

Géométrie sur un cube

J.C. Ducorail - M.H.Salin

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Cahors 1991.

Cet article propose des activités de formation initiale permettant la construction de notions géométriques autour du cube (perspective cavalière, patrons et quelques propriétés de géométrie dans l'espace).

Le cube apparaît comme un volume simple et ses propriétés semblent évidentes (du moins celles que chacun croit connaître et chacun pense qu'il les connaît toutes). Objet d'étude sans mystère, il peut apparaître à l'enseignant et à l'élève comme étant un bon support de réussite immédiate ... et il ne présente plus alors le moindre intérêt. Nous allons essayer de prouver le contraire.

UTILISATION AVEC DES ENSEIGNANTS EN FORMATION INITIALE

Le cube va être étudié à partir de situations diverses qui feront appel à cinq types de représentations :

- le patron (le développement) du volume,
- le volume réalisé en "dur" (bois ou polystyrène),
- le volume réalisé à partir d'un patron,
- le volume représenté en perspective cavalière (même approximative),
- le volume représenté en dessin technique.

Ce sont les interactions entre ces cinq "écritures" du cube qui vont permettre :

- de faire des hypothèses,
- de vérifier, de valider les conjectures,
- de se familiariser avec des représentations de l'espace,
- de comprendre, dans et par l'action, la nécessité de tracés soignés et précis,
- d'anticiper les actions par un va-et-vient entre l'espace et sa représentation plane,
- d'utiliser en situation les outils du dessin géométrique.

Par exemple, la recherche de tous les patrons du cube peut être validée par la réalisation du cube construit ou par une réalisation rapide de bristol quadrillé (pour la rapidité du tracé). La dialectique du "plan" à l'espace, du "dessin" au concret doit toujours être présente dans les activités proposées.

SAVOIRS MATHÉMATIQUES VISÉS

- parallélisme de deux droites dans l'espace,
- orthogonalité d'une droite et d'un plan,

Espace et géométrie

- plans perpendiculaires et section du dièdre droit.

...

CONTENUS DIDACTIQUES

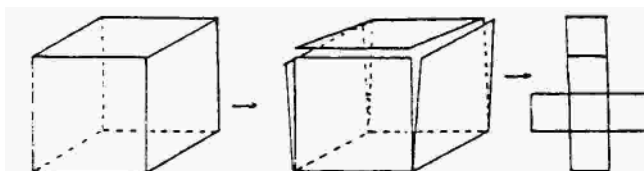
- montrer que la géométrie plane se fait dans un plan même si ce plan n'est pas celui de la feuille ou celui du tableau,
- dans le vécu des enseignants en formation, montrer que le constat d'erreur (ou de réussite) doit venir de la situation elle-même, c'est-à-dire ici de la transposition d'une "écriture" du cube dans une autre, ce qui permet de vérifier, de valider une action ou une hypothèse.
- chercher les transpositions didactiques possibles avec des élèves.

A LA RECHERCHE D'UN PATRON DU CUBE

1) Situation de départ

Chaque stagiaire (ou chaque groupe de stagiaires), dispose d'un cube "en dur" (cf. paragraphe matériel). La consigne est de rechercher le développement de ce volume donné. Le développement étant réalisé, il faut alors construire un cube dont la longueur de l'arête est différente de celle du cube initial. Cette réalisation sert de validation de l'activité précédente.

On pourrait également partir de la représentation du cube en perspective cavalière. La consigne serait alors de désigner les arêtes selon lesquelles il faut couper pour "ouvrir" le cube et de passer ensuite au patron d'un cube d'arête donnée pour valider.



2) Notes sur la perspective cavalière

La perspective cavalière est un mode de représentation codée des volumes.

Principes :

- Toutes les figures des plans frontaux sont représentées sans déformation (conservation des propriétés angulaires et métriques) à l'échelle près.
- Contrairement au dessin habituel, le point de fuite est rejeté à l'infini. Il y a donc conservation du parallélisme. En général on choisit un "angle de fuite" par rapport à l'horizontale de 30°, 45° ou 60° à cause des instruments de dessin.
- Pour conserver à l'œil l'impression correcte du volume, on réduit les dimensions sur les fuyantes (2/3, 1/2, 3/4 ...) selon l'angle de fuite choisi. Tout dessin

en perspective cavalière devrait donc comporter l'indication de l'échelle et de la réduction sur les fuyantes.

