IREM
Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

Concours de Recrutement des Professeurs d'École

Session 2006

Mathématiques

Propositions d'exercices pour la conception de sujets futurs

COPIRELEM
Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'École Élémentaire.

UNVERSITE DENIS DIDEROT
IREM PARIS 7

Cette partie de la brochure a été coordonnée par des membres du bureau de la COPIRELEM :

Pierre Eysseric	**p.eysseric@aix-mrs.iufm.fr**	**IUFM d'Aix-Marseille**
Jean-Louis Imbert	**imbert.jl@free.fr**	**IUFM Midi Pyrénées**
Laurence Magendie	**l.magendie@libertysurf.fr**	**IUFM Midi Pyrénées**
Catherine Taveau	**catherine.taveau@creteil.iufm.fr**	**IUFM de Créteil**

SOMMAIRE

Avant propos

Au vu des textes ministériels actuels définissant les nouvelles épreuves du CERPE (BO n° 21 du 26 mai 2005), la COPIRELEM a décidé d'élaborer des parties de sujets (exercices de mathématiques suivis de questions complémentaires liées à l'enseignement) pouvant être utilisées pour la confection des sujets des épreuves du CERPE de 2006.

Ces parties ont été élaborées à partir d'anciens sujets que nous avons modifiés et complétés.

Les exercices et questions que nous proposons dans ce document sont le reflet de notre réflexion et de notre interprétation des textes ministériels. Ils sont aussi à l'image de nos attentes concernant les compétences attendues d'un candidat passant le CERPE.
Ces exercices pourraient constituer une base de travail pour tous ceux qui seront amenés à produire les prochains sujets. Ils pourraient également fonder les premiers éléments d'un socle commun pour ce nouveau concours.

Nous avons essayé ainsi de répondre « dans l'urgence » à l'attente de l'ensemble des formateurs de mathématiques responsables de la préparation au concours.

Voici certaines des orientations qui ont guidé notre travail :

- Eviter des questions vagues pour lesquelles l'évaluation des réponses est souvent difficile, voire impossible.
  Exemples de questions que nous avons écartées :
  « Quel intérêt pédagogique présente cette activité ? »
  « Imaginez la mise en œuvre de la séance. »
  « Quelle organisation pédagogique mettriez-vous en place ? »
  voire *« Quel est l'objectif de l'activité ? »*
- Faciliter la correction des copies en termes de contenus mathématiques et de didactique des mathématiques.
- Faire analyser ou comparer des projets de séances déjà construits (protocole, extraits de manuels,…) plutôt que d'élaborer un projet de séance.

Remarques concernant les TICE :

- La calculatrice de l'école primaire sera celle définie dans le document d'accompagnement « Utiliser les calculatrices en classe ». www.eduscol.education.fr
- Afin de ne privilégier aucune marque commerciale, il nous semble nécessaire de définir un langage commun de programmation pour :
  - les calculatrices ;
  - les tableurs ;
  - les logiciels de géométrie dynamique.

Nous faisons une proposition concernant les logiciels dynamiques en annexe.

Contenus des exercices proposés

Exercice 1

On peut classer les entiers naturels selon la valeur de leur reste dans la division euclidienne par 26.

Ainsi : **E_0** est l'ensemble de ceux dont le reste est 0
E_1 est l'ensemble de ceux dont le reste est 1
E_2 est l'ensemble de ceux dont le reste est 2
……………………………………………

1) Combien d'ensembles **E_n** différents obtient-on ?

2) Prouver que si un entier x est dans l'ensemble **E_n** , alors x + 26 est dans le même ensemble **E_n**.

3) Dans quels ensembles sont les nombres :
456 ; 261 ; 456 + 261 ; 456 $\times$261 ? Justifier vos réponses.

4) Montrer que si un entier *a* est dans **E_{10}** et un autre entier *b* est dans **E_{23}** , alors *a* + *b* est dans **E_7** et $a \times b$ dans **E_{22}**.

5) Déterminer toutes les valeurs possibles des deux derniers chiffres *a* et *b* du nombre entier $\overline{2039ab}$ afin que ce nombre soit dans **E_{10}** et soit également divisible par 3.

<u>Questions complémentaires</u>

Vous trouverez en ANNEXE 1 la préparation d'une séance d'enseignement d'un maître de CM2 destinée à des élèves qui ont déjà abordé la division euclidienne en classe.

6) Quels liens existe-t-il entre les ensembles **E_n** et les lignes et colonnes du tableau des nombres proposé par le maître ?

7) Le maître construit une feuille de calcul à partir d'un tableur pour valider rapidement les réponses aux questions du type :
« Dans quelle ligne et dans quelle colonne va-t-on écrire le nombre 852 ? ».
Donner une des procédures possibles pour réaliser rapidement la feuille proposée en annexe 2.

8) Pour chaque phase de la préparation du maître, faire des hypothèses sur les procédures attendues des élèves pour répondre aux questions.

9) Quelle est la solution attendue par l'enseignant en fin de la phase 3 ?

10) Quelle est la fonction du choix des nombres dans chacune des phases ?

11) A l'aide d'une calculatrice, un élève peut valider les réponses concernant la place des nombres 784 et 852 dans le tableau. Proposer deux procédures différentes qu'il pourrait utiliser.

Commentaires

Question vérifiant la maîtrise du tableur chez le candidat. La feuille de calcul proposée en annexe 2 ne doit pas se référer à un tableur particulier.

Question complémentaire sur l'analyse d'une mise en œuvre. Le choix est fait de ne pas demander la conception d'une mise en œuvre mais de proposer des modifications possibles sur des mises en œuvre existantes

Question complémentaire concernant l'usage des TICE dans une séance de classe.

ANNEXE 1

Préparation d'une séance d'enseignement

Phase 1 : *(phase collective)*

- Je commence à écrire au tableau les premiers nombres sous le regard des élèves :

0	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11				

- Plusieurs élèves viennent compléter successivement jusqu'à ce que je sois assuré que tous sauraient continuer le tableau de nombres. Par exemple le tableau peut s'arrêter au nombre 25.
- Questions posées aux élèves
  - *« Dans quelle ligne est le nombre 19 ? »*
  - *« Dans quelle colonne est le nombre 23 ? »*

Phase 2 : *(phase individuelle puis collective)*

- J'annonce que l'on va continuer à compléter le tableau mais qu'il faut d'abord essayer de prévoir ce qui va se passer. Je pose alors la question suivante :
  « Dans quelle ligne et dans quelle colonne va-t-on écrire les nombres 62 et 70 ? » *[recherche individuelle]*
- Inventaire collectif des résultats et discussion entre les élèves. Le tableau est ensuite complété, le résultat cherché est formulé clairement.
- Plusieurs problèmes de ce type sont proposés successivement aux élèves.

Phase 3 : **(***phase individuelle puis collective)*

- Quand la solution correcte commence à être bien perçue par les élèves, le problème est posé avec deux nombres très grands 784 et 852.
- J'aide les élèves à formuler et prouver le résultat.

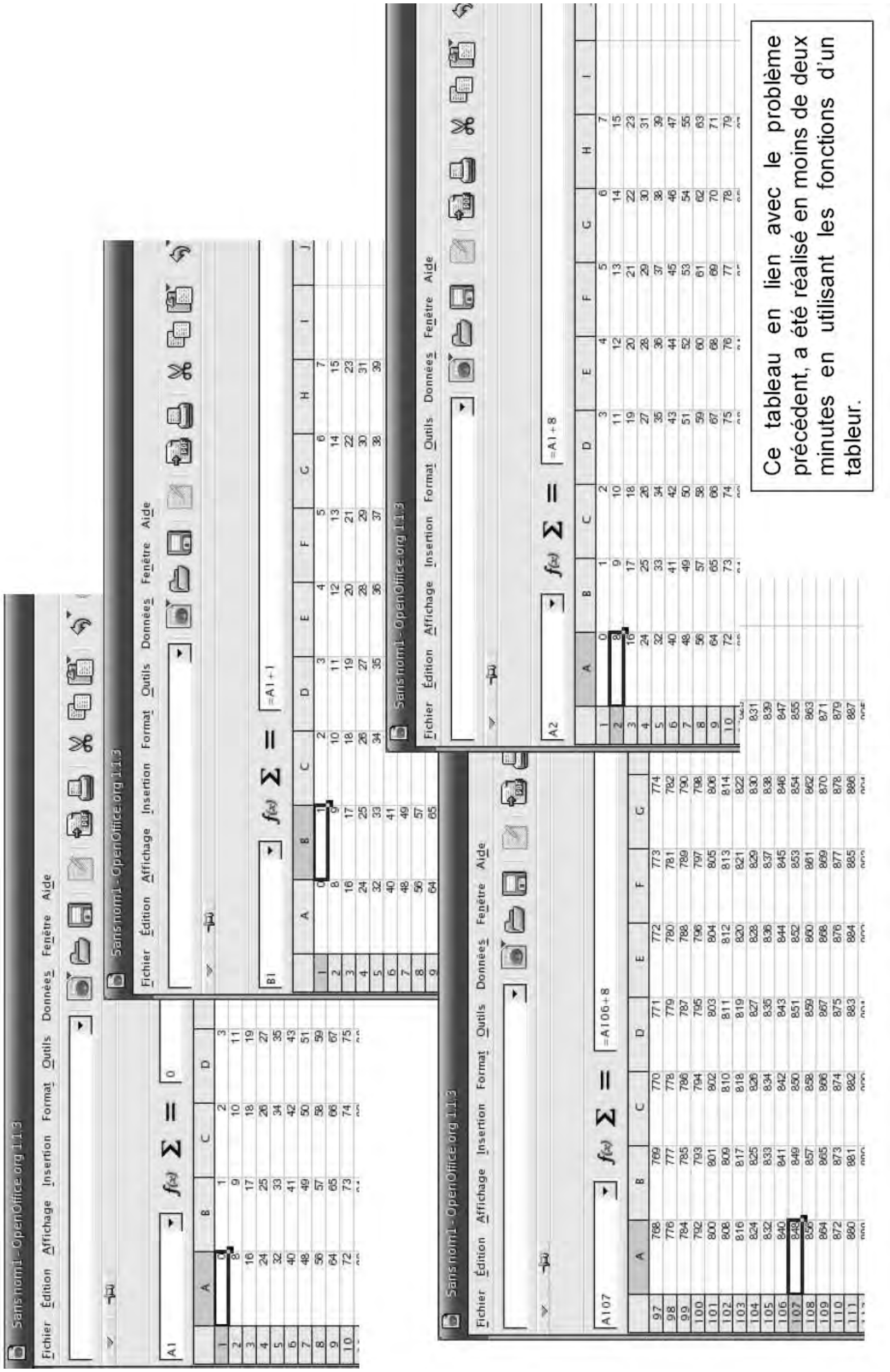
Phase 4 : Exercices d'application

Exemples :

« Dans quelle ligne et dans quelle colonne serait le nombre 145 ? »

« Quel nombre écrirait-on dans la 25ième ligne et à la 1ère colonne ? »

ANNEXE 2



Ce tableau en lien avec le problème précédent, a été réalisé en moins de deux minutes en utilisant les fonctions d'un tableur.

Exercice 2

Commentaires

Soit ABCD un rectangle. On note F le milieu du segment [CD], E le milieu du segment [AD] et G l'intersection des droites (EC) et (FB).

1) Faire un dessin à main levée.

2) Exprimer l'aire du triangle DEC en fonction de l'aire du rectangle ABCD. Justifier votre réponse.

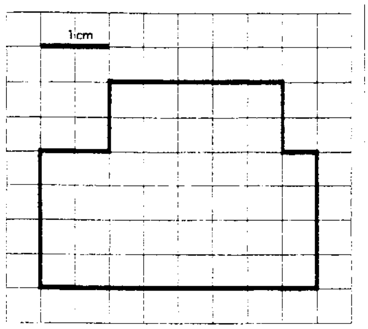
Les réponses attendues ne nécessitent pas l'utilisation de formules.

3) Justifier que l'aire du quadrilatère EDFG est égale à celle du triangle BCG.

4) Les deux exercices ci-dessous ont été simultanément proposés à des élèves. Les figures sont construites sur du papier à mailles carrées.

Exercice 1
Quel est le périmètre de la figure ?

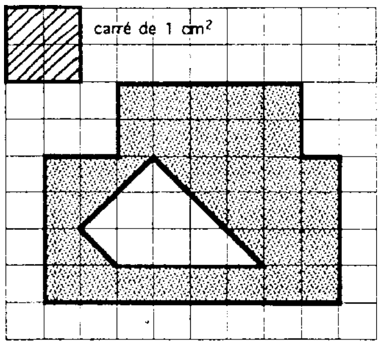
Réponse :…………………cm



Exercice 2
Quelle est l'aire de la surface coloriée en gris?

Réponse :………………cm²

Explique comment tu as fait pour trouver la réponse.



Donner la réponse à chacun des exercices 1 et 2.

Questions complémentaires

5) Dans quel cycle de l'enseignement ces exercices peuvent-ils être proposés ? Justifiez.

Question complémentaire sur la connaissance des programmes.

6) Quelles erreurs, liées aux grandeurs en jeu dans ces deux exercices, peut-on prévoir ? Citez-en au moins trois.

Questions complémentaires sur l'identification des sources possibles d'erreurs repérées dans les travaux d'élèves.

7) En annexe 1, vous trouverez les productions de trois élèves qui ont résolu l'exercice 1.

a) Décrire les procédures utilisées par Marina et Raoul.

b) Quelle peut être la signification des nombres 7 et 9 dans le calcul de Mathilde ?
c) Quelle est l'erreur commune aux trois élèves ?

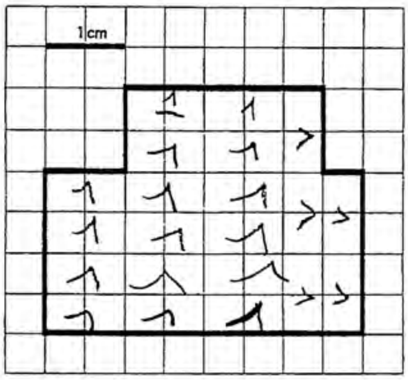
8) En annexe 2, vous trouverez les productions de trois élèves qui ont résolu l'exercice 2.
a) Décrire les procédures utilisées par Julie et Anaïs.
b) Analysez l'erreur d'Alexandre et donnez-en une origine possible.
c) À ce même exercice, quelques élèves ont répondu « 8,2 ». Expliquez l'origine possible de ce résultat.

Questions complémentaires sur l'identification des sources possibles d'erreurs repérées dans les travaux d'élèves.

ANNEXE 1

MARINA

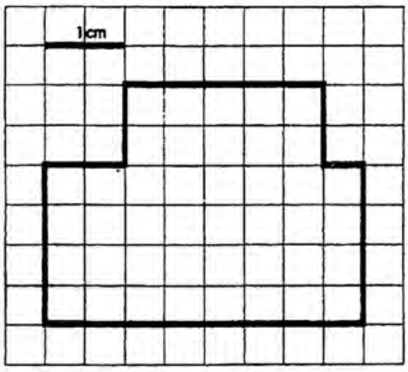
a) Quel est le périmètre de la figure ?



Réponse : ...21...... cm

MATHILDE

a) Quel est le périmètre de la figure ?

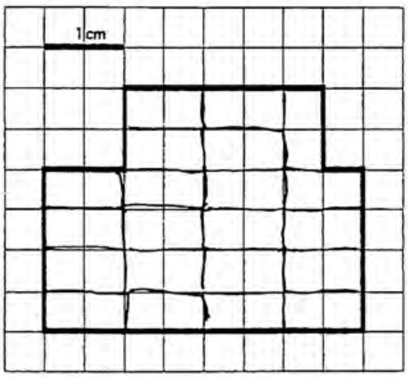


Réponse : ...63........ cm

$7 \times 9 = 63$

RAOUL

a) Quel est le périmètre de la figure ?

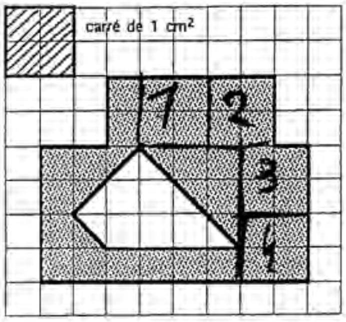


Réponse : .....21........ cm

ANNEXE 2

ALEXANDRE

b) Quelle est l'aire de la surface coloriée en gris ?



Réponse : .... cm²

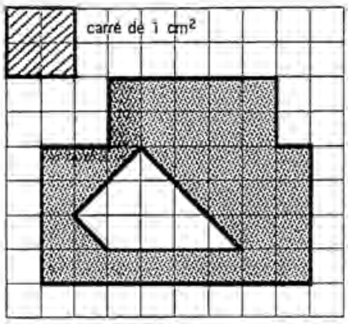
l'aire de la surface et 4 cm².

Explique comment tu as fait pour trouver la réponse.

tu fait 4 carreaux dans charque cule

ANAÏS

b) Quelle est l'aire de la surface coloriée en gris ?



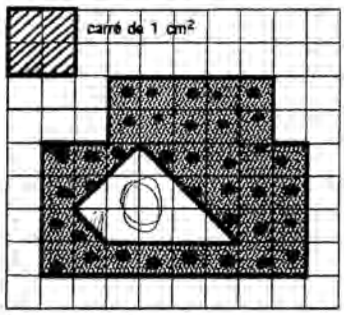
Réponse : 37 .... cm²

Explique comment tu as fait pour trouver la réponse.

J'ai compter tout les carraux.

JULIE

b) Quelle est l'aire de la surface coloriée en gris ?



Réponse : 9 .... cm²

Explique comment tu as fait pour trouver la réponse.

J'ai pris 4 carreaux à chaque fois

Exercice 3

Commentaires

1) Peut-on trouver trois nombres entiers naturels consécutifs dont la somme est 105 ? 210 ? 77 ? 144 ? 326 ? Justifiez vos réponses.

2) Quels sont tous les entiers naturels qui peuvent être la somme de trois entiers consécutifs ? Justifiez votre réponse.

3) Quelles peuvent être les valeurs possibles du nombre *a* (avec 0 ≤ a ≤ 9) pour que le nombre $\overline{34a7}$ soit la somme de trois entiers naturels consécutifs ?

4) Le nombre 21 924 est le produit de trois entiers consécutifs que l'on souhaite déterminer.

a) Décomposer ce nombre en produit de facteurs premiers, puis en déduire les trois entiers cherchés.

b) A l'aide de votre calculatrice, trouver ces trois nombres par une autre méthode que vous décrirez précisément.

<u>Questions complémentaires</u>

5) Un maître a demandé à ses élèves de cycle 3 d'écrire trois nombres entiers qui se suivent. Tous les élèves ont répondu correctement à cette question. Le maître leur a ensuite posé l'exercice suivant :

Je pense à trois nombres <u>qui se suivent</u>.
Lorsque je les additionne cela fait 42, quels sont ces nombres ?

En annexe 1, vous trouverez six productions d'élèves.

a) Décrire les procédures utilisées par ces élèves.

b) Repérer et analyser les erreurs en faisant des hypothèses sur leur origine.

Question complémentaire sur l'identification de sources possibles d'erreurs repérées dans des travaux d'élèves.

6) Le maître propose la même consigne pour d'autres nombres comme : 60, 72, 96. Parmi les procédures utilisées par les six élèves, quelle est celle qu'il souhaite vraisemblablement valoriser ? Justifiez.

7) Quel peut être l'objectif du maître lorsqu'il propose la même consigne mais avec le nombre 77 ?

8) Le maître permet ensuite aux élèves d'utiliser leur calculatrice pour résoudre le problème.

a) Proposez trois nouveaux nombres que pourrait alors donner le maître. Justifiez votre choix.

b) Décrire une procédure qu'un élève utilisant la calculatrice pourrait mettre en oeuvre.

Question complémentaire concernant l'usage des TICE dans une séance de classe.

ANNEXE 1

Élève A

ici c'est le brouillon	ici c'est propre
1 ~~14~~ + ~~14~~ + ~~14~~ + ~~14~~ ~~42~~ 42 | 3 12 | 14 0 42 − 14 28 1 13 14 15 42	~~14 + 14 + 14 = 42~~ 13 + 14 + 15 = 42

Élève B

ici c'est le brouillon	ici c'est propre
18 + 19 + 20 = 57 ~~16+~~ 19 + 20 + 21 = 60 9 + ~~10 +~~ 11 = 30 (suite) 10 + ~~11 +~~ 12 = 33 14 + ~~15 +~~ 16 = 45 12 + ~~13 +~~ 14 = 39 13 + 14 + 15 = 42	13 + 14 + 15 = 42

Élève C

ici c'est le brouillon	ici c'est propre
j'ai fait 42 ÷ 3 = 14 et j'ai enlever 2 a 14 et je l'ai ajouter a un autre 14	16 + 14 + 12 = 42

Élève D

<table>
<tr><th>ici c'est le brouillon</th><th>ici c'est propre</th></tr>
<tr><td>1
15
16
17
48

2
17
18
19
4

18
19
20
47

19
20

1
10
13
19
42

10
11

10
11
-
7

12
13
14
39

10
20

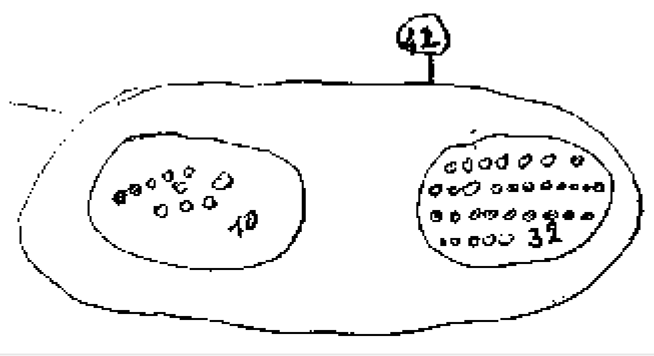
10
11
12
32

12
13
14</td><td>10 + 13 + 19 = 42</td></tr>
</table>

Élève E

<table>
<tr><th>ici c'est le brouillon</th><th>ici c'est propre</th></tr>
<tr><td>20
+ 11
+ 12
42</td><td>20 + 11 + 11 = 42</td></tr>
</table>

Élève F

<table>
<tr><th>ici c'est le brouillon</th><th>ici c'est propre</th></tr>
<tr><td></td><td>10
+ 32
42</td></tr>
</table>

Exercice 4

Commentaires

1) a) En partant de 17 584 et en comptant de 23 en 23, peut-on atteindre le nombre 17 692 ? Justifiez votre réponse.
b) En partant de 2 197 et en comptant de 23 en 23, peut-on atteindre le nombre 31 600 ? Justifiez votre réponse.
c) En partant de 0 et en comptant de 23 en 23, peut-on atteindre le nombre 5 727 ? Justifiez votre réponse.

2) D'une façon générale, si a et b sont deux entiers naturels donnés ($a < b$), indiquez un procédé général et rapide permettant de prévoir s'il est possible d'atteindre b à partir de a en comptant de 23 en 23.

3) Quel est le plus petit entier naturel à partir duquel, en comptant de 23 en 23, on peut atteindre 31 600 ? Justifiez votre réponse.

<u>Questions complémentaires</u>

Question complémentaire concernant la conception et la mise en œuvre d'une séquence d'apprentissage.

4) Un enseignant de CM2 a donné à chacun de ses élèves l'un des trois exercices suivants :

a) *On compte de 23 en 23 : en partant de 17 584, est-il possible d'atteindre le nombre 17 692 ?*
b) On compte de 23 en 23 : en partant de 2 197, est-il possible d'atteindre le nombre 31 600 ?
c) On compte de 23 en 23 : en partant de 0, est-il possible d'atteindre le nombre 5 727 ?

Il a constaté que les procédures utilisées par les élèves ayant obtenu rapidement des réponses correctes étaient significativement différentes selon l'exercice traité.
Expliquez pourquoi ces différences étaient prévisibles.

5) Le document suivant est adapté du manuel « Maths CE2 », Collection Thévenet, Bordas, 2004, p.132

I. Maud, Cyril et Magali participent à un jeu.
Ils ont chacun une étiquette avec un nombre de départ et une étiquette avec une consigne.

	Maud	Cyril	Magali
Départ	17 425	18 124	18 542
Consigne	Compte de 100 en 100 dans l'ordre croissant	Compte de 10 en 10 dans l'ordre croissant	Compte de 5 en 5 dans l'ordre croissant

Il y a ensuite six étiquettes «arrivée» ; chaque joueur doit trouver, parmi ces étiquettes, le nombre auquel il va arriver.

18 427	18 214	27 303	18 587	18 325	10 325

• Peux-tu trouver l'étiquette «arrivée» de Maud, de Cyril et de Magali ?

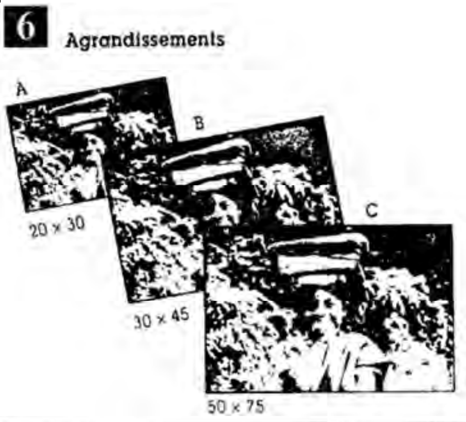
a) Quels sont les éléments mathématiques communs entre cet exercice et ceux de la question précédente ?
b) Quelle est la variable essentielle qui permet de donner cet exercice à des élèves dès le CE2 ?
c) Proposez, pour chaque problème posé aux personnages du livre (Maud, Cyril et Magali) une procédure autre que celle qui correspond à la consigne et qui permettrait à des élèves de CE2 de déterminer dans chaque cas, de façon rapide, l'étiquette « arrivée ».

Commentaires

Questions complémentaires concernant la conception et la mise en œuvre d'une séquence d'apprentissage.

Exercice 5

Commentaires



Les dimensions de la photo A sont : 20 cm de large et 30 cm de long.
a) Dans quelles proportions les dimensions de la photo A ont-elles augmenté pour obtenir les agrandissements B et C ?
b) Quelle serait la longueur d'une photo, qui agrandie aurait une largeur de 60 cm ?

1) Répondre aux questions a) et b) posées ci-dessus, en justifiant vos réponses.

2) Quelle serait la largeur d'une photo agrandie qui aurait 147 cm de long ? Justifier votre réponse.

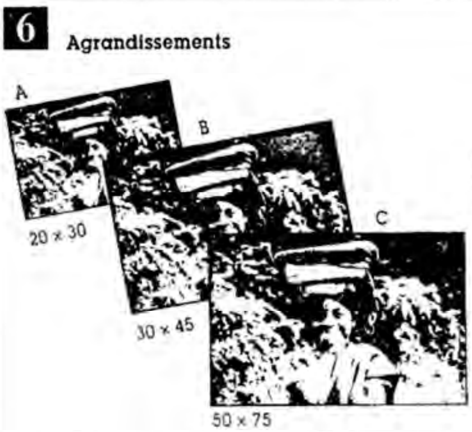
On souhaiterait faire plusieurs agrandissements de la photo A.

3) Si l'on s'impose que le périmètre de l'agrandissement de la photo A ne dépasse pas 3,20 mètres, quelles sont les dimensions maximales de cet agrandissement ? Justifiez votre réponse.

4) Si l'on s'impose que l'aire de l'agrandissement de la photo A ne dépasse pas 2,16 m^2, quelles sont les dimensions maximales de cet agrandissement ? Justifiez votre réponse.

<u>Questions complémentaires</u>

Voici un exercice extrait du manuel « Nouvel Objectif Calcul », CM1, Ed Hatier, 1995.



La photo A a comme dimensions :
20 cm de haut sur 30 de large
a/ Dans quelles proportions les dimensions
des agrandissements B et C
de la photo A ont-elles augmenté ?
b/ Quelle serait la largeur d'une photo agrandie
qui aurait 60 cm de haut ?

L'annexe 1 présente les productions de trois élèves qui ont résolu les questions a) et b) de l'exercice du manuel.

5) Les élèves interprètent à leur façon les termes de la question a). Pour chaque élève, décrire succinctement l'interprétation donnée à cette question.

6) Caractériser, en énonçant les propriétés mathématiques sous-jacentes, les procédures utilisées par les élèves pour répondre au b).

Questions complémentaires concernant l'identification des sources possibles d'erreurs repérées dans des travaux d'élèves.

ANNEXE 1

Productions d'élèves

ELISE

a) De 1 à B on augmente de 10 cm pour la largeur, ensuite de 20 cm, bref ça aurait toujours double. Même principe pour la hauteur sauf que ça part de 15 cm.

b) La largeur serait de 90 cm car il faut doublé les proportions de la photo B.

ANTOINE

A

Les dimensions des agrandissements B et C ont augmenté par rapport à la photo A de :

pour la photo B : 10 cm de haut et 15 cm de large au total 25 cm de plus. 20 - 30 = 10 et 30 - 45 = 15

pour la photo C : 30 cm de haut et 45 cm de large au total 75 cm de plus. 20 - 50 = 30 et 30 - 75 = 45

Et la différence entre la photo B et la photo C, est de 20 cm de haut 30 cm de large.
30 - 50 = 20 45 - 75 = 30.

B

la largeur d'une photo agrandie qui aurait 60 cm de haut serait de 90 cm.
30 x 45 x 2 = 60 x 90
ou
30 x 2 = 60 45 x 2 = 90

JÉRÉMY

Solution	Opérations
La photo A mesure 600 cm² 20 x 30 = 600 La photo B a été augmenté de 850 cm², car elle mesure 1350 cm². 30 x 45 = 1350 La photo C a été augmenté de 2 400 cm², car elle mesure 3 750 cm² 50 x 75 = 3750	50 x 75 250 + 350· 3750 3750 - 1350 2400

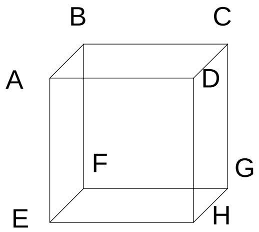
La Largeur d'une photo agrandie qui aurait 60 cm de haut sa largeur est de 30 cm, car pour passer de 20 à 30 = 10 et de 30 à 45 = 15 alors, pour passer de 50 à 60 = 10 (pareil) alors la largeur mesure 90 cm.
75 + 15 = 90

Exercice 6

Commentaires

1) À l'aide de dessins à main levée, proposer au moins trois patrons d'un cube, différents de ceux donnés dans les annexes 2 et 3.

2) On considère un cube ABCDEFGH d'arête *a*.



a) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier la réponse.
b) Calculer AC en fonction de *a*.
c) Sur l'annexe 1, le segment [AC] est déjà tracé. Construire à la règle non graduée et au compas le triangle ABC.

3) a) À partir du tracé du triangle ABC précédemment effectué, construire un patron de la pyramide FABC (on laissera les traits de construction apparents).
b) Calculer le volume de cette pyramide en fonction de *a.*

On rappelle la formule donnant le volume d'une pyramide :

$$\text{volume} = \frac{\text{aire de la base x hauteur relative à cette base}}{3}$$

4) On donne la valeur de l'arête du cube : *a* = 6 cm.
a) Calculer le volume de la pyramide FABC.
b) Sachant que cette pyramide est une maquette à l'échelle 1 / 200 d'un objet industriel, quel est, en m^3, le volume exact de cet objet ? Justifier la réponse.

5) Parmi les assemblages proposés dans l'exercice 4 de l'annexe 3, déterminer ceux qui ne sont pas des patrons d'un cube et justifier votre réponse (on pourra utiliser un codage pour faciliter les explications).

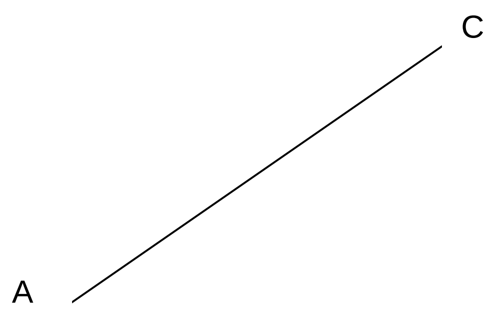
<u>Questions complémentaires</u>

6) Comparer les exercices 2 et 4 de l'annexe 3 au niveau :
- de la présentation ;
- de la consigne ;
- de la vérification.

Questions complémentaires concernant la conception et la mise en œuvre d'une séquence d'apprentissage.

7) Suite à la mise en place dans une classe de la « 1ère phase » décrite dans le livre du maître (annexe 2), proposer une progression pour l'utilisation des exercices 1 à 4 des annexes 2 et 3. Justifier votre choix.

ANNEXE 1



ANNEXE 2

Extrait de « Diagonale, CE2, livre du maître », Nathan, 2002

DÉROULEMENT

MATÉRIEL : – le livre de l'élève page 131 ;
– une vingtaine de carrés (de quatre carreaux sur quatre) par groupe de deux élèves ;
– des morceaux d'adhésif repositionnable ;
– une paire de ciseaux ;
– une feuille de papier quadrillé.

Remarques

◆ Utiliser des feuilles rigides (fiches de bristol) pour faciliter les manipulations. On peut faire découper les carrés par les élèves.

1^re^ phase : fabriquer des assemblages de carrés

◆ Regrouper les élèves par deux et leur demander d'assembler des carrés pour obtenir un patron d'un cube. Leur préciser les étapes du travail :
– recherche et réalisation d'un assemblage ;
– reproduction de l'assemblage sur la feuille quadrillée (un carreau représentant une face) ;
– validation par construction d'un cube ;
– en cas de réussite, inscription de OUI à côté de la reproduction de l'assemblage fait sur la feuille, dans le cas contraire, inscription de NON.
Faire rechercher ainsi divers assemblages et vérifier s'il s'agit de patrons d'un cube ou non.

◆ Partager le tableau en deux parties : une colonne pour les « bons patrons », une autre pour les « mauvais patrons ». Collectivement, demander aux élèves de venir, équipe après équipe, faire une nouvelle proposition d'assemblage et de la dessiner dans la bonne colonne (bon ou mauvais patron).

◆ Quand cinq ou six assemblages figurent au tableau, inviter les élèves à les observer et à formuler des remarques, en particulier par rapport aux raisons qui font que les assemblages de la colonne « mauvais patrons » ne conviennent pas.

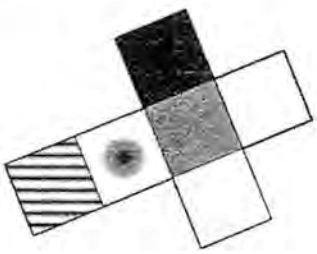
◆ Rappeler la signification du mot « patron ».
◆ Pour fixer les faces entre elles, inviter les élèves à utiliser de petites bandes d'adhésif repositionnable.

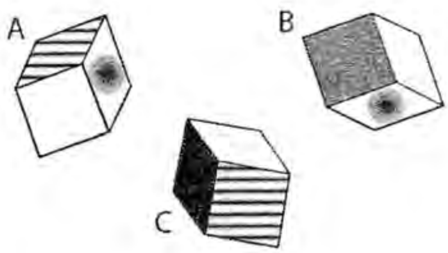
◆ Dans ce travail, les élèves seront amenés à faire certains constats dans la construction du cube.

◆ Il ne s'agit pas d'obtenir de façon exhaustive tous les patrons d'un cube, mais de permettre aux élèves de relever des informations permettant d'éliminer certains assemblages, de reconnaître des caractéristiques de « bons patrons ».

Exercice n°1 **(« Euro maths – CE2 », Hatier, 2003)**

À quel cube correspond ce patron ?…
Vérifie en construisant le cube après avoir reproduit le patron sur du papier quadrillé.



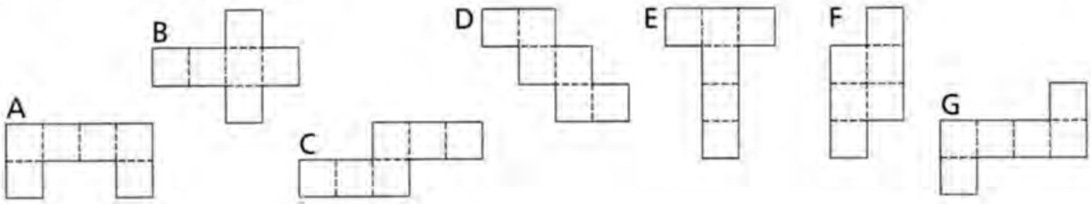


ANNEXE 3

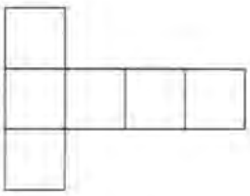
Exercice n°2 **(« Euro maths – CE2 », Hatier, 2003)**

Quelles figures te permettent de reconstituer un cube ?

Vérifie en essayant de construire le cube, après avoir reproduit les figures.
Utilise du papier quadrillé.



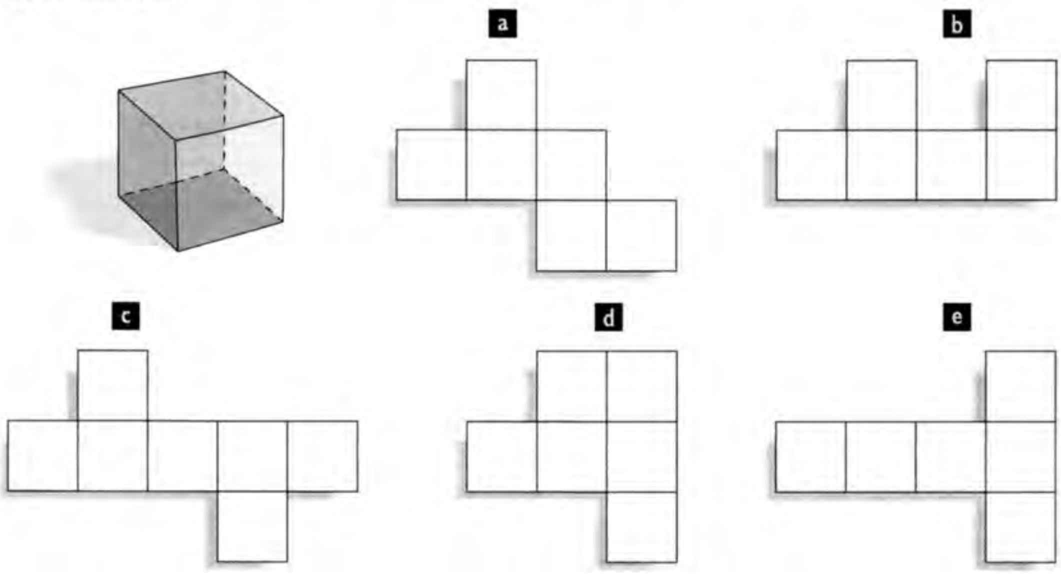
Exercice n°3 **(« Euro maths – CE2 », Hatier, 2003)**



Sur un dé à jouer, la somme des points inscrits sur 2 faces opposées est 7.
Inscris les points sur le patron. Puis, vérifie tes prévisions en construisant le dé.

Exercice n°4 **(« Diagonale – CE2 », Nathan, 2002)**

• **Trouve les deux assemblages de carrés qui permettent de construire un cube. Reproduis-les.**



Exercice 7

Commentaires

Soit $\mathbb{C}$ un cercle de centre O et de rayon 4 cm. [MN] est un diamètre de $\mathbb{C}$. La médiatrice du segment [MO] coupe le cercle $\mathbb{C}$ en P et R.

1) Construire la figure à la règle graduée et au compas en laissant les traits de construction apparents.

2) Démontrez que les points P et R sont symétriques par rapport à la droite (MN).

3) Quelle est la nature du quadrilatère MPOR ? Justifiez votre réponse.

4) Quelle est la nature du triangle MPN ? Justifiez votre réponse.

5) Quelle est l'aire du quadrilatère MPNR ? Justifiez.

6) Écrire un programme de construction permettant d'obtenir cette figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique : on utilisera exclusivement la liste des instructions de programmation fournie en annexe 2.

Question concernant l'usage de logiciel de géométrie dynamique.

<u>Questions complémentaires</u>

Étude d'une fiche extraite de « J'apprends les maths », Édition Retz. (Annexe 1)

7) a) Répondre aux questions posées aux élèves en justifiant votre réponse.
b) Quelles sont les connaissances mathématiques nécessaires pour réaliser cette tâche ?

8) a) Dans l'exercice, le rayon du cercle est donné et la figure est reproduite à taille réelle : si l'on supprimait ces deux données, cela modifierait-il la résolution du problème ? Justifier.
b) De même, la présence du codage de l'angle droit en C a-t-il une influence sur les procédures des élèves ? Justifier.

Questions concernant la conception et la mise en œuvre d'une séquence d'apprentissage.

9) À quel cycle proposeriez-vous cette activité ? Justifier.

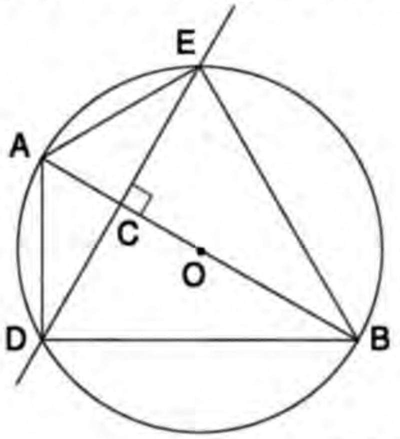
Question concernant la place et le niveau de traitement d'une notion dans les programmes en vigueur.

10) Un maître demande à ses élèves de construire la figure de l'exercice en utilisant un logiciel de géométrie dynamique. Plusieurs élèves obtiennent alors une figure superposable à celle de la page du manuel.
a) Quels moyens l'enseignant peut-il utiliser pour vérifier la validité des procédures mises en œuvre par ces élèves ?
b) Quels types d'erreurs peut-il alors mettre en évidence ?

Question concernant des séances faisant appel aux TICE.

ANNEXE 1

La figure reproduite ici à taille réelle a été construite en suivant l'une des trois fiches. Laquelle ? Pourquoi, en suivant les consignes des autres fiches, on n'obtient pas forcément cette figure ?



Fiche n° 24

1. Trace un cercle de centre O et de rayon 24 mm.
2. Trace un diamètre de ce cercle. Appelle A et B ses deux extrémités.
3. Place le point C, milieu de [AO].
4. Trace une droite passant par C et perpendiculaire à [AB].
5. Appelle D et E les deux points où cette droite coupe le cercle.
6. Trace le quadrilatère AEBD.

Fiche n° 23

1. Trace un cercle de centre O et de rayon 24 mm.
2. Trace un diamètre de ce cercle. Appelle A et B ses deux extrémités.
3. Place un point C sur [AO].
4. Trace une droite passant par C et perpendiculaire à [AB].
5. Appelle D et E les deux points où cette droite coupe le cercle.
6. Trace le quadrilatère AEBD.

Fiche n° 25

1. Trace un cercle de centre O et de rayon 24 mm.
2. Trace un diamètre de ce cercle. Appelle A et B ses deux extrémités.
3. Place un point C sur [AO].
4. Trace une droite passant par C.
5. Appelle D et E les deux points où cette droite coupe le cercle.
6. Trace le quadrilatère AEBD.

ANNEXE 2

Les instructions ci-dessous correspondent à un langage utilisable à l'école élémentaire pour construire des figures de géométrie dans un environnement de géométrie dynamique.

Les nombreux logiciels utilisables ont des fonctions sensiblement équivalentes. Le langage proposé ici traduit l'action réalisée sur la figure après sélection d'une icône (à titre indicatif et sans souci d'exhaustivité, nous illustrons chaque instruction par les icônes issues de deux des logiciels les plus fréquemment utilisés).

Un programme de construction écrit dans ce langage sera une suite d'instructions extraites de la liste ci-dessous, certaines devant être complétées (lorsqu'il y a des pointillés).

Langage	Déclic	Cabri
Créer un point		
Tracer une droite		
Construire une droite passant par le point … et le point …		
Construire un segment défini par ses extrémités		
Tracer un cercle		
Construire un cercle de centre … et passant par le point …		
Construire un cercle de centre … et de rayon de longueur … cm		-
Construire un cercle de centre … et de rayon de même mesure que le segment …		
Construire un point sur …		
Construire l'intersection de … et de …		
Construire le milieu du segment …		
Construire le milieu du segment d'extrémités le point … et le point …		
Construire la parallèle à … passant par le point …		
Construire la perpendiculaire à … passant par le point …		
Construire le polygone de … sommets défini par les points …,…		
Nommer le point …		
Mesurer la longueur du segment …		
Marquer l'angle défini par le côté …, le sommet … et le côté …		
Colorier un objet existant ou cacher un objet existant		
Sélectionner la couleur du prochain objet		
Supprimer un tracé		Suppr
Visualiser l'historique des tracés		

Exercice 8

Commentaires

Note : toutes les réponses aux questions suivantes doivent être argumentées.

1) On considère deux nombres : $\frac{29}{55}$ et $\frac{39}{75}$

a) Sont-il des nombres décimaux ?
b) Comparer ces deux nombres.
c) Trouver un nombre décimal strictement compris entre ces deux nombres.
d) Trouver une fraction qui ne soit pas un nombre décimal, strictement comprise entre ces deux nombres.

2) a) Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants :

1,7 1,07 1,109 1,81

b) Donner deux décimaux strictement compris entre les nombres 1,1 et 1,11.

Questions complémentaires

3) On considère l'exercice suivant :

Trouver un nombre compris entre
8,4 et 8,7
10,1 et 10,2
25 et 25,1
7 et 7,01

Questions concernant l'identification de sources possibles d'erreurs.

a) Quelle propriété (notée P) de l'ensemble des nombres décimaux permet d'affirmer que cet exercice a des solutions ? Comment la formuleriez vous pour des élèves de fin cycle 3 ?
b) Expliquer pourquoi le choix des valeurs numériques est important dans ce type d'exercice.
c) Certains élèves échouent à l'exercice ci-dessus. Donner une origine vraisemblable de leurs difficultés.
d) En quoi le travail de la propriété P est-il indispensable à la connaissance des nombres décimaux ?

4) Les documents 1 et 2 présentent plusieurs méthodes pour comparer les nombres décimaux.

a) En revenant à la définition d'un nombres décimal, justifier les méthodes proposées dans les deux documents.

Questions concernant la conception et la mise en œuvre d'une séquence d'apprentissage.

b) Les exemples proposés dans les documents 1 et 2 vous semblent ils pertinents ? Justifier.
c) En vous inspirant des méthodes des documents 1 et 2, donner la règle de comparaison que vous proposeriez à vos élèves. Justifier votre choix.

ANNEXE 1

DOCUMENT 1
Extrait de "Diagonale", NATHAN

Je retiens bien

Pour comparer deux nombres décimaux

7,25 et 7,3

<u>1re méthode :</u> on compare les parties entières ici 7 = 7, lorsqu'elles sont égales, on compare les parties décimales chiffre après chiffre : 7, 2 5 7, 3 3 est le plus grand 7,3 > 7,25	**<u>2e méthode :</u>** on met les deux nombres au même format, 7 , 2 5 7 , 3 0 et on compare les chiffres de ces nombres à partir de la gauche : 7,30 > 7,25

DOCUMENT 2
Extrait de "Apprentissages mathématiques", NATHAN

J'OBSERVE

POUR COMPARER LES NOMBRES DECIMAUX...	
13,25 et 16,38	Je compare les *parties entières* si elles sont différentes: 13 < 16 donc 13,25 < 16,38
15,62 et 15,36	Ou je compare les chiffres des *dixièmes :* 6 > 3 donc15,62 > 15,36
22,471 et 22,483	Ou je compare les chiffres des *centièmes :* 7 < 8 donc 22,471<22,483 Etc..

JE RETIENS

Pour comparer des nombres décimaux, on compare les parties entières.
Si celles-ci sont identiques, on compare les chiffres des dixièmes. Si ceux-ci sont aussi les mêmes, on compare les chiffres des centièmes, puis éventuellement ceux des millièmes.

Exercice 9

Commentaires

1) Résoudre le problème suivant en utilisant une procédure algébrique.

> ***Problème 1*** *: Depuis ce matin, un magasinier range sans interruption des caisses dans un entrepôt. Il a calculé que, s'il range 50 caisses à l'heure, il aura fini à 11 h 30. Si par contre il en range 60 à l'heure, il aura fini à 11 h 15. À quelle heure a-t-il commencé son travail ? Justifier la réponse.*

2) Utilisez le tableau de l'aide 1 de l'annexe pour résoudre le problème 2 ci-dessous en explicitant votre procédure.

> ***Problème 2*** *: Depuis ce matin, Alain et Bernard rangent sans interruption des caisses dans un entrepôt.*
> - *Alain range 50 caisses à l'heure, il aura fini à 11 h 30.*
> - *Bernard range 60 caisses à l'heure, il aura fini à 11 h 15.*
>
> *Ils ont débuté le travail en même temps et doivent ranger chacun le même nombre de caisses. Ils travaillent régulièrement.*
> *1. Combien de caisses chacun doit-il ranger ?*
> *2. À quelle heure ont-ils commencé leur travail ? Justifier la réponse.*

Questions complémentaires

Un maître de cycle 3 souhaite travailler avec ses élèves la résolution de problèmes relevant de la proportionnalité. Dans cet objectif, il a prévu de leur proposer le problème 2
Lors de sa préparation de séance, il construit trois aides (voir en annexe).

3) Question concernant l'aide n°1
a) Décrire mathématiquement deux procédures différentes qu'un élève de cycle 3 pourrait utiliser pour remplir la case correspondant au nombre de caisses rangées par Bernard en 1 h 30 min
b) En quoi ce tableau peut-il être une aide ?
c) Après avoir rempli correctement le tableau, un élève conclut qu'on ne peut pas donner le nombre de caisses rangées par Alain et Bernard car il y a plusieurs réponses possibles. Faites une (des) hypothèse(s) sur la nature de l'erreur de cet élève pouvant expliquer sa réponse.

Question concernant l'identification des sources possibles d'erreurs.

4) *Question concernant l'aide 2*
Compléter ce tableau.

5) *Question concernant l'aide 3*
En quoi l'aide 3 modifie-t-elle la tâche de l'élève ?

Questions complémentaires concernant la conception et la mise en œuvre d'une séquence d'apprentissage.

6) *Question concernant les trois aides*
D'après vous, quelle(s) aides(s) le maître devrait-il privilégier pour respecter l'objectif de sa séance ? Justifier.

Commentaires

7) Pour la mise en œuvre dans sa classe, le maître envisage plusieurs possibilités :

- *il distribue aux élèves l'énoncé du problème 2 ou/et il l'écrit au tableau,*
- *il fait travailler les élèves par groupes (de 2 ou 3) ou/et individuellement,*
- *il fournit l'aide 1 à tous ses élèves ou à certains seulement*
- *il fournit d'autres aides : quand et à qui ?*
- *il organise une correction collective ou/et une présentation des productions des élèves.*

Il doit de plus prévoir, les termes de l'institutionnalisation à laquelle il souhaite aboutir.

Proposez une mise en œuvre argumentée de cette séance.

Questions complémentaires concernant la conception et la mise en œuvre d'une séquence d'apprentissage.

8) Pendant la séance, un élève a testé plusieurs heures de début possible du rangement : il a essayé successivement 8 h, 9 h, puis 10 h. Il a ainsi rapidement résolu le problème 2.
Le maître n'avait pas envisagé cette procédure : pourquoi lui pose-t-elle problème ? Comment aurait-il pu la rendre moins efficace ?

ANNEXE

Aide 1 : sous forme de tableau partiellement rempli

Remplir les cases du tableau

Durée	***Alain :*** ***nombre de caisses rangées.***	***Bernard :*** ***nombre de caisses rangées.***
0 min	*0*	*0*
15 min		
30 min		
45 min		
1h	*50*	*60*
1h 15 min		
1h 30 min		
1h 45 min		
2h		
2h 15 min		
2h 30 min		
2h 45 min		
3h		

Aide 2 sous forme de tableau

Mettre une croix dans les cases qui conviennent

	Vrai	***Faux***	***Je ne sais pas répondre***
Au bout de 2 h, Alain aura rangé 100 caisses.			
Au bout de 3 h, Alain aura rangé le nombre de caisses qu'il range en 1 h multiplié par 3.			
On ne sait pas exactement combien Alain aura rangé de caisses au bout de 15 min.			
Au bout de 45 minutes, Alain aura rangé 37 caisses.			
Au bout de 2 h, Bernard aura rangé 120 caisses (60 x 2).			
Au bout de 15 min, Bernard aura rangé 10 caisses.			
Au bout de 1 h 45 min, Bernard aura rangé le nombre de caisses qu'il range en 1 h auquel on ajoute le nombre de caisses qu'il range en 45 min.			
Au bout de 1 h 45 min Bernard aura rangé 100 caisses.			

Aide 3 : sous forme de problème

Alain range des caisses dans un entrepôt. Il commence à 10 h. Il range 50 caisses à l'heure.
Bernard range des caisses dans un entrepôt. Il commence à 10 h. Il range 60 caisses à l'heure.

a) Si Alain finit à 10 h 30, combien aura-t-il rangé de caisses ?

b) Combien Bernard aura t-il rangé de caisses en 1 h 15 min ?

Exercice 10

Commentaires

Définition d'un carré magique
Un carré magique 3 x 3 est rempli avec les nombres de 1 à 9 utilisés une seule fois de telle manière que la somme des 3 nombres écrits sur chacune des trois lignes, des trois colonnes et des deux diagonales soit chaque fois la même.

1) Compléter chaque case de la grille ci-dessous pour obtenir un carré magique (à recopier sur la copie).

	5	

2) Dans le carré magique 3 x 3, justifiez le fait que la somme des nombres de chaque ligne soit toujours égale à 15 et que la somme des nombres de chaque colonne soit toujours égale à 15.

3) En additionnant les nombres de la ligne centrale avec ceux de la colonne centrale et ceux des deux diagonales, déduire que la case centrale est toujours occupée par le nombre 5. On utilisera les notations proposées dans le tableau ci-contre.

a	*b*	*c*
d	*e*	*f*
g	*h*	*i*

4) Montrer que $a + i = 10$. Énoncer les trois autres égalités du même type.

5) En vous aidant des propriétés énoncées dans les questions 3 et 4, proposer quatre autres carrés magiques.

6) Quelle(s) transformation(s) géométrique(s) du plan peut-on utiliser pour trouver tous les carrés magiques à partir d'un seul ?

<u>Questions complémentaires</u>

7) On peut envisager trois objectifs différents pour un enseignant mettant en œuvre la séquence présentée dans l'annexe1 :

- Proposer à ses élèves un problème de recherche ;
- Renforcer chez ses élèves différentes significations en lien avec la soustraction ;
- Entraîner ses élèves au calcul.

Discuter la pertinence de l'utilisation de la calculatrice selon l'objectif prioritaire de l'enseignant qui propose cette séquence.

Question concernant des séances faisant appel aux TICE.

8) Analyser la phase collective de la recherche A proposée aux élèves :

a) Qu'est-ce que ce moment apporte dans la séance ?

Question concernant la conception et la mise en œuvre d'une séquence d'apprentissage.

b) L'enseignant choisit de ne proposer que des « bonnes solutions » ; il aurait pu à ce stade choisir de présenter aux élèves des carrés magiques et d'autres non magiques, pour les faire étudier et valider par la classe. Qu'apporterait cette nouvelle modalité pour la phase collective ?

Question concernant la conception et la mise en œuvre d'une séquence d'apprentissage.

9) Déterminer la (ou les) difficulté(s) supplémentaire(s) que va rencontrer l'élève dans la recherche C par rapport à la recherche A.
Que pourrait-on proposer pour faciliter la tâche des élèves dans cette recherche C ?

Question concernant l'identification des sources possibles d'erreurs.

ANNEXE 1

Voici la préparation d'un maître pour une séquence de mathématiques qui se déroule sur plusieurs séances au cycle 3.

RECHERCHE A

1. Recherche individuelle

Consigne donnée à l'élève :
Compléter chaque case de la grille ci-dessous pour obtenir un carré magique.

Définition d'un carré magique :
Un carré magique 3 x 3 est rempli avec les nombres de 1 à 9 utilisés une seule fois de telle manière que la somme des 3 nombres écrits sur chacune des trois lignes, des trois colonnes et des deux diagonales soit chaque fois la même.

2. Phase collective

Relancer l'activité en écrivant au tableau deux solutions justes trouvées par les élèves.
Demander aux élèves de vérifier qu'il s'agit de carrés magiques, de comparer ces 2 carrés magiques et de mettre en évidence la place centrale du nombre 5.
Leur poser ensuite les questions suivantes :

- Quel doit être le résultat de l'addition des deux autres nombres dans chaque ligne, colonne ou diagonale, incluant le nombre 5 ?
- Quelles sont les possibilités pour trouver ce résultat en additionnant deux nombres ?

3. Phase individuelle

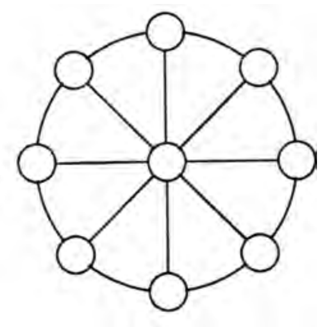
Consigne donnée à l'élève :
Rechercher d'autres carrés magiques 3 x 3.

4. Prolongement

Proposer aux élèves l'une des 2 recherches suivantes selon leur réussite à la recherche précédente.

RECHERCHE B

Compléter la roue ci-dessous avec tous les nombres de 1 à 9, utilisés une seule fois, de manière à obtenir la même somme sur chaque diamètre :



RECHERCHE C

Compléter le carré magique ci-dessous avec les nombres de 1 à 16, utilisés une seule fois :

1		**14**	
		7	
8	**10**		
13			**16**

ANNEXES

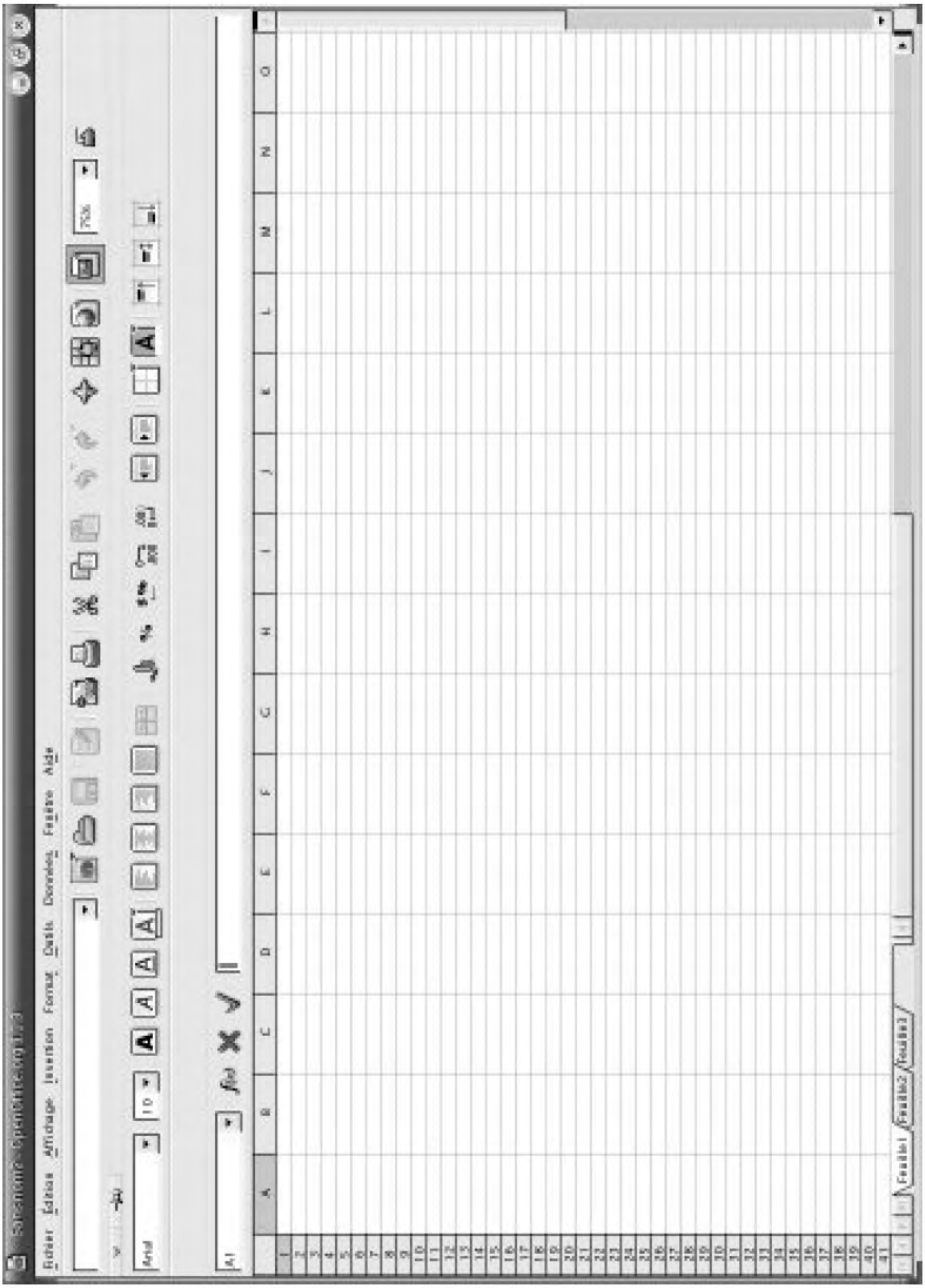
Annexe 1

Les instructions ci-dessous correspondent à un langage utilisable à l'école élémentaire pour construire des figures de géométrie dans un environnement de géométrie dynamique.

Les nombreux logiciels utilisables ont des fonctions sensiblement équivalentes. Le langage proposé ici traduit l'action réalisée sur la figure après sélection d'une icône (à titre indicatif et sans souci d'exhaustivité, nous illustrons chaque instruction par les icônes issues de deux des logiciels les plus fréquemment utilisés).

Langage	Déclic	Cabri
Créer un point		
Tracer une droite		
Construire une droite passant par le point … et le point …		
Construire un segment défini par ses extrémités		
Tracer un cercle		
Construire un cercle de centre … et passant par le point …		
Construire un cercle de centre … et de rayon de longueur … cm		-
Construire un cercle de centre … et de rayon de même mesure que le segment …		
Construire un point sur …		
Construire l'intersection de … et de …		
Construire le milieu du segment …		
Construire le milieu du segment d'extrémités le point … et le point …		
Construire la parallèle à … passant par le point …		
Construire la perpendiculaire à … passant par le point …		
Construire le polygone de … sommets défini par les points …,…		
Nommer le point …		
Mesurer la longueur du segment …		
Marquer l'angle défini par le côté …, le sommet … et le côté …		
Colorier un objet existant ou cacher un objet existant		
Sélectionner la couleur du prochain objet		
Supprimer un tracé		Suppr
Visualiser l'historique des tracés		

Annexe 2



CORRIGÉS

DES PROPOSITIONS D'EXERCICES POUR LA CONCEPTION DE SUJETS FUTURS

EXERCICE 1

Question 1
Nombre d'ensembles E_n différents

Dans la division euclidienne par 26, on peut dire que pour tout nombre entier naturel *a*, il existe un couple unique d'entiers naturels (*q, n*) tel que :

$$a = 26 \times q + n \quad \text{avec} \quad 0 \leq n \leq 25.$$

Dans cette relation *n* représente le reste de la division de *a* par 26 et *q* représente le quotient.
Comme $0 \leq n \leq 25$, on peut en déduire qu'il existe 26 ensembles E_n : E_0, E_1, E_2, ………. , E_{25}.

Question 2

Si le nombre *x* est dans E_n alors il il existe un couple unique d'entiers (*q*, *n*) tel que :

$$x = 26 \times q + n \text{ avec } 0 \leq n \leq 25.$$

On en déduit que :

$$x + 26 = 26 \times q + n + 26 = 26 \times (q+1) + n \qquad \text{avec } 0 \leq n \leq 25.$$

Ainsi le nombre $x + 26$ est bien dans l'ensemble E_n.

Question 3

Par calcul on obtient que : 456 = 17 x 26 + 14.
On en déduit que **le nombre 456 est dans l'ensemble E_{14}.**
Par calcul on obtient que : 261 = 10 x 26 + 1.
On en déduit que **le nombre 261 est dans l'ensemble E_1.**

D'où :

$$\begin{aligned} 456 + 261 &= (17 \times 26 + 14) + (10 \times 26 + 1) \\ &= (17 + 10) \times 26 + 15 \end{aligned}$$

Donc **le nombre correspondant à la somme de 456 et 261 est dans l'ensemble E_{15}.**

D'autre part :

$$\begin{aligned} 456 \times 261 &= (17 \times 26 + 14) \times (10 \times 26 + 1) \\ &= (17 \times 10 \times 26 \times 26) + (17 \times 1 \times 26) + (14 \times 10 \times 26) + 14 \times 1 \\ &= [(17 \times 10 \times 26) + (17 \times 1) + (14 \times 10)] \times 26 + 14 \end{aligned}$$

Donc **ce produit est dans l'ensemble E_{14}.**

Question 4

Si *a* est dans l'ensemble E_{10} et *b* est dans l'ensemble E_{23}, on sait qu'il existe deux entiers naturels *q* et *q'* tels que :

$$a = 26 \times q + 10 \qquad \text{et} \qquad b = 26 \times q' + 23$$

On en déduit que :

$$a + b = 26 \times (q + q') + 33$$

$= 26 \times (q + q') + 26 + 7 = 26 \times (q + q' + 1) + 7$

D'où **a + b est dans l'ensemble E_7.**

En effectuant un calcul du même genre on vérifie que :

$a \times b = 26 \times (\ldots\ldots\ldots) + 230$

$= 26 \times (\ldots\ldots\ldots) + 26 \times 8 + 22$

$= 26 \times (\ldots\ldots + 8) + 22$

Donc **le produit de *a* par *b* est dans l'ensemble E_{22}**.

Question 5

Recherche des valeurs possibles de *a* et *b* tels que $\overline{2039ab}$ soit dans l'ensemble E_{10} et soit divisible par 3

On peut écrire : $\overline{2039ab} = 203\,900 + 10 \times a + b$ *(1)*

D'où $\overline{2039ab} = (26 \times 7\,842 + 8) + 10 \times a + b$

Ainsi pour satisfaire à la question on doit avoir simultanément les conditions suivantes : $\overline{2039ab}$ doit avoir un reste de 10 dans la division euclidienne par 26 et la somme des chiffres de ce nombre doit être un multiple de 3 (puisqu'il est divisible par 3).

En utilisant (2) et en simplifiant, cela se traduit par les relations suivantes :

$$\begin{cases} 10 \times a + b = 26k + 2 & \text{avec k un entier naturel} \\ 2 + 3 + 9 + a + b = 14 + a + b & \text{soit un multiple de 3} \end{cases}$$

Organisons les recherches dans un tableau.

Valeurs de k	Valeur de 26 *k* + 2	Valeur de *a*	Valeur de *b*	Valeur de 14 + *a* + *b*	Conclusion
0	2	0	2	16	*Ne convient pas*
1	28	2	8	24	*convient*
2	54	5	4	23	*Ne convient pas*
3	80	8	0	22	*Ne convient pas*
4	106	Impossible puisque le nombre 10 x a + b est composé de deux chiffres *a* et *b*.			

Donc les seules valeurs possibles pour *a* et *b* sont : *a* = 2 et *b* = 8.

Ainsi le nombre 203 928 sera bien dans l'ensemble E_{10} et sera divisible par 3.

QUESTIONS COMPLÉMENTAIRES

Question 6

Lien entre les ensembles E_n et les lignes et colonnes du tableau des nombres proposé par le maître

Le tableau rempli par le maître permet d'obtenir directement le quotient et le reste de tout entier naturel dans la division euclidienne par 8.

Ainsi chaque colonne donne la valeur du reste du nombre dans la division euclidienne par 8 et chaque ligne donne le quotient.

Les nombres de la première ligne du tableau écrit par le maître sont les restes possibles de la division euclidienne d'un nombre entier naturel par 8. Tous les nombres de la première ligne ont pour quotient 0 dans la division euclidienne par 8.
Tous les nombres de la deuxième ligne ont pour quotient 1 dans la division euclidienne par 8.
Tous les nombres de la $p^{ième}$ ligne ont pour quotient (p – 1) dans la division euclidienne par 8.
Tous les nombres de la première colonne ont pour reste 0, tous les nombres de la deuxième colonne ont pour reste 1….
Les nombres de la $n^{ième}$ (avec $1 \leq n \leq 8$) colonne ont pour reste (n – 1) dans la division euclidienne par 8.
On en déduit que tous les nombres appartenant à la $n^{ième}$ colonne sont les éléments de l'ensemble E_{n-1}. Les nombres de la première colonne sont les éléments de E_0, ceux de la deuxième colonne sont les éléments de E_1,…., ceux de la huitième colonne sont les éléments de E_7.

Question 7
Procédures possibles pour réaliser rapidement la feuille proposée en annexe 2

Pour construire la feuille de calcul présentée en annexe 2, il s'agit de remarquer que :

- sur une même ligne, pour passer d'un nombre écrit dans une colonne à celui écrit dans la colonne suivante, il faut lui ajouter 1.
- sur une même colonne, pour passer d'un nombre écrit dans une ligne à celui écrit à la ligne suivante, il faut lui ajouter 8.

On doit en premier initialiser la cellule A1, ici en lui donnant la valeur 0.

Puis deux procédures sont possibles.

a) On construit la première colonne en appliquant la formule : « = A1 + 8 » dans la cellule A2. Puis on copie et colle cette formule sur l'ensemble des cellules de la colonne.
Pour obtenir les autres colonnes, on applique dans la cellule B1 la formule : « = A1 + 1 » que l'on copie et colle sur les colonnes C, D, etc.

b) On commence par construire la ligne 1 en appliquant dans la cellule B1 la formule : « = A1 + 1 » que l'on copie et colle sur les cellules C1, D1, etc. Ensuite on construit les colonnes en appliquant la formule : « = A1 + 8 » dans la cellule A2. Puis on copie et colle cette formule sur l'ensemble des cellules de l'ensemble des colonnes.

En utilisant une des deux procédures, le tableau construit à l'aide du tableur, permet de lire que 852 est sur la ligne numérotée 107 et dans la $5^{ème}$ colonne. D'où le quotient de 852 dans la division euclidienne est 106 et le reste est 4.

Question 8
Hypothèses sur les procédures attendues des élèves

Voici des propositions concernant les procédures attendues des élèves aux réponses des questions posées.

Phase 1 : Le tableau étant complété jusqu'au nombre 25, pour trouver la ligne et la colonne où sont situés les nombres 19 et 23, les élèves repèreront tout simplement ces nombres dans le tableau.

Phase 2 : Les nombres proposés sont 62 et 70.

Procédure 1 : les élèves poursuivent la construction effective du tableau pour aller jusqu'aux nombres cherchés, puis ils répondent à la question. La démarche est identique à celle de la phase 1.

Procédure 2 : les élèves repèrent la place des nombres en poursuivant mentalement la construction du tableau sans pour autant écrire les nombres dans le tableau. Peu de différence avec la procédure 1.

Procédure 3 : Les élèves qui commencent à comprendre le fonctionnement du tableau vont chercher, en comptant de 8 en 8 dans la première colonne, le nombre le plus proche de 62. Ils trouvent 56 (8 x 7) ou 64 (8 x 8) et ensuite ils avancent ou reculent jusqu'au nombre voulu.
Pour le nombre 70, les élèves peuvent repérer que ce nombre est obtenu en additionnant 8 à 62 donc qu'il se trouve dans la même colonne et dans la ligne suivante.

Procédure 4 : Les élèves qui ont bien saisi l'enjeu de la situation vont pouvoir effectuer un calcul qui leur donne la réponse sans l'aide du tableau (celui-ci leur servira éventuellement de contrôle).
Ils décomposent le nombre 62 (62 = 8 x 7 + 6) et ainsi ils en déduisent la ligne et la colonne correspondante.

Phase 3 : Cette fois la taille des nombres choisis est grande et la procédure qui consiste à compléter le tableau en écrivant tous les nombres est trop longue et source d'erreurs. Les élèves doivent donc recourir à une procédure de calcul qui permet d'obtenir le reste et le quotient dans la division euclidienne des nombres 784 et 852 par 8. L'usage du calcul réfléchi devient une aide importante.

$$784 = 72 \times 10 + 64 = 8 \times (9 \times 10) + 8 \times 8 = 8 \times 98$$

Ainsi 784 est un multiple de 8 donc il est dans la première colonne et comme le quotient dans la division euclidienne est 98, il est dans la 99$^{\text{ème}}$ ligne.

$$852 = 800 + 48 + 4$$
$$8 \times 100 + 8 \times 6 + 4 = 8 \times 106 + 4$$

Ainsi 852 est dans la 5$^{\text{ème}}$ colonne et la 107$^{\text{ème}}$ ligne.

Question 9
Solution attendue par l'enseignant en fin de la phase 3

A la fin de la phase 3, le maître attend la solution suivante :
« Pour savoir où est placé un nombre dans ce tableau, on doit effectuer la division euclidienne de ce nombre par 8. On trouve alors un quotient (q) et un reste (r).
Le nombre est alors dans la $(r + 1)^{\text{ième}}$ colonne et dans la $(q + 1)^{\text{ième}}$ ligne. »

Question 10
Fonction du choix des nombres dans chacune des phases

Dans la phase 1, les nombres faciles à positionner dans le tableau permettent une bonne appropriation du problème par les élèves. Le maître peut ainsi vérifier la maîtrise des termes « ligne » et « colonne » que les élèves confondent souvent.
Dans la phase 2, les nombres sont encore dans la table de multiplication de 8 donc avec des calculs simples les élèves peuvent commencer à comprendre le fonctionnement du positionnement des nombres dans ce tableau.
Dans la phase 3, les nombres choisis vont permettre de faire faire un saut notionnel aux élèves. La taille des nombres est trop grande pour recourir au tableau et les élèves doivent changer de procédure. Ils doivent mettre en œuvre la démarche attendue par le maître.

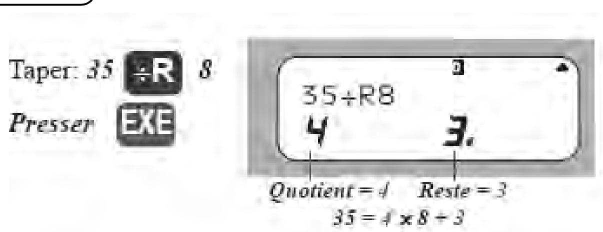
Question 11
Utilisation de la calculatrice.

Procédure 1 : Si la calculatrice possède la touche « division euclidienne », l'élève effectue la division euclidienne de 784 par 8 et il obtient comme résultat le couple qui donne le quotient et le reste.
Il en déduit la colonne (reste + 1) et la ligne (quotient + 1).

Procédure 2 : avec une calculatrice sans la touche « division euclidienne », l'élève va effectuer la division 784 par 8, il prend la valeur entière (*q*) du résultat.
Puis il effectue 784 – (*q* x 8) ; ce qui lui donne la valeur du reste (*r*).
De ces deux valeurs (*q* et *r*), il déduit la place du nombre 784 dans le tableau.

<u>*Remarque :*</u>
Voici deux exemples de la touche « division euclidienne »

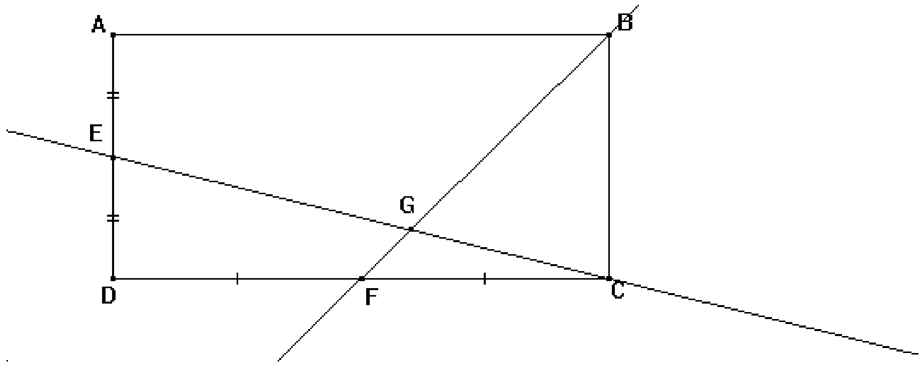
- *La touche* ÷ R



- *Avec une calculatrice scientifique destinée au cycle 3, la touche* ⊢

EXERCICE 2

Question 1
Croquis de la configuration



Question 2
Aire du triangle DEC

<u>Méthode 1 :</u>

Une diagonale d'un rectangle partage celui-ci en deux triangles rectangles de même aire, donc l'aire du triangle ADC est la moitié de l'aire du rectangle ABCD.

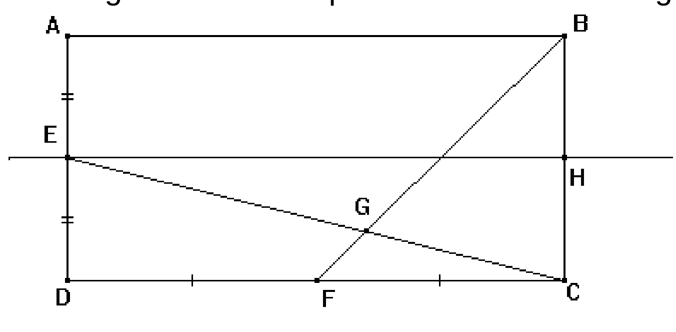
Les triangles ADC et EDC sont deux triangles rectangles en D ; ils ont en commun [DC] côté de l'angle droit ; l'autre côté de l'angle droit est [AD] pour le triangle ADC et [DE] pour le triangle EDC et on a : ED = $\frac{AD}{2}$ car E milieu de [AD].

Les triangles rectangles EDC et ADC ont donc une base en commun et les hauteurs correspondantes dans le rapport $\frac{1}{2}$; leurs aires sont donc aussi dans le rapport $\frac{1}{2}$.

L'aire du triangle EDC est donc la moitié de l'aire du triangle ADC qui est elle, la moitié de l'aire du rectangle ABCD, d'où le résultat demandé.

<u>Méthode 2 :</u>

Soit H le point d'intersection entre la parallèle à (DC) passant par E et (BC). Une diagonale d'un rectangle partage celui-ci en deux triangles rectangles de même aire, donc l'aire du triangle EDC est la moitié de l'aire du rectangle DEHC. De plus E est le milieu de [AD] donc l'aire du rectangle DEHC est la moitié de l'aire du rectangle ABCD. Ainsi l'aire du triangle EDC est le quart de l'aire du rectangle ABCD.



<u>Méthode 3 :</u> avec utilisation d'une formule pour le calcul d'aire.

Le triangle DEC est rectangle en D, puisque ABCD est un rectangle ; donc :

Aire (triangle DEC) = $\frac{DE \times DC}{2}$

E étant le milieu du segment [AD], on a : DE = $\frac{AD}{2}$

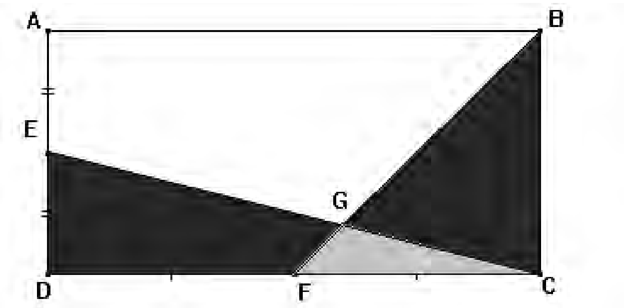
D'où Aire (triangle DEC) = $\frac{\frac{AD}{2} \times DC}{2} = \frac{AD \times DC}{4} = \frac{1}{4}$ Aire (rectangle ABCD)

L'aire du triangle DEC est le quart de l'aire du rectangle ABCD.

Question 3
Comparaison des aires du triangle BCG et du quadrilatère EDFG

Par un raisonnement analogue à celui de la question 2, on peut établir que :
L'aire du triangle BCF est la quart de l'aire du rectangle ABCD.
Donc les aires des triangles EDC et BCF sont égales.
Lorsqu'on enlève à chacun de ces triangles la partie commune aux deux surfaces (le triangle GFC), on obtient donc des surfaces de même aire.
Donc le quadrilatère EDFC et le triangle BCG ont la même aire.

Figure illustrant le raisonnement effectué :



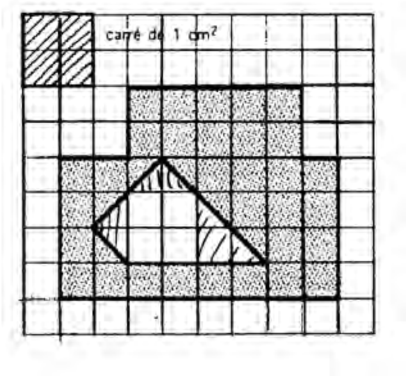
<u>Remarque :</u>
On peut aussi formuler ainsi le raisonnement effectué :

$$Aire(BCF) = \frac{FC \times BC}{2} = \frac{\frac{DC}{2} \times BC}{2} = \frac{DC \times BC}{4} = \frac{1}{4} Aire(ABCD) = Aire(EDC)$$

$$Aire(EDFG) = Aire(EDC) - Aire(GFC) = Aire(BCF) - Aire(GFC) = Aire(BCG)$$

Question 4
Réponses aux exercices 1 et 2

Dans l'exercice 1, le périmètre de la figure est de 14 cm.
Dans l'exercice 2, l'aire de la surface est de 8,5 cm². Il suffit pour trouver ce résultat de retrancher à l'aire de la figure de l'exercice 1, l'aire du « trou » non grisé intérieur. L'aire du trou se calcule grâce à un découpage astucieux. On remarque que la surface constituée par les parties hachurées du « trou » a une aire de 1 cm², on en déduit l'aire du « trou » : 2 cm². L'aire de la figure de l'exercice 1 valant 10,5 cm², on obtient facilement l'aire de la partie grisée $10{,}5 - 2 = 8{,}5$ cm².



QUESTIONS COMPLÉMENTAIRES

Question 5
Le cycle supposé

Ces exercices font appel aux notions de périmètre, d'aire et de décimaux. Les unités (cm et cm²) doivent être maîtrisées. Au programme du cycle 3 on trouve les intitulés suivants :

- Calculer le périmètre d'un polygone (structuration en CE2, consolidation en CM1 et MC2)
- Différencier aire et périmètre d'une surface (approche en CM1, structuration en CM2)
- Mesurer l'aire d'une surface grâce à un pavage effectif à l'aide d'une surface de référence (d'aire une unité) ou grâce à l'utilisation d'un réseau quadrillé. (approche en CE2, structuration en CM1 et CM2)
- Connaître les unités usuelles, en particulier le cm² (approche en CM1, structuration en CM2)
- Utiliser les nombres décimaux pour exprimer la mesure de la longueur d'un segment, celle de l'aire d'une surface (une unité étant donnée) (structuration en CM1 et CM2)

Pour toutes ces raisons, on peut supposer que ces exercices sont donnés à des élèves de cycle 3. (CE2 pour l'exercice 1 et fin de CM1, voire CM2 pour l'exercice 2).

Question 6
Erreurs liées aux grandeurs

- L'unité imposée ne correspond ni à la longueur du côté d'un carreau pour l'unité de longueur, ni à l'aire d'un carreau pour l'unité d'aire. Des erreurs de mesure de périmètre et d'aire sont donc à prévoir : certains élèves prendront pour référence le carreaux du quadrillage et non pas l'unité imposée.
- La longueur de certains côtés mesurée en cm ne s'exprime pas à l'aide d'un nombre entier. Certains élèves ne maîtrisent pas encore l'usage des nombres décimaux, il leur sera donc difficile d'obtenir un résultat leur faisant appel. Ces élèves pourront ne pas répondre à la question.
- La mesure en cm² de l'aire de la surface coloriée en gris ne s'exprime pas par un nombre entier. Une non-réponse à cet exercice est à prévoir pour les élèves qui ne maîtrisent pas encore l'usage des décimaux.
- La confusion possible entre aire et périmètre.

Question 7a
Productions de Marina et Raoul

Marina et Raoul amalgament « segment de 2 carreaux » et « surface de deux carreaux » ; on peut remarquer que l'espace occupé sur la figure par la légende « 1 cm » est une surface de deux carreaux, ce qui a pu provoquer cette erreur.
Ces deux élèves reportent cette surface de deux carreaux à l'intérieur de la figure proposée pour la paver, puis il comptent le nombre d'exemplaires de la surface unité qu'ils ont utilisée.
Pour ces élèves, il y a donc confusion entre mesure d'un périmètre et mesure d'une aire, mais aussi contresens sur la signification de « 1 cm » qui est pris ici comme une unité d'aire.

Remarque :
Le terme « périmètre » ne semble rien évoquer pour ces deux élèves qui conduisent leur action uniquement sous l'effet de la perception des carreaux.

Question 7b
Production de Mathilde

La présence du produit 7×9 incite à penser que Mathilde calcule l'aire d'un rectangle.
Il est probable qu'il s'agit du rectangle dans lequel s'inscrit la figure et dont les dimensions sont 6 carreaux pour la largeur et 8 carreaux pour la longueur.
Mais au lieu de compter les carreaux, Mathilde compte les nœuds, d'où le nombre 7 pour la largeur et le nombre 9 pour la longueur.

Remarque :
On peut remarquer qu'elle écrit 7×9 mais signale par des flèches qu'il faut intervertir le 7 et le 9 : sans doute veut-elle se « conformer » à la formule de l'aire d'un

rectangle qu'elle a du apprendre : Aire rectangle = Longueur × Largeur et respecter l'ordre d'écriture des grandeurs.

Question 7c
Erreur commune aux trois élèves

Dans les productions des trois élèves, il y a confusion entre les notions d'aire et de périmètre d'une figure.

<u>*Remarque :*</u>
Le fait de travailler sur papier quadrillé privilégie la perception des carreaux en rendant plus difficile la perception des longueurs.

Question 8a
Production de Julie et Anaïs

Anaïs a compté les carreaux grisés ; elle utilise une unité d'aire erronée 4 fois plus petite que l'unité donnée par l'énoncé : l'aire d'un carreau du quadrillage.
De plus, elle compte de la même façon (pour une unité) les carreaux entiers (totalement grisé) et les carreaux à moitié grisés.

Julie compte, comme Anaïs, tous les carreaux grisés sans faire de différence entre ceux qui sont entiers et les moitiés de carreaux en les marquant d'un point noir, puis elle les regroupe par 4 (« J'ai compté 4 carreaux à chaque fois ») pour tenir compte de l'unité d'aire imposée (aire d'une surface de 4 carreaux du quadrillage). Elle répond 9, sans se préoccuper du dernier carreau isolé qui doit lui rester une fois comptés les 9 paquets de 4 carreaux. (On peut aussi penser qu'elle a oublié un carreau lors du recomptage par paquets de 4.)

Question 8b
Erreur d'Alexandre

Pour Alexandre, il y a **confusion entre l'unité d'aire et la surface utilisée pour présenter cette unité ;** pour lui, le cm² est indissociable du carré de 1 cm de côté. Il reporte à l'intérieur de la surface grisée autant d'exemplaires entiers de ce carré qu'il peut (ici 4) ; il n'imagine pas d'autres surfaces de forme différente ayant la même aire (rectangle de 1 carreau sur 4 par exemple obtenu en découpant la surface unité donnée en quatre petits carrés, puis en regroupant ceux-ci dans une autre configuration) ou un fractionnement de cette surface unité.

Question 8c
Hypothèses sur l'origine de l'erreur « 8,2 »

On peut faire les hypothèses suivantes pour expliquer le « 8,2 » proposé par certains élèves comme mesure de l'aire de la surface grisée :

- ils ont dénombré 8 unités entières à l'intérieur de la surface grisée et il leur restait alors 2 carreaux du quadrillage (ou l'équivalent de 2 carreaux) grisés qui ne constituaient pas une unité entière ; cela peut expliquer le 2 après la virgule ;

- l'écriture à virgule est mal maîtrisée et la partie décimale est comprise comme un entier indiquant le nombre de morceaux (de fractions) de l'unité sans prise en compte de la nature du fractionnement : ici il y a deux quarts d'unité alors que le 2 dans l'écriture 8,2 signifie deux dixièmes d'unité.

EXERCICE 3

Question 1
Exemples

Certains des entiers proposés se décomposent en somme de trois entiers consécutifs, d'autres non. Nous avons :

$$34 + 35 + 36 = 105$$
$$69 + 70 + 71 = 210$$
$$47 + 48 + 49 = 144$$

Pour trouver ces décompositions on peut procéder de plusieurs façons :

Méthode 1 :
Par essais et ajustements successifs : étant donné la taille des nombres proposés, on aboutit assez rapidement.

Méthode 2 :
Remarquer que la somme des trois entiers consécutifs est égale au triple du nombre médian (on enlève 1 pour obtenir son prédécesseur ; on ajoute 1 pour obtenir son successeur ; lorsqu'on additionne les trois nombres, l'ajout et le retrait de 1 se compensent). On obtient donc ce nombre médian en divisant la somme donné par 3 : 105 : 3 = 35   210 : 3 = 70   144 : 3 = 48

Méthode 3 :
Mettre le problème en équation :

Variante a :
Si on appelle n, n + 1 et n + 2 les trois entiers consécutifs, on obtient :

$n + n + 1 + n + 2 = S$ avec S somme donnée

d'où $3n + 3 = S$ et $n = \dfrac{S-3}{3}$

Variante b : si on appelle n – 1, n et n + 1 les trois entiers consécutifs, on obtient : $n - 1 + n + n + 1 = S$ avec S somme donnée

d'où $3n = S$ et $n = \dfrac{S}{3}$

Pour ceux qui ne se décomposent pas, il s'agit de donner une preuve de cette impossibilité.

Méthode 1 :
On a : $24 + 25 + 26 = 75$ et $25 + 26 + 27 = 78$.
Or $75 < 77 < 78$
Ainsi 77 ne peut être la somme de trois entiers consécutifs.
De même : $107 + 108 + 109 = 324$ et $108 + 109 + 110 = 327$.
Or $324 < 326 < 327$
Ainsi 327 ne peut être la somme de trois entiers consécutifs.

Méthode 2 :
On utilise un des raisonnements proposés ci-dessus qui montrent que la somme S de trois entiers consécutifs est le triple de l'entier médian.
Donc il n'y a pas de décomposition possible lorsque cette somme n'est pas multiple de 3.

Remarque :
Cette méthode anticipe sur le résultat demandé à la question suivante.

Question 2
Entiers somme de trois entiers consécutifs

Nous allons prouver le résultat suivant : « Un entier naturel non nul est somme de trois entiers naturels consécutifs si, et seulement si, il est divisible par 3 ».

Remarque :
L'entier 0 est divisible par 3 mais n'est pas somme de trois entiers naturels consécutifs.

Méthode 1 :
La mise en équation effectuée à la question précédente montre que :
L'entier naturel non nul S est somme de trois entiers consécutifs n, n + 1 et n + 2
si et seulement si
il existe un entier n tel que : $n = \frac{S-3}{3} = \frac{S}{3} - 1$
Cette condition est réalisée si et seulement si S est divisible par 3.

Méthode 2 :
Si *n* est un entier naturel non nul divisible par 3.
Alors il existe un entier naturel *p* non nul tel que $n = 3 \times p$.
Or on remarque que $3 \times p = (p-1) + p + (p+1)$.
De plus, comme *p* est non nul, $(p-1)$ est bien un entier naturel et les trois entiers $(p-1), p$ et $(p+1)$ sont consécutifs.
Ainsi $n = (p-1) + p + (p+1)$.
On conclut, alors, que *n* est bien la somme de trois entiers consécutifs.

Si *n* est un entier somme de trois entiers naturels consécutifs.
Alors il existe un entier naturel *p* tel que $n = p + (p+1) + (p+2)$.
Or $p + (p+1) + (p+2) = 3 \times p + 3 = 3 \times (p+1)$.
Ainsi $n = 3 \times (p+1)$.
On conclut, alors, que *n* est un entier naturel non nul divisible par 3.

Conclusion : Les entiers somme de trois entiers naturels consécutifs sont les entiers naturels non nuls divisibles par 3.

Question 3
Valeur possible de *a*

D'après la question précédente, on sait que « un entier est somme de trois entiers naturels consécutifs si, et seulement si, il est non nul et divisible par 3 ».
D'autre part, on sait que « un entier est divisible par 3 si, et seulement si, la somme des chiffres qui le compose est divisible par 3 ».

Ainsi $\overline{34a7}$ est somme de trois entiers consécutifs si, et seulement si, $\overline{34a7}$ est divisible par 3.
Or $\overline{34a7}$ est divisible par 3 si, et seulement si, $3+4+a+7$ est divisible par 3.
Or $3+4+a+7=14+a$ et $0 \leq a \leq 9$.
Il s'agit donc de trouver les entiers a compris entre 0 et 9 tels que $14+a$ soit divisible par 3.
Un rapide test exhaustif des différentes valeurs possibles de a donne les résultats suivants : « $14+a$ est divisible par 3 si, et seulement si, a vaut 1, 4 ou 7 ».

Conclusion : **$\overline{34a7}$ est somme de trois entiers consécutifs si, et seulement si, il s'écrit 3417, 3447 ou 3477.**

Vérification : $3417=1138+1139+1140$
$3447=1148+1149+1150$
$3477=1158+1159+1160$

Remarque :
Prouvons le résultat suivant : « un entier est divisible par 3 si, et seulement si, la somme des chiffres qui le composent est divisible par 3 ».
En base 10 tout nombre x s'écrit $a_n a_{n-1}...a_1 a_0$ avec $n \geq 0$ et, pour tout $0 \leq i \leq n$, $0 \leq a_i \leq 9$.
On a $x = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + ... + a_1 \times 10 + a_0$.
Or, pour tout $1 \leq k \leq n$, on a : $10^k = 9...9+1$ avec k chiffres 9.
Ainsi $x = a_n \times (9...9+1) + a_{n-1} \times (9..9+1) + ... + a_1 \times (9+1) + a_0$.
D'où $x = (a_n \times 9...9) + (a_{n-1} \times 9..9) + ... + (a_1 \times 9) + (a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0)$.
Donc $x = 9 \times [(a_n \times 1...1) + (a_{n-1} \times 1..1) + ... + a_1] + (a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0)$.

Maintenant, supposons que x soit divisible par 3, alors $x - 9 \times [(a_n \times 1...1) + (a_{n-1} \times 1..1) + ... + a_1]$ est aussi divisible par 3
(en effet $9 \times [(a_n \times 1...1) + (a_{n-1} \times 1..1) + ... + a_1]$ est divisible par 9 donc par 3).
Or $x - 9 \times [(a_n \times 1...1) + (a_{n-1} \times 1..1) + ... + a_1] = (a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0)$.
Donc $(a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0)$ est aussi divisible par 3.
La somme des chiffres qui composent x est divisible par 3.

Réciproquement, supposons que la somme des chiffres qui composent x est divisible par 3.
Or $9 \times [(a_n \times 1...1) + (a_{n-1} \times 1..1) + ... + a_1]$ est divisible par 9 donc par 3.

Sachant que $x = 9 \times [(a_n \times 1...1) + (a_{n-1} \times 1..1) + ... + a_1] + (a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0)$ *on sait donc que* x *est somme de deux termes divisibles par 3, donc* x *est lui-même divisible par 3.*

Question 4a
Produit de trois entiers consécutifs à l'aide des facteurs premiers

On décompose 21 924 en produit de facteurs premiers en essayant les divisions successives par les premiers nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29…
On trouve : $21\,924 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 29$.
Or, on remarque que $2 \times 2 \times 7 = 28$ et $3 \times 3 \times 3 = 27$.
Ainsi on a : $21\,924 = 27 \times 28 \times 29$, ce qui donne la décomposition cherchée de 21 924 sous forme d'un produit de trois entiers consécutifs.

Remarque :
La croissance de la fonction qui associe à l'entier p le nombre p x (p + 1) x (p + 2) garantit l'unicité de la solution au problème lorsqu'elle existe.

Question 4b
Utilisation de la calculatrice

Méthode 1 :
Une utilisation possible de la calculatrice est la suivante :
On cherche un entier p tel que $p \times (p+1) \times (p+2) = 21\,924$.
Or le produit $p \times p \times p$ est « proche » du produit $p \times (p+1) \times (p+2)$.
De plus $p \times p \times p = p^3$.
Intuitivement on va donc chercher à résoudre l'équation $p^3 = 21\,924$ pour trouver un ordre de grandeur de l'entier cherché.
Grâce à la calculatrice on trouve $p \approx 27{,}988$ (en utilisant la racine cubique grâce à la fonction x^y de la calculatrice ; avec $x = 21924$ et $y = \frac{1}{3}$).
Ceci donne une valeur proche de l'entier cherché.
On utilise alors la calculatrice pour faire des essais de produit de trois entiers consécutifs proches du décimal 27,988.
Un des essais sera $27 \times 28 \times 29$ qui donne 21 924 ! Le résultat en découle directement.

Méthode 2 :
On procède par essais et ajustements successifs :
10 x 11 x 12 = 1 320 100 x 101 x 102 = 1 030 200
1 320 < 21 924 < 1 030 200
Les nombres consécutifs recherchés sont donc des nombres à deux chiffres.

50 x 51 x 52 = 132 600	trop grand	30 x 31 x 32 = 29 760	trop grand
20 x 21 x 22 = 9 240	trop petit	26 x 27 x 28 = 19 656	trop petit
27 x 28 x 29 = 21 924	c'est le produit recherché.		

<u>Remarque :</u>
Le fait que le produit se termine par 4 permet d'éliminer tout de suite les essais avec un des trois entiers multiple de 5.

Question 5a
Procédures utilisées par les élèves

On constate trois types de procédures :

- Détermination du terme médian par division par 3 et ajustement pour trouver les deux autres nombres.
  L'élève A utilise correctement cette procédure.
  L'élève C réalise un ajustement incorrect, de la forme $(n-2), n, (n+2)$.
- Essais de calcul de sommes de trois entiers consécutifs.
  L'élève B effectue des essais progressivement organisés en tenant compte de l'ordre de grandeur de la somme obtenue. Le résultat est « trop petit » ou « trop grand » par rapport au nombre visé.
  L'élève D fait des essais apparemment inorganisés, mais des erreurs de calcul parasitent sans doute sa recherche.
- Recherche d'une décomposition additive de 42. Toutes les contraintes ne sont plus satisfaites.
  L'élève E n'utilise pas de nombres consécutifs.
  Pour l'élève F, la représentation de 42 objets l'amène à dessiner un partage en deux parties seulement.

Question 5b
Analyse des erreurs

	Difficultés, erreurs	**Origine probable**
Élève A	Difficulté provisoire à gérer la contrainte de nombres consécutifs.	La division produit des « parts » égales.
Élève B	Difficulté provisoire à ajuster et organiser les essais.	La tâche est complexe : essayer, calculer, comparer, afin de prendre une décision et de recommencer…
Élève C	Les nombres obtenus ne sont pas consécutifs mais de 2 en 2.	Confusion avec une suite « régulière » de 2 en 2 ?
Élève D	Ne prend pas en compte la contrainte de trouver des nombres consécutifs dans la réponse finale. Erreurs de calcul (retenues).	Les difficultés de calcul lui ont fait perdre le respect de la contrainte.
Élève E	N'a pas pris en compte la contrainte de nombres qui se suivent.	Il a retenu les termes les plus familiers de la consigne et il résout un problème plus simple.
Élève F	Respecte une seule contrainte : la somme doit être égale à 42.	Difficulté à gérer plusieurs contraintes simultanées. Peut-être se borne-t-il à reproduire la solution d'un exercice qu'il a déjà fait et sait faire.

Question 6
Procédure valorisée

En proposant le nombre 60 en premier, le maître essaie certainement de mettre en valeur la première des procédures décrites à la question 5a, à savoir : « détermination du terme médian par division par 3 et ajustement pour trouver les deux autres nombres ».
En effet le nombre 60 est suffisamment connu des élèves pour qu'ils n'aient pas de difficulté à écrire $60 = 3 \times 20$.
A partir de cette écriture on peut supposer qu'ils essaieront de manière intuitive des sommes de trois entiers consécutifs proches de 20…en quelques essais, ils devraient aboutir à la solution.
Cette procédure est en trois temps :

- Premier temps : division par 3 (calcul de $\frac{n}{3}$).
- Deuxième temps : essais successifs de somme de trois entiers consécutifs proche de $\frac{n}{3}$.
- Conclusion-vérification dans les termes de l'énoncé.

Les nombres 72 et 96 sont alors proposés pour réinvestir la procédure initiée avec l'exemple précédent.
Evidemment, le deuxième temps devrait vite faire place à la solution directe donnée par le triplet $\frac{n}{3}-1, \frac{n}{3}, \frac{n}{3}+1$ où n est l'entier donné.

Question 7
Le nombre 77

En proposant le nombre 77, le maître désire confronter les élèves à un problème.
Les élèves peuvent croire, à l'issue des premiers essais, que tous les entiers se décomposent en somme de trois entiers consécutifs. De plus, ils possèdent une procédure qui leur donne directement les trois entiers cherchés.
L'entier 77 met en défaut la procédure décrite à la question 6.
En effet $\frac{77}{3}$ n'est pas entier !
Le maître essaie alors de provoquer chez les élèves le questionnement suivant : « se peut-il que le nombre 77 ne possède pas décomposition en somme de trois entiers consécutifs ? ».
Par des débats au sein du groupe le maître peut aller plus loin et demander aux élèves qui pensent que c'est impossible de décomposer 77 en somme de trois entiers consécutifs de justifier (« dis pourquoi c'est impossible »).
Le raisonnement attendu est le suivant :
« Si j'essaie avec 24, 25 et 26, j'obtiens $24 + 25 + 26 = 75$ qui est trop petit et si j'essaie avec juste un de plus, j'obtiens $25 + 26 + 27 = 78$ qui est trop grand ! Je ne peux donc pas obtenir 77 ! »

<u>*Remarque :*</u>
Il n'est pas souhaitable que le maître oriente les élèves sur l'équivalence : « un entier est somme de trois entiers consécutifs si, et seulement si, il est divisible par 3 ».
En effet la démonstration de cette propriété est hors de portée d'un élève de l'école primaire. Alors que la preuve présentée en question 7 est tout à fait compréhensible par les élèves.

Question 8a
Trois autres nombres

On suppose que les élèves ont intégré les procédures décrites en questions 6 et 7. (à savoir, trouver les entiers consécutifs lorsque c'est possible et justifier lorsque c'est impossible).
L'usage de la calculatrice peut leur permettre de travailler avec des nombres beaucoup plus « grands ».
On pourrait proposer le grand nombre 21 924 (qui paraît tout à fait aléatoire, c'est à dire sans particularité).
On pourrait également proposer un grand nombre plus « particulier » du style 1 001 001.
Finalement proposer un grand nombre qui n'admet pas de décomposition en somme de trois entiers consécutifs, par exemple 124 576.

Question 8b
Procédure utilisant une calculatrice

On propose à l'élève un entier n.
Premier temps : à la calculatrice il divise n par 3.

Si $\frac{n}{3}$ est entier :

Deuxième temps : il écrit le triplet $\frac{n}{3}-1, \frac{n}{3}, \frac{n}{3}+1$.
Troisième temps : il vérifie à la calculatrice que la somme des trois entiers consécutifs redonne bien l'entier de départ *n.*
Quatrième temps : il écrit une phrase de conclusion faisant apparaître la somme cherchée.

Si $\frac{n}{3}$ n'est pas entier :

Deuxième temps : il écrit les triplets d'entiers consécutifs les plus proches de $\frac{n}{3}$. (Ces deux triplets ont pour entier médian, l'un, la partie entière de $\frac{n}{3}$ notée $E\left(\frac{n}{3}\right)$; et l'autre la partie entière de $\frac{n}{3}$ augmentée de 1 : $E\left(\frac{n}{3}\right)+1$)
Troisième temps : grâce à sa calculatrice il calcule les sommes des triplets d'entiers consécutifs.

Quatrième temps : il conclut en remarquant que les sommes encadrent strictement l'entier n. Ainsi, l'entier n ne se décompose pas sous forme d'une somme de trois entiers consécutifs.

<u>Autre procédure :</u>
Essais successifs de triplets de trois entiers naturels consécutifs en situant la somme des trois entiers par rapport au nombre n donné :

- si la somme est inférieure à n, on essaie un triplets constitué d'entiers plus grands ;
- si la somme est supérieure à n, on essaie un triplets constitué d'entiers plus petits.

Les sommes obtenues lors des essais successifs vont alterner autour de n en s'en rapprochant.
À la fin :

- soit on aboutit à un triplet (p, p + 1, p + 2) tel que : $p + (p + 1) + (p + 2) = n$

qui est solution du problème pour la somme n.

- soit on aboutit à deux essais successifs tels que :

$$p + (p + 1) + (p + 2) < n < (p + 1) + (p + 2) + (p + 3)$$

ce qui prouve que le problème n'a pas de solution avec la somme n.

EXERCICE 4

Question 1a

<u>Méthode 1 :</u>
Je compte de 23 en 23 à partir de 17 584 :
17 584 ; 17 607 ; 17 630 ; 17 653 ; 17 676 ; 17 699
17 699 est plus grand que 17 692 ; je peux donc conclure que :
En partant de 17 584 et en comptant de 23 en 23, on ne peut pas atteindre le nombre 17 692.

<u>Variante de la méthode 1 :</u>
Compter à rebours de 23 à 23 à partir de 17 692, car les deux propositions *« il est possible d'atteindre le nombre b en comptant de 23 en 23 à partir de a »* et *« il est possible d'atteindre le nombre a en comptant à rebours de 23 en 23 à partir de b »* sont équivalentes.

<u>Méthode 2 :</u>
Je calcule la différence 17 692 - 17 584 = 108
108 n'est pas un multiple de 23, car : 4 x 23 < 108 < 5 x 23
(Variante : j'effectue la division euclidienne de 108 par 23 : 108 = 4 x 23 + 16)
donc, **en partant de 17 584 et en comptant de 23 en 23, on ne peut pas atteindre le nombre 17 692.**

Question 1b

<u>Méthode 1 :</u>
Lorsque l'écart entre les deux nombres devient important, il n'est plus possible de répondre en réalisant effectivement le comptage de 23 en 23 ; cependant, on peut envisager une variante de cette méthode qui consiste à compter de 23 en 23 par paquet de 23 :
2 197 + 23 000 = 25 197
25 197 + 2 300 = 27 497 27 497 + 2 300 = 29 797
29 797 + 230 = 30 027 30 027 + 230 = 30 257 30 257 + 230 = 30 487
… en comptant de 230 en 230, on atteint successivement :
30 487 ; 30 717 ; 30 947 ; 31 177 ; 31 407
puis, on termine en comptant de 23 en 23 :
31 407 ; 31 430 ; 31 453 ; 31 476 ; 31 499 ; 31 522 ; 31 545 ; 31 568 ; 31 591 ; 31 614
Comme 31 614 > 31 600, on peut conclure :
En partant de 2 197 et en comptant de 23 en 23, on ne peut pas atteindre le nombre 31 600.

<u>Remarque :</u>
On peut aussi utiliser cette méthode en comptant à rebours à partir de 31 600.

<u>Méthode 2 :</u>
31 600 - 2 197 = 29 403

La division euclidienne de 29 403 par 23 donne :
29 403 = 1 278 x 23 + 9
La différence entre le nombre à atteindre et le nombre de départ n'est donc pas un multiple de 23 ; on peut donc conclure :
En partant de 2 197 et en comptant de 23 en 23, on ne peut pas atteindre le nombre 31 600.

Question 1c

<u>Méthode 1 :</u>
5 727 = 2 300 + 2 300 + 230 + 230 + 230 + 230 + 23 + 23 + 23 + 23 + 23 + 23 + 23 + 23 + 23
Donc 5 727 est un multiple de 23.
En partant de 0 et en comptant de 23 en 23, on peut atteindre le nombre 5 727.

<u>Méthode 2 :</u>
On effectue la division euclidienne de 5 727 par 23 :
5 727 = 249 x 23
Donc 5 727 est un multiple de 23.
En partant de 0 et en comptant de 23 en 23, on peut atteindre le nombre 5 727.

<u>Remarque :</u>
Il est possible de « voir immédiatement » que 5 727 est un multiple de 23 grâce à un calcul réfléchi :
Le quart de 23 est égal à 5,75 ; donc 5 750 = 250 x 23 ; or 5 750 = 5 727 + 23

Question 2
Généralisation

C'est la méthode 2 ci-dessus qui se prête le mieux à une généralisation.
Si a et b sont deux entiers naturels avec $a < b$, pour prévoir s'il est possible d'atteindre b à partir de a en comptant de 23 en 23, je procède ainsi :

- Calcul de la différence $b – a$
- Division euclidienne de $b – a$ par 23

Si le reste vaut 0, on pourra atteindre b à partir de a en comptant de 23 en 23.
Si le reste est différent de 0, il sera impossible d'atteindre b à partir de a en comptant de 23 en 23.

Question 3

Le plus petit entier naturel à partir duquel, en comptant de 23 en 23, on peut atteindre 31 600 est le reste de la division euclidienne de 31 600 par 23 :
31 600 = 23 x 1373 + 21
Donc : **21 est le plus petit entier naturel à partir duquel, en comptant de 23 en 23, on peut atteindre 31 600.**

QUESTIONS COMPLÉMENTAIRES

Question 4
Différences des procédures utilisées en fonction de l'exercice traité

On a vu, en résolvant l'exercice (question 1) que certaines procédures étaient efficaces lorsque l'écart entre les deux nombres est « petit », mais qu 'elles devenaient très coûteuses et devaient donc être modifiées lorsque cet écart devenait plus « grand ».
On peut donc prévoir des différences significatives dans les procédures utilisées par les élèves en fonction de l'exercice traité. Plus précisément :

<u>Pour l'exercice a :</u>
L'écart entre les deux nombres étant « petit » (108), la procédure la plus simple et la plus économique pour les élèves consiste à compter de 23 en 23 à partir de 17 584.
(la variante du comptage à rebours est aussi envisageable, mais peu probable car d'une part, les élèves sont en général moins à l'aise dans le comptage à rebours, d'autre part, la formulation de l'énoncé induit davantage un comptage qu'un décomptage).

<u>Pour l'exercice b :</u>
L'écart entre les deux nombres étant « grand », la procédure précédente ne permet pas d'aboutir rapidement. Le recours à la division étant ici improbable avec des élèves de CM2 (situation division non standard), une procédure facilement utilisable par eux consiste à ajouter des multiples de 23 (notamment 23 000, 2 300, 230) comme dans la méthode 1 de la question 1b.

<u>Pour l'exercice c :</u>
La procédure précédente est susceptible d'être utilisée ici aussi efficacement ; mais on peut aussi penser que les élèves reconnaissent une situation standard de division : recherche du nombre de paquets de 23 contenu dans 5 727.
La procédure consiste alors à diviser 5 727 par 23 en recherchant si le reste est nul.

<u>Remarque :</u>
Un certain nombre de manuels utilisent d'ailleurs des habillages de ce problème -par exemple « le petit poucet qui parcourt une distance en faisant des bonds d'une longueur donnée »- pour introduire la division.

Question 5a
Éléments mathématiques communs entre cet exercice et ceux de la question précédente

Dans cet exercice, comme dans ceux de la question précédente, on s'intéresse au **comptage de *n* en *n* à partir d'un entier naturel donné.**
Ici, on demande aux élèves de choisir parmi plusieurs possibilités le nombre qui va être atteint, alors que dans les exercices de la question précédente, on donnait le nombre à atteindre et on cherchait à prévoir s'il serait ou non atteint.
Dans les deux cas, les exercices sont en lien avec les notions de multiples et de diviseurs d'un entier naturel. Pour résoudre tous ces problèmes sans s'appuyer sur

des caractéristiques spécifiques des données numériques, on est conduit à effectuer une division euclidienne.

Question 5b
Variable essentielle permettant de donner cet exercice à des élèves dès le CE2

La variable qui permet de donner cet exercice à des élèves dès le CE2 est ici le pas du comptage : dans les exercices proposés au CE2, il est de 100, 10 ou 5, alors qu'il est de 23 dans les exercices proposés au CM2.
Le choix effectué facilite la tâche des élèves, car :

- Le comptage de 100 en 100, de 10 en 10 ou de 5 en 5 est plus aisé que celui de 23 en 23 en raison des caractéristiques de notre système de numération dont la base est dix. Ainsi, par exemple, compter de 100 revient à incrémenter de 1 le chiffre des centaines.
- La table des multiples de 100, 10 ou 5 est accessible sans calculs importants.

Question 5c
Procédure autre que celle qui correspond à la consigne permettant à des élèves de CE2 de déterminer dans chaque cas, de façon rapide, l'étiquette « arrivée »

<u>Problème de Maud :</u>
Chercher les nombres se terminant par 25 et choisir le plus petit supérieur à 17 425, soit 18 325.
(Lorsqu'on ajoute 100 à un nombre, les chiffres des unités et des dizaines ne sont pas modifiés.)

<u>Problème de Cyril :</u>
Chercher les nombres se terminant par 4 et choisir le plus petit supérieur à 18 124, soit 18 214.
(Lorsqu'on ajoute 10 à un nombre, le chiffre des unités n'est pas modifié.)

<u>Problème de Magali :</u>
Chercher les nombres se terminant par 2 et 7 et choisir le plus petit supérieur à 18 542, soit 18 587.
(Lorsque je compte de 5 en 5 à partir d'un entier dont le chiffre des unités est 2, les chiffres des unités seront alternativement 7 et 2, car 2 + 5 = 7 et 7 + 5 = 2 + 10 = 12.)

EXERCICE 5

Question 1a

Pour obtenir l'agrandissement B à partir de la photo A, les dimensions sont passées :

- de 20 cm à 30 cm pour la largeur,
- de 30 cm à 45 cm pour la longueur.

Méthode 1 :

$30 = 20 + 10 = 20 + \frac{1}{2}20$ $\qquad$ $45 = 30 + 15 = 30 + \frac{1}{2}30$

Les dimensions de B sont donc une fois et demie les dimensions de A.
Pour obtenir l'agrandissement B à partir de la photo A, on a donc multiplié les dimensions par $1 + \frac{1}{2}$, soit $\frac{3}{2}$.

Méthode 2 :

$\frac{30}{20} = \frac{45}{30} = 1,5$

Le rapport de l'agrandissement pour passer de la photo A à la photo B est donc 1,5.

Pour obtenir l'agrandissement C à partir de la photo A, les dimensions sont passées :

- de 20 cm à 50 cm pour la largeur,
- de 30 cm à 75 cm pour la longueur.

Méthode 1 :

$50 = 20 + 20 + 10 = 2 \times 20 + \frac{1}{2}20$ $\qquad$ $75 = 30 + 30 + 15 = 2 \times 30 + \frac{1}{2}30$

Les dimensions de C sont donc deux fois et demie les dimensions de A.
Pour obtenir l'agrandissement C à partir de la photo A, on a donc multiplié les dimensions par $2 + \frac{1}{2}$, soit $\frac{5}{2}$.

Méthode 2 :

$\frac{50}{20} = \frac{75}{30} = 2,5$

Le rapport de l'agrandissement pour passer de la photo A à la photo C est donc 2,5.

Question 1b
Longueur d'une photo, qui agrandie aurait une largeur de 60 cm

$60 = 3 \times 20$
On a donc multiplié les dimensions par 3 par rapport à la photo A.
La longueur de la photo sera donc : 3 x 30 cm = **90 cm.**

<u>Variante :</u>
La largeur 60 cm est le double de celle de la photo B ; la longueur sera donc le double de celle de la photo B, soit 2 x 45 cm = 90 cm.

<u>Autre méthode :</u>
Le respect des proportions d'une photo à l'autre signifie que le coefficient de proportionnalité entre la largeur et la longueur est chaque fois le même. On passe de la largeur à la longueur en multipliant par 1,5 car $\frac{30}{20} = 1{,}5$.

La longueur de la photo sera donc : 1,5 x 60 cm = **90 cm.**

Question 2
Largeur d'une photo agrandie qui aurait 147 cm de long

<u>Méthode 1 :</u>
Le respect des proportions d'une photo à l'autre signifie que le coefficient de proportionnalité entre la largeur et la longueur est chaque fois le même. On passe de la largeur à la longueur en multipliant par 1,5.

La largeur de la photo sera donc : $\frac{147 \text{ cm}}{1{,}5}$ = **98 cm.**

<u>Méthode 2 :</u>
Par rapport à la photo A, la longueur a été multipliée par : $\frac{147}{30} = 4{,}9$.

On obtient la largeur de la nouvelle photo en multipliant la largeur de la photo A par 4,9 ; soit : 20 cm x 4,9 = 98 cm
La largeur de la photo sera donc : 98 cm.

<u>Méthode 3 :</u>
147 cm = 30 cm + 30 cm + 30 cm + 30 cm + 30 cm - 3 cm

donc 147 cm = 5 x 30 cm – $\frac{1}{10}$30 cm

La largeur de la photo sera donc :

5 x 20 cm – $\frac{1}{10}$20 cm soit **98 cm.**

Question 3
Dimensions maximales de l'agrandissement, si l'on s'impose que le périmètre de l'agrandissement de la photo A ne dépasse pas 3,20 mètres

Il y a proportionnalité entre les dimensions de deux photos, donc aussi entre les sommes de dimensions homologues et particulièrement le périmètre.
En prenant comme référence la photo A dont le périmètre est 2 x (20 cm + 30 cm), soit 1 m, on trouve que les dimensions de la photo doivent être multipliées au maximum par 3,2.

hauteur	Largeur	Périmètre
20	30	100
		320

x 3,2

On trouve donc comme dimensions maximales pour la photo :
64 cm pour la hauteur ;
96 cm pour la largeur.

<u>Autre méthode :</u>
Le périmètre de la photo A est égal à 5 fois la largeur.
Le respect des proportions dans l'agrandissement implique que le périmètre de la nouvelle photo sera aussi égal à 5 fois la largeur de celle-ci.
La largeur maximale sera donc :

$$\frac{3{,}2\text{ m}}{5} = 0{,}64\text{ m} = 64\text{ cm}$$

On calcule ensuite la longueur en utilisant, par exemple, le fait que la longueur des photos est 1,5 fois la largeur.

Question 4
Dimensions maximales de cet agrandissement si l'on s'impose que l'aire de l'agrandissement de la photo A ne dépasse pas 2,16 m^2

Dans un agrandissement, lorsque les dimensions sont multipliées par un facteur k, les aires sont multipliées par le facteur k².
L'aire de la photo A est : 0, 2 x 0,3 = 0,06 m²
Si l'aire de la nouvelle photo est 2,16 m^2, le facteur d'agrandissement des aires est :

$$\frac{2{,}16}{0{,}06} = 36$$

Or 36 = 6² ; on en déduit le coefficient d'agrandissement de la largeur et de la longueur : 6.
Les dimensions maximales de l'agrandissement sont donc :
120 cm pour la largeur
180 cm pour la longueur.

QUESTIONS COMPLÉMENTAIRES

Question 5
Interprétation de la question a) par les élèves

<u>Remarque préalable :</u>
Dans le manuel, les dimensions d'agrandissement des 3 rectangles représentant les photos ne correspondent pas aux rapports donnés par les valeurs numériques.

<u>Élise :</u>
Elle intervertit les mots hauteur et largeur. Les dimensions de la photo A sont bien, pour elle, la hauteur et la largeur de A. Elle cherche l'augmentation additive de cette

hauteur de A à B (10 cm) et de B à C (20 cm). Elle ne compare pas directement les dimensions de C et A comme il est demandé.
Mais sa réponse met surtout en évidence un lien entre les écarts successifs des hauteurs (« ça aurait toujours doublé ») en remarquant que les largeurs suivent la même règle (avec 15 cm comme point de départ). Ceci correspond à une propriété mathématique de linéarité appliquée aux écarts.
Son interprétation de la question semble être : « il y a augmentation des dimensions de A, B et C dans cet ordre. Quelle règle d'enchaînement suivent les dimensions des trois figures dans cet ordre ? »

<u>Antoine :</u>
Il compare bien B à A et C à A et y ajoute même la comparaison de B à C. Lui aussi pense augmentation additive. Mais il totalise les augmentations sur la hauteur et sur la largeur : on peut penser que, comme les deux dimensions n'augmentent pas de la même quantité, il éprouve le besoin de répondre par un seul résultat, la somme des deux augmentations. C'est sa façon de répondre à « dans quelles proportions... ? ».
On peut considérer que la question à laquelle répond Antoine est : « en tout, de combien ont augmenté les dimensions de B par rapport à celles de A ? », ce qui correspond, de fait, à une recherche de l'augmentation des demi-périmètres.

<u>Jérémy :</u>
Il compare A et B puis B et C. Il cherche de combien l'aire de B a augmenté par rapport à celle de A. Pour lui, le mot "dimensions" semble évoquer les surfaces.
La question à laquelle il répond est : « De quelle aire a augmenté la photo B par rapport à la photo A et de quelle aire a augmenté la photo C par rapport à la photo B ? »

En définitive, c'est la recherche de liens additifs qui prédomine dans les réponses des élèves.
Même si Élise fait référence à un lien multiplicatif sur les écarts, aucun des 3 élèves n'interprète la notion de « proportions » à partir de rapports entre les dimensions des photos.
Ceci peut se comprendre : les rapports n'étant pas entiers (1,5 de A à B et 2,5 de A à C), l'augmentation est d'abord perçue comme additive. Pour prendre une comparaison, quand un prix passe de 12 € à 18 €, on considère plus aisément une augmentation de 6 € qu'une augmentation de 50 % ou une multiplication par un facteur 1,5. Par contre, lorsqu'un prix passe de 12 € à 24 €, on perçoit aussi naturellement le doublement que l'augmentation de 12 €.

Question 6
Caractérisation des procédures utilisées par les élèves

Soit D l'agrandissement de hauteur 60 cm. Ici, le rapport d'agrandissement de B à D étant entier (2), les élèves n'ont pas de difficulté à percevoir ce lien multiplicatif.

<u>Élise et Antoine :</u>
Ils doublent spontanément les dimensions de la photo B pour obtenir celles de D, car ils ont remarqué que pour passer de 30 cm à 60 cm il fallait multiplier par 2. Ils en

déduisent que pour trouver la largeur de D il faut multiplier aussi par 2 la largeur de B.
Mathématiquement, cette procédure peut être interprétée aussi bien comme l'utilisation d'un coefficient de proportionnalité (proportionnalité entre les dimensions de B et les dimensions de D) que celle de la linéarité (proportionnalité entre hauteur et largeur quelles que soient les photos ; la linéarité s'exprime alors par « si la hauteur est multipliée par un nombre k, la largeur est aussi multipliée par k », avec ici k = 2).
Même si l'expérience montre que, d'une façon générale, les élèves sont plus à l'aise dans l'utilisation de la linéarité que dans le recours au coefficient de proportionnalité, les productions d'Élise et d'Antoine ne permettent pas de trancher de façon définitive sur leur raisonnement implicite.

Remarque :
Quand Antoine écrit 30 x 45 x 2 = 6 x 90 il s'agit d'une écriture maladroite correspondant à une pensée juste ; « en doublant les dimensions du format 30 x 45, j'obtiens le format 60 x 90 ».

Jérémy :
Il comprend correctement le problème posé et utilise implicitement le modèle de la proportionnalité entre largeur et hauteur avec la propriété de conservation de l'égalité des écarts
Ceci pourrait se formaliser :

$d - c = b - a$ si et seulement si $f(d) - f(c) = f(b) - f(a)$

Avec ici :

d hauteur de D, c hauteur de C, b hauteur de B et a hauteur de A
et f(a), f(b), f(c) et f(d) les largeurs correspondantes.

Le raisonnement de Jérémy peut alors se traduire :

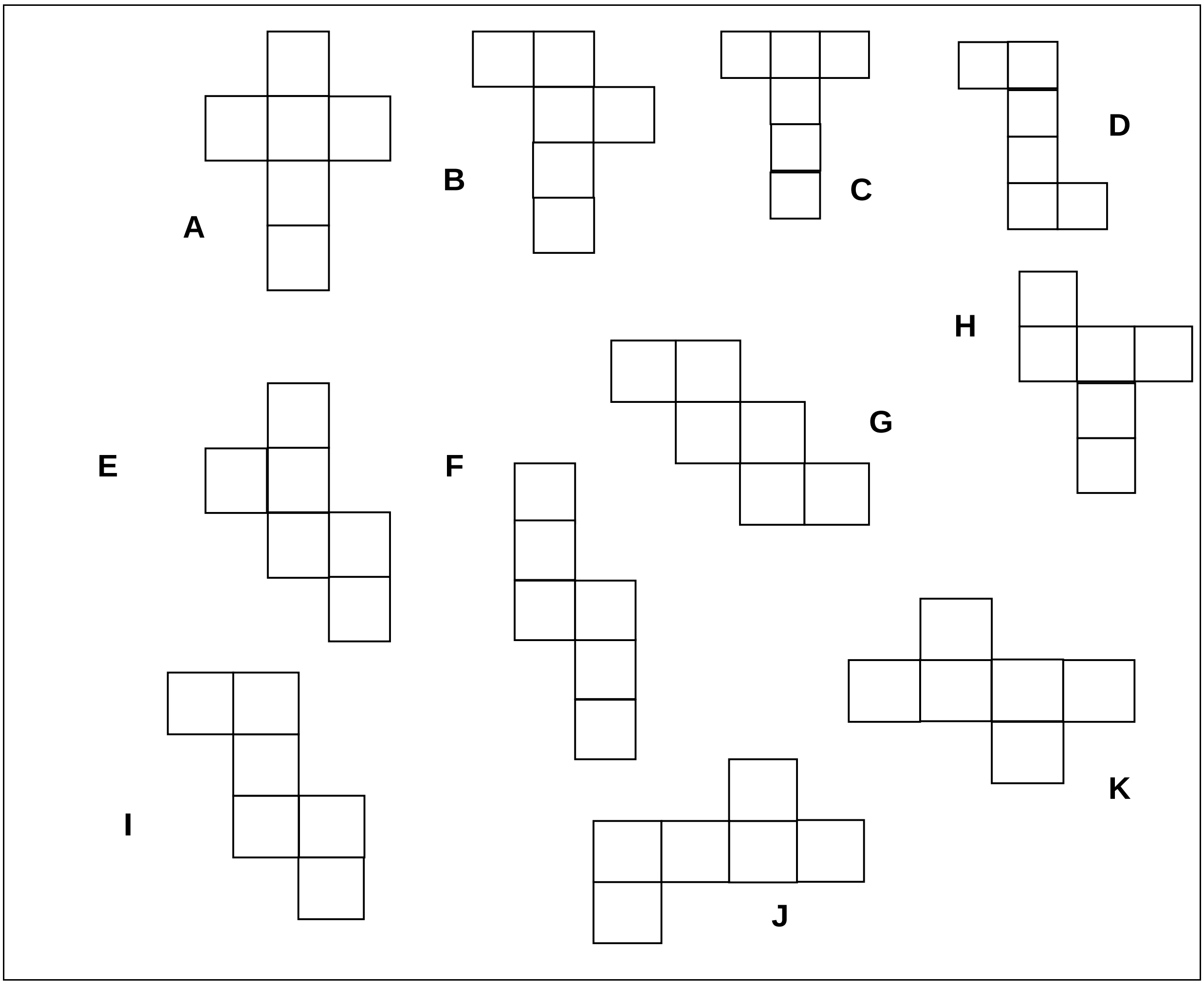
$60 - 50 = 30 - 20$, donc $f(60) - 75 = 45 - 30$, et donc $f(60) = 75 + 15$.

Remarque :
Il est à noter que cette propriété concernant les écarts est vraie pour toutes les fonctions affines.
Elle est donc vraie pour les fonctions linéaires, mais ne suffit pas pour les caractériser.
Plus précisément, si f est une fonction affine avec $f(x) = a x + b$, la fonction qui a un écart $x' - x$ associe l'écart $f(x') - f(x)$ est la fonction linéaire de coefficient a.

EXERCICE 6

Question 1

Voici les onze patrons du cube



Dans les annexes 2 et 3, déjà 6 patrons sont proposés. Ils correspondent aux patrons A, C, D, E, F et G ci-dessus. Donc **les trois patrons qui devaient être dessinés dans cette question doivent être pris parmi les suivants : B, H, I, J, K.**

Question 2

ABCD est une face du cube, donc c'est un carré.

a) Ainsi le triangle ABC est un triangle ayant deux côtés de même longueur (AB et BC) et possédant un angle droit.
On en déduit que **ABC est un triangle isocèle rectangle en B.**

b) Dans ce triangle rectangle, on peut appliquer le théorème de Pythagore :

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$a^2 + a^2 = AC^2$

donc **AC = a$\sqrt{2}$**.

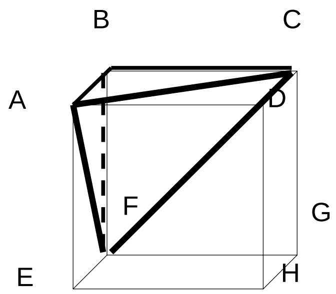
Remarque :

On peut aussi dire que [AC] est la diagonale d'un carré dont la mesure de la longueur du côté est a, donc AC est égal a$\sqrt{2}$.

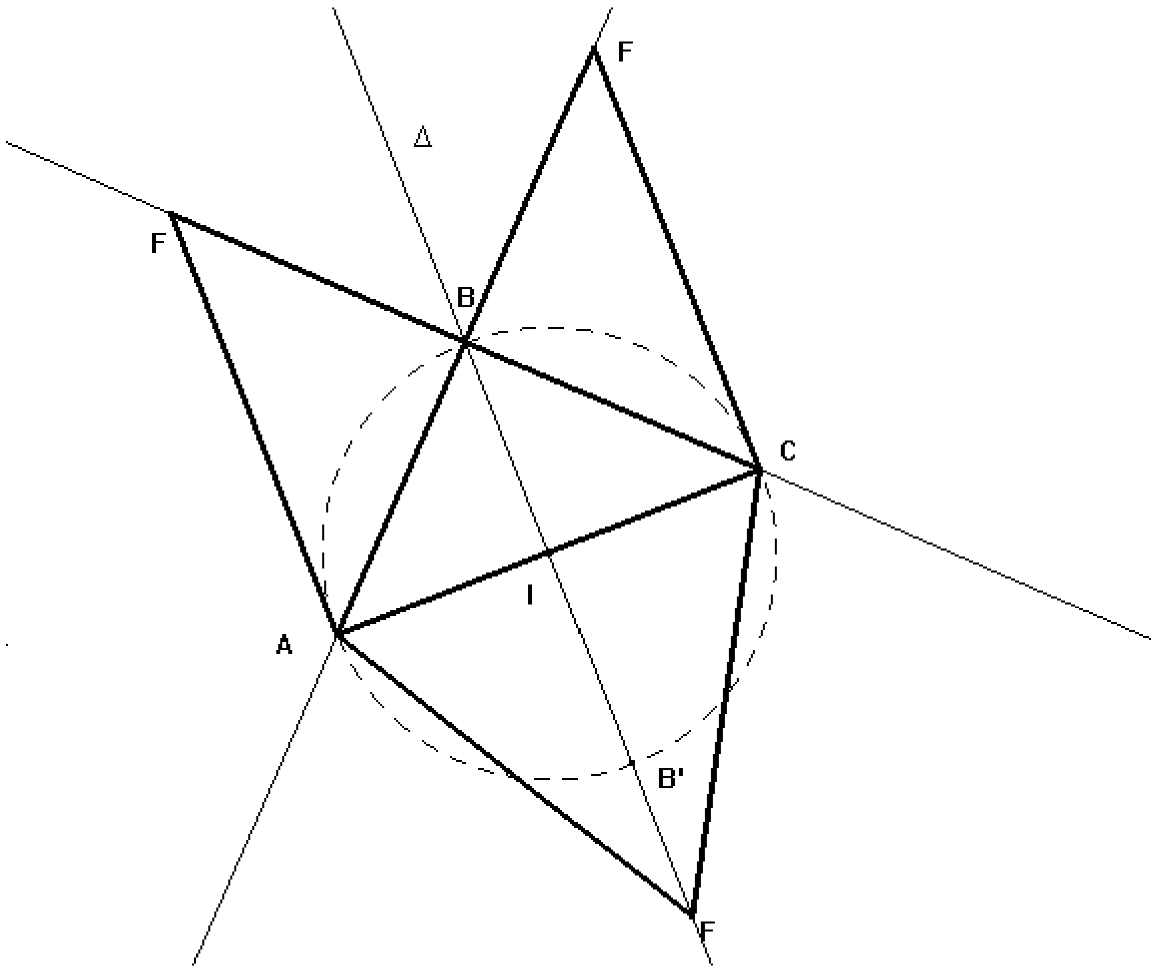
c) La construction du triangle s'obtient en effectuant les tracés suivants :

- construire la médiatrice du segment [AC] (on l'appelle Δ) ;
- Δ coupe le segment [AC] en son milieu I ;
- construire le cercle de centre I et de rayon IA ;
- ce cercle coupe la droite Δ en deux points qui sont les solutions possibles pour mettre le point B (B ou B').

Question 3a
Construction d'un patron de la pyramide FABC



La pyramide FABC est constituée de trois triangles isométriques isocèles rectangles en B (ABC, FBC et FBA) et d'un triangle équilatéral FAC dont les côtés ont pour mesure de longueur a$\sqrt{2}$.
Plusieurs patrons sont possibles, nous en proposons un.



Question 3b
Calcul du volume de la pyramide en fonction de a

En utilisant la formule proposée :

volume = $\dfrac{\text{aire de la base x hauteur relative à cette base}}{3}$

où l'aire du triangle ABC (considéré comme base de la pyramide) est la moitié de l'aire du carré ABCD : $\frac{1}{2}a^2$.

La hauteur relative à cette base est la longueur BF, puisque la droite (BF) est perpendiculaire au plan défini par les points A, B et C.
On en déduit le volume de la pyramide FABC :

volume = $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}a^2 \times a = \mathbf{\frac{1}{6}\,a^3}$**.**

Question 4a
Volume de la pyramide FABC

Ainsi pour a = 6 cm on calcule la mesure du volume de la pyramide FABC :

$\frac{1}{6}\ 6^3 = 6^2 = \mathbf{36}$ (en cm^3)

Volume (pyramide FABC) = 36 cm^3.

Question 4b
Volume de l'objet dont la pyramide FABC est la maquette

Si cette pyramide est la maquette à l'échelle 1/200 d'un objet industriel, le coefficient d'agrandissement des longueurs qui permet de passer de la maquette à l'objet réel est de 200 (k = 200).
On en déduit que le coefficient d'agrandissement des aires est de k^2 et le coefficient d'agrandissement des volumes est de k^3.
Ainsi la mesure du volume en cm^3 de l'objet réel est de :

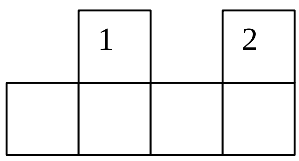
$36 \times 200^3 = 36 \times 8 \times 10^6 = 288 \times 10^6$.

Ce qui correspond à un volume de 288 m^3.

Question 5
Les assemblages b, c et d ne sont pas des patrons du cube.

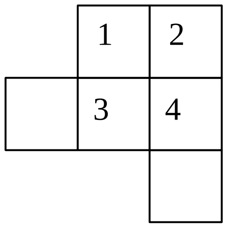
L'assemblage **c** n'est pas un patron du cube parce qu'il comporte 7 carrés, alors qu'un cube n'a que 6 faces carrées.

Pour l'assemblages **b**, les faces 1 et 2 vont se chevaucher lorsqu'on va reconstituer le solide.



Assemblage b

Pour l'assemblage **d**, les faces 1, 2, 3, 4 ont un sommet commun, ce qui est impossible, puisque la somme des angles issus de ce sommet est égale à 4x90° = 360° : les quatre faces sont alors dans un même plan.



Assemblage d

b et **d** ne sont donc pas non plus des patrons du cube (voir figure ci-dessus).

QUESTIONS COMPLÉMENTAIRES

Question 6
Comparaison des exercices 2 et 4

<u>Concernant la présentation :</u>
Dans les deux exercices, on trouve une consigne écrite suivie du dessin de différents assemblages de carrés. Cependant :

- dans l'exercice 4, on a en plus la présence d'un cube représenté en perspective ;
- l'exercice 4 comporte 5 assemblages alors qu'il y en a 7 dans l'exercice 2 ;
- dans l'exercice 2, les « traits de pliage » sont représentés par des pointillés alors que ce sont des traits pleins dans exercice 4 ;
- les figures sont plus grandes dans l'exercice 4 que dans l'exercice 2 ;
- dans l'exercice 4, un des assemblages est formé de 7 carrés alors que tous ceux de l'exercice 2 n'en possèdent que 6.

<u>Concernant la consigne :</u>

- Le statut des objets : dans l'exercice 4, on parle d'« assemblages de carrés », alors que dans l'exercice 2 on parle de « figures ».
- La formulation : dans l'exercice 4, la question est fermée : il s'agit de trouver *les deux seuls* patrons de cube. Dans l'exercice 2, le nombre de solutions n'est pas indiqué.
- La réponse attendue : dans l'exercice 4, les élèves doivent reproduire deux assemblages, alors que dans l'exercice 2, ils doivent uniquement écrire les lettres désignant les patrons choisis.

<u>Remarque :</u>
Connaître le nombre exact de solutions peut limiter la recherche (« j'en ai déjà deux, donc je ne regarde pas les autres »). Dans le cas contraire chaque figure proposée doit faire l'objet d'une analyse de la part de l'élève.

<u>Concernant la vérification :</u>
Dans l'exercice 4 aucune vérification n'est évoquée.

A contrario, dans l'exercice 2, l'élève doit vérifier ses propositions par reconstruction du cube à partir des patrons. La reproduction de ces patrons est facilitée par l'utilisation du papier quadrillé.

<u>Remarque :</u>
Dans l'énoncé de l'exercice 4, il semble que la vérification ne soit pas du ressort de l'élève, mais elle apparaît effectivement dans le déroulement proposé dans le livre du maître : l'analyse de l'énoncé d'un exercice dans le manuel de l'élève ne peut en aucun cas refléter la mise en œuvre de sa résolution en classe.

Question 7
Progression pour l'utilisation des exercices 1 à 4

Suite à la première phase de la séance de classe proposée par le maître, la progression des exercices pourrait être la suivante :

Exercice 2
Exercice 4
Exercice 1
Exercice 3

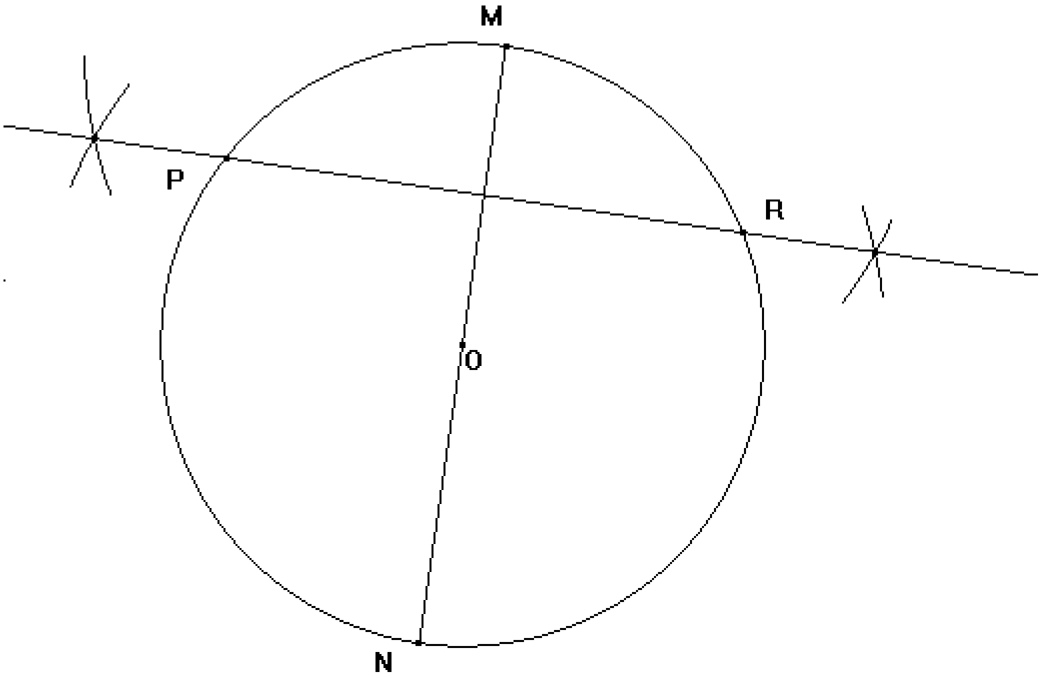
Voici quelques justifications :

<u>Place de l'exercice 4 à la suite de l'exercice 2 :</u>
Dans l'exercice 2, il est demandé à l'élève d'anticiper le résultat d'une construction à partir du « développement à plat » du solide en repérant les éventuelles superpositions de faces.
De la même façon, dans l'exercice 4, il s'agit de trouver les assemblages de carrés qui sont des patrons du cube, mais à partir d'une représentation en perspective cavalière du cube, ce qui permet aux élèves de travailler à partir de deux représentations planes du solide.
Dans l'exercice 1, il s'agit de situer des faces voisines du cube *les unes par rapport aux autres* sur le patron et dans une représentation du cube en perspective.
Cependant, la résolution de l'exercice 1 nécessite le passage d'une représentation du cube en dimension 2 (le patron) à un autre de type de représentation du cube en dimension 2 (la perspective), ce qui est difficile sans l'intermédiaire de l'objet lui-même mais qui peut être préparé grâce à l'exercice 4.
Cet exercice peut donc être considéré comme un prolongement des exercices 2 et 4, à condition que les élèves aient au préalable travaillé la lecture de représentations en perspective.

<u>Place de l'exercice 3 à la suite de l'exercice1 :</u>
À l'issue des exercices 2 et 4 l'élève est familiarisé avec le patron du cube dessiné dans la consigne de l'exercice 3, patron qu'il peut manipuler pour reconstruire le dé.
Dans l'exercice 3, il s'agit de repérer les faces opposées. Le repérage de la position des faces les unes par rapport aux autres a déjà été mis en évidence grâce à l'exercice 1. La vérification se fait par construction.
Ainsi, proposer l'exercice 3 à la suite de l'exercice des autres exercices, permet une continuité de l'apprentissage : reconnaître des patrons du cube, puis travailler plus précisément sur les positions relatives des différentes faces d'un de ces patrons.

EXERCICE 7

Question 1
Construction de la figure



Question 2
Les points P et R symétriques par rapport à la droite (MN)

Méthode 1 : on montre que (MN) est la médiatrice de [PR].
Les points P et R appartiennent au cercle de centre O donc OP = OR, donc le point O appartient à la médiatrice du segment [PR].
Les points P et R appartiennent à la médiatrice du segment [OM] donc OP = MP et OR = MR. Or OP = OR, donc MP = MR. On en déduit que le point M est sur la médiatrice du segment [PR].
Les points O et M sont sur la médiatrice de [PR], donc la droite (MO) est la médiatrice de [PR]. Or [MN] est un diamètre de $\mathbb{C}$,
donc les droites (MO) et (MN) sont confondues.
On en déduit que la droite (MN) est la médiatrice du segment [PR], ce qui permet de dire que **P et R sont symétriques par rapport à la droite (MN)**.

Méthode 2 : on montre que MPOR est un losange.
Les points P et R appartiennent au cercle de centre O donc OP = OR.
Les points P et R appartiennent à la médiatrice du segment [OM] donc OP = MP et OR = MR.
On en déduit que : MP = OP = OR = MR.
Ainsi le quadrilatère MPOR a ses quatre côtés isométriques donc c'est un losange.

Les diagonales d'un losange sont des axes de symétrie de ce losange donc le point P est le symétrique du point R par rapport à la droite (OM).
Comme le segment [MN] est un diamètre du cercle $\mathbb{C}$ alors la droite (OM) est confondue avec la droite (MN).
Les points P et R sont donc symétriques par rapport à la droite (MN).

Question 3
Nature du quadrilatère MPOR

Le quadrilatère MPOR est un losange.
(Si on ne l'a pas déjà démontré précédemment on le justifie :)
D'après la question précédente, on sait que P et R sont symétriques par rapport à (MO), donc (MO) est la médiatrice du segment [PR].
Mais, par hypothèse, on sait aussi que (PR) est la médiatrice du segment [MO].
Donc les diagonales du quadrilatère MPOR sont médiatrices l'une de l'autre, ce qui permet d'affirmer que **MPOR est un losange**.

Question 4
Nature du triangle MPN

Le triangle MNP est inscrit dans le cercle de diamètre [MN]
donc MNP est un triangle rectangle en P.

Question 5
Aire du quadrilatère MPNR

La droite (MN) est un axe de symétrie du quadrilatère MPNR (d'après question 2).
L'aire du quadrilatère MPNR est donc le double de celle du triangle MPN.

On appelle A le point d'intersection des droites (MN) et (PR).
On sait que (MO) et (PR) sont perpendiculaires, donc A est le pied de la hauteur issue de P dans le triangle MNP.
L'aire du triangle NPM est donc égale à : $\dfrac{NM \times AP}{2}$
et l'aire du quadrilatère NPMR est égale à : $\dfrac{NM \times AP}{2}$ x 2 = NM x AP

Calcul de AP

<u>Méthode 1 :</u> utilisation du théorème Pythagore.
Dans le triangle OAP rectangle en A on a, d'après le théorème de Pythagore :
$$OP^2 = OA^2 + AP^2$$
Mais [OP] est un rayon du cercle, et comme A est le point d'intersection des diagonales du losange MPOR, c'est le milieu de [OM] qui est aussi un rayon.
Donc OP = 4 cm et OA = 2 cm.
D'où $AP^2 = 16 - 4 = 12$ et donc $AP = 2\sqrt{3}$ cm.

Méthode 2 : utilisation de la hauteur d'un triangle équilatéral.
D'après la question 2, OP = PM et comme OP = OM car ce sont deux rayons du même cercle alors OP = OM = PM. On en déduit que le triangle OPM est équilatéral. Le segment [PA] est donc une hauteur du triangle équilatéral OPM dont les côtés ont pour longueur 4 cm.

On en déduit que la mesure en cm de AP est $\frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Aire de NPMR

On a NM = 8 cm (diamètre du cercle) et AP = $2\sqrt{3}$ cm
On en déduit : NM x AP = 8 x $2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$.
Ainsi **l'aire du quadrilatère NPMR est égale à 16$\sqrt{3}$ cm^2**

Question 6
Programme de construction (écrit avec les instructions de programmation)

Créer un point.
Nommer le point 0.
Construire un cercle de centre O et de rayon de longueur 4 cm.
Construire un point sur le cercle de centre O.
Nommer ce point M.
Construire la droite passant par le point O et le point M.
Construire l'intersection de la droite (précédente) et du cercle.
Nommer le (deuxième) point N.
Construire le milieu du segment [OM].
Construire la perpendiculaire à (OM) passant par le point (milieu de [OM]).
Construire l'intersection de (cette dernière droite) et du cercle.
Nommer le point P (première intersection de la droite et du cercle ci-dessus).
Nommer le point R(deuxième intersection de la droite et du cercle ci-dessus).
Construire le polygone de 4 sommets défini par les points M, P, N et R.

QUESTIONS COMPLÉMENTAIRES

Question 7a
Réponses aux questions posées aux élèves

La fiche qui permet de réaliser la figure est la fiche 24. En effet :

- Si on suit les consignes de la fiche 23, le point C n'est pas obligatoirement le milieu du segment [OA].
- Si on suit les consignes de la fiche 25, la droite (ED) n'est pas obligatoirement perpendiculaire au segment [AB].

Question 7b
Connaissances mathématiques nécessaires à la réalisation de cette tâche

Ce sont :

- Les objets géométriques : cercle, centre, rayon, diamètre, milieu, droite, perpendiculaire, quadrilatère.
- Les notations des points, des segments et des polygones.
- La compréhension du codage d'un angle droit.
- L'utilisation d'instruments de mesure pour vérifier qu'un point est un milieu.

<u>Remarques :</u>
La construction des figures correspondant aux différents programmes n'est pas nécessaire pour répondre à la question. La principale compétence indispensable ici est une compétence de lecture d'informations : il suffit de repérer les différences entre les trois programmes (lignes 3 et 4) et de vérifier rapidement sur la figure l'existence ou non des propriétés citées (milieu et perpendiculaire).

Question 8a

Dans la mesure où on peut répondre aux questions sans construire la figure et où tous les programmes donnent le même rayon de cercle, ce rayon n'a pas d'importance a priori. Néanmoins, sa donnée et le fait que la figure soit annoncée « à taille réelle » autorise et incite implicitement les élèves à utiliser leurs instruments pour vérifier les propriétés métriques de la figure. Ainsi, après avoir contrôlé que le rayon est bien de 24 mm ils pourront vérifier, uniquement avec la règle graduée, que le point C est bien le milieu du segment [OA] puisque OC = 12 mm.
Si la figure avait été seulement « à l'échelle », le repérage du milieu aurait quand même été possible en comparant simplement AC et OC (avec règle graduée, compas ou bande de papier).
La présence des deux données ne modifie donc pas réellement la résolution du problème mais elle induit vraisemblablement chez les élèves des procédures de mesurage. Elle peut aussi les inciter à construire effectivement la figure.

Question 8b

La détermination du programme de construction correct nécessite la reconnaissance de la perpendiculaire. Sans le codage de l'angle droit sur la figure, les élèves auraient dû d'abord « voir » la présence possible d'un angle droit (suggéré cependant dans 2 programmes sur 3), puis contrôler son existence avec l'équerre (ou un gabarit). La présence du codage peut leur éviter de faire cette vérification et peut donc effectivement avoir une influence sur leurs procédures.

Question 9

Cette activité est une activité de fin de cycle 3. En effet, d'une part la « construction d'une figure… à partir d'un programme de construction » n'est pas au programme du cycle 2, et d'autre part la plupart des notions intervenant ici ne sont introduites qu'au cycle 3 :

- perpendiculaire, quadrilatère, cercle donné par son centre et son rayon, …
- nommer des points

Question 10
Construction de la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique

Question 10a
Vérification par l'enseignant de la validité des procédures mises en œuvre par ces élèves

Pour vérifier la validité des procédures mises en œuvre par ces élèves, l'enseignant peut utiliser des moyens de deux sortes :

- un premier moyen consiste à utiliser la fonction logicielle : « historique de la construction ». L'enseignant peut alors suivre pas à pas les étapes de la construction.
- un deuxième moyen consiste à utiliser l'aspect dynamique du logiciel. La déformation de la figure à partir d'un point libre permet de savoir si celle-ci correspond à un « dessin » ou bien à une « figure » dont les éléments sont reliés par des propriétés géométriques.

Question 10b
Types d'erreurs

Les types d'erreurs que l'on peut ainsi mettre en évidence :

- l'historique de la construction permet à l'enseignant d'observer les erreurs liées à l'ordre des étapes de construction. Par exemple la non détermination du milieu va induire un positionnement approximatif de ce point lors de l'étape de la construction de la perpendiculaire passant par le milieu. Toutefois les fonctions utilisées ne sont pas toujours parfaitement identifiables.

- l'utilisation de l'aspect dynamique de la figure permet d'identifier les propriétés de la figure qui sont conservées et celles qui ne le sont pas.
  Exemples :
    - si la droite passant par C n'est plus perpendiculaire à la droite (MN), cela signifie que l'élève a construit cette droite par approximation.
    - si le point C ne reste pas au milieu du segment, cela signifie que l'élève l'a placé sur [OA] à « main levée ».
    - si les points E et D ne sont plus sur la droite et/ou sur le cercle, l'élève n'a pas utilisé la fonction « point sur » ou « intersection de deux objets »
    - si le point O n'est pas sur [AB], l'élève a pu relier 2 points du cercle par une droite qui semble « passer sur » le centre (*pour tracer le diamètre [AC] avec un logiciel, il faut d'abord construire une droite passant par le centre, puis définir les points d'intersection avec le cercle,et enfin tracer le segment d'extrémités A et C*).

Remarques :

Si la construction d'un diamètre avec un logiciel peut sembler plus compliquée qu'avec les instruments papier-crayon, ce n'est pas le cas de la construction d'une « droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné » où il suffit d'utiliser l'icône adéquate.

D'autre part, dans le cadre de l'utilisation d'un logiciel, la présence des codes (perpendiculaire ou isométrie) sur la figure ne sont plus significatifs d'un codage par l'élève puisque ce codage peut être automatisé (dans certaines configurations du logiciel).

EXERCICE 8

Question 1a

Rappelons le théorème suivant : un nombre écrit sous forme de fraction irréductible $\frac{a}{b}$ (où a et b sont des entiers ; b différent de 0) est un nombre décimal si et seulement si l'entier b peut s'écrire : $2^n \times 5^p$ où n et p sont deux entiers.

La fraction $\frac{29}{55}$ est une fraction irréductible car 29 est un nombre entier premier.

Or 55 = 5 x 11 qui n'est pas de la forme $2^n \times 5^p$, donc **le nombre $\frac{29}{55}$ n'est pas un nombre décimal.**

La fraction $\frac{39}{75}$ est égale à $\frac{13}{25}$ après simplification par 3. La fraction $\frac{13}{25}$ est irréductible et $25 = 5^2$, qui peut s'écrire $2^0 \times 5^2$, donc **le nombre $\frac{39}{75}$ est un nombre décimal.**

Question1b

Comparaison des deux nombres $\frac{29}{55}$ et $\frac{39}{75}$

<u>Méthode 1 :</u> Par comparaison des fractions.
On réduit les fractions au même dénominateur pour pouvoir les comparer. Le dénominateur commun le plus petit est : $5^2 \times 11$ (c'est le plus petit multiple commun de 55 et de 25).

Ainsi, $\frac{29}{55} = \frac{29 \times 5}{55 \times 5} = \frac{145}{275}$ et $\frac{39}{75} = \frac{13}{25} = \frac{13 \times 11}{25 \times 11} = \frac{143}{275}$

Comme 145 > 143, on a : $\frac{145}{275} > \frac{143}{275}$ et donc : $\mathbf{\frac{29}{55} > \frac{39}{75}}$.

<u>Méthode 2 :</u> Par les divisions.
$\frac{29}{55}$ est le quotient de 29 par 55. En divisant 29 par 55, à l'aide d'une calculatrice, on obtient : $0,52 < \frac{29}{55} < 0,53$ (une calculatrice affiche : 0,527 27 27….) et $\frac{39}{75} = 0,52$.

On en déduit que $\mathbf{\frac{39}{75} < \frac{29}{55}}$.

Question 1c

Nombre décimal strictement compris entre $\frac{29}{55}$ et $\frac{39}{75}$

En utilisant une valeur approchée au centième prés par défaut, on a : $0,527 < \frac{29}{55}$.

Donc en choisissant un nombre décimal supérieur à 0,52 et inférieur à 0,527, on obtient nécessairement un décimal strictement compris entre ces deux nombres.
Exemples :
0,521 ; 0,522 ; 0,523 … mais aussi 0,5201 ; 0,5212 : 0,5216….

Question 1d

Fraction (non nombre décimal) strictement comprise entre $\frac{29}{55}$ et $\frac{39}{75}$

Pour trouver une fraction qui soit strictement comprise entre ces deux nombres, il faut utiliser leurs écritures fractionnaires avec le même dénominateur : $\frac{145}{275}$ et $\frac{143}{275}$.
Il suffit de prendre comme numérateur un entier compris entre 143 et 145 : seul 144 convient.
On a alors la fraction $\frac{144}{275}$ qui est irréductible, car $144 = 2^4 \times 3^2$ et $275 = 5^2 \times 11$ n'ont pas de diviseur commun autre que 1, ils sont premiers entre eux).
Comme 275 ou $5^2 \times 11$ n'est pas de la forme $2^n \times 5^p$, **on peut conclure que la fraction $\frac{144}{275}$ n'est pas un nombre décimal : elle répond ainsi à la question.**

Question 2a

Il s'agit de ranger les nombres 1,7 1,07 1,109 1,81 du plus petit au plus grand. Leur partie entière étant la même, ce sont successivement les chiffres des dixièmes, centièmes,… qui permettent de les comparer.
On a donc : **1,07 < 1,109 < 1,7 < 1,81** grâce à la comparaison des chiffres des dixièmes.

Question 2b

Deux décimaux strictement compris entre les nombres 1,1 et 1,11

<u>Méthode 1 :</u>
Les deux nombres ont le même chiffre des dixièmes (1) ; ils ne diffèrent que par le chiffre des centièmes (0 pour 1,1 et 1 pour 1,11).
Pour intercaler un décimal entre 1,1 et 1,11, celui-ci devra avoir 0 comme chiffre des centième ; ensuite :

- soit on choisit un chiffre des millièmes autre que 0 et on obtient une solution ; par exemple : 1,104 ou 1,109 …
- soit on choisit 0 comme chiffres des millièmes et on choisit un chiffre non nul pour l'un des rangs suivants de la partie décimale ; par exemple :
  1,1003 ; 1,10001 ; 1,1000008 …

<u>Méthode 2 :</u>

On peut écrire : $1{,}1 = 1 + \frac{100}{1000}$ et $1{,}11 = 1 + \frac{110}{1000}$

Les nombres $1 + \frac{n}{1000}$ avec $100 < n < 110$ sont des décimaux strictement compris entre 1,1 et 1,11.

<u>Remarque :</u>
Plus généralement, on peut écrire :
$1{,}1 = 1 + \frac{10^{k-1}}{10^k}$ *et* $1{,}11 = 1 + \frac{11 \times 10^{k-2}}{10^k}$ *(k entier supérieur ou égal à 3)*
Alors pour tout entier n tel que : $10^{k-1} < n < 11 \times 10^{k-2}$,
le nombre $1 + \frac{n}{10^k}$ *est un nombre décimal strictement compris entre 1,1 et 1,11.*

QUESTIONS COMPLÉMENTAIRES

Question 3a
Propriété (P) permettant d'affirmer que l'exercice a des solutions

(P) L'ensemble des nombres décimaux est un ensemble de nombres qui a la structure du continu. Contrairement à tout nombre entier qui a un suivant, un nombre décimal n'a pas de nombre suivant.
Pour des élèves de cycle 3, on formulerait cette propriété ainsi :
Entre deux nombres décimaux, on peut toujours trouver un autre nombre décimal.

Question 3b
Choix des valeurs numériques dans ce type d'exercice

<u>Remarque :</u>
Par la suite, quand nous parlons de nombre décimal, nous entendons un nombre décimal non entier.

Dans l'exercice proposé, dans le premier cas, un élève qui interprète 8,4 et 8,7 comme des écritures d'entiers (84 et 87) ou qui s'intéresse aux parties décimales 4 et 7 comme des entiers, peut fournir une réponse correcte en s'appuyant sur sa connaissance des entiers.
En revanche, dans le deuxième cas, par le même processus, ce même élève peut répondre qu'il n'existe pas de nombre compris entre 10,1 et 10,2, témoignant ainsi qu'il ne connaît pas la structure des nombres décimaux.
Si on ne propose que des exemples qui relèvent du premier cas, certains élèves peuvent répondre correctement, en pensant à des entiers, sans savoir ce qu'est un nombre décimal.
Dans les deux derniers cas, les deux nombres donnés sont un entier et un nombre formé du même entier auquel on a « ajouté 1 » dans la partie décimale, au rang des dixièmes, puis au rang des centièmes. Là encore, un élève qui ne connaît pas les nombres décimaux peut répondre qu'il n'y a pas de nombre s'il perçoit « un caractère consécutif » ou alors donner une réponse fausse s'il considère les écritures comme celles de deux entiers (25 et 251).

Dans ces deux cas, seule la connaissance de ce qu'est un nombre décimal permet de répondre correctement.

Question 3c
Origine vraisemblable des difficultés des élèves qui échouent

Leurs difficultés proviennent vraisemblablement de l'assimilation de l'écriture à virgule d'un décimal à celle d'un entier ou de deux entiers accolés.
Leurs raisonnements, dans certaines opérations, dans les comparaisons reposent sur les propriétés des nombres entiers. L'écriture à virgule d'un décimal, qui assure une continuité avec l'écriture décimale des entiers est ainsi une source d'erreurs pour certains élèves.
La fonctionnalité de l'écriture se développe, par extension des actions menées sur les écritures des entiers. La référence aux fractions décimales qui fonde l'écriture à virgule est alors absente.

Question 3d

Le travail de cette propriété (P) est nécessaire dans l'apprentissage des nombres décimaux car il permet de mettre en évidence en quoi les nombres décimaux se distinguent des nombres entiers, malgré la ressemblance des écritures décimales.

Question 4a
Justification des méthodes de comparaison des nombres décimaux.

Lorsque les parties entières sont différentes, c'est l'ordre des parties entières qui définit l'ordre des décimaux (document 2, premier exemple). Cela repose sur le fait qu'un nombre décimal est un nombre compris entre deux entiers consécutifs et donc est toujours supérieur à sa partie entière.
Lorsque les parties entières sont égales :

- <u>On peut mettre les deux nombres « au même format »</u> (document 1, deuxième méthode). On exprime alors de manière implicite les parties décimales de chacun des nombres sous la forme d'une fraction décimale de même dénominateur (correspondant à l'ordre de la plus petite décimale présente, ici les centièmes). On compare alors implicitement les numérateurs de ces deux fractions décimales, ici 25 et 30, ce qui revient, dans l'exemple donné, à comparer les nombres de centièmes des deux nombres décimaux.
- <u>On peut comparer successivement les chiffres qui composent les parties décimales des deux nombres</u> (document 1, première méthode et document 2, exemples 2 et 3).
  Dans ce cas on utilise de manière implicite l'écriture canonique décimale des nombres décimaux : $7{,}25 = 7 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$ $\quad 7{,}3 = 7 + \frac{3}{10}$
  ou $22{,}471 = 22 + \frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{1}{1000}$ $\quad 22{,}483 = 22 + \frac{4}{10} + \frac{8}{100} + \frac{3}{1000}$
  On passe en revue successivement les chiffres de la partie décimale et lorsqu'on a deux chiffres différents, on les compare. Le résultat de leur comparaison permet

de comparer les nombres décimaux concernés. Cela repose sur le fait que dans la partie décimale, le chiffre de rang $n+1$ représente $\frac{1}{10}$ de l'unité de rang n (représentée par le chiffre placé immédiatement à sa gauche).
Lorsque, dans l'écriture d'un nombre, on trouve au moins 1 unité de plus à un certain rang, on peut décider que c'est le plus grand nombre puisque, dans le nombre qui a le chiffre le plus petit à ce rang, les chiffres présents aux rangs suivants représentent une valeur globale qui est inférieure à 1 unité.

Question 4 b
Pertinence des exemples proposés dans les documents 1 et 2

Dans le document 1, l'exemple donné correspond au cas où les parties entières des nombres à comparer sont égales. En faisant ce choix, le document ne fournit pas la globalité de la méthode de comparaison présentant tous les cas de figures.

Dans la document 2, toutes les paires de nombres décimaux à comparer ont le même format, c'est à dire ont le même nombre de décimales. Cela ne semble pas judicieux puisque dans ces cas, la prise en compte de l'ensemble des chiffres, sans s'occuper de la virgule, permet d'effectuer la comparaison, comme s'il s'agissait de nombres entiers.
De plus, comme les nombres ont le même nombre de chiffres, cela ne remet pas en cause le critère de longueur de l'écriture qui permet de comparer deux entiers mais qui ne fonctionne pas pour comparer deux décimaux.

Pour motiver cette nouvelle technique de comparaison, il est préférable de proposer des nombres qui n'ont pas le même nombre de chiffres et pour lesquels le plus grand n'est pas celui qui a le plus de chiffres. Par exemple, pour le cas de deux nombres de parties entières différentes,13,25 et 16,5. Ici, l'examen des parties entières permet de conclure que 16,5 est le plus grand nombre, bien qu'il ait moins de chiffres que 13,25.
Pour les deux autres cas, on proposera, par exemple 15,6 et 15,36 ; 22,471 et 22,48. Là encore, la comparaison des chiffres des dixièmes dans le premier cas et des centièmes dans le second permet de reconnaître le plus grand nombre qui n'est pas celui qui a le plus de chiffres (contrairement aux entiers).

Question 4c

Il n'est peut-être pas opportun de proposer aux élèves la 2$^{\text{ème}}$ méthode du document 1, qui repose sur une conversion implicite et qui peut assez vite se transformer en automatisme pouvant faire perdre de vue la spécificité d'un nombre décimal (en fait, cette méthode permet de se « ramener » à des entiers que l'on compare).
En revanche, la première méthode du document 1 ou la méthode du document 2, avec des exemples bien choisis, offre la garantie de mobiliser le sens des chiffres composant la partie décimale, à condition que le raisonnement sous-jacent ait été construit, à partir du recours aux fractions décimales.

EXERCICE 9

Question 1
Résolution du problème 1 par une méthode algébrique

Méthode 1 :
Soient N le nombre de caisses rangées et t la durée en heures mise par le magasinier pour les ranger à 50 caisses par heure ; alors on obtient $N = 50 \times t$.

Si le magasinier range 60 caisses à l'heure, il met 15 minutes de moins (ou $\frac{1}{4}$ h car $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$), donc on obtient $N = 60 \times (t - \frac{15}{60}) = 60t - 15$.

On a alors l'équation : $50t = 60t - 15$; d'où $10t = 15$; $t = 1{,}5$.
Il met donc 1,5 h soit 1 h 30 min pour ranger les caisses.
Il a donc débuté à 10 heures.

Méthode 2 :
Soient H l'heure (en écriture décimale) à laquelle le magasinier a commencé et N le nombre de caisses rangées.
S'il range 50 caisses à l'heure, il travaille pendant une durée de $(11{,}5 - H)$ h.
Mais s'il range 60 caisses à l'heure, il travaille pendant une durée plus courte, égale à $(11{,}25 - H)$ h car 15 min = $\frac{1}{4}$ h = $\frac{25}{100}$ h.

Exprimons le nombre N de deux façons :

$N = 50\,(11{,}5 - H)$ et $N = 60\,(11{,}25 - H)$

On obtient l'équation $50\,(11{,}5 - H) = 60\,(11{,}25 - H)$ d'où $H = 10$.

Méthode 3 :
Soient N le nombre de caisses rangées, t_1 la durée en heures mise par le magasinier pour les ranger à 50 caisses par heure, t_2 la durée en heures mise par le magasinier pour les ranger à 60 caisses par heure.

On peut donc écrire : $t_1 = \frac{N}{50}$ $t_2 = \frac{N}{60}$.

Et on sait que t_2 est inférieur de 15 minutes à t_1.

Or 15 min = $\frac{15}{60}$ h d'où l'équation :

$t_1 - t_2 = \frac{15}{60}$ $\frac{N}{50} - \frac{N}{60} = \frac{15}{60}$ $6N - 5N = 5 \times 15$.

Donc $N = 75$ On en déduit que $t_1 = \frac{75}{50} = 1{,}5$.

Quand le magasinier finit à 11 h 30, il a travaillé 1,5 h ou 1 h 30, il a donc commencé son travail à 10 h.

Il a donc commencé à 10 h.

Question 2
Utilisation du tableau de l'aide 1

Durée	Alain : nombre de caisses rangées.	Bernard : nombre de caisses rangées
0 min	**0**	**0**
15 min		15
30 min	25	30
45 min		45
1 h	**50**	**60**
1 h 15 min		75
1 h 30 min	75	90
1 h 45 min		105
2 h	100	120
2 h 15 min		135
2 h 30 min	125	150
2 h 45 min		165
3 h	150	180

Chacune des deux colonnes (Alain ; Bernard) est remplie en utilisant une relation de proportionnalité entre la durée mise pour ranger les caisses et le nombre de caisses rangées : par exemple Alain range 25 caisses en 30 min puisqu'il en range 50 en 60 min. Cependant les cases correspondant pour Alain à 15 min et aux multiples de 15 min ne représentent pas un nombre entier de caisses et donc n'ont pas à être remplies.
Les données de l'énoncé sont : un même nombre de caisses pour Alain et Bernard et le fait qu'Alain finisse 15 minutes avant Bernard. Cette situation ne se produit que pour un nombre de caisses égal à 75 et pour une durée de travail de 1h 30 pour Alain et de 1h 15 min pour Bernard.
Le travail a donc commencé à 10 heures pour les deux travailleurs.

<u>*Remarque :*</u>
Il n'est pas nécessaire de remplir toutes les cases du tableau car il s'agit de repérer un même nombre de caisses que l'on retrouve dans deux colonne) du tableau(Alain et Bernard) avec une ligne de différence (dans la ligne n pour Bernard et dans la ligne n + 1 pour Alain).

QUESTIONS COMPLÉMENTAIRES

Question 3 (concernant l'aide 1)

Question 3a
Deux procédures d'un élève de cycle 3…

- Utilisation du coefficient de proportionnalité :

Durée	Mesure de la durée en minutes	Bernard : nombre de caisses rangées
0 min	*0*	**0**
15 min	*15*	15
30 min	*30*	30
45 min	*45*	45
1 h	*60*	**60**
1 h 15 min	*75*	75
1 h 30 min	*90*	90
1 h 45 min	*105*	105
2 h	*120*	120

Il range 60 caisses en une heure, c'est à dire 60 minutes, donc il range une caisse par minute. Le coefficient de proportionnalité qui permet de passer de la durée au nombre de caisses rangées est donc 1.

- Utilisation des propriétés de linéarité :

Durée	Bernard : nombre de caisses rangées
0 min	**0**
15 min	
30 min	30
45 min	
1 h	**60**
1 h 15 min	
1 h 30 min	90
1 h 45 min	
2 h	120

S'il range 60 caisses en une heure, soit 60 minutes, en moitié moins de temps (30 minutes), il range moitié moins de caisses (30).
S'il range 60 caisses en 60 minutes, il range une fois et demi de plus de caisse (90 caisses) en une fois et demi plus de temps, soit $60 + \frac{60}{2} = 90$ minutes.
S'il range 60 caisses en 60 minutes, il range deux fois plus de caisses en deux fois plus de temps.

Remarque 1 :
Nous fait ici le choix de donner une justification mathématique à la portée d'un élève de cycle 3, mais on pourrait aussi justifier la procédure proposée ainsi :

Appelons n la fonction qui à une durée de travail d fait correspondre le nombre de caisses n(d) rangées par Bernard. n est une fonction linéaire.
Il s'agit de trouver l'image n(1 h 30 min) ;
On a donc :

$n(1\text{ h }30\text{ min}) = n(1\text{ h} + 30\text{ min})$

$n(1\text{ h} + 30\text{ min}) = n(1\text{ h}) + n(30\text{ min})$ *propriété additive de linéarité*

$n(1\text{ h}) = 60$ *et* $n(30\text{ min}) = n(\frac{1\text{ h}}{2})$

$n(\frac{1\text{ h}}{2}) = \frac{n(1\text{ h})}{2}$ *propriété multiplicative de linéarité*

d'où $n(30\text{ min}) = \frac{60}{2} = 30$

et $n(1\text{ h }30\text{ min}) = 60 + 30 = 90$

soit 90 caisses en une heure et trente minutes.

<u>Remarque 2 :</u>
On pouvait aussi utiliser la propriété multiplicative de linéarité seule avec la relation 1 h 30 min = 3 x 30 min, donc n(1 h 30 min) = 3 x n(30 min) = 3 x 30.

Question 3b
En quoi le tableau peut-il être une aide ?

- Le tableau sert à aider l'élève à résoudre un problème complexe, sachant qu'un élève de cycle 3 n'a pas les outils algébriques pour résoudre un tel problème. Il lui propose un cadre qui l'invite à réfléchir et à faire des essais raisonnés.
- Un élève qui a pris en compte la contrainte de 15 minutes d'écