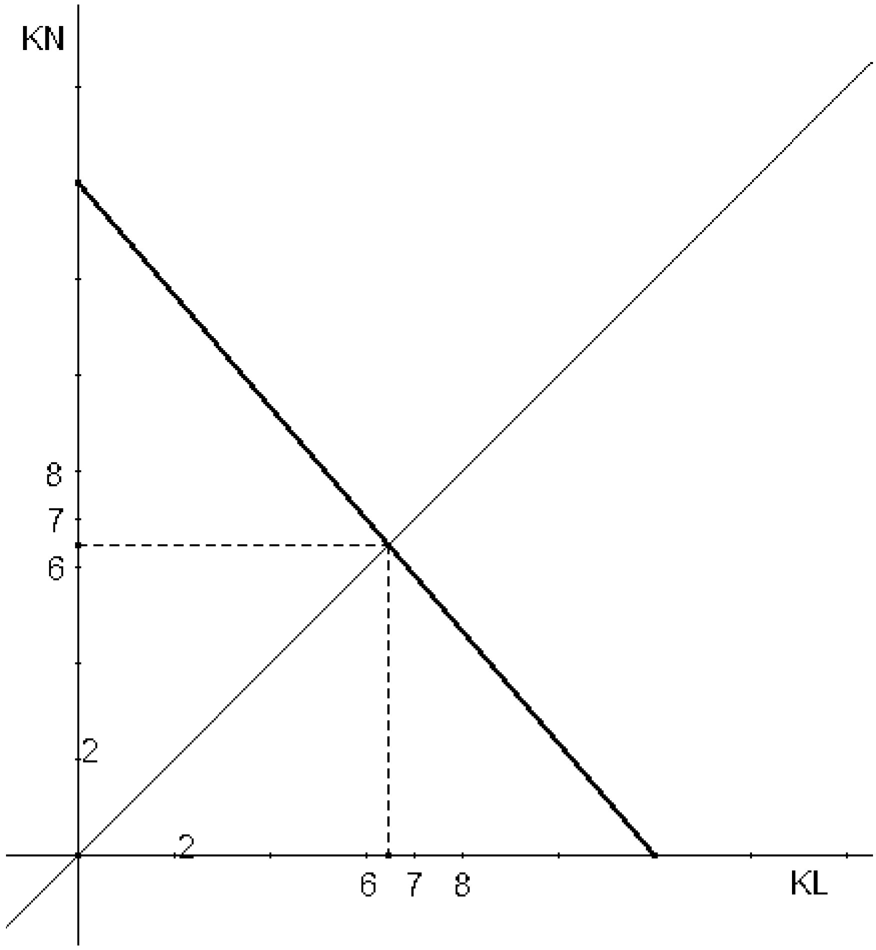
2. Utilisation d'une représentation graphique des variations de KN en fonction de KL

a) Sur la figure 1, on peut voir que lorsque le point K se déplace sur le segment [AH], il atteint deux positions extrêmes.
Si K est en A alors L est en A, M et N sont confondus avec B. Ainsi, KN = AB = 14 et KL = 0.
Si K est en H alors N est en H, M et L sont confondus avec C. Ainsi, KN = 0 et KL = HC = 12.

(12 ; 0) et (0 ; 14) sont bien des points de la représentation graphique.
KN et KL sont des mesures de longueurs, ce sont des nombres positifs. La représentation graphique se limite donc au quart de plan d'abscisses et d'ordonnées positives. Les points de coordonnées (12 ; 0) et (0 ; 14) se situent sur les limites de ce quart de plan et peuvent être considérés, en ce sens, comme des limites de la représentation graphiques dont ils font partie.

b) KLMN est un rectangle par construction.

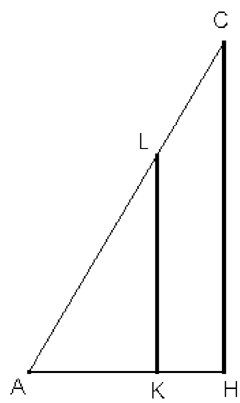
C'est un carré si KL = KN.
La droite d'équation y = x coupe la représentation graphique des variations de KN en fonction de KL en un point tel que KN = KL (c'est-à-dire quand le rectangle est carré).
On peut lire 6 < KN < 7 sans risque de se tromper compte tenu de la précision du tracé au millimètre près alors que le nombre lu sur les axes s'écarte de 6 et de 7 d'au moins 2 millimètres.



3. a) Expression de AK et BN en fonction de KL

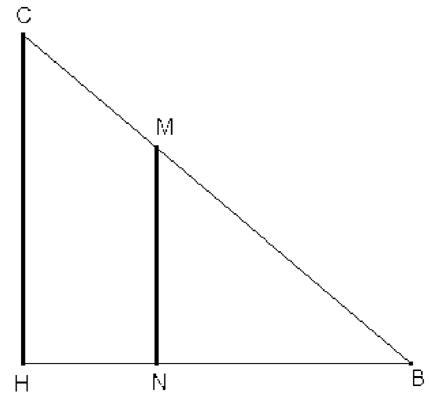
KLMN est un rectangle donc (KL) ⊥ (KN) donc (KL) ⊥ (AB). De même, (MN) ⊥ (AB).
(MN), (KL) et (HC) sont trois droites perpendiculaires à une même droite (AB), elles sont donc parallèles entre elles.
Dans le triangle AHC, K ∈ [AH], L ∈ [AC] et (KL) // (HC) donc, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AK}{AH} = \frac{AL}{AC} = \frac{KL}{HC}$$



Dans le triangle BHC, N $\in$[BH], M$\in$[BC] et (MN) // (HC) donc, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BN}{BH} = \frac{BM}{BC} = \frac{MN}{HC}$$



On a donc $\frac{AK}{AH} = \frac{KL}{HC}$ soit $\frac{AK}{5} = \frac{KL}{12}$ donc **AK = $\mathbf{\frac{5}{12}}$ KL**.

On a donc $\frac{BN}{BH} = \frac{MN}{HC}$ soit $\frac{BN}{9} = \frac{MN}{12}$ donc **BN = $\mathbf{\frac{9}{12}}$ KL = $\mathbf{\frac{3}{4}}$ KL**.

b) Expression de KN en fonction de KL

A, K, N et B sont alignés dans cet ordre, on a donc KN = AB – AK – BN

Donc $KN = 14 - \frac{5}{12} KL - \frac{9}{12} KL$

D'où $KN = 14 - \frac{14}{12} KL$

Enfin $\mathbf{KN = 14 - \frac{7}{6} KL}$.

4. Position exacte du point K sur le segment [AH] pour laquelle KLMN est un carré

Comme vu à la question 2.b), KLMN est un carré si KL = KN

Ainsi, on a $KN = 14 - \frac{7}{6} KL$

Donc $KL + \frac{7}{6} KL = 14$

$\frac{13}{6} KL = 14$

$KL = \frac{14 \quad 6}{13}$

Soit $KL = \frac{84}{13}$

On en déduit $AK = \frac{5}{12} KL$, soit $\mathbf{AK = \frac{35}{13}}$.

GROUPEMENT 2 - SEPTEMBRE 2011

EXERCICE 1

1) Soient a et b deux nombres strictement positifs.

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b}$**.**

FAUX.

Pour le démontrer, on peut donner des valeurs à a et b et montrer que les valeurs $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b}$ sont différentes. On peut aussi faire un calcul algébrique en comparant les carrés des deux termes de l'affirmation.

Première méthode : un contre-exemple rédigé suffit.

On choisit deux valeurs *a* et *b*, par exemple *a* = 9 et *b* = 16.

(il est conseillé de choisir deux nombres qui sont les carrés de deux entiers : 9=3² et 16= 4²)

$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ et $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

On a ainsi montré que $\sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{9+16}$.

Deuxième méthode : en comparant les carrés des deux termes de l'affirmation

(on utilise le théorème : deux nombres positifs sont égaux si leurs carrés sont égaux)

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$ et $(\sqrt{a+b})^2 = a + b$

Comme a et b sont non nuls, les carrés des deux termes sont donc différents, par conséquent les valeurs $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a+b}$ Sont différentes.

2) Soit a un nombre strictement supérieur à 1.

Si les longueurs des côtés d'un triangle sont a , $\frac{1}{2}(a^2 - 1)$ et $\frac{1}{2}(a^2 + 1)$, alors ce triangle est rectangle.

VRAI

Pour le démontrer, donner des exemples avec une ou même quelques valeurs ne suffit pas. Une démonstration algébrique est attendue en utilisant la réciproque du théorème de Pythagore.
On calcule les carrés des trois mesures des côtés du triangle que l'on nomme IJK pour une meilleure lisibilité de la démonstration.

$IK^2 = [\frac{1}{2}(a^2+1)]^2 = \frac{1}{4}(a^4 + 2a^2 + 1)$

$IJ^2 = [\frac{1}{2}(a^2-1)]^2 = \frac{1}{4}(a^4 - 2a^2 + 1)$

$JK^2 = a^2$

On constate que :

$JK^2 + IJ^2 = a^2 + [\frac{1}{2}(a^2 - 1)]^2 = a^2 + \frac{1}{4}(a^4 - 2a^2 + 1) = \frac{4}{4}a^2 + \frac{1}{4}(a^4 - 2a^2 + 1) = \frac{1}{4}(a^4 + 2a^2 + 1)$

et $IK^2 = \frac{1}{4}(a^4 + 2a^2 + 1)$

donc que $IK^2 = JK^2 + IJ^2$.

Le triangle IJK est rectangle en J d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

3) On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.

La probabilité d'obtenir pile à l'un des deux lancers et face à l'autre est de $\frac{1}{3}$.

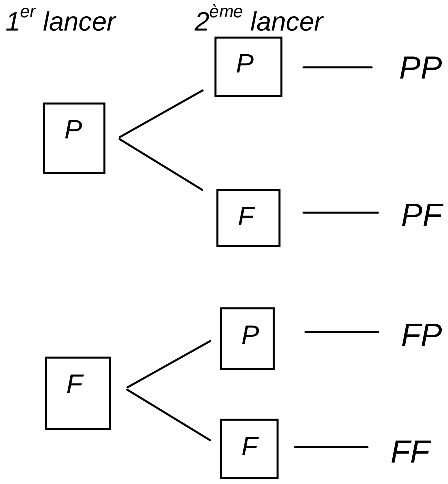
FAUX.

Pour le démontrer, nous allons calculer la probabilité de l'événement « obtenir une fois Pile et une fois Face à l'issue de deux lancers d'une pièce parfaitement équilibrée ».
Si on note **P** pour pile et **F** pour face.
Lors de deux lancers successifs d'une pièce de monnaie parfaitement équilibrée, on a quatre issues équiprobables possibles : **PP**, **PF**, **FP**, **FF**.
Sur les quatre issues possibles, deux conviennent : **PF** et **FP**.
La probabilité d'obtenir une fois pile et une fois face vaut donc :

Proba (**PF** ou **FP**) = Proba(**PF**) + Proba (**FP**) = $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

Remarque :

On peut aussi présenter les différents lancers sous forme d'arbre. Les quatre issues possibles correspondants aux quatre branches avec pour chaque issue, une probabilité de $\frac{1}{4}$.



4) Un article a le même prix dans deux magasins A et B.
Dans le magasin A, le prix de l'article subit successivement une baisse de 20 % puis une hausse de 20%.
Dans le magasin B, le prix de l'article subit successivement une hausse de 20 % puis une baisse de 20%.
À la suite de ces modifications de prix, il est plus rentable d'acheter alors l'article dans le magasin A que dans le magasin B.

FAUX.

Nous allons démontrer que les prix de cet article sont identiques dans les deux magasins, quelque soit l'ordre dans lequel il a subi une baisse ou une hausse de 20%.

Première méthode : en utilisant les coefficients multiplicateurs.

Augmenter un prix de 20%, c'est le multiplier par le coefficient 1,2.
Baisser un prix de 20%, c'est le multiplier par le coefficient 0,8.
La multiplication est commutative. La baisse suivie de la hausse ou la hausse suivie de la baisse consiste donc à multiplier le prix par $0{,}8 \times 1{,}2 = 0{,}96$, c'est-à-dire à baisser le prix de 4%.

Deuxième méthode : en faisant la comparaison à partir d'un prix initial choisi

Par exemple, on choisit 100 comme prix initial de l'article.

S'il subit d'abord une baisse de 20%, son nouveau prix est de $100-100\times\frac{20}{100}=100-20=80$,

puis une hausse de 20%, le prix final est de $80+80\times\frac{20}{100}=80+16=96$.

S'il subit d'abord une hausse de 20%, son nouveau prix est de $100+100\times\frac{20}{100}=100+20=120$,

puis une baisse de 20%, le prix final est de $120-120\times\frac{20}{100}=120-24=96$.

5) La longueur du côté d'un carré augmente de 5 %.
Le périmètre du carré augmente de 20 %.

FAUX.

Nous allons montrer que le périmètre augmente de 5 %.

<u>Première méthode : en utilisant un raisonnement algébrique.</u>

Le périmètre *p* d'un carré de côté de longueur *a* est donné par l'expression *p = 4a.*
Si la longueur du côté augmente de 5%, alors cette nouvelle longueur vaut *b = 1,05a*.
Le périmètre vaut alors $4b = 4 \times 1{,}05a = 1{,}05 \times 4a = 1{,}05p$,
soit une augmentation de 5 % et non de 20 %.

<u>Deuxième méthode : en faisant la comparaison à partir d'un exemple numérique.</u>

Par exemple le côté mesure 10. Le périmètre mesure donc 40.
Si le côté augmente de 5%, la nouvelle mesure est alors de $10 \times 1{,}05 = 10{,}5$.
Le nouveau périmètre mesure donc $10{,}5\times4 = 42$.
Si le périmètre avait augmenté de 20%, sa valeur serait $40 \times 1{,}20 = 48$ et non 42.

<u>EXERCICE 2</u>

Partie A : exemples

1) Somme des six « fractions égyptiennes » $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ et $\frac{1}{64}$

$$S = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=\frac{32}{64}+\frac{16}{64}+\frac{8}{64}+\frac{4}{64}+\frac{2}{64}+\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$$

2) Décomposition de $\frac{5}{8}$ en somme de « fractions égyptiennes »

$$\frac{5}{8}=\frac{1+4}{8}=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}$$

Partie B : présentation d'une méthode de décomposition dans un cas particulier

1) Une formule…

$$\frac{1}{p(\frac{p+q}{2})}+\frac{1}{q(\frac{p+q}{2})}=\frac{q\times1}{q\times p(\frac{p+q}{2})}+\frac{p\times1}{p\times q(\frac{p+q}{2})}=\frac{p+q}{q\times p(\frac{p+q}{2})}=\frac{p+q}{p\times q}\times\frac{2}{p+q}=\frac{2}{p\times q}$$

Remarque :
Pour résoudre cette question, il ne faut surtout pas développer les dénominateurs, mais il faut remarquer qu'ils ont déjà $\frac{(p+q)}{2}$ *en commun.*

2) Les dénominateurs sont des entiers naturels
Le produit de deux nombres entiers est un nombre entier donc *p* x *q* est un nombre entier. Il reste à démontrer que $\frac{(p+q)}{2}$ est un nombre entier.

Première méthode
p et *q* étant impairs, il existe deux entiers naturels *k* et *k'* tels que $p = 2k+1$ et $q = 2k'+1$.

Donc $\frac{p+q}{2} = \frac{2k+1+2k'+1}{2} = \frac{2(k+k'+1)}{2} = k+k'+1$ est un entier naturel.

Les dénominateurs sont donc entiers car produits d'entiers naturels.

Deuxième méthode
On peut également écrire que la somme de deux entiers impairs est un nombre pair, donc qu'elle est divisible par 2 (Cette justification n'est pas exigible dans la première solution.).
On en déduit que $\frac{p+q}{2}$ est un entier naturel.

3) Application à la décomposition de $\frac{2}{15}$

Pour appliquer la formule, il faut décomposer le nombre 15 en produits de deux entiers impairs.
Deux décompositions sont possibles 15 = 3 x 5 ou 15 = 1 x 15.

Donc on utilise : $\frac{2}{15} = \frac{2}{5 \times 3} = \frac{2}{1 \times 15}$.

On applique la formule précédente en prenant *p* =5 et *q* = 3.

On obtient : $\frac{2}{15} = \frac{1}{5 \times (\frac{5+3}{2})} + \frac{1}{3 \times (\frac{5+3}{2})} = \frac{1}{20} + \frac{1}{12}$

Puis, on applique la formule précédente en prenant *p* = 1 et *q* = 15.

On obtient : $\frac{2}{15} = \frac{1}{1 \times (\frac{1+15}{2})} + \frac{1}{15 \times (\frac{1+15}{2})} = \frac{1}{8} + \frac{1}{120}$

4) Application à la décomposition de $\frac{2}{2n+1}$

De même, pour appliquer la formule, il faut décomposer 2*n* + 1 en produit de deux nombres impairs.
En remarquant que 2*n* + 1 est impair, il s'agit d'appliquer la formule en utilisant $p = 1$ et $q = 2n+1$.

$$\frac{2}{2n+1} = \frac{2}{1 \times (2n+1)} = \frac{1}{1 \times (\frac{1+2n+1}{2})} + \frac{1}{(2n+1) \times (\frac{1+2n+1}{2})} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(2n+1)(n+1)}$$

Partie C : « algorithme glouton » de Fibonacci

1) Application de l'algorithme à $\frac{13}{81}$

Pour mettre en œuvre l'« algorithme glouton » de Fibonacci, il faut trouver la fraction inférieure la plus proche dont le numérateur est 1. Ci-après, une méthode possible :

$\frac{13}{81} \approx 0,1604936$ et on procède par encadrement de la fraction.

$\frac{1}{6} \approx 0,166666$ et $\frac{1}{7} \approx 0,142857$ donc $\frac{1}{7} < \frac{13}{81} < \frac{1}{6}$.

On en déduit que la fraction égyptienne inférieure à $\frac{13}{81}$ et la plus proche de $\frac{13}{81}$ est $\frac{1}{7}$.

$\frac{13}{81} - \frac{1}{7} = \frac{(13 \times 7) - 81}{81 \times 7} = \frac{10}{567}$.

Comme $\frac{10}{567}$ n'est pas une fraction égyptienne, on réitère le procédé.

Comme $\frac{1}{57} < \frac{10}{567} < \frac{1}{56}$, on en déduit que $\frac{1}{57}$ est la fraction égyptienne inférieure à $\frac{10}{567}$ et la plus proche de $\frac{10}{567}$.

$\frac{10}{567} - \frac{1}{57} = \frac{570 - 567}{567 \times 57} = \frac{3}{567 \times 57} = \frac{1}{567 \times 19} = \frac{1}{10773}$.

$\frac{1}{10773}$ étant une fraction égyptienne, on arrête le procédé et on obtient la décomposition suivante :

$$\mathbf{\frac{13}{81} = \frac{1}{7} + \frac{1}{57} + \frac{1}{10773}}.$$

2. a) Partie entière de la fraction $\mathbf{\frac{256}{81}}$

Pour trouver la partie entière de la fraction $\frac{256}{81}$, on effectue la division euclidienne de 256 par 81 ce qui donne : 256 = 3 x 81 + 13.

On en déduit l'écriture $\frac{256}{81} = \frac{3 \times 81 + 13}{81} = 3 + \frac{13}{81}$, avec $0 < \frac{13}{81} < 1$.

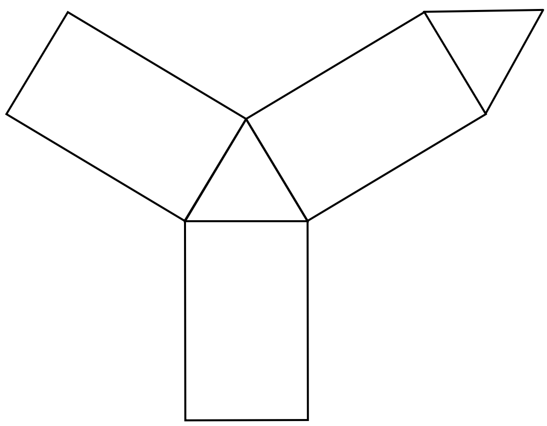
2. b) Approximation de π

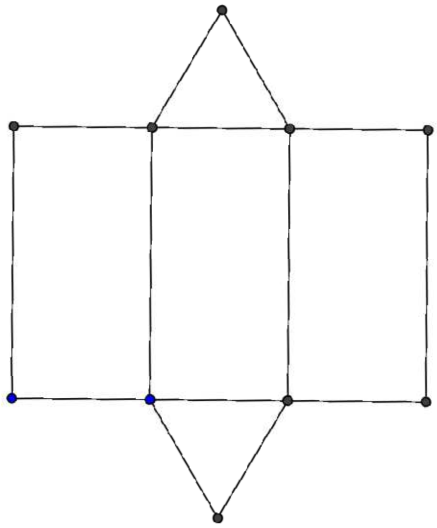
On déduit de la question précédente, l'approximation de π proposée par le papyrus Rhind, c'est-à-dire : $\mathbf{3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{57} + \frac{1}{10773}}$.

EXERCICE 3

1. Patron de l'emballage

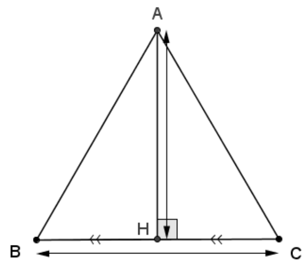
Cet emballage peut avoir différents patrons, mais tous comportent trois rectangles de dimensions 3 cm et 6 cm et deux triangles équilatéraux de 3cm de côté.
Nous donnons ci-après deux exemples.





2) Aire du triangle équilatéral de base

Nommons ABC un triangle équilatéral constituant la base du prisme droit. Dans ce triangle, appelons H le pied de la hauteur issue de A.



Le triangle ABC étant équilatéral de côté x, on sait que sa hauteur est donnée par l'expression : $d = \text{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Ce résultat peut être démontré en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AHC rectangle en H. :

$x^2 = \text{AC}^2 = \text{AH}^2 + \text{HC}^2 = d^2 + \frac{1}{4}x^2$.

(Comme le triangle ABC est équilatéral, ses hauteurs sont confondues avec ses médianes donc la longueur du segment [HC] vaut la moitié de celle du segment [BC]).

$d^2 = x^2 - \frac{1}{4}x^2 = \frac{3}{4}x^2$ d'où $d = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

On en déduit que l'aire du triangle équilatéral est donnée par l'expression : $A = \frac{\text{AH} \times \text{BC}}{2} = \frac{d \times x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.

3. a) Expression de *h* en fonction de *x*

On note *V* le volume des emballages. Avec les notations de l'énoncé, on a : $V = A \times h$ **.**

Sachant que *V* = 100 cm^3, on en déduit que $100 = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 \times h$,

d'où $h = \frac{4 \times 100}{\sqrt{3} x^2} = \frac{400 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3} x^2} = \frac{400\sqrt{3}}{3x^2}$.

3. b) Aire *S* du patron de cet emballage

Le patron du prisme droit est constitué de trois faces rectangulaires, de dimensions *h* et *x*, et de deux triangles équilatéraux d'aire *A*.

On a donc : $S = 3 \times hx + 2 \times A = 3 \times \frac{400 \times \sqrt{3}}{3x^2} x + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 = \frac{400\sqrt{3}}{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} x^2$.

4. a) Méthode permettant de remplir la colonne A (de la ligne 2 à 35) en utilisant la fonction de « recopie vers le bas »

On peut entrer $\boxed{0{,}5}$ en cellule A2, puis entrer dans la cellule A3 la formule $\boxed{= \text{A2} + 0{,}5}$. On recopie alors la formule de la cellule A3 vers le bas jusqu'à la cellule A35.

Autre méthode :

On peut également entrer $\boxed{0{,}5}$ en cellule A2, entrer $\boxed{1}$ en cellule A3, puis sélectionner les deux cellules A2 et A3 et les recopier vers le bas.

4. b) Formule pour compléter la colonne B

Une formule possible est $\boxed{\text{= 400*racine(3)/A2+racine(3)*A2^2/2}}$

4. c) Valeur de *x* qui minimise la quantité de carton utilisée pour l'emballage

On lit que la valeur de *x* qui minimise la quantité de carton utilisée pour l'emballage, à 0,5 cm près, est égale à **7,5 cm**.

4. d) Hauteur de l'emballage

Si *x* = 7,5 cm, alors $h = \frac{400 \times \sqrt{3}}{3 \times 7{,}5^2} \approx 4{,}11$ cm.