- On représente en traits pleins ce qui est visible et en traits interrompus ce qui est caché.

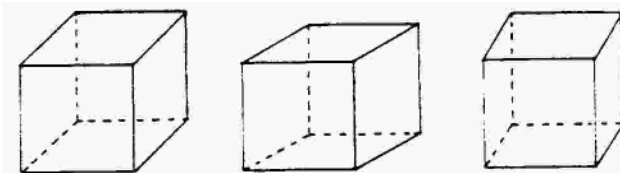
Propriétés :

- Sur les tracés non déformés, toutes les propriétés de la géométrie plane sont conservées.

- Sur les autres faces sont conservées les propriétés du parallélisme et les propriétés des milieux.

Ci-dessous trois représentations d'un même cube avec 3 angles de fuite différents : 45° , 30° , 60° .

Les réductions sur les fuyantes sont respectivement $2/3$, $2/3$, $1/2$ ¹



3) Et ensuite

Si on en reste là, avec cette seule activité, on peut considérer que le tour du cube (au propre comme au figuré), a été fait et qu'il suffira d'ajouter la formule du volume pour que chacun sache ce qu'est réellement un cube. Malheureusement il n'en est rien et toute la richesse du cube reste inexplorée.

Ce que nous proposons ci-après est un essai d'exploitation des richesses du cube dans le but d'une approche différente de la géométrie.

4) Les patrons du cube

On peut proposer ensuite de rechercher tous les patrons possibles du cube.

On peut partir des divers patrons trouvés dans la classe lors de la situation (1) et se demander s'il existe d'autres modèles. On peut partir à nouveau du cube en "dur".

On peut se demander si tous les hexaminos sont des patrons du cube.

On peut partir de la perspective cavalière (situation difficile).

¹ NDLR : Le choix de ces coefficients est personnel aux auteurs de l'article

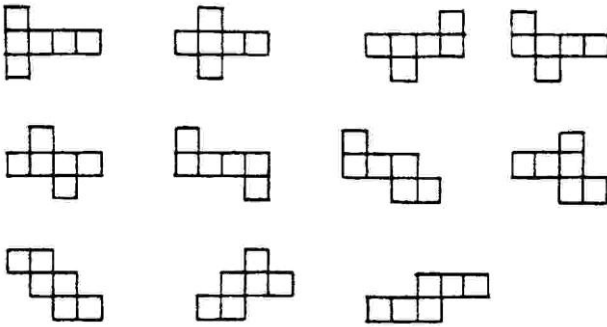
Espace et géométrie

Quelque soit le point de départ choisi, il importe de pouvoir vérifier rapidement les hypothèses sans recourir à une réalisation soignée comme en (1). Du papier quadrillé sur lequel le tracé est facile et que l'on peut rapidement découper et plier permet cette vérification.

Ensuite il faut trier et classer les patrons trouvés. Ce tri va permettre :

- d'éliminer les patrons identiques (superposables par retournement ou par rotation),
- de vérifier s'il n'y a pas d'autre combinaison de six carrés adjacents par un moins un côté qui permette de construire un cube,
- de vérifier au moins qu'il existe des combinaisons de six carrés qui ne permettent pas de construire un cube.

Les onze patrons du cube :



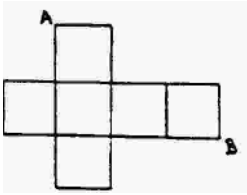
Toute cette activité ne peut se conclure que par la réalisation effective de cubes à partir des patrons ainsi trouvés.

5) D'autres exercices avec les patrons

Plusieurs exercices sont possibles. Ils conduisent tous à passer mentalement du patron au cube réalisé, de la représentation au patron.

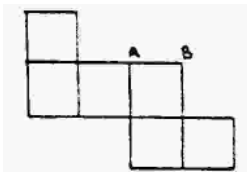
Voici quelques exemples :

- sur un patron, désigner le sommet extérieur d'un carré. Demander de désigner les autres sommets qui viennent se superposer à celui-ci lors du "montage" du cube.



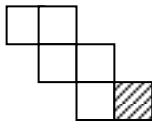
Sommets venant coïncider
avec A?
avec B?
etc...

- le même exercice peut être fait avec le côté d'un carré :



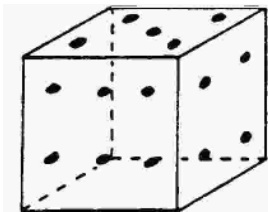
Quel côté vient se superposer sur AB?

