

Pyramides bizarres

Marianne Frémin

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Pau 1992.

Cet article est un compte rendu d'activités proposées en formation initiale ou continue.

La mise en situation des stagiaires par le formateur permet d'une part une analyse de la construction géométrique de pyramides "penchées" et d'autre part une ébauche de séance élèves prenant en compte les difficultés rencontrées.

1. INTRODUCTION

a) Contexte

En formation initiale ou continue, dans le cadre d'un enseignement de géométrie, séance de trois heures dont un peu plus de deux sont consacrées à la construction et son analyse au niveau des adultes, et le reste à l'élaboration et l'analyse d'une situation analogue pour des enfants.

b) Intention

1. Faire une construction en volume présentant des difficultés inédites et consistantes pour les adultes.

2. Analyser la situation, le rôle moteur des essais ratés... puis réinvestir en...

3. Comment faire faire une construction analogue à des enfants.

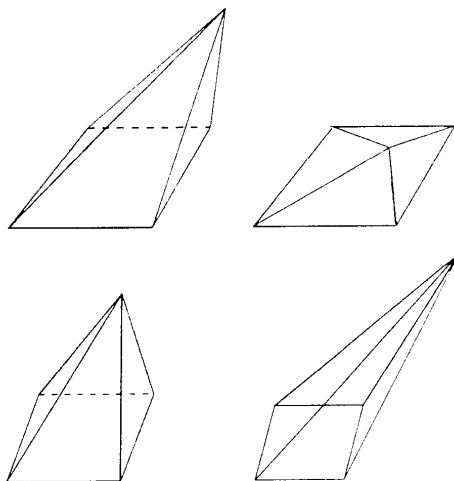
2. LES PYRAMIDES BIZARRES

a) Mise en place

1. Consigne

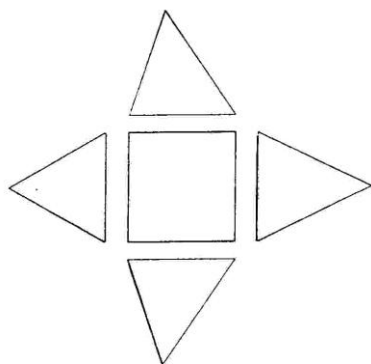
Construire une pyramide, pas une belle régulière comme celle du Louvre, une vilaine comme ça (en montrer) :

Espace et géométrie

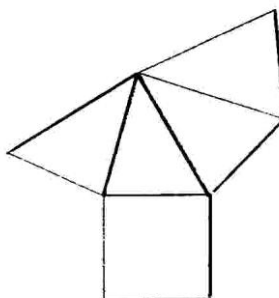


Après une petite pause, en dépecer une ou deux : elles ont une base carrée et quatre faces triangulaires.

Disposer les morceaux au tableau.



NB. Je fais attention à disposer les morceaux ainsi, pour induire un patron formé de quatre triangles bordant un carré, et éviter de me retrouver avec plusieurs personnes essayant ce genre de patron : (suite à un apprentissage récent au cours de technologie. Ce patron rend l'étude difficile).



2. Matériel animateur

Trois ou quatre pyramides à base carrée "bien asymétriques", c'est-à-dire dont le sommet ne soit visiblement pas à l'aplomb du centre ou des axes de symétrie du carré, en carton fort, à faces indépendantes scotchées (pour être démontables).

3. Matériel stagiaire

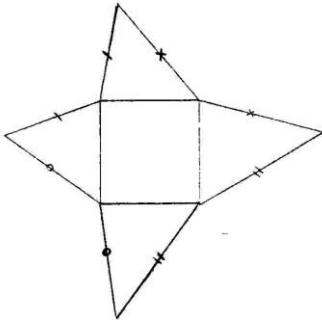
Matériel classique de géométrie (règle, équerre, compas,...), carton uni, scotch, ciseaux. Du bristol quadrillé peut faciliter la tâche à certains moments.

4. Précisions

Les stagiaires comprennent qu'il faut faire un patron. Il vaut mieux ne pas prévoir de languettes et coller bord à bord (les languettes perturbent l'analyse).

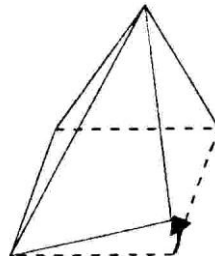
b) Premiers essais

1. Analyse technique

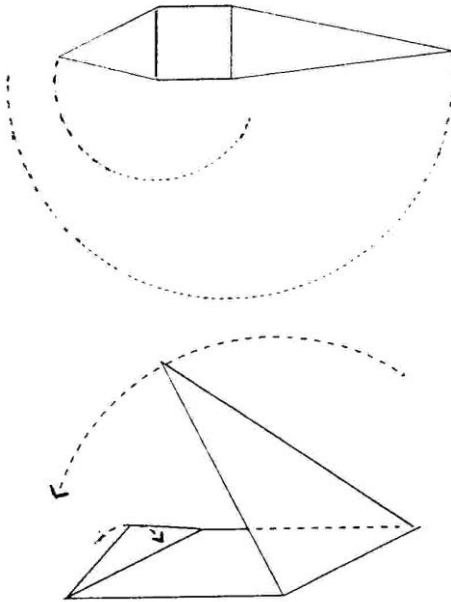


a) Contrainte sur les longueurs des arêtes: deux arêtes amenées à se coller ensemble doivent avoir même longueur.

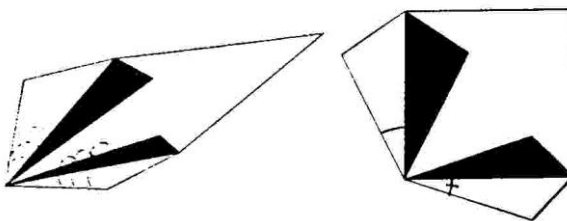
b) Risque de "gauchissement du carré"



c) Inégalités triangulaires sur les longueurs



d) Inégalités triangulaires sur les angles



2. Comportements

Les stagiaires se lancent rapidement.

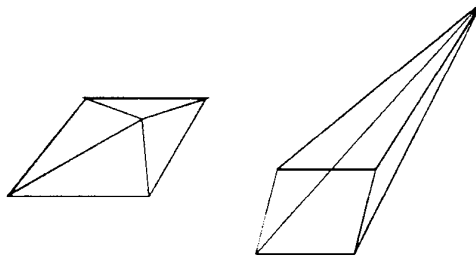
Les difficultés (a) et (b) apparaissent systématiquement à chaque essai, sont incontournables, et donc à traiter en priorité.

Les essais qui ne respectent pas les contraintes de longueur (a) vont pudiquement à la poubelle. Ces essais ratés permettent de réaliser où est la difficulté et de la surmonter aux essais suivants. Beaucoup de stagiaires n'ont pas besoin d'un essai raté pour penser à respecter les contraintes de longueur.

Le problème du "gauchissement" apparaît, mais n'est pas formulé (les pyramides ratées vont à la poubelle. sans que les suivantes soient meilleures).

Les difficultés (c) et (d) apparaissent sporadiquement, lorsqu'on cherche à faire une pyramide très longue et excentrée (inégalités triangulaires sur les longueurs) ou au contraire très plate : (inégalités triangulaires sur les angles), et qu'on n'a pas de chance. Quand une pyramide est ainsi ratée, il se peut que la suivante soit réussie sans que la raison de l'échec ou de la réussite soit élucidée.

C'est pourquoi je travaille d'abord sur (a) et (b), en laissant de côté les manifestations éventuelles de (c) et (d), puis quand l'élaboration de la "recette de pyramide" est bien engagée, je provoque l'apparition de (c) et (d) en proposant des pyramides longues et excentrées ou très plates, et l'on complète alors la recette.



c) Les réalisations

1. Trop régulières

Coins de cube

Symétrie par rapport à un plan médian (deux triangles isocèles se font face)

Elles sont produites par des stagiaires éludant ainsi le problème de gauchissement.

- demander une autre pyramide plus bizarre.

2. Légèrement gauche

La bascule peut passer sur le compte de l'imprécision des tracés et découpages.

- demander une autre pyramide plus soignée, ou différente.

3. Pyramide "à bascule"

- demander une autre pyramide stable.

4. Pyramide correcte

C'est rare.

Espace et géométrie

- demander une autre pyramide très différente (plus pointue, ou plus plate, ou plus excentrée).

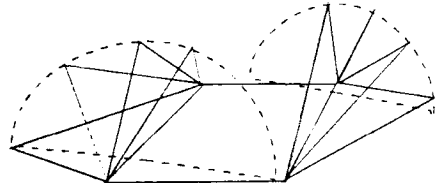
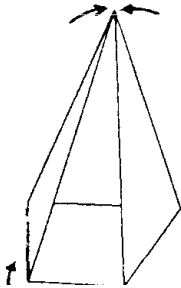
Dans le cas très improbable d'une personne ayant percé le secret des pyramides à base carrée, on peut lui proposer, pour patienter, de faire des pyramides à base quadrilatère quelconque, ou pentagonale...

d) Première mise en commun

1. Le gauchissement est la difficulté essentielle, bien perçue, mais pas analysée. Questions: "comment éviter de faire gauche ?". "pourquoi ça gauchit ?"

Pour y répondre, on peut dépecer une pyramide "bien ratée", puis deux types de "monstration" sont possibles :

- faire tourner autour des côtés du carré les deux triangles, dont les pointes n'ont aucune chance de se rencontrer.



- tordre ostensiblement le carré pour que les sommets des triangles se rencontrent.