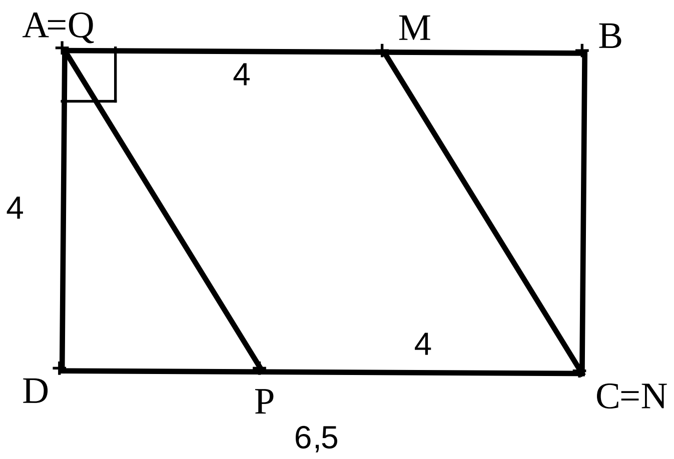
GROUPEMENT 3 - SEPTEMBRE 2011

EXERCICE 1

Dans cet exercice, l'unité de longueur est le cm.

1) Construction de la figure pour *x* = 4

Lorsque $x = 4$: AM = CP = 4 et BN = DQ = 4.
Par hypothèse : BC = 4.
Alors : BN = BC.
De plus, N est un point appartenant au segment [BC].
On en déduit que dans le cas où $x = 4$, les points N et C sont confondus.
De même, les points A et Q sont confondus.



Remarque 1 :
Dans l'énoncé, il n'est apporté aucune précision concernant les modalités de construction de la figure. On suppose donc que tous les outils sont autorisés (voire même le quadrillage de la copie), et que le candidat ne sera pas évalué sur les méthodes de construction. Par conséquent, on suppose que les traits de construction ne sont pas exigibles.

Remarque 2 :
Aucune justification n'est attendue pour cette construction. Elle est en revanche nécessaire pour répondre à la suite de la question.

MNPQ est un parallélogramme

Méthode 1 : par l'étude des côtés [QM] et [NP]

M est un point du segment [AB] et P un point du segment [CD] (hypothèse). La droite (AM) (respectivement (CP)) est confondue avec (AB) (respectivement (CD)). Puisque ABCD est un rectangle, alors (AB) et (CD) sont parallèles. On en déduit que (AM) et (CP) sont parallèles. Or les points A et Q sont confondus, de même que les points C et N. Ainsi les droites (QM) et (NP) sont parallèles.
Par ailleurs, on a par hypothèse : AM = CP = x = 4.
On a ainsi : QM = NP.

Le quadrilatère non croisé MNPQ ayant deux côtés opposés de même longueur et parallèles est un parallélogramme.

Méthode 2 : par les longueurs des côtés

On a par hypothèse : AM = CP = x = 4.

Puisque A et Q d'une part et C et N d'autre part sont confondus, on a ainsi : QM = NP.
Par hypothèse, le triangle MBN (c'est-à-dire MBC) est rectangle en B et les longueurs de deux de ses côtés sont connues : BN = BC = 4 et BM = AB – AM = 6,5 – 4 = 2,5.
De même le triangle PDQ (soit PDA) est rectangle en D avec : DQ = DA = 4 et DP = DC – PC = 2,5.
Ces deux triangles possèdent un angle de même mesure (l'angle droit) compris entre deux côtés respectivement de même longueur, ils sont alors isométriques.
On en déduit l'égalité de longueur entre les troisièmes côtés, soit : MN = PQ. (Remarque : connaissant deux longueurs dans ces deux triangles rectangles, on pouvait aussi, de façon plus coûteuse en calculs, établir cette égalité à l'aide du théorème de Pythagore)

Le quadrilatère convexe MNPQ ayant ses côtés opposés deux à deux de même longueur est un parallélogramme.

Méthode 3 : par le parallélisme des côtés deux à deux opposés

De la même manière que dans la méthode 1, on obtient le parallélisme des droites (QM) et (NP) à partir de celui des droites (AB) et (CD).

Les angles $\widehat{QPD}$ et $\widehat{PQM}$ alternes-internes sont alors de même mesure : $\widehat{QPD} = \widehat{PQM}$.
De plus, les triangles QPD et NMB sont isométriques car ils possèdent un angle droit compris entre deux côtés respectivement de même longueur (voir méthode 2). Alors : $\widehat{NMB} = \widehat{QPD}$.

On a donc : $\widehat{NMB} = \widehat{PQM}$.

Les deux droites (QP) et (MN) coupent la droite (QM) et les angles correspondants $\widehat{NMB}$ et $\widehat{PQM}$ sont de même mesure : elles sont donc parallèles.

Le quadrilatère MNPQ ayant ses côtés opposés deux à deux parallèles est un parallélogramme.

Aire de MNPQ

Méthode 1 : par l'application de la formule de l'aire d'un parallélogramme

L'aire du parallélogramme MNPQ est donnée par : Aire (MNPQ) = QM $\times$ h, où h correspond à la hauteur du parallélogramme. Dans cette partie une hauteur est donnée par QD, soit : h = 4.
De plus : QM = AM = 4.
Ainsi : Aire (MNPQ) = $4 \times 4 = 16$.

L'aire de QMNP mesure 16 cm^2.

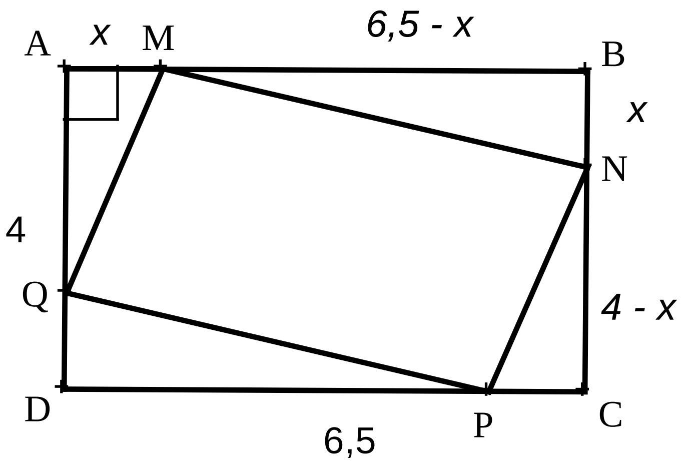
Méthode 2 : par calcul sur les aires

L'aire du quadrilatère MNPQ correspond à celle du rectangle ABCD auquel on a enlevé les deux triangles isométriques MBN et PDQ de hauteur 4 et de base MB = PD = 6,5 – 4 = 2,5.

Ainsi : Aire (MNPQ) = $4 \times 6{,}5 - 2 \times (\frac{1}{2} \times 4 \times 2{,}5) = 16$.

L'aire de QMNP mesure 16 cm^2.

2) Construction de la figure pour une valeur de x dans l'intervalle [0, 4]



Remarque:
L'énoncé indique « choisir une valeur de x et construire la figure … » ; par précaution il pouvait être utile de préciser la valeur de x correspondant à la figure proposée. Ici on a choisi x =1,2.

Nature du quadrilatère MNPQ

Les triangles AMQ et PCN rectangles en A et C respectivement vérifient en outre :
AM = CP = x et AQ = CN = 4 – x.
Ils possèdent un angle de même mesure (l'angle droit) compris entre deux côtés respectivement de même longueur : ils sont isométriques.
Par conséquent : MQ = NP. (*remarque : de même qu'au 1°) méthode 2 on pouvait établir cette égalité à l'aide du théorème de Pythagore*).
On a de même dans les triangles MBN et QDP rectangles en B et D respectivement : BN = DQ = x et BM = DP = 6,5 - x.
Les deux triangles sont donc isométriques et par conséquent : MN = QP.

Le quadrilatère convexe MNPQ ayant ses côtés opposés de même longueur deux à deux est donc un parallélogramme.

