Mathématiques
Collège

Projet de document d'accompagnement

- Les nombres au collège -

Décembre 2006

eduscol.education.fr/D0015/

Les nombres au collège

Introduction

L'apprentissage des mathématiques au cours de la scolarité obligatoire est largement marqué par celui de différents types de nombres et des calculs sur ces nombres. L'appropriation de chaque catégorie de nombres est également marquée par la compréhension de propriétés qui permettent de les caractériser et qui peuvent être en continuité ou en rupture avec celles des nombres déjà connus.
A chaque étape, l'enseignement des nombres doit donc prendre en compte différents pôles pour leur étude :

- Dans quelles situations les nombres considérés peuvent-ils être utilisés, pour exprimer des mesures, pour se repérer sur une droite, dans le plan ou sur une sphère ou encore pour résoudre des problèmes portant notamment sur des grandeurs ?
- Quelles techniques doivent être développées pour l'usage de ces nombres (comparaison, calcul...) ?
- Quelles propriétés doivent être mises en évidence pour pouvoir justifier ces techniques ?
- Quels éléments langagiers (verbaux ou symboliques) doivent être maîtrisés pour exprimer les nombres, leurs propriétés et gérer les techniques.

Les commentaires qui suivent sont organisés en fonction des types de nombres étudiés au cours de la scolarité obligatoire qui ne correspond que partiellement avec l'ordre dans lequel ils sont rencontrés par les élèves. Ils sont à compléter en se référant, pour chaque grande partie, au document d'accompagnement consacré au calcul.

Les nombres entiers naturels

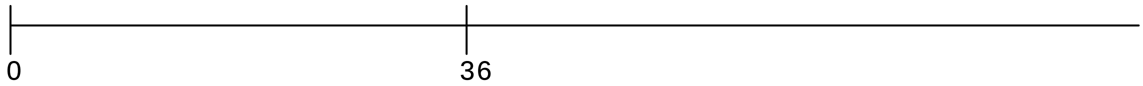
Ils sont utilisés par les enfants dès leur plus jeune âge, mais leur étude organisée ne commence véritablement qu'au cycle 2 de l'école primaire.

Leur usage essentiel réside dans le traitement de situations faisant intervenir des quantités discrètes, puis celles qui concernent des grandeurs au fur et à mesure de leur introduction : longueurs, masses, prix, durées, contenances et aires (se reporter aux documents Calcul et Grandeurs et mesure). Très tôt, ils sont également utilisés pour repérer des positions sur une ligne graduée, en particulier, au cycle 3, en lien avec la première approche de la proportionnalité.

L'étude de la numération décimale de position occupe une place importante sur l'ensemble de l'école primaire. A l'entrée en sixième, si la lecture de ces nombres est une compétence bien assurée, la compréhension en profondeur du système d'écriture chiffrée ne l'est pas toujours. Les élèves savent localiser le chiffre des dizaines ou des milliers, mais certains maîtrisent encore mal le fait que la position d'un chiffre ou d'un groupe de chiffres en détermine la valeur, de même que les relations de valeur telles que 1 millier est égal à 10 centaines ou 100 dizaines (relations qui sont elles aussi déterminées par les rangs correspondant à chaque type d'unité). Ainsi, à l'évaluation à l'entrée en sixième 2003, on peut noter que la question « *Complète l'égalité : 25 dizaines = ... unités* » n'est réussie que par 54,2 % des élèves et donne lieu à la réponse « 5 » pour 14,7% d'entre eux. Ces connaissances sont pourtant fondamentales pour, ensuite, pouvoir comprendre les écritures à virgule des nombres décimaux. Comme y incite le programme de sixième, il n'est pas inutile, à l'entrée au collège, d'assurer pour tous les élèves cette compréhension du système d'écriture des nombres entiers, sans pour autant procéder à des révisions systématiques.

Les compétences relatives à l'ordre sur les nombres entiers naturels (comparaison, encadrement, intercalation) sont généralement bien assurées à la fin de l'école primaire. Les exercices de placement de nombres ou de repérage de positions sur une demi-droite graduée (de façon exacte ou approchée) doivent être repris au collège, notamment lorsque seulement quelques nombres sont déjà placés : c'est également une occasion d'utiliser la proportionnalité et les rapports entre nombres. Exemple :

Placer 12 ; 72 ; 54… sur cette demi-droite.



Dans le domaine du calcul, les programmes de sixième et de cinquième rappellent que les compétences des élèves doivent être entretenues et prolongées.