2. Les autres difficultés n'apparaissent pas (ou rarement): quand un stagiaire a butté sur (a), il a honte et ne s'en vante pas (inutile d'insister, on la retrouvera dans la recette), et (c) et (d) sont trop aléatoires pour être perçues.

e) Retour aux constructions

On demande à chaque stagiaire de construire une pyramide "encore plus irrégulière". C'est une phase où le formateur agit localement pour aider à formuler, pour proposer une construction très différente...

f) "Recette de pyramide"

Pendant la phase de construction, le formateur propose localement, quand la réussite s'installe, de rédiger une "recette de pyramide", sur papier affiche pour exploitation collective.

On remarque que la réponse au problème "comment ne pas faire gauche ?" est naturellement "faire attention de mettre les sommets en face".

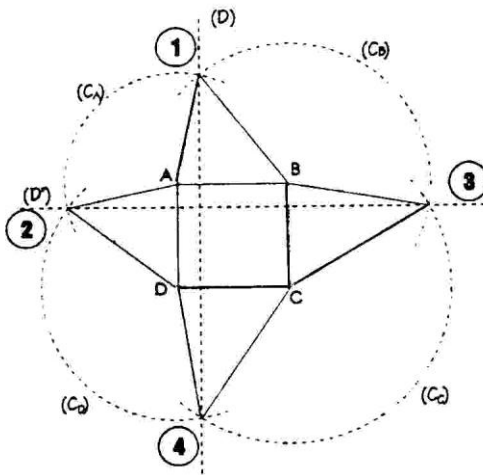
g) Mise en commun

On exprime les dernières difficultés de construction.

On examine et compare les recettes (ce qui contribue à aider les stagiaires qui n'auraient pas réussi à construire).

Voici trois "bonnes recettes" susceptibles d'être obtenues :

Recette 1



- Choisir ① (2 degrés de liberté)
- Choisir ② sur (C_A) (1 degré de liberté)
- Construire ③ intersection de (C_B) et (D') (0 degré de liberté)
- Construire ④ intersection de (C_D) et (D) (0 degré de liberté)

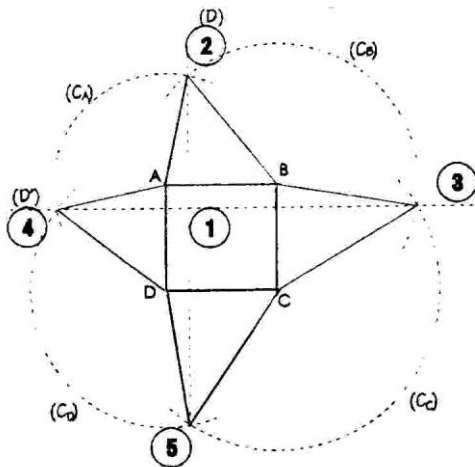
NB. La dernière égalité de longueurs est automatiquement vérifiée : ④ se trouve sur (C_C) .

Recette 2 (même figure que ci dessus)

- Choisir ① (2 degrés de liberté)
- Choisir ② sur (C_A) (1 degré de liberté)
- Construire ③ intersection de (C_B) et (D') (0 degré de liberté)
- Construire ④ intersection de (C_D) et (C_C) (0 degré de liberté)

NB. Le dernier face à face de sommets est automatiquement vérifié : ④ se trouve sur (D) .

Recette 3



Choisir ① "aplomb du sommet" (2degrés de liberté)

Choisir ② sur (D) (1 degré de liberté)

Construire ③ intersection de (D') et (C_B) (0 degré de liberté)

Construire ④ intersection de (D') et (C_A) (0 degré de liberté)

Construire ⑤ intersection de (C_D) et (D)

(0 degré de liberté)

NB. La dernière égalité de longueurs est automatiquement vérifiée : ⑤ se trouve sur (C_C).

Degrés de liberté

Dans chaque construction, on a trois degrés de liberté. Déterminer une pyramide, c'est choisir un sommet quelque part au dessus du carré : trois degrés de liberté aussi.

Du matériel utile pour montrer (sinon démontrer)

Carrés et triangles rigides pivotant autour des côtés.

Carré et ficelles figées aux sommets.

3. TÉTRAÈDRES BIZARRES

L'activité "pyramide bizarre" qui paraissait a priori difficile aux stagiaires. est finalement réussie, et ils sont fiers et étonnés de cette réussite.

On peut leur demander de construire une activité analogue pour une classe de CM, ce qui de plus les oblige à dégager les caractéristiques intéressantes de la situation.

a) La situation

Faire construire des "tétraèdres bizarres" à des élèves de CM.

b) Caractéristiques communes avec "pyramides"

Situation de construction

Situation auto validante

Rôle moteur des essais ratés

c) Différences

Le problème du "gauchissement" ne se pose pas (Ouf!)

Ce soulagement rend les instituteurs confiants dans les possibilités de réussite des enfants.