Remarque :
*Dans le **cas général**, les deux triangles MBN et NCP ne sont pas isométriques, donc :*
- *MN ≠ NP, de sorte que MNPQ n'est pas un losange ni a fortiori un carré ;*
- *$\widehat{NMB} \neq \widehat{PNC}$, donc :*

$$\widehat{MNP} = 180° - \widehat{MNB} - \widehat{PNC} = 180° - (90° - \widehat{NMB}) - \widehat{PNC} = 90° + (\widehat{NMB} - \widehat{PNC}).$$

Ce qui conduit à : *$\widehat{MNP} \neq 90°$. On conclut que MNPQ n'est pas un rectangle.*

3) a) Expression de l'aire de MNPQ en fonction de x, avec $0 < x < 4$

L'aire du quadrilatère MNPQ se calcule en retranchant de l'aire du rectangle ABCD celles des quatre triangles rectangles MBN, NCP, PDQ et QAM.
D'après la question précédente, on a :

Aire (MBN) = Aire (PDQ) = $\frac{1}{2} \times x \times (6{,}5 - x)$ et Aire (NCP) = Aire (QAM) = $\frac{1}{2} \times x \times (4 - x)$

Désormais, nous notons A(x) l'expression de l'aire de MNPQ en fonction de x.

On obtient : $A(x) = 4 \times 6{,}5 - 2 \times \frac{1}{2} \times x \times (6{,}5 - x) - 2 \times \frac{1}{2} \times x \times (4 - x)$.

Soit : $A(x) = 26 - 6{,}5\,x + x^2 - 4\,x + x^2$.

Ou enfin **: $A(x) = 26 - 10{,}5\,x + 2x^2 = 2x^2 - 10{,}5\,x + 26$**.

3) b) Aire de MNPQ si *x* = 0

Si $x = 0$ la formule donne : A(0) = 26.
Or dans le cas où $x = 0$, les points M, N, P et Q sont confondus respectivement avec A, B, C et D. Le parallélogramme MNPQ est alors confondu avec le rectangle ABCD et la mesure de son aire (exprimée en cm^2) est bien égale à 26.

Dans le cas où *x* = 0, la formule fournit le bon résultat.

Aire de MNPQ si *x* = 4

Si $x = 4$ la formule donne : $A(4) = 26 – 10,5 \times 4 + 2 \times 4^2 = 16$.
Or le cas où $x = 4$ a été traité dans la question 1 : MNPQ est un parallélogramme et la mesure de son aire (exprimée en cm^2) est 16.

Dans le cas où *x* = 4, la formule fournit le bon résultat.

4) Reconnaissance de la courbe représentant la variation de l'aire de MNPQ en fonction de *x*

<u>*Méthode 1 : par lecture sur le graphique de l'image du nombre 3*</u>

D'après la question précédente, pour $x = 3$, on trouve : $A(3) = 26 – 10,5 \times 3 + 2 \times 3^2 = 12,5$.
Or pour la figure 1, l'ordonnée du point d'abscisse 3 est supérieure à 18 ; pour la figure 2, elle est inférieure à 8 et pour la figure 4, elle est égale à 10. Ces trois graphes ne conviennent donc pas.

Par élimination, on peut conclure que **la courbe représentant la variation de l'aire de MNPQ en fonction de *x* est celle de la figure 3.**

<u>*Méthode 2 : par lecture sur le graphique de l'image de certains nombres compris entre 0 et 4*</u>

D'après la question précédente, pour $x = 4$, on trouve : A(4) = 16.
Or sur le graphe de la figure 2, on lit que 4 a pour image 10. Ce graphe ne convient donc pas.

Remarque :
On pouvait également utiliser le fait que A(0) = 26, alors que sur le graphe de la figure 2, l'ordonnée du point d'abscisse 0 est 20.

Pour $x = 2$, on trouve : $A(2) = 26 – 10,5 \times 2 + 2 \times 2^2 = 13$.
On en déduit que ni le graphe de la figure 1, ni celui de la figure 4 ne conviennent.

Par élimination, on peut conclure que **la courbe représentant la variation de l'aire de MNPQ en fonction de *x* est celle de la figure 3.**

Remarque :
Il était également possible de s'aider des valeurs inscrites dans le tableur de la question 6 !

<u>*Méthode 3 : en utilisant le type de représentation de la fonction A(x)*</u>

L'expression A(x) de l'aire de MNPQ en fonction de x n'est ni une fonction affine (c'est-à-dire une fonction de la forme $f(x) = ax + b$), ni une fonction affine par intervalle. La représentation de la fonction A(x) sur l'intervalle [0,4] ne peut donc être ni un segment ni une ligne brisée. Les courbes des figures 1 et 4 ne peuvent donc convenir.
De plus, pour le graphe de la figure 2, l'ordonnée du point d'abscisse 4 est égale à 10, alors que d'après la question précédente : A(4) = 16. Ce graphe ne peut donc convenir.

Par élimination, c'est donc **la courbe de la figure 3 qui représente la variation de l'aire de MNPQ en fonction de *x*.**

5) a) Lecture graphique de la valeur *x* correspondant à la valeur minimale de l'aire de MNPQ

On cherche sur la courbe de la figure 3 le point d'ordonnée minimale et on lit son abscisse : on trouve que cette abscisse se situe entre 2,5 et 3.

La valeur approchée (par défaut) au demi-centimètre près de *x* pour laquelle l'aire de MNPQ est minimale est 2,5.

Remarque :
De façon plus générale, toute valeur comprise entre 2,5 et 3 constitue donc une valeur approchée au demi-centimètre près de la valeur de x pour laquelle l'aire de MNPQ est minimale.

5) b) Lecture graphique de la valeur minimale de l'aire de MNPQ

Sur le graphe de la figure 3, on lit l'ordonnée minimale : elle se situe entre 12 et 13.

On peut donc affirmer que : **la valeur de l'aire minimale est donc d'environ 12 au cm^2 près**.

Remarque :
De façon plus générale, toute valeur comprise entre 12 et 13 constitue donc une valeur approchée au cm^2 près de la valeur minimale de l'aire de MNPQ.

6) a) Formule à entrer dans la cellule B2

La formule à saisir est la suivante : **= 2 * B1^2 – 10,5 * B1 + 26**

Remarque :
On pouvait éventuellement dans les « B1 » mettre un $ devant les 1, mais il ne fallait surtout pas en mettre devant les B.

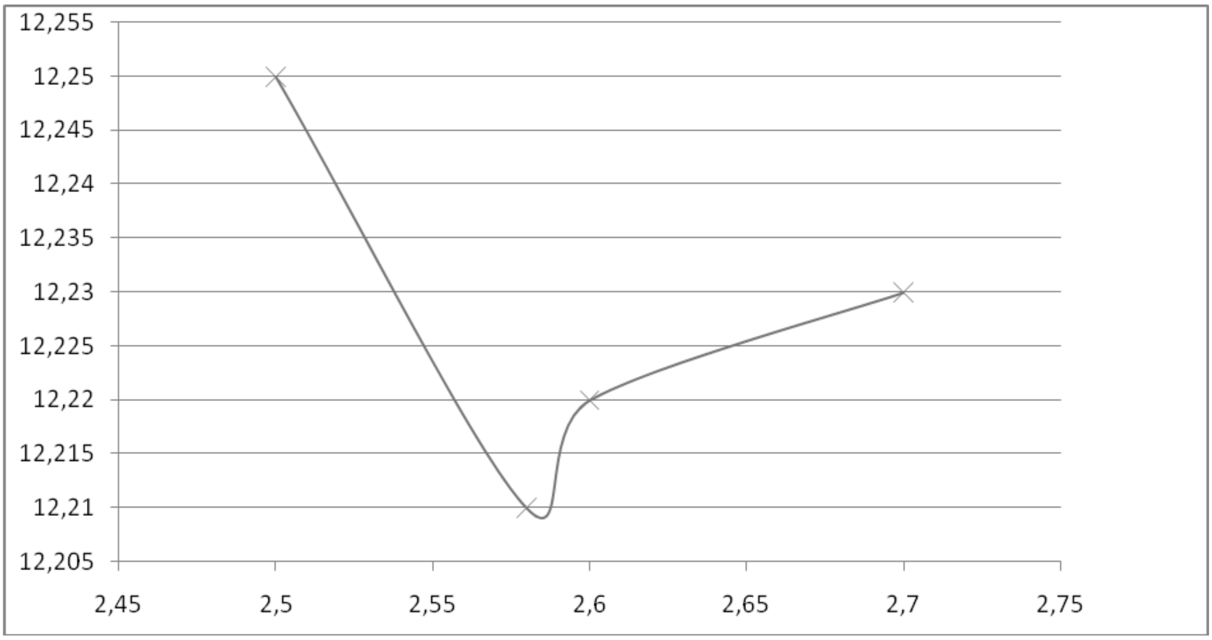
6) b) Les raisons pour lesquelles on ne peut pas conclure de façon certaine à propos d'une valeur approchée de l'aire minimale

Dire que 12,22 est une valeur approchée à 0,1 cm^2 de l'aire minimale revient à dire que cette aire minimale est comprise entre 12,12 cm^2 et 12,32 cm^2 .
Or le tableau de valeurs dont nous disposons ne permet pas une telle affirmation. En particulier, ce tableau n'interdit pas que cette aire minimale soit inférieure et même très inférieure à 12,22 cm^2 .