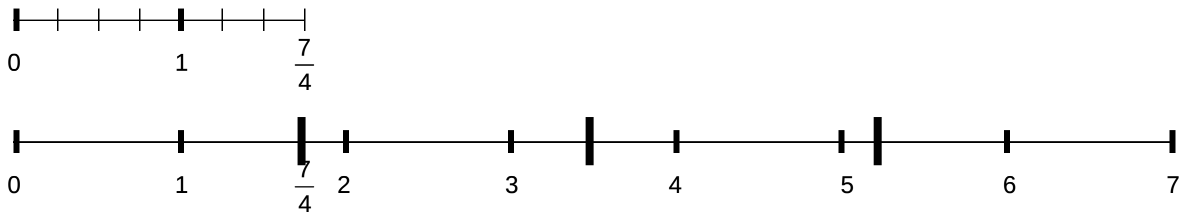
La connaissance des **relations arithmétiques** entre les nombres entiers naturels, amorcée au cycle 3, avec l'approche de la notion de multiple s'organise au collège : critères de divisibilité en sixième, méthodes plus systématiques pour reconnaître si un nombre est multiple ou diviseur d'un autre en cinquième, diviseur commun, approche de la notion de nombre premier. A la fin du collège, les élèves ont donc acquis des connaissances qui leur permettent d'envisager l'ensemble des nombres entiers avec différentes caractéristiques : ces nombres forment une suite structurée du point de vue de l'engendrement d'une succession, de l'ordre et de rapports entre certains nombres.

Des écritures fractionnaires aux nombres rationnels

Si les écritures fractionnaires sont introduites dès le cycle 3 de l'école primaire, la notion de nombre rationnel n'est vraiment travaillée qu'au collège. Il s'agit donc du premier nouveau type de nombres que les élèves sont amenés à rencontrer au collège. Le fait de donner un statut de nombre à une écriture qui n'a pas la forme usuelle d'une suite de chiffres constitue une difficulté majeure pour beaucoup d'élèves, celle-ci ayant d'ailleurs été rencontrée dans l'histoire des mathématiques. De plus, le fait qu'un calcul comme 2 : 3 ait pour résultat $\frac{2}{3}$ (écriture où figurent les nombres donnés dans le calcul) accentue cette difficulté, beaucoup d'élèves pensant que le « calcul reste à effectuer », avec l'idée qu'un calcul abouti a une forme où ne figurent plus les nombres initiaux (2 + 3 est égal à 5, 2 x 3 est égal à 6…).

L'usage des fractions se diversifie au collège, en même temps que le sens de l'écriture fractionnaire s'élargit.
A l'école primaire, les fractions sont introduites en vue d'aider à la compréhension des nombres décimaux : des fractions simples sont d'abord utilisées (dénominateur égal à 2, 3, 4…), mais ce sont les fractions décimales qui sont véritablement visées de façon à pouvoir interpréter, par exemple, 2,405 comme $2+\frac{4}{10}+\frac{5}{1000}$ ou comme $2+\frac{405}{1000}$. Dans ce but, les fractions sont définies en référence au partage de l'unité, soit dans des situations de mesure (longueurs, aires…), soit dans des situations de repérage de points sur une ligne graduée régulièrement. Une fraction comme $\frac{7}{4}$ évoque ce qui est obtenu en partageant l'unité en 4 parts égales et en reportant 7 de ces parts, ce qui correspond d'ailleurs à la lecture *sept quarts* ($\frac{7}{4}$ c'est 7 fois le quart de l'unité).
Au collège, dès la classe de sixième, l'écriture fractionnaire prend également une autre signification : $\frac{7}{4}$, c'est le quart de 7 (donc représentée en reportant l'unité 7 fois, puis en partageant ce qui est obtenu en 4 parts égales), c'est aussi le nombre qui multiplié par 4

donne pour résultat 7. Si on se réfère à une ligne graduée, ces deux conceptions de la fraction $\frac{7}{4}$ peuvent être illustrées de la façon suivante :



L'équivalence entre ces deux significations ($\frac{7}{4}$ c'est 7 fois un quart et $\frac{7}{4}$ c'est le quart de 7) ne va pas de soi et doit faire l'objet de questionnements et de tentatives de vérification et de justification en classe de sixième, de façon à permettre aux élèves de bien les assimiler. La vérification peut être faite dans le cadre des grandeurs ou dans le cadre du repérage sur une ligne graduée. La justification nécessite une approche plus théorique. En voici deux exemples, utilisant soit le langage ordinaire, soit le langage symbolique :

- on part de ce qui est connu : $\frac{7}{4}$ = 7 x $\frac{1}{4}$ (7 fois un quart, défini au cycle 3) ;
- on se demande si cela est compatible avec le fait que $\frac{7}{4}$ est le nombre qui multiplié par 4 donne comme résultat 7 (c'est-à-dire aussi le quart de 7) :
  - o en langage ordinaire, le raisonnement suivant peut être exprimé : « 4 fois 7 quarts, c'est 28 quarts, c'est 7 fois quatre quarts, donc 7 fois 1, donc 7 »
  - o le même raisonnement peut être exprimé à l'aide du langage symbolique : $4\times\frac{7}{4}=4\times\left(7\times\frac{1}{4}\right)=28\times\frac{1}{4}=\frac{28}{4}$. Or $\frac{28}{4}=7\times\left(4\times\frac{1}{4}\right)=7\times\frac{4}{4}=7\times1=7$.

    Donc $\frac{7}{4}$ est le nombre qui multiplié par 4 donne 7 : c'est donc le quotient de 7 par 4.

