CONCOURS
SEPTEMBRE 2011

SUJETS

GROUPEMENT 1 – septembre 2011

EXERCICE 1 :

Dans cet exercice, six affirmations sont proposées. Pour chacune d'elles, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.
Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte pas de point.

1. Affirmation 1 :

Un nombre positif est toujours supérieur ou égal à sa racine carrée.

2. Affirmation 2 :

La fraction $\frac{201\,134\,546\,112}{145\,261\,781\,121}$ est irréductible.

3.

Dans un sachet opaque, on a mélangé 35 chocolats noirs et 20 chocolats blancs. On suppose que les chocolats sont indiscernables au toucher. On prend au hasard un chocolat dans le sachet.

Affirmation 3 :

La probabilité que le chocolat extrait du sachet soit blanc est de $\frac{4}{7}$.

4.

Dans *Le Monde* du 27 mars 2010, on pouvait lire : « Dans l'ensemble des aéroports du monde, en 2009, environ 25 millions de bagages ont été perdus, provisoirement ou définitivement. (…) L'étude note cependant une amélioration puisqu'en 2008, ce sont 32,8 millions de bagages qui avaient été égarés, <u>soit 23,8 % de plus qu'en 2009.</u> ».

Affirmation 4 :

L'extrait souligné est exact.

5. Affirmation 5 :

Il existe au moins un nombre entier compris entre 11 000 et 12 000, dont le plus grand diviseur commun avec 2 180 est 545.

6.

Une enseigne est formée de deux boules pleines, de rayons différents, constituées du même bois. L'une pèse 24 kg et l'autre pèse 3 kg. La quantité de peinture pour les recouvrir est proportionnelle à la surface à peindre. Il faut 900 g de peinture pour recouvrir la grosse boule.

Affirmation 6 :

Il faut 112,5 g de peinture pour recouvrir la petite boule.

EXERCICE 2 :

1. On appelle triplet pythagoricien, tout triplet (a, b, c) formé de trois entiers positifs non nuls tels que : $a^2 + b^2 = c^2$.

   a. Vérifier que le triplet (3, 4, 5) est un triplet pythagoricien.

   b. Vérifier que, quel que soit l'entier positif n non nul, on a : $(3n)^2 + (4n)^2 = (5n)^2$.

   c. En déduire un autre triplet pythagoricien composé d'entiers tous supérieurs à 1000.

2. On s'intéresse maintenant à des triplets (a, b, c) tels que :

$$a = 2xy\ ; \qquad b = y^2 - x^2\ ; \qquad c = y^2 + x^2$$

où x et y sont deux nombres entiers positifs non nuls, $x < y$.

À l'aide d'un tableur, on a obtenu la feuille de calcul reproduite ci-après :

	A	B	C	D	E	F	G
1	valeur de x	valeur de y	a	b	c	$a^2 + b^2$	c^2
2	1	2	4	3	5	25	25
3	1	3	6	8	10	100	100
4	3	6	36	27	45	2025	2025
5	4	15	120	209	241	58081	58081
6	8	12	192	80	208	43264	43264
7	12	15	360	81	369	136161	136161
8	7	8	112	15	113	12769	12769
9	2	3	12	5	13	169	169
10	11	13	286	48	290	84100	84100
11	7	8	112	15	113	12769	12769
12	4	5					

a) Donner une formule qui, entrée dans la cellule D2 puis recopiée vers le bas, permet de compléter la colonne D.

b) Recopier et compléter la ligne 12.

c) Au vu de cette feuille de calcul, quelle conjecture peut-on faire quant à la nature des triplets (a, b, c) ainsi définis ? Prouver cette conjecture.

3. Le triplet pythagoricien (3 ; 4 ; 5) a la particularité d'être constitué de trois nombres entiers consécutifs. Existe-t-il d'autres triplets pythagoriciens ayant cette particularité ? Justifier.

EXERCICE 3 :

ABC est un triangle tel que : AB = 14, AC = 13 et BC = 15.
Soit H le pied de la hauteur du triangle ABC issue de C.
À tout point K du segment [AH], on associe le rectangle KLMN inscrit dans le triangle ABC, tel que les points L et M appartiennent respectivement aux segments [AC] et [BC] (*figure 1*).

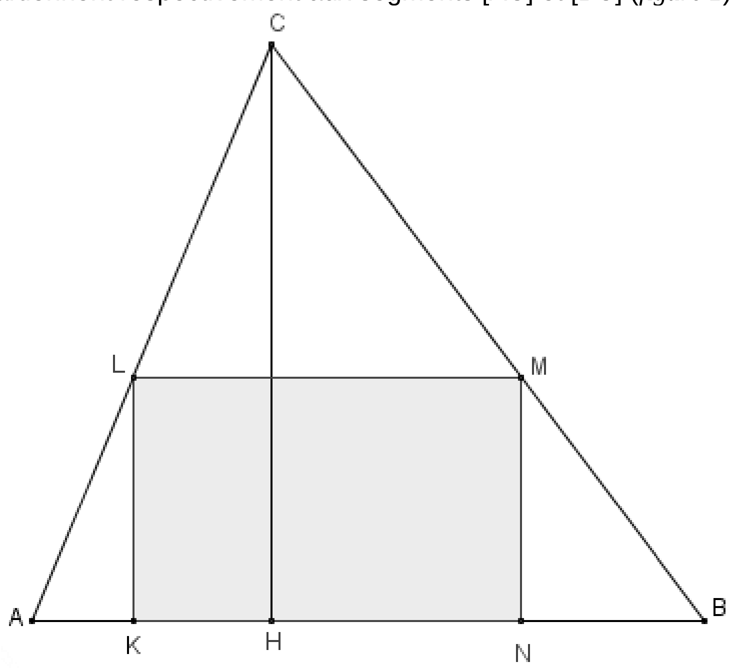


Figure 1

On cherche la position du point K sur le segment [AH] pour laquelle KLMN est un carré. On admet que cette position existe et est unique.

1. Montrer que AH = 5 et CH = 12.

2. On construit la figure avec un logiciel de géométrie dynamique, le point K étant mobile sur [AH]. Le logiciel permet un relevé des valeurs de KL et de KN lorsque K varie sur [AH] et fournit une représentation graphique des variations de KN en fonction de KL (*figure 2*).

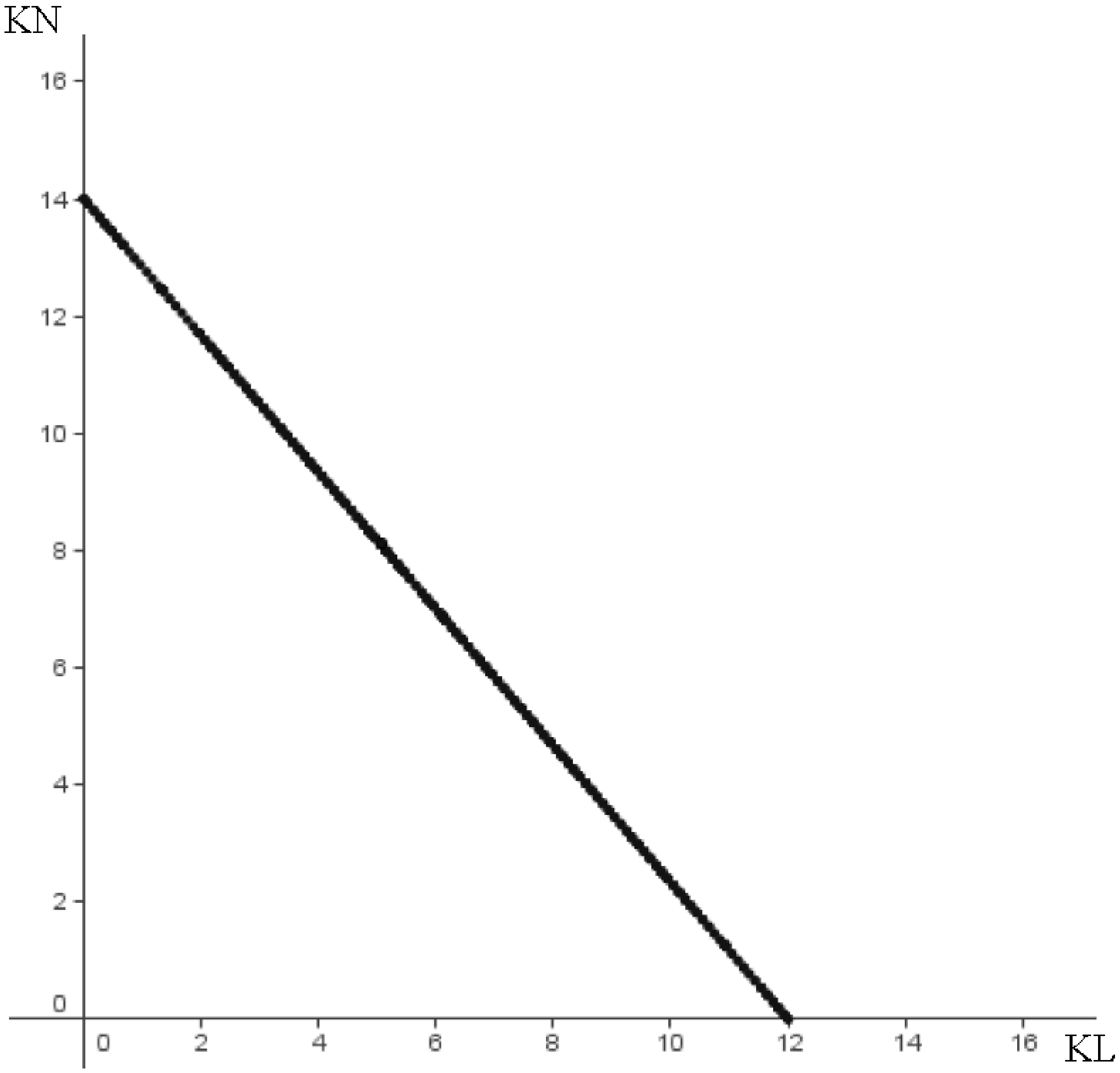


Figure 2

a) On peut constater que cette représentation graphique est limitée par les points de coordonnées (12 , 0) et (0 , 14). Pourquoi était-ce prévisible ?

b) À l'aide du graphique (*figure 2*), déterminer un encadrement par deux entiers consécutifs de la longueur KN pour laquelle KLMN est un carré. Justifier.

3. a) Exprimer AK et BN en fonction de KL.

b) En déduire que KN = $14 - \frac{7}{6}$KL

4. Quelle est la position exacte du point K sur le segment [AH] pour laquelle KLMN est un carré ?

GROUPEMENT 2 – septembre 2011

EXERCICE 1 :

Dans cet exercice, 5 affirmations sont proposées. Pour chacune, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, puis justifier la réponse.
Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point.
Une réponse fausse n'enlève pas de point.

1.
Soient a et b deux nombres strictement positifs.
Affirmation 1 :
$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b}$.

2.
Soit a un nombre strictement supérieur à 1.
Affirmation 2 :
Si les longueurs des côtés d'un triangle sont a , $\frac{1}{2}(a^2 - 1)$ et $\frac{1}{2}(a^2 + 1)$, alors ce triangle est rectangle.

3.
On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.
Affirmation 3 :
La probabilité d'obtenir pile à l'un des deux lancers et face à l'autre est de $\frac{1}{3}$.

4.
Un article a le même prix dans deux magasins A et B.
Dans le magasin A, le prix de l'article subit successivement une baisse de 20 % puis une hausse de 20%.
Dans le magasin B, le prix de l'article subit successivement une hausse de 20 % puis une baisse de 20%.
Affirmation 4 :
À la suite de ces modifications de prix, il est plus rentable d'acheter alors l'article dans le magasin A que dans le magasin B.

5.
La longueur du côté d'un carré augmente de 5 %.
Affirmation 5 :
Le périmètre du carré augmente de 20 %.

EXERCICE 2 :

On justifiera toutes les réponses.
On appelle « fraction égyptienne » toute fraction de la forme $\frac{1}{n}$, n désignant un nombre entier naturel non nul. Dans l'Égypte ancienne, on n'écrivait les nombres rationnels positifs inférieurs à 1 que sous la forme de sommes de « fractions égyptiennes » toutes différentes.
Par exemple, $\frac{25}{28}$ peut s'écrire $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7}$.

Le but du problème est de présenter quelques méthodes de décomposition de nombres rationnels en somme de « fractions égyptiennes » toutes différentes.

PARTIE A :

Exemples

1. Calculer la somme des six « fractions égyptiennes » $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ et $\frac{1}{64}$.

2. Décomposer $\frac{5}{8}$ en somme de « fractions égyptiennes » toutes différentes, dont les dénominateurs sont tous des puissances de 2.

PARTIE B :

Présentation d'une méthode de décomposition dans un cas particulier

On s'intéresse au cas où la fraction à décomposer a un numérateur égal à 2 et un dénominateur égal au produit de deux nombres entiers naturels impairs p et q .

1. Démontrer la formule $\frac{2}{pq} = \frac{1}{p(\frac{p+q}{2})} + \frac{1}{q(\frac{p+q}{2})}$.

2. Justifier que les dénominateurs des fractions précédentes sont des nombres entiers naturels.

3. **En utilisant la formule établie à la question 1)**, trouver deux décompositions différentes de $\frac{2}{15}$ en somme de « fractions égyptiennes » différentes.

4. Soit n un nombre entier naturel non nul. Donner une décomposition de la fraction $\frac{2}{2n+1}$ en somme de deux « fractions égyptiennes » différentes.

PARTIE C

« Algorithme glouton » de Fibonacci

En 1201, Léonard de Pise (1175-1250), dit « Fibonacci », prouva que tout nombre rationnel compris entre 0 et 1 peut s'écrire sous la forme d'une somme de « fractions égyptiennes » toutes différentes et proposa la méthode suivante pour obtenir une telle décomposition :

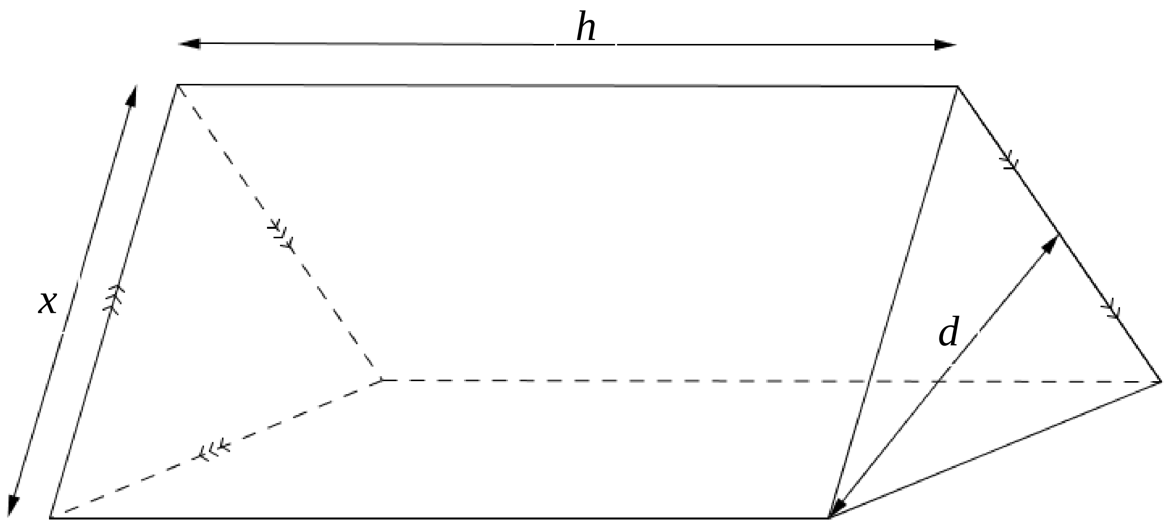
« Soustraire à la fraction donnée la plus grande fraction égyptienne possible qui lui est inférieure, répéter l'opération avec la nouvelle fraction, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne 0. »

1. Appliquer cet algorithme à $\frac{13}{81}$ et donner une décomposition de la fraction $\frac{13}{81}$ en somme de trois « fractions égyptiennes » toutes différentes.
2. Dans le papyrus Rhind (1650 av JC), exposé au *British Museum*, figure une des plus anciennes approximations du nombre π égale à $\frac{256}{81}$ (écriture moderne).
   a) Écrire $\frac{256}{81}$ sous la forme d'une somme d'un entier naturel et d'une fraction comprise entre 0 et 1.
   b) Proposer une écriture de l'approximation de π donnée dans le papyrus Rhind sous forme d'une somme d'un nombre entier naturel et de « fractions égyptiennes » toutes différentes.

EXERCICE 3 :

On justifiera toutes les réponses.

Un fabricant vend de la pâte d'amande dans un emballage cartonné ayant la forme d'un prisme droit dont la base est un triangle équilatéral (voir la figure ci-dessous).



x est la longueur d'un côté de la base triangulaire.
d est la hauteur de cette base triangulaire.
h est la hauteur du prisme droit.

Dans tout l'exercice, on exprime les longueurs en cm, les aires en cm2 et les volumes en cm^3.

Questions préalables

1. Représenter sur la copie un patron de l'emballage pour les valeurs x = 3cm et h = 6cm.
2. On désigne par A l'aire du triangle équilatéral de base. Montrer que $A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.

Dans la suite du problème, les emballages ont un volume égal à 100 cm3.

3. a) Donner l'expression de h en fonction de x.

   b) En déduire que l'aire S du patron de cet emballage, exprimée en cm^2, est donnée par la formule $S = \frac{400\sqrt{3}}{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$.
4. On a construit une feuille de calcul, reproduite ci-après, donnant les valeurs de S en fonction des valeurs de x, ainsi que la représentation graphique de S en fonction de x.
   a) Donner une méthode permettant de remplir la colonne A (de la ligne 2 à 35) en utilisant la fonction de « recopie vers le bas »
   b) Donner une formule qui, entrée dans la cellule B2, puis recopiée vers le bas, permet de compléter la colonne B (de B3 à B35).
   Indication : pour calculer $\sqrt{3}$ dans le tableur, on fait appel à la commande : « racine(3) »

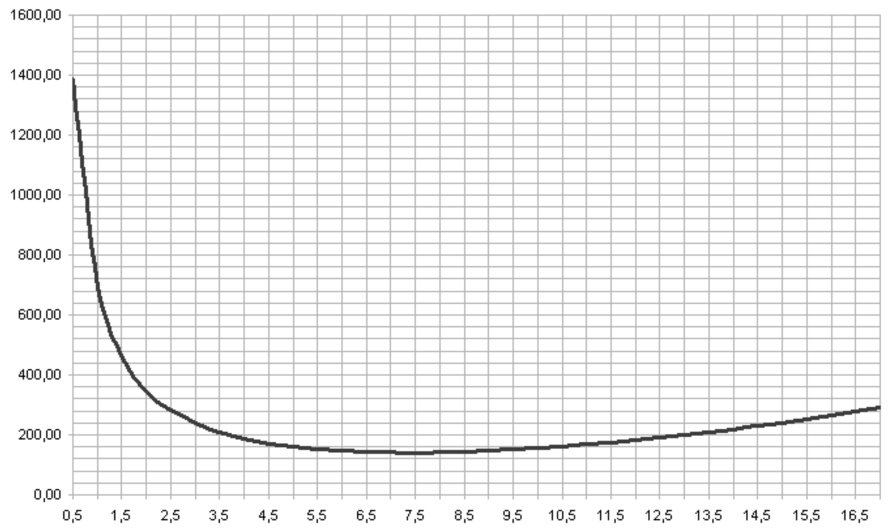
Le fabricant souhaite minimiser la quantité de carton utilisée.

   c) En utilisant les résultats de la feuille de calcul reproduite ci-après, donner à 0,5 cm près la valeur de x qui minimise la quantité de carton utilisée pour l'emballage.
   d) Calculer la hauteur de l'emballage pour cette valeur approchée de x.

FEUILLE DE CALCUL

	A	B
1	x	Aire S
2	0,5	1385,86
3	1	693,69
4	1,5	463,83
5	2	349,87
6	2,5	282,54
7	3	238,73
8	3,5	208,56
9	4	187,06
10	4,5	171,50
11	5	160,21
12	5,5	152,16
13	6	146,65
14	6,5	143,18
15	7	141,41
16	7,5	141,09
17	8	142,03
18	8,5	144,08
19	9	147,13
20	9,5	151,09
21	10	155,88
22	10,5	161,46
23	11	167,77
24	11,5	174,78
25	12	182,44
26	12,5	190,74
27	13	199,65
28	13,5	209,15
29	14	219,23
30	14,5	229,86
31	15	241,04
32	15,5	252,76
33	16	265,00
34	16,5	277,76
35	17	291,04

Aire S du patron de l'emballage en fonction de x



GROUPEMENT 3 – septembre 2011

EXERCICE 1 :

ABCD est un rectangle tel que AB = 6,5 et AD = 4, l'unité de mesure étant le centimètre.
M, N, P et Q sont des points respectivement sur les segments [AB], [BC], [CD] et [AD], et tels que AM = BN = CP = DQ.

On s'intéresse dans cet exercice à la variation de l'aire du quadrilatère MNPQ en fonction de la position du point M.

Toute réponse devra être justifiée.

On pose $AM = x$

1. Construire la figure dans le cas $x = 4$.
   Démontrer que MNPQ est un parallélogramme.
   Calculer son aire.

2. Choisir une valeur de x dans l'intervalle $]0, 4[$ et construire la figure correspondante.
   Quelle est la nature du quadrilatère MNPQ ?

3. a) On suppose que $0 < x < 4$. Exprimer l'aire de MNPQ en fonction de x.

   b) La formule obtenue en a) fournit-elle le bon résultat si on l'applique à $x = 0$? à $x = 4$?

4. L'une des quatre courbes ci-après représente la variation de l'aire de MNPQ en fonction de x. Laquelle ?

5. Déterminer par lecture graphique sur cette courbe :
   a) au demi-centimètre près, la valeur de x pour laquelle l'aire de MNPQ est minimale.
   b) au centimètre carré près, la valeur de l'aire minimale.

6. Dans cette question on utilise un tableur pour étudier l'aire du quadrilatère MNPQ en fonction de x. Différentes valeurs de x sont inscrites sur la ligne 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	**x**	0	0,1	...	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3	...	3,8	3,9	4	
2	**Aire MNPQ**	26	24,97	...	12,77	12,58	12,43	12,32	12,25	12,22	12,23	12,28	12,37	12,5	...	14,98	15,47	16	
3																			
4																			

   a) Donner une formule qui, entrée dans la cellule B2, puis recopiée vers la droite, a pu permettre de compléter la ligne 2.

   b) Expliquer pourquoi on ne peut pas conclure de façon certaine que 12,22 cm² est une valeur approchée de l'aire minimale à 0,1 cm² près.

7. Montrer que l'on peut exprimer l'aire de MNPQ trouvée à la question **3.** sous la forme :

$$\text{Aire(MNPQ)} = 2\left(x - \frac{21}{8}\right)^2 + \frac{391}{32}$$

   En déduire la valeur de l'aire minimale de MNPQ et la valeur de x à laquelle elle correspond.

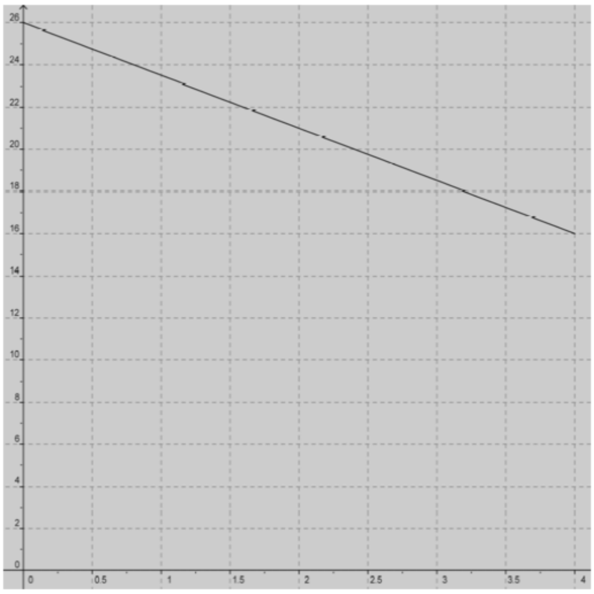


Figure 1

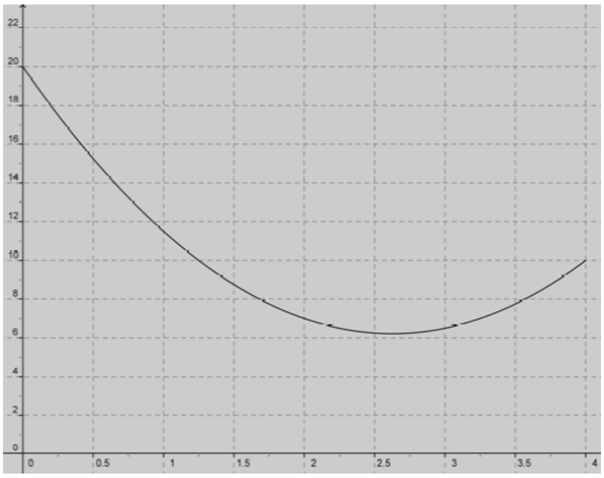


Figure 2

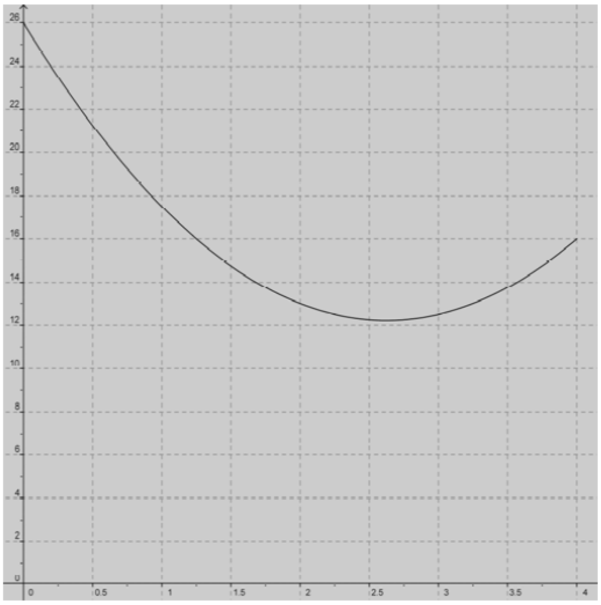


Figure 3

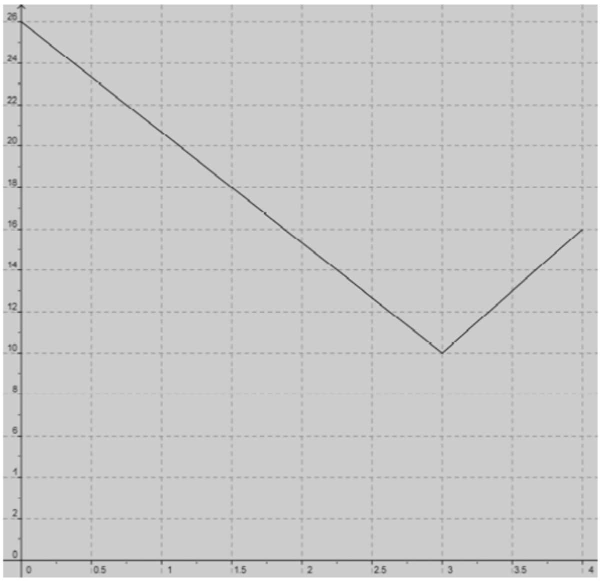


Figure 4

EXERCICE 2 :

Dans cet exercice, sept affirmations sont proposées. Pour chacune, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, puis justifier la réponse.

Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point.

Une réponse fausse n'enlève pas de point.

1.

Depuis 5 ans, les prix augmentent de 10 % par an.

Affirmation 1 :

En 5 ans, les prix ont augmenté de 50 %.

2.

Affirmation 2 :

En versant 5 volumes de sirop de fraise dans 9 volumes d'eau, on aura une boisson plus sucrée que si l'on verse 4 volumes du même sirop dans 7 volumes d'eau.

3.

On utilise une roulette (de type casino) avec 5 cases numérotées 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5. Cette roulette est truquée. Le tableau ci-dessous précise la probabilité d'obtenir chacun des numéros (où p est un nombre positif).

Nombre obtenu	1	2	3	4	5
Probabilité	$\frac{1}{4}$	p	p	$\frac{3}{8}$	p

Affirmation 3 :

On a autant de chances d'obtenir un nombre pair qu'un nombre impair.

4.

Affirmation 4 :

La différence entre les carrés de deux nombres entiers naturels consécutifs est égale à la somme de ces deux nombres entiers.

5.

Affirmation 5 :

Si on augmente l'arête d'un cube de 10 %, alors le volume de ce cube augmente de 33,1 %.

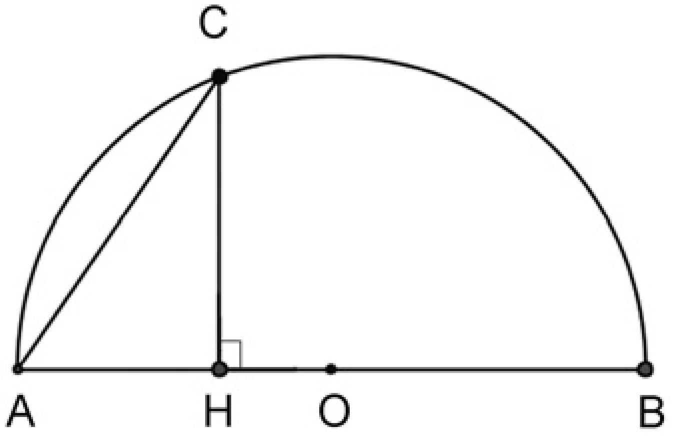
6.

En position dite de « l'œuf », un skieur augmente de 50 % sa vitesse moyenne et descend ainsi la piste à 120 km/h.

Affirmation 6 :

Sans cette technique, sa vitesse moyenne n'est donc que de 60 km/h.

7.
Sur la figure ci-dessous, C est un point du demi-cercle de diamètre [AB].



Affirmation 7 :
Si AB = n et AH=1, alors AC= $\sqrt{n}$.

EXERCICE 3 :

L'ove est une figure géométrique, constituée de quatre arcs de cercle, dont la forme fait penser à un œuf.
On a représenté ci-dessous un ove BCEF (la figure n'est pas en vraie grandeur).

Pour cet ove on sait que :

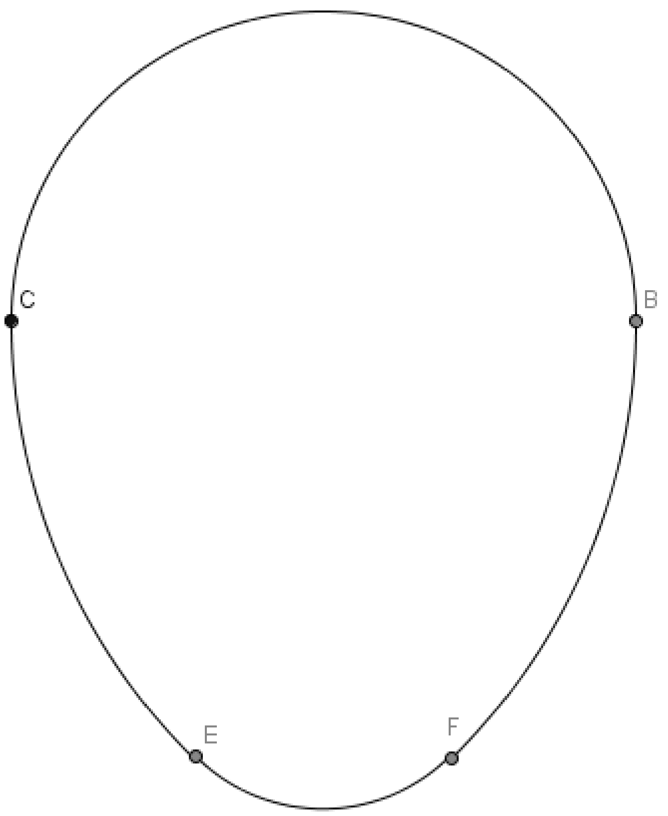
– La partie supérieure de l'ove est un demi-cercle de diamètre [BC] avec BC = 10 cm et le reste de la figure est dans le demi-plan de frontière (BC) ne contenant pas ce demi-cercle.

– D est le point de ce demi-plan tel que le triangle BCD soit isocèle et rectangle en D.

– L'arc de cercle $\overset{\frown}{CE}$ a pour centre B avec BDE alignés.

– L'arc de cercle $\overset{\frown}{FB}$ a pour centre C avec CDF alignés.

– L'arc de cercle $\overset{\frown}{EF}$ a pour centre D.



1. Construire en vraie grandeur l'ove ainsi définie.
2. Calculer le périmètre de l'ove construit à la question précédente (on donnera le résultat arrondi au millimètre).