- réaliser, sur un patron quelconque, le tracé effectué sur le cube en vraie grandeur (voir paragraphe suivant, tracés sur le cube).
- sur un cube réalisé, indiquer (en les repassant avec un feutre par exemple) les arêtes selon lesquelles, il faut couper pour "ouvrir" le cube et obtenir un patron désigné à l'avance.
- même exercice avec un carré. On peut chercher la face opposée :



Quelle est la face opposée à la face hachurée?

- un onglet (pour le collage) étant placé, indiquer où se placent les autres sur le patron.
- à partir d'un dé représenté en perspective cavalière



Sur un patron placer le 6 et le 4 ou le 6 et le 3, ou...et demander aux élèves de replacer les autres faces du dé sur le même patron.

Il faut alors considérer que le patron se plie à l'inverse des habitudes, c'est-à-dire que les faces sur lesquelles on écrit deviennent des faces extérieures du cube réalisé.

On peut recommencer avec divers patrons, avec diverses faces du dé.

TRACÉS SUR UN CUBE

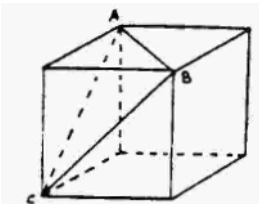
Ayant réalisé un volume, il est intéressant d'effectuer des tracés sur ses faces. C'est une première approche de la géométrie dans l'espace mais en vraie grandeur.

Le passage du tracé réalisé à ses représentations en perspective cavalière et en dessin technique devrait permettre :

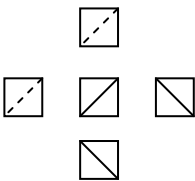
- de se familiariser avec les représentations de l'espace.
- de rencontrer les projections orthogonales.
- de s'attacher davantage aux propriétés qu'aux représentations,
- de formuler des hypothèses à partir de figures "fausses".

Ici, dans ce document, la présentation ne peut se faire qu'avec des représentations en perspective cavalière ou en dessin technique mais il faut d'abord réaliser les tracés sur un cube réel avant de les représenter.

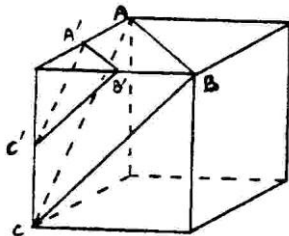
1) Quelques polygones



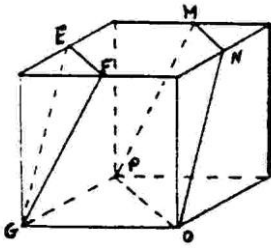
Nature du triangle ABC?
Calcul des côtés.



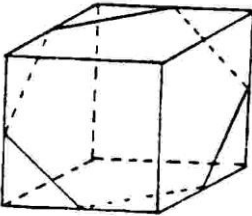
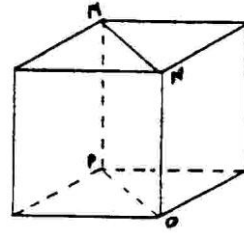
Dessin technique (projection et rabattement)



Nature du triangle A'B'C' ?
Rapport entre ABC et A'B'C'?



Nature de EFG ?
Nature de MNOP ?

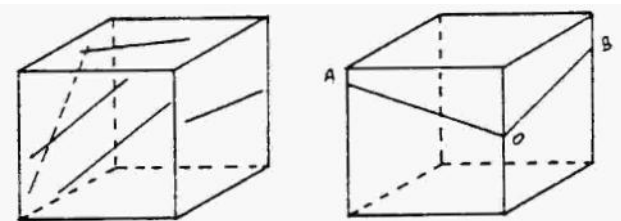


Nature du polygone construit en joignant les milieux des arêtes ?

Ces divers tracés de figures planes "dans l'espace" peuvent apporter une autre conception de la géométrie et montrer, par exemple, que la géométrie dans un plan n'existe pas uniquement sur le plan de la feuille de cahier ou sur le plan du tableau.

2) Droites sur un cube

Le tracé de droites sur les faces d'un cube peut permettre de faire découvrir la fausseté de quelques théorèmes erronés construits autour de l'orthogonalité ou du parallélisme dans l'espace.



$\widehat{AÔB}$ est-il droit?