A partir de là, l'usage des fractions peut se diversifier notamment pour généraliser les procédures utilisant l'aspect multiplicatif de la linéarité ou le recours au coefficient de proportionnalité dans le traitement des problèmes de proportionnalité : des raisonnements fondés sur le fait que « 12, c'est 3 fois 4 » peuvent être étendus pour exprimer que « 7 c'est $\frac{7}{4}$ fois 4 », puis en classe de troisième que $f(7)=f(\frac{7}{4}\times 4)=\frac{7}{4}f(4)$.
C'est à partir de là que, progressivement, les fractions peuvent être conçues comme des nombres qu'on pourra comparer et sur lesquels on pourra calculer.

Du point de vue des désignations, les nombres rationnels amènent les élèves à envisager, davantage que les types de nombres étudiés auparavant, qu'un nombre peut être représenté de diverses manières. Là aussi, un travail approfondi doit être réalisé au collège (notamment en sixième et en cinquième) pour assurer le fait qu'un même nombre peut être évoqué sous diverses formes parmi lesquelles l'une ou l'autre peut être privilégiée selon l'usage qu'on veut en faire, les propriétés qu'on veut mettre en évidence... ou les outils de traitement qu'on utilise.
Par exemple, pour exprimer que $\frac{7}{4}$ est un nombre décimal, les écritures $\frac{175}{100}$ ou 1,75 sont plus efficaces que d'autres ; pour exprimer une durée, l'écriture 1 + $\frac{3}{4}$ est plus « parlante »...

Ajoutons que la capacité à reconnaître des demis, des quarts ou des « trois quarts » dans des écritures comme 3,5 ; 3,25 ou 3,75 est essentielle.

Dès le début du collège (classe de sixième et cinquième), il est possible de faire travailler les élèves sur le fait qu'un nombre décimal peut être exprimé sous forme d'écriture à virgule ou sous diverses formes fractionnaires : 2,4 peut aussi être écrit $2+\frac{4}{10}$ ou $\frac{24}{10}$ ou $\frac{12}{5}$...

Le travail sur les diverses façons d'exprimer un nombre rationnel est de plus longue haleine, lorsque le nombre rationnel n'est pas un nombre décimal. Les diverses expressions fractionnaires de $\frac{174}{36}$ (par exemple $\frac{87}{18}$ ou $\frac{29}{6}$) peuvent être abordées assez tôt (sixième et cinquième), mais les outils permettant d'assurer que la fraction irréductible a été trouvée ne sont véritablement mis en place qu'en classe de troisième. La simplification des fractions ou la recherche de différentes expressions fractionnaires d'un nombre sont donc à travailler tout au long du collège. L'utilisation des écritures décimales est encore plus délicate. Il s'agit de faire comprendre que certains nombres ne peuvent pas être exprimés de façon exacte sous forme d'écriture décimale limitée, mais peuvent être approchés d'aussi près qu'on veut par de telles écritures. Cette réalité est abordée dès la classe de sixième. Elle doit être reprise ensuite. Même si l'étude du caractère périodique, à partir d'un certain rang, de l'écriture décimale d'un nombre rationnel n'est pas explicitement au programme, elle peut être abordée à plusieurs reprises au collège, notamment en relation avec le travail sur la division décimale.

Les principaux apprentissages relatifs à **l'ordre sur les nombres rationnels**, exprimés sous forme fractionnaire, relèvent du collège. Cette question n'a été abordée à l'école primaire que dans des cas simples et sans mise au point de techniques spécifiques.
Le premier objectif dans ce domaine est de rendre les élèves capables de situer les fractions par rapport aux nombres entiers, ce qui s'accompagne de la capacité à décomposer une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. Cette dernière compétence peut être l'occasion, en sixième notamment, de travailler sur les deux significations de l'écriture fractionnaire. Trouver la décomposition de $\frac{17}{3}$ peut être réalisé à partir de deux raisonnements :

- En partant du fait que $\frac{17}{3}$ c'est 17 tiers, que pour avoir 1, il faut 3 tiers, ce qu'on peut faire 5 fois (en prenant 15 tiers dans 17 tiers) et il reste 2 tiers, d'où : $\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$. Ce raisonnement formulé en langage ordinaire (ce qui est important pour beaucoup d'élèves) peut évidemment être codé en utilisant le langage symbolique :
  $\frac{17}{3} = 17 \times \frac{1}{3} = (15 + 2) \times \frac{1}{3} = (15 \times \frac{1}{3}) + (2 \times \frac{1}{3})$.
  Or $15 \times \frac{1}{3} = 5 \times 3 \times \frac{1}{3} = 5 \times 1 = 5$ et $2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. D'où l'égalité.
- En partant du fait que $17 = (5 \times 3) + 2$. Or $\frac{17}{3}$ c'est le quotient de 17 par 3, donc : $\frac{17}{3} = \frac{5\times 3}{3} + \frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3}$.