En admettant que la fonction soit décroissante puis croissante, trois cas peuvent se produire :

Premier cas :

Le minimum est atteint entre 2,5 et 2,6, comme présenté sur l'exemple ci-dessous. Dans ce cas, la valeur minimale est inférieure à 12,22. Cette valeur peut-être aussi petite que possible et en particulier être inférieure à 12,12 cm^2 .

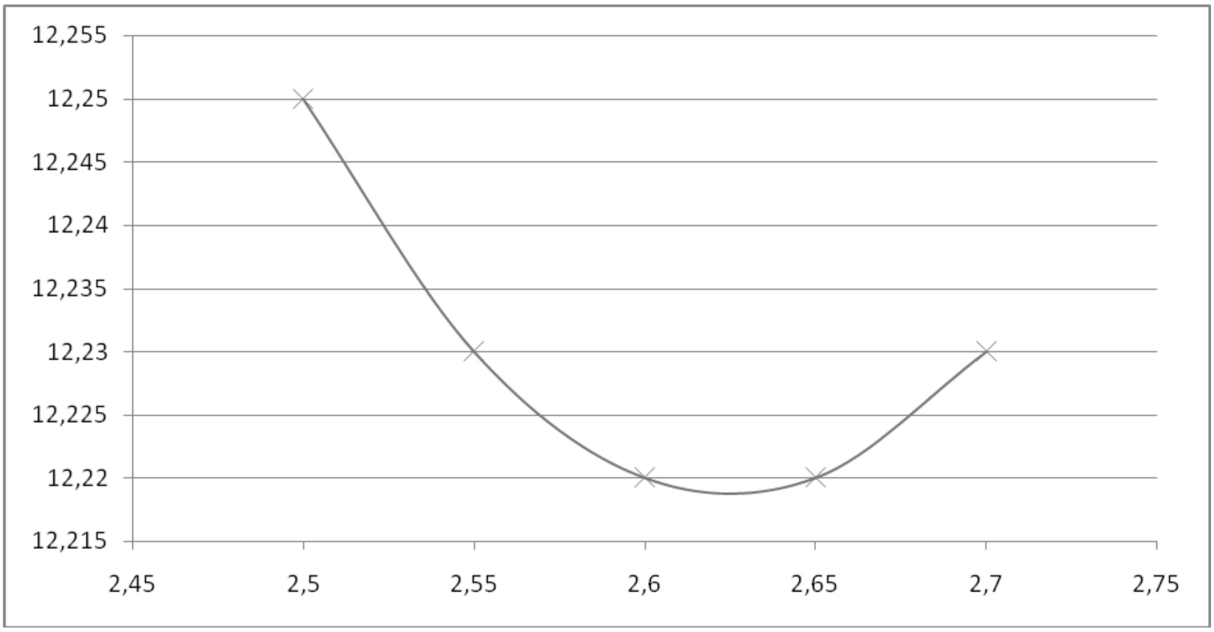


Deuxième cas :

Le minimum est atteint en 2,6 et la valeur minimale est égale à 12,22.

Troisième cas :

Le minimum est atteint entre 2,6 et 2,7, comme présenté sur l'exemple ci-dessous. Dans ce cas, la valeur minimale est inférieure à 12,22 et là encore peut être inférieure à 12,12 cm^2.



En l'absence d'une étude rigoureuse des variations de la fonction, le tableau de valeurs ne permet donc pas de conclure.

7) Aire(MNPQ) = $2(x - \frac{21}{8})^2 + \frac{391}{32}$

Méthode 1 : en développant l'expression proposée dans l'énoncé (que l'on notera A)

$A = 2(x - \frac{21}{8})^2 + \frac{391}{32} = 2(x^2 - 2 \times x \times \frac{21}{8} + (\frac{21}{8})^2) + \frac{391}{32} = 2x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{21^2}{32} + \frac{391}{32} = 2x^2 - 10{,}5\,x + 26$

On retrouve l'expression de l'aire trouvée à la question 3a.

On a donc bien : Aire(MNPQ) = $2(x - \frac{21}{8})^2 + \frac{391}{32}$

Méthode 2 : en partant de l'expression de A(x)

D'après la question 3a : $A(x) = 2x^2 - 10{,}5\,x + 26 = 2x^2 - \frac{21}{2}x + 26 = 2\,(x^2 - \frac{21}{4}x) + 26$.

Or l'expression entre parenthèses peut être vue comme le début d'une identité remarquable de la façon suivante : $x^2 - \frac{21}{4}x = x^2 - 2 \times \frac{21}{8}x + (\frac{21}{8})^2 - (\frac{21}{8})^2 = (x - \frac{21}{8})^2 - (\frac{21}{8})^2$.

L'expression de A(x) devient alors : $A(x) = 2 \times (x - \frac{21}{8})^2 - 2 \times (\frac{21}{8})^2 + 26 = 2(x - \frac{21}{8})^2 + \frac{391}{32}$.

On retrouve bien l'expression donnée dans l'énoncé.
On a donc bien : Aire(MNPQ) = $2(x - \frac{21}{8})^2 + \frac{391}{32}$

Valeur de l'aire minimale de MNPQ et valeur de *x* à laquelle elle correspond

La valeur minimale de l'aire de MNPQ correspond à la plus petite valeur que prend A(*x*), c'est-à-dire que prend l'expression $2(x - \frac{21}{8})^2 + \frac{391}{32}$, lorsque *x* prend ses valeurs dans l'intervalle [0,4].

Or pour tout nombre réel *x*, on sait que : $2(x - \frac{21}{8})^2 \geq 0$

Donc : A(x) ≥ $\frac{391}{32}$.

A(x) est égale à $\frac{391}{32}$ si et seulement si : $2(x - \frac{21}{8})^2 = 0$,

C'est-à-dire si et seulement si : $x = \frac{21}{8}$.

La valeur minimale de A(x) est donc bien $\frac{391}{32}$. Elle est atteinte lorsque $x = \frac{21}{8}$.

L'aire de MNPQ est minimale pour $x = \frac{21}{8}$ (en cm) et sa mesure (en cm^2) est alors égale à $\frac{391}{32}$, soit à 12,21825.

EXERCICE 2

Affirmation 1 : Fausse

Si on note P le prix initial d'un objet. Puisque les prix augmentent de 10 % par an, après une année, l'objet vaudra : $P + \frac{10}{100} P = 1{,}1 P$.

Pour obtenir le nouveau prix après une augmentation de 10 % une année, il suffit donc de le multiplier par 1,1.

Le nouveau prix après 5 augmentations successives est donc : $1{,}1^5 P = 1{,}6105 P = P + \frac{61{,}05}{100} P$

Donc en 5 ans, les prix ont augmenté de 61,051 % et non de 50 %.

Affirmation 2 : Fausse

Remarque 1 :
On convient dans cet exercice de comparer les concentrations en sucre des mélanges, l'énoncé ne rendant pas explicite la signification de l'expression « mélange plus sucré ».

Remarque 2 :
On conviendra que par « volume » on entend « même unité de volume ».

Remarque 3 :
Dans cet exercice, il est demandé de comparer la concentration en sucre des mélanges, c'est-à-dire la quantité de sucre relativement au volume total du mélange. Il ne s'agit donc pas de trouver le mélange qui contient la plus grande quantité de sucre.

Le premier mélange, comporte 5 unités de volumes de sirop de fraise pour un volume total (en unités de volumes) de : 5 + 9 = 14.

Sa concentration en sirop de fraise est donc de $\frac{5}{14}$.

Le deuxième mélange, comporte 4 unités de volumes de sirop de fraise pour un volume total (en unités de volumes) de : 4 + 7 = 11.

Sa concentration en sirop de fraise est donc de $\frac{4}{11}$.

Comparer les concentrations en sucre revient à comparer les concentrations en sirop de fraise des deux mélanges. Pour cela on est amené à comparer les fractions $\frac{5}{14}$ et $\frac{4}{11}$.

Soit en formant leur différence : $\frac{5}{14} - \frac{4}{11} = \frac{(55 - 56)}{(14 \times 11)} < 0$. Donc : $\frac{5}{14} < \frac{4}{11}$.

Soit en réduisant ces deux fractions au même dénominateur et en comparant leur numérateur.

Le premier mélange (contenant les 5 volumes de sirop de fraise) est donc moins sucré que le deuxième (celui contenant les 4 volumes).

Affirmation 3 : Vraie

La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.

Donc p vérifie l'égalité : $\frac{1}{4} + p + p + \frac{3}{8} + p = 1$

Soit : $3p = 1 - \frac{5}{8}$.

On en déduit : $p = \frac{1}{8}$

On obtient un nombre pair si on obtient 2 ou si on obtient 4.

La probabilité d'obtenir 2 ou 4 est égale à : $p + \frac{3}{8} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$.

On a donc bien autant de chances d'obtenir un nombre pair qu'un nombre impair.

Remarque :
Le calcul de la probabilité d'obtenir un nombre impair (soit 1, 3 ou 5) donnerait de même :
$\frac{1}{4} + p + p = \frac{1}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$.

Affirmation 4 : Vraie

Notons n et n +1 deux entiers naturels consécutifs
La différence entre les carrés de deux nombres entiers naturels consécutifs est donnée par l'expression : $(n + 1)^2 - n^2$
Or : $(n + 1)^2 - n^2 = (n + 1 + n)(n + 1 - n) = 2n + 1$.
De plus $(n + 1) + n = 2n + 1$.
Ainsi : $(n + 1)^2 - n^2 = (n + 1) + n$.
La différence entre les carrés de deux nombres entiers naturels consécutifs est bien égale à la somme de ces deux nombres entiers.

Affirmation 5 : Vraie

Notons a la longueur de l'arête du cube. Le volume du cube est alors égal à : a^3.
« Augmenter de 10 % revient à multiplier par 1,1 », donc l'arête du nouveau cube est : 1,1a.
Le volume du nouveau cube est alors : $(1{,}1a)^3 = 1{,}1^3\,a^3 = 1{,}331\,a^3 = a^3 + \frac{33{,}1}{100}\,a^3$.

Si on augmente l'arête d'un cube de 10 %, alors le volume de ce cube augmente bien de 33,1 %.

Affirmation 6 : Fausse

<u>Méthode 1 : par le calcul de la vitesse moyenne sans technique</u>

On note v la vitesse moyenne sans technique. Augmenter cette vitesse de 50 % revient à la multiplier par 1,5. On obtient : $v \times 1{,}5 = 120$.

D'où : $v = \frac{120}{1{,}5} = 80$.

La vitesse sans technique est donc égale à 80 km/h.

<u>Méthode 2 : par l'absurde</u>

Augmenter une vitesse moyenne de 50 % revient à la multiplier par 1,5. Si la vitesse moyenne sans technique du skieur était de 60 (en km/h), alors sa vitesse moyenne en position de « l'œuf » serait (en km/h) de : $1{,}5 \times 60 = 90$.
Or avec cette technique, le skieur descend la piste à 120 (en km/h).

La vitesse sans technique ne peut donc pas être de 60 (en km/h).

Affirmation 7 : Vraie

Méthode 1 : en utilisant le théorème de Pythagore dans les triangles CHA et OCH

D'après la figure, les triangles CHA et OHC sont rectangles en H.
En appliquant le théorème de Pythagore dans OHC on obtient : $OC^2 = OH^2 + HC^2$
Donc : $HC^2 = OC^2 - OH^2$

Puisque C appartient au cercle de centre O et de diamètre AB, on a : $OC = \frac{AB}{2} = \frac{n}{2}$.

De plus : $OH = AO – AH = \frac{n}{2} - 1$

Alors : $HC^2 = (\frac{n}{2})^2 – (\frac{n}{2} - 1)^2 = \frac{n^2}{4} – (\frac{n^2}{4} – n + 1) = n – 1$.

En appliquant le théorème de Pythagore dans CHA on obtient : $AC^2 = AH^2 + HC^2$
Soit : $AC^2 = 1 + (n – 1) = n$

Donc : **AC =** $\sqrt{n}$

Méthode 2 : en utilisant le théorème de Pythagore dans les triangles ABC, CHA et CHB

D'après la figure, les triangles ABC, AHB et AHC sont rectangles respectivement en C, H et H.
En appliquant le théorème de Pythagore dans ABC on obtient : $AB^2 = AC^2 + BC^2$
Soit : $AC^2 = AB^2 - BC^2$ (1)
En appliquant le théorème de Pythagore dans CHB on obtient : $BC^2 = BH^2 + HC^2$
Comme H appartient au segment [AB] on a : HB = AB - AH
d'où : HB = n – 1.
Par conséquent : $BC^2 = (n – 1)^2 + HC^2$ (2)
En appliquant le théorème de Pythagore dans AHC on obtient : $AC^2 = AH^2 + HC^2$
Donc : $HC^2 = AC^2 - AH^2$
Soit : $HC^2 = AC^2 – 1$.
Alors l'égalité (2) devient : $BC^2 = (n – 1)^2 + AC^2 – 1$
Et par conséquent l'égalité (1) conduit à : $AC^2 = AB^2 – ((n – 1)^2 + AC^2 – 1)$
Soit : $AC^2 = n^2 – (n – 1)^2 - AC^2 + 1$
D'où : $2AC^2 = n^2 – n^2 + 2n – 1 + 1$
On obtient : $AC^2 = n$.

Donc **: AC =** $\sqrt{n}$

Remarque :
*D'autres méthodes reposent sur les relations métriques dans le triangle rectangle qui ne sont pas au programme du collège et **ne sont pas directement exigibles au concours.** Nous en présentons néanmoins deux en particulier pour les candidats qui les auraient vues au lycée.*

Ces relations peuvent aussi être retrouvées assez rapidement en s'appuyant sur la présence dans cette configuration de 3 triangles rectangles semblables (ici ABC, ACH et CBH) puis, soit en écrivant les égalités entre rapports des côtés correspondants, soit en utilisant le fait que les angles correspondants sont égaux et donc ont même cosinus, sinus et tangente.

Méthode 3 : en utilisant les relations métriques dans le triangle rectangle (1)

Le triangle ABC est inscrit dans le cercle de diamètre [AB] donc le triangle ABC est rectangle en C. [CH] est la hauteur issue de C dans ABC. Dans ce triangle on a la relation : $AC^2 = AH \times AB$.
Les hypothèses conduisent à : $AC^2 = 1 \times n$

D'où : **AC =** $\sqrt{n}$

Méthode 4 : en utilisant les relations métriques dans le triangle rectangle (2)

Le triangle ABC est inscrit dans le cercle de diamètre [AB] donc le triangle ABC est rectangle en C. [CH] est la hauteur issue de C dans ABC. Dans ce triangle, on a la relation : $AH \times HB = CH^2$
H appartient au segment [AB] on a : HB = AB – AH
D'où : HB = n – 1.
La relation conduit à : $CH^2 =1 \times (n – 1) = n - 1$.
Dans le triangle ACH, rectangle en H, en appliquant le théorème de Pythagore, on obtient :
$AC^2 = AH^2 + HC^2$

D'où: $AC^2 = 1 + (n - 1)$

Et donc : **AC =** $\mathbf{\sqrt{n}}$.

EXERCICE 3

1) Construction de l'ove en vraie grandeur

Remarque 1 :
Les outils à utiliser ne sont pas spécifiés dans la consigne. On suppose donc que tous les outils sont autorisés et que le candidat ne sera pas évalué sur les méthodes de construction, donc que les traits de construction ne sont pas exigibles.

Remarque 2 :
Il n'est pas demandé explicitement de rédiger un programme de construction, ni de justifier cette construction. Nous les donnons pour la formation du candidat.

Programme de construction et justification :

L'unité de longueur est le cm.

- Tracer un cercle C_1 de diamètre 10. On appelle I le centre de ce cercle. On appelle B et C deux points de cercle formant un diamètre. Ainsi (BC) partage le plan en deux demi-plans.

- La droite passant par I et perpendiculaire à (BC) coupe le cercle C_1 : on appelle D l'un des deux points d'intersection. La droite (ID) est alors la médiatrice de [BC] de sorte que le triangle BCD est isocèle en D. De plus C_1, de diamètre [BC], est le cercle circonscrit au triangle BCD : celui-ci est donc rectangle en D. La partie supérieure de l'ove est le demi-cercle du cercle C_1 appartenant au demi-plan ne contenant pas D.

- Dans le demi-plan contenant D, tracer l'arc de cercle de centre B, compris entre les deux droites (BC) et (BD). On note E le point d'intersection de cet arc de cercle avec la demi-droite [BD). Le rayon de cet arc de cercle est : BE = BC = 10.

$\overset{\frown}{CE}$ est un arc de cercle de l'ove BCEF.

- Dans le demi-plan contenant D, tracer l'arc de cercle de centre C, compris entre les deux droites (CB) et (CD). On note F le point d'intersection de cet arc de cercle avec la demi-droite [CD). Le rayon de cet arc de cercle est : CF = CB = 10.

BF est un arc de cercle de l'ove BCEF.

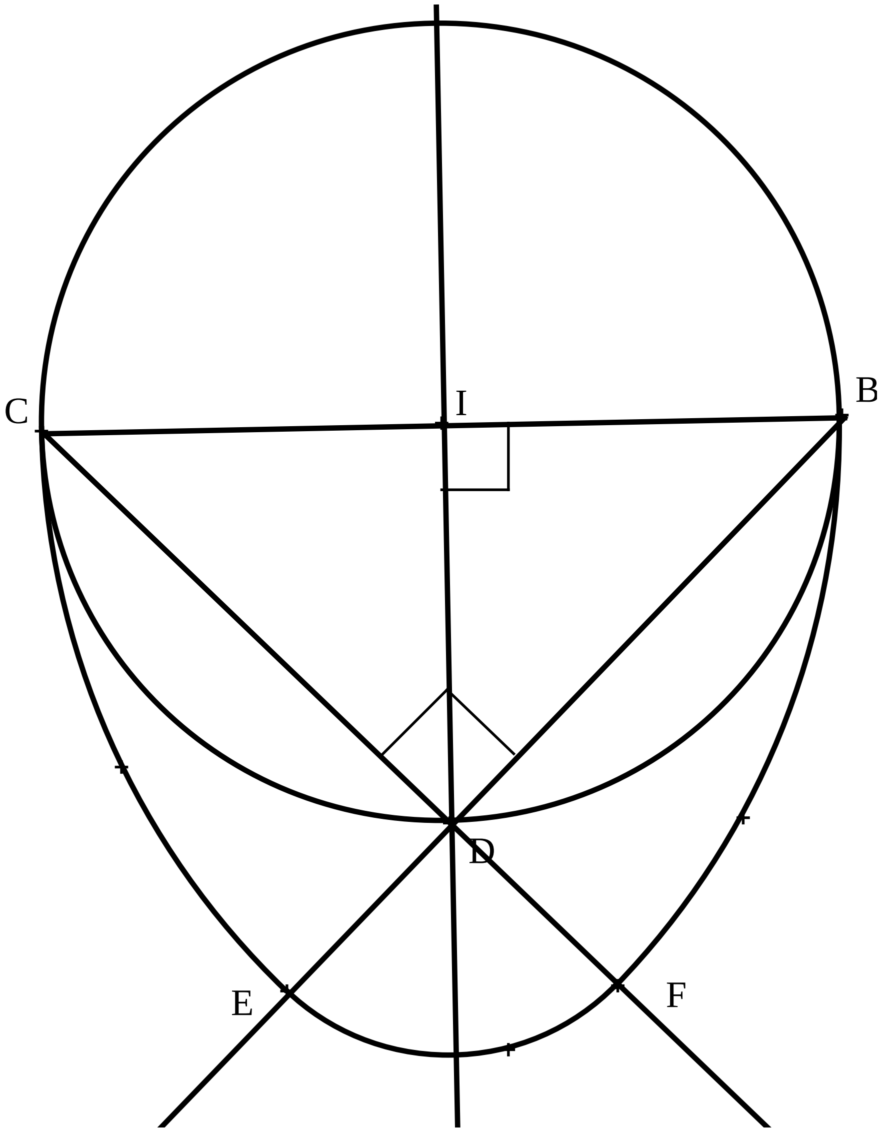
- Tracer l'arc de cercle $\overset{\frown}{EF}$ de centre D et de rayon DE, compris entre les deux demi-droites [DE) et [DF). Ceci est possible d'après ce qui précède. En effet C, D, F et B, D, F respectivement sont alignés. Alors : DE = BE - BD et DF = CF – CD.

Or : BE = 10 = CF et CD = BD (BCD est isocèle).

Ainsi : DE = DF.

On en conclut que E et F appartiennent au cercle de centre D et de rayon DE.

L'arc de cercle $\overset{\frown}{EF}$ complète l'ove BCEF.



2) Périmètre de l'ove

Le périmètre de l'ove est égal à la somme des longueurs de chaque arc de cercle qui le compose :

$P = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ où L_1, L_2, L_3, L_4 sont respectivement les arcs $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CE}$, $\overset{\frown}{BF}$ et $\overset{\frown}{EF}$.

Calcul de L_1

La longueur L_1 du demi-cercle de centre I et de diamètre BC est la moitié du périmètre de ce cercle, soit : $L_1 = \frac{1}{2}\pi \times BC = \frac{1}{2}\pi \times 10 = 5\pi$.

Calcul de L_2

Par construction (voir question 1), le rayon de l'arc de cercle CE est : BC = BE = 10.

Le triangle BCD est rectangle isocèle en D, donc : $\widehat{CBD} = \widehat{BCD}$.

Or : $\widehat{CBD} + \widehat{BCD} + \widehat{CDB} = 180°$.

Donc : $\widehat{CBD} = \dfrac{180° - 90°}{2} = 45°$.

Sur un cercle, la mesure de la longueur d'un arc est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qui l'intercepte.

Puisque l'angle au centre mesure 45° (c'est-à-dire $\frac{360°}{8}$), on déduit :

$L_2 = \frac{1}{8} \times (2\pi \times BC) = \frac{1}{8} \times (2\pi \times 10) = \frac{5\pi}{2}$.

Calcul de L_3

La longueur L_3 de l'arc de cercle BF est celle d'un arc de cercle de rayon BC et d'angle au centre 45°.
On trouve de même : $L_3 = \frac{5\pi}{2}$.

Calcul de L_4

Comme (BD) et (DC) sont perpendiculaires, (DE) et (DF) le sont aussi. Ainsi l'angle au centre de l'arc de cercle $\overset{\frown}{EF}$ mesure 90°, ce qui signifie que $\overset{\frown}{EF}$ représente un quart du cercle de rayon DE.
Or : DE = BE – BD.
Pour calculer BD, il existe plusieurs méthodes:

<u>Méthode 1 : par le théorème de Pythagore</u>

Dans le triangle rectangle isocèle BCD le théorème de Pythagore conduit à : $BC^2 = BD^2 + DC^2$.
Or : BD = DC.
D'où : $2BD^2 = 100$.
On obtient : $BD = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

<u>Méthode 2 : par la formule de la longueur de la diagonale d'un carré</u>

On peut reconnaître en [BC] la diagonale du carré dont trois des sommets sont C ,D et B.
On a alors : $BC = BD\sqrt{2}$
D'où : $BD = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$.

<u>Méthode 3 : par les résultats de trigonométrie</u>

Dans le triangle rectangle isocèle BCD : $\cos 45° = \frac{BD}{BC}$

D'où : $BD = BC \cos 45° = 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$.

On obtient alors : $DE = 10 - 5\sqrt{2}$.

Par suite : $L_4 = \frac{1}{4} \times (2\pi \times (10 - 5\sqrt{2})) = \frac{\pi}{2} \times (10 - 5\sqrt{2}) = 5\pi \times (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$.

On en déduit que : $P = 5\pi + \frac{5\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} + 5\pi \times (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 5\pi \times (2 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 5\pi \times (3 - \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Le périmètre P de l'ove mesure donc $5\pi \times (3 - \frac{\sqrt{2}}{2})$ (avec le cm comme unité de longueur).

Le périmètre de l'ove est donc d'environ 36,0 cm au mm près par défaut.