Le cube "dur" que l'on peut couper aide à prendre conscience de la fausseté de certaines intuitions. La représentation en perspective cavalière montre que des droites concourantes sur le dessin ne le sont pas dans la "réalité".

CUBES TRONQUÉS

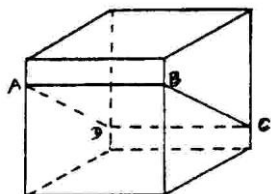
1) Sections du cube par un plan

Si un plan coupe une face du cube, combien en coupe-t-il au plus? au moins?

Dans tous les cas il serait souhaitable de partir de la représentation du cube en perspective cavalière, de demander de formuler des hypothèses, éventuellement de démontrer.

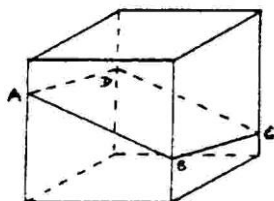
On pourra ensuite vérifier en réalisant une coupe du cube en "dur" ou en réalisant le tracé sur le cube (trace de l'intersection du plan sécant avec chacune des faces).

Vous trouverez ci-dessous quelques exemples et des pistes éventuelles de recherches à conduire.



Nature du quadrilatère
ABCD ?

Nature de ABCD ?



Quelques questions à chercher :

Quelles conditions doit remplir le plan sécant pour que la section soit :

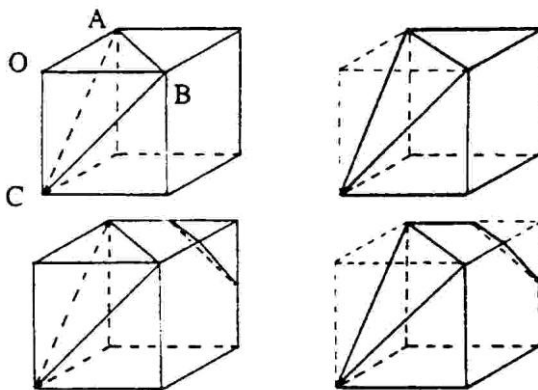
- un quadrilatère ?
- un trapèze ?
- un parallélogramme ?
- un carré ?
- un rectangle ?
- un hexagone ? (pas forcément régulier)

La section du cube peut-elle être un losange ? Dans quel cas ?

2) Cubes tronqués et patrons

Certes on pourrait faire réaliser les patrons des troncs de cubes obtenus à partir de l'intersection d'un cube et d'un plan. Certains cas peuvent être délicats à réaliser. Il est plus simple de s'intéresser à des sections plus régulières.

Le point de départ pourrait être le dessin en perspective cavalière ou le tracé sur un cube complet.



On peut demander de réaliser le patron et le volume construit

- de la pyramide
 - du cube tronqué
- en 2 groupes séparés

- de la grande pyramide
 - de la petite pyramide
 - du cube tronqué
- en 3 groupes séparés

Une représentation de ces volumes en dessin technique peut être un excellent exercice de projection.

On peut aussi demander de chercher combien de pyramides OABC on peut tirer d'un même cube et de faire des hypothèses sur ce qui reste à l'intérieur du cube.

3) Autres pistes

On peut aussi s'intéresser aux volumes obtenus à partir de l'octogone régulier inscrit sur chaque face du cube, à partir des centres de chacune des faces, etc.

Espace et géométrie

MATÉRIEL ET MATÉRIAUX

- polystyrène et filicoupeur
- papier bristol ou à dessin
- colle
- ciseaux
- instruments du dessin géométrique
- papier ordinaire quadrillé pour les tracés rapides.

BIBLIOGRAPHIE

BOULE F., *"Espace et géométrie pour les enfants de 3 à 11 ans"*, 1979, Éditions CEDIC.

CUIVDY H.M., ROLLET A.P., *"Modèles mathématiques"*, Éditions CEDIC.

BALACHEFF N., KUNTZMANN J., LABORDE C., *"Formation mathématiques des Instituteurs"*, 1981, Éditions CEDIC.

Brochures de l'A.P.M.E.P (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public. 26, rue Duménil - 75013 PARIS)

"Aides pédagogiques pour le CM", tome I, "Géométrie", 1983

"Géométrie au premier cycle", tomes 1 et 2

"Activités mathématiques en quatrième-troisième" tomes 1 et 2, 1981

"Introduction à la géométrie dans l'espace. Activités pour la 5ème (IREM de Grenoble)