Ce positionnement des fractions par rapport aux nombres entiers gagne beaucoup à être éclairé par le placement exact ou approché de fractions sur une demi-droite graduée en nombres entiers.
Le travail sur l'ordre sur les nombres écrits sous forme fractionnaire vise principalement trois objectifs :

- développer la capacité à comparer des nombres sans recourir à une technique chaque fois qu'une comparaison raisonnée peut être réalisée : situation des fractions par rapport à des entiers, ordre de grandeur, simplification des fractions pour les rendre facilement comparables… (tout au long du collège)
- mise en place d'une technique de comparaison : réduction au même dénominateur (cinquième et quatrième)
- prise de conscience du fait qu'il est possible d'intercaler une infinité de rationnels entre deux rationnels donnés (dès la cinquième).

La question du **calcul sur des nombres exprimés sous forme fractionnaire** est traitée dans le document « Calcul ». Insistons simplement ici sur le fait que cette question ne peut pas être traitée uniquement sur le plan de la mise en place de techniques de calcul, mais que celles-ci doivent être justifiées en appui sur les significations données aux écritures fractionnaires et mises en œuvre pour résoudre des problèmes.

Les nombres décimaux positifs

Bien que les écritures fractionnaires de nombres rationnels soient introduites dès le cycle 3 de l'école primaire (voir paragraphe précédent), les nombres décimaux constituent, après les entiers naturels, le deuxième type de nombres dont l'étude commence réellement à l'école primaire où ils sont généralement travaillés sur deux années, au CM1 et au CM2. La difficulté de leur apprentissage tient notamment au fait que celui-ci nécessite la compréhension de propriétés ou de techniques dont les unes sont en continuité et les autres en rupture avec celles des entiers naturels.

Leur usage et leur intérêt résident d'une part dans la possibilité nouvelle qu'ils offrent pour exprimer la mesure des grandeurs, d'autre part de repérer davantage de points de la demi-droite graduée. Le mathématicien sait que seuls les nombres réels permettent de résoudre complètement ces problèmes. Mais cela nécessite une théorisation poussée que beaucoup d'élèves ont du mal à envisager. Il est cependant possible et nécessaire de faire prendre conscience aux élèves que les nombres décimaux ne permettent souvent que d'apporter une réponse approchée aux problèmes posés.

La compréhension des **différentes désignations des nombres décimaux** doit être une préoccupation importante au début du collège. A l'issue de l'école primaire, les élèves associent la nature d'un nombre à son écriture, avec l'idée qu'un nombre s'exprime toujours par une suite de chiffres et que les nombres décimaux se différencient des nombres entiers par la présence de la virgule. Pour la majorité d'entre eux, un nombre entier n'est donc pas un nombre décimal.
Un premier objectif du collège est donc d'aider les élèves à différencier la nature d'un nombre de son écriture, notamment en mettant en relation différentes désignations d'un même nombre :

- le nombre *dix-sept* peut s'écrire 17 ou $\frac{34}{2}$ ou 17,00 (écriture souvent utilisée pour les prix), etc. Dans tous les cas, c'est un nombre entier (et aussi un nombre décimal…) ;
- le nombre *deux et cinq dixièmes* peut s'écrire 2,5 ou 2,50 (cas des prix, toujours) ou $\frac{5}{2}$, etc. Dans tous les cas, c'est un nombre décimal.

Un deuxième objectif du collège est de consolider, pour les nombres décimaux, la compréhension de leur écriture décimale. Lors de l'évaluation à l'entrée en sixième 2003, on peut noter que la question « Complète l'égalité : 7 unités 4 dixièmes = … dixièmes » n'est réussie que par 43 % des élèves et donne lieu à la réponse « 4 » pour 13,3 % d'entre eux. Comme pour les entiers naturels, les termes « dizaine », « dixième »… sont davantage liés à des positions qu'à des valeurs. Deux catégories de connaissances essentielles doivent être assurées :

- les rapports de valeur par rapport à l'unité pour des chiffres occupant des rangs donnés : dans 24,104, le chiffre 4 le plus à droite « vaut 1 000 fois moins » que celui qui occupe le rang des unités ;
- les rapports de valeur entre des chiffres occupant des rangs différents : dans 123, 245, le dernier chiffre 2 « vaut 100 fois moins » que celui qui est le plus à gauche.

Ces connaissances sont indispensables pour pouvoir justifier la plupart des techniques mises en place sur les nombres décimaux. Deux exemples permettent de l'illustrer :

- 24,5 est plus grand que 24,47 parce que le premier comporte 5 dixièmes alors que le second n'en comporte que 4 et que 7 centièmes « valent moins que » 1 dixième (car il faut 10 centièmes pour « faire » 1 dixième) ;
- 12,53 x 10 = 125,3 car multiplier 12,53 par 10 revient à « donner à chacun de ses chiffres une valeur 10 fois plus grande » ; contrairement à une règle souvent énoncée, ce n'est pas la virgule qu'il faut « déplacer vers la droite » mais plutôt chaque chiffre qu'il faut « déplacer vers la gauche » pour lui donner une valeur 10 fois supérieure !

Les grandeurs travaillées au collège permettent d'approfondir la compréhension des écritures des nombres décimaux. Considérons deux exemples, celui des aires et celui des durées et la question d'exprimer une même grandeur avec une seule unité ou avec deux unités.
Deux expressions comme 2,4 dm² et 2,04 dm² sont intéressantes à analyser (par exemple, en demandant aux élèves de construire deux surfaces d'aires correspondantes). L'expression 2,4 dm² peut être interprétée comme 2 dm² et 4 dixièmes de dm² : la surface peut être construite en juxtaposant une surface de 2 dm² et une autre obtenue en partageant un dm² en 10 et en prenant 4 parts. La forme 2,4 dm² ne peut pas être traduite directement à l'aide de deux unités légales (2 dm² 40 cm²) car pour arriver à cette forme il faut d'abord utiliser le fait que 4 dixièmes c'est aussi 40 centièmes. L'expression 2,04 dm² peut être interprétée comme 2 dm² et 4 centièmes de dm² (qui correspondent à 4 cm²) et donc être écrite directement sous la forme 2 dm² 4 cm². Dans les deux cas, sont en jeu des connaissances sur les relations entre unités d'aire et sur l'interprétation de l'écriture décimale.
Le cas des durées est également très intéressant. Comment écrire avec deux unités une expression comme 3,2 h ? Les élèves répondent fréquemment 3h 2 min ou 3h 20 min, ce qui traduit un mauvais décryptage de l'écriture décimale. Pour répondre correctement, il faut interpréter 2 comme 2 dixièmes d'heure ou comme 2 dixièmes de 60 min, donc comme 12 min, ce qui donne la réponse 2h 12 min. De telles questions posées aux élèves (passage de l'expression avec une seule unité à l'expression dite « complexe » avec plusieurs unités ou inversement) sont de nature à provoquer une réflexion sur la signification de l'écriture décimale.

C'est aussi, à partir de là, comme on l'a vu, que les élèves peuvent comprendre que des procédures, comme celles qui permettent de comparer deux nombres ou de multiplier ou diviser un nombre par 10, 100…, valides pour les nombres entiers (prise en compte de la longueur de l'écriture, « ajout » de 0 à droite de l'écriture) ne le sont plus pour les nombres décimaux.

La compréhension des nombres décimaux se trouve également enrichie par la nouvelle signification donnée aux écritures fractionnaires au début du collège. Depuis l'école primaire 2,75 est égal à $\frac{275}{100}$ (275 centièmes); il peut maintenant être considéré comme le nombre qui multiplié par 100 donne 275 (il devient donc aussi le centième de 275). Cela permet, dès la classe de sixième, une justification du calcul du produit de deux nombres décimaux, par exemple pour 5,7 x 2,75 :
5,7 x 10 = 57 et 2,75 x 100 = 275
entraîne 57 x 275 = (5,7 x 10) x (2,75 x 100) = 5,7 x 2,75 x 1 000

5,7 x 2,75 est donc le nombre qui multiplié par 1 000 donne 57 x 275,

donc 5,7 x 2,75 = $\frac{57 \, x \, 275}{1000}$.

A partir de la classe de quatrième, l'intérêt d'utiliser des **notations scientifiques** est justifié par la facilité apportée pour exprimer des ordres de grandeur et pour la comparaison de très grands ou de très petits nombres.

A l'entrée en sixième, les compétences relatives à **l'ordre sur les nombres décimaux** restent à consolider, voire à établir, pour un assez grand nombre d'élèves qui ont tendance à prolonger aux nombres décimaux les techniques efficaces avec les nombres entiers. De la même manière, l'idée qu'un nombre décimal possède un successeur ou qu'il n'est pas possible d'intercaler un nombre décimal entre 14,25 et 14,26 demeure souvent ancrée. Ces compétences doivent donc être à nouveau travaillées, notamment en classe de sixième, avec la préoccupation, comme il a été indiqué plus haut, de justifier les connaissances mises en place. Dans cette perspective, le recours à des représentations des nombres décimaux par des longueurs ou par des aires reste nécessaire et l'appui sur le repérage de points sur la demi-droite graduée est essentiel, en variant le choix du pas de graduation (10 ou 1 ou 0,1 ou 0,01 ou encore 0,5 ou 0,05…) et en utilisant des portions de demi-droites où 0 ne figure pas nécessairement. En particulier, l'idée qu'il est possible d'intercaler « à l'infini » peut être approchée avec les élèves de sixième. Ces activités sont également à relier avec la recherche d'encadrements ou de valeurs approchées d'un nombre décimal, avec une précision définie à l'avance ou, plus fréquemment, déterminée par l'ordre de grandeur souhaitée pour le résultat d'un calcul.

Dans le **domaine du calcul**, les élèves ont appris, à l'école primaire à utiliser l'addition et la soustraction de deux nombres décimaux, ainsi que la multiplication d'un décimal par un nombre entier, calculs qui peuvent être réalisés et compris dans le prolongement de ce qui a été mis en place pour les nombres entiers. Au collège, la mise en place de la multiplication ou de la division dans le contexte des nombres décimaux suppose des remises en cause plus importantes (voir le document « Calcul »).
Dans le cadre du présent document, on peut souligner que des questions relatives à la division peuvent offrir une manière originale de reprendre l'étude des nombres décimaux en sixième, par exemple avec la question de savoir (sans utiliser de calculatrice) quelle somme reçoit chaque personne si on répartit équitablement 84 flopecks entre 32 personnes (le recours à une unité imaginaire, le flopeck, permet de mieux évoquer les dixièmes, les centièmes et les millièmes de cette unité que cela ne serait possible avec une unité connue comme l'euro où seuls les centièmes sont couramment utilisés).
Il faut ajouter que, comme pour le travail sur l'ordre, la mise en place des techniques de calcul constitue un excellent moyen d'approfondir la maîtrise des écritures à virgule de nombres décimaux, à condition qu'une attention suffisante soit portée à la justification de ces techniques.

La division posée de 84 par 32 permet de trouver 2 comme quotient entier et 20 comme reste. Le partage des 20 flopecks restants pose problème. Les sous-unités de cette monnaie n'étant pas connues, les élèves peuvent proposés de transformer ces flopecks en dixièmes de flopecks (200 dixièmes), ce qui permet de poursuivre le partage : 6 dixièmes de flopecks à chacun et 8 dixièmes restants q'il est possible de transformer en 80 centièmes de flopecks, etc. Le résultat 2 flopecks, 6 dixièmes de flopecks, 2 centièmes de flopecks et 5 millièmes de flopecks permet de faire le lien avec l'écriture 2,625 flopecks. D'autres méthodes auraient pu être utilisées, comme transformer les 20 flopecks restants à la première étape en 2 000 centièmes de flopecks.

Les nombres relatifs : des nombres « au-delà de la mesure »

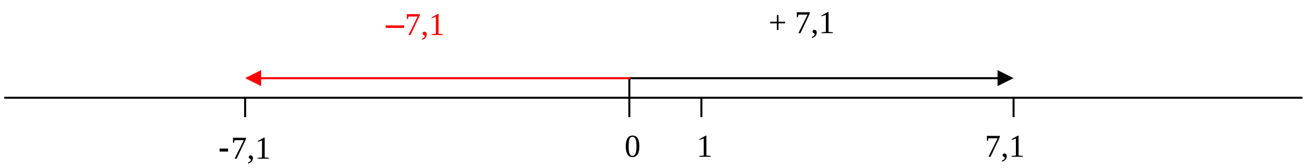
Les nombres négatifs (entiers, décimaux ou fractionnaires) sont désormais abordés à partir de la classe de cinquième. Ils posent des difficultés spécifiques aux élèves. D'une part, pour la première fois, ils sont confrontés à des nombres qui n'expriment pas des quantités ou des grandeurs (en dehors des dettes et des créances), ce qui constitue une rupture importante avec les nombres manipulés jusque là. D'autre part, la notation habituelle de ces nombres utilise le signe – qui est, pour les élèves, lié à une opération, la soustraction, ce qui contribue à accroître les difficultés liées au calcul sur les nombres relatifs.

Quels problèmes peuvent justifier pour les élèves l'introduction des nombres négatifs ? On sait qu'il a fallu du temps pour que les nombres négatifs s'imposent véritablement comme des nombres. Utilisés depuis longtemps pour des besoins comptables (gains, dettes), ils ont ensuite constitué des outils de calcul (voire des intermédiaires de calcul) utilisé dans la résolution d'équations. L'approche « historique » est sans doute difficile à reproduire au début du collège, notamment parce que les élèves ont déjà été confrontés à des nombres négatifs « au-dessous de 0 », dans divers usages sociaux : températures, niveaux dans un ascenseur... On peut être tenté d'introduire les nombres relatifs (en particulier les négatifs) à partir de problèmes portant sur des gains, des dettes ou des températures. L'inconvénient est que, dans un tel cadre, il est très difficile d'interpréter les opérations sur ces nombres, notamment la multiplication et la division. Il paraît plus fécond d'envisager une approche plus théorique de ces nouveaux nombres, par exemple, comme le suggère le commentaire du programme de cinquième en cherchant des nombres qui rendent la soustraction toujours possible et dont le maniement est ensuite compatible avec les propriétés des opérations mises en évidence sur les nombres positifs (notamment la distributivité de la multiplication sur par rapport à l'addition). Il est raisonnable de penser que l'appui sur plusieurs significations des nombres relatifs peut être utile à différents moments de leur apprentissage :

- nombres qui rendent la soustraction toujours possible (notion d'opposé) ;
- nombres qui permettent d'envisager de graduer la droite toute entière (renforcement de la notion d'opposé) ;
- nombres qui ont un usage « pratique » : températures, gains, pertes...

A titre d'exemple, on peut suggérer de s'appuyer sur le fait que en ajoutant ou retranchant un même nombre à chaque terme d'une différence, on obtient une différence égale. Ainsi, si on s'intéresse à 3,7 – 10,8, on peut écrire : 3,7 – 10,8 = 0 – 7,1 (on a soustrait 3,7 à chaque terme). Dans cette approche, –7,1 est introduit comme notation de 0 – 7,1 et comme égal à 3,7 – 10,8, et donc comme égal à bien d'autres différences, par exemple : 1 – 8,1 ; 13,7 – 20,8...

Dans cet exemple, le travail d'introduction des nombres négatifs est problématisé pour les élèves, mais le traitement est largement pris charge par le professeur. D'autres approches sont possibles.
Le lien peut ensuite être fait avec le repérage des points d'une droite graduée. En s'appuyant sur l'interprétation de la soustraction comme déplacement dans le sens décroissant des nombres, -7,1 repère le nombre situé à 7,1 de l'origine, point symétrique par rapport à l'origine du point repéré par 7,1.



Les nombres –7,1 et 7,1 sont alors définis comme étant **opposés**, en insistant sur le fait que –7,1 est l'opposé de 7,1 et que 7,1 est l'opposé de –7,1. Par construction –7,1 est la différence entre 0 et 7,1 Par définition de la différence, –7,1 ajouté à 7,1 donne 0. Donc :

7,1 + (–7,1) = –7,1 +7,1 = 0. Cet exemple ayant valeur générique, **la somme de deux nombres opposés est nulle**.

La question de la désignation des nombres négatifs et des opposés est délicate. On peut choisir, au début, de noter opp(*a*) l'opposé du nombre *a.* Cette notation sera, un peu plus tard, remplacée par la notation *–a,* en ne négligeant pas d'aborder avec les élèves les différentes significations que prend alors le signe – :

- marqueur d'un nombre négatif dans –7,1 ;
- signe de soustraction dans 0 – 7,1 comme dans 20 – 27,1 :
- marqueur de l'opposé, par exemple pour écrire que –(–7,1) est l'opposé de –7,1 et donc que –(–7,1) = 7,1.

La difficulté apparaît notamment pour les élèves lorsque la première et la troisième signification interfèrent, avec la notation – a (opposé de *a*) qui peut aussi bien représenter un nombre négatif qu'un nombre positif.

En classe de quatrième, des rationnels relatifs en écriture fractionnaire sont utilisés. Il est alors nécessaire de justifier l'égalité entre $-\frac{a}{b}$, $\frac{-a}{b}$ et $\frac{a}{-b}$, *a* et *b* étant des entiers. La maîtrise de la règle des signes (qui vaut aussi dans le calcul littéral) sur le produit de deux entiers et celle de la signification de l'écriture fractionnaire sont en effet suffisantes pour comprendre la justification suivante.

Posons $q = \frac{-a}{b}$.

On en tire $-a = qb$, donc a = - (qb) = q(- b), d'où : $q = \frac{a}{-b}$.

De a = - (qb), on peut aussi déduire a = (-q)b, d'où $-q = \frac{a}{b}$ et $q = -\frac{a}{b}$.

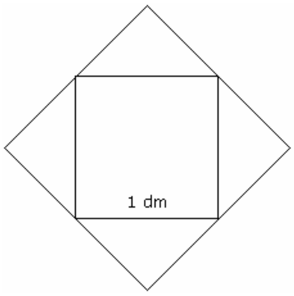
L'ordre sur les nombres relatifs ne présente pas de difficulté particulière, dès l'instant où ils sont exprimés sous forme chiffrée : la référence à leur placement sur la droite graduée fournit alors un bon point d'appui, d'où l'importance du travail sur cette compétence. La difficulté apparaît souvent lorsque les nombres sont désignés sous forme littérale : elle est liée à l'obstacle constitué par le fait que *a* ou *–a* peuvent l'un et l'autre désigner des nombres positifs ou négatifs.

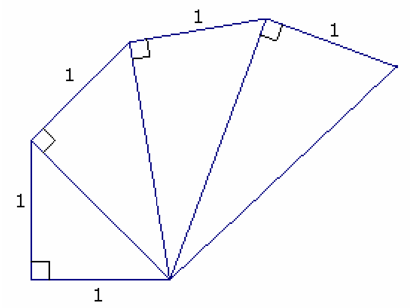
L'apprentissage des règles de calcul sur les nombres relatifs est en relation très forte avec les significations qui leur sont accordées, dès lors qu'on souhaite ne pas se limiter à l'enseignement de règles formelles, mais qu'on souhaite expliquer et justifier ces règles. Le calcul de sommes ou de différences peut être, entre autres, mis en relation avec des situations faisant intervenir des gains et des pertes ou encore des déplacements sur la droite graduée. Le calcul de produits nécessite, par contre, de se référer aux propriétés des opérations que l'on souhaite voir prolonger à ce type de nombres. Conçu ainsi, l'apprentissage du calcul est de nature à renforcer la compréhension des nombres relatifs et de leur écriture.

Une première approche des nombres réels

Le premier nombre irrationnel est rencontré en classe de sixième. Il s'agit du nombre π, dont l'irrationalité ne peut d'ailleurs pas alors être établie. Il faut ensuite attendre la classe de quatrième pour que le théorème de Pythagore donne l'occasion d'envisager la question de l'existence de nombres dont le carré est égal à un nombre donné. Mais ce n'est qu'en classe de troisième que, comme le dit le commentaire du programme, « le fait que tous les nombres ne sont pas rationnels est mis en évidence », ce qui donne l'occasion d'une première synthèse sur les différents types de nombres que les élèves ont rencontrés depuis l'école primaire. Un éclairage historique sur les moments et les conditions d'apparition de ces nombres est important pour la culture des élèves et peut constituer un thème d'étude pluridisciplinaire.

Les problèmes qui permettent d'introduire des nombres irrationnels sont classiques : rapport entre périmètre et rayon du cercle, utilisation du théorème de Pythagore : diagonale du carré de côté 1, hauteur du triangle équilatéral de côté 1, côté d'un carré d'aire 2 dm^2 construit à partir d'un carré d'aire 1 dm^2, suite de triangles rectangles permettant d'engendrer la suite $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ...





Il est plus difficile au collège de montrer que la résolution générale de ces problèmes nécessite des nombres qui ne s'expriment pas tous sous forme fractionnaire ou sous forme décimale limitée ou sous forme illimitée mais avec une partie décimale périodique à partir d'un certain rang. Cela peut cependant être réalisé pour $\sqrt{2}$ dans certaines classes. Il est cependant assez facile de démontrer, dans toutes les classes, qu'il ne peut pas être décimal : s'il l'était sa dernière décimale non nulle serait parmi les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Et donc son carré aurait pour dernière décimale l'un des chiffres suivants : 1, 4, 9, 6, 5, ce qui lui interdit d'être égal à 2. Dans tous les cas, il est utile de signaler l'existence de cette nouvelle catégorie de nombres, ainsi que le fait qu'ils permettent de repérer tout point de la droite graduée.

La question de la désignation des nombres irrationnels est également délicate pour certains élèves tentés d'exprimer tout nombre sous forme décimale et, à la rigueur, sous forme fractionnaire. Le fait que π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$... ne puissent pas être exprimés sous cette forme doit être soulignée, en même temps que doit être travaillé le fait qu'ils peuvent être approchés, aussi précisément qu'on le souhaite, par des nombres décimaux.
En particulier, alors qu'en classe de quatrième, la notation $\sqrt{}$ évoque souvent un calcul à réaliser, notamment à travers l'emploi de la touche $\sqrt{}$ de la calculatrice qui fournit le plus souvent des valeurs approchées à 10^{-n} près (par exemple pour la racine carrée de 2) en troisième le même symbole est surtout utilisé pour désigner le nombre positif dont le carré est 2 (et donc pour exprimer la valeur exacte de ce nombre). Le professeur doit donc justifier ce deuxième usage du symbole $\sqrt{}$, différent du premier, par le fait qu'il n'existe pas de nombre déjà connu (en l'occurrence rationnel) dont la carré soit 2, d'où la nécessité d'un nouveau type d'écriture ni décimale (en ligne) ni fractionnaire[1].

[1] La démonstration classique, par l'absurde, peut être éventuellement faite par le professeur. Elle nécessite l'emploi de l'énoncé « Si n^2 est pair, alors n est pair » équivalent à « Si n est impair, alors n^2 est impair », énoncé qu'il est possible de démontrer antérieurement.
Voici une autre démonstration proposée par Michel Mendes France dans le n° 435 du bulletin de l'APMEP :
On sait que $1 < \sqrt{2} < 2$. Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Soit q le plus petit entier naturel (> 1) tel que $q\sqrt{2}$ appartienne à **N**. Considérons alors le nombre entier q' égal à $q\sqrt{2} - q$.
On va montrer que $0 < q' < q$ et que $q'\sqrt{2}$ est aussi un nombre entier naturel, ce qui contredit la définition de q.
• De $1 < \sqrt{2} < 2$, il résulte que $q < q\sqrt{2} < 2q$ (1), puis $0 < q' < q$.
• D'autre part $q'\sqrt{2} = 2q - q\sqrt{2}$, ce qui prouve que $q'\sqrt{2}$ est un entier relatif. De (1), on déduit que $q'\sqrt{2} > 0$, et donc $q'\sqrt{2}$ est un entier naturel.

La question de la **comparaison de ces nombres** peut être abordée, mais la maîtrise de techniques spécifiques ne constitue pas un objectif du collège.

La nécessité d'une nouvelle notation ($\sqrt{\ }$) pour exprimer de nouveaux nombres engendre des questions sur **les calculs** qui font intervenir des radicaux, sur leur somme, leur différence, leur produit, leur quotient, motivant l'établissement de règles de calcul. Dans le même temps, cette possibilité de calculer sur de telles expressions permet de renforcer le statut de nombre accordé à ces écritures, notamment par la possibilité offerte d'exprimer un même nombre sous des formes diverses, par exemple $\sqrt{72} = 2\sqrt{18} = 3\sqrt{8} = 6\sqrt{2}$ ou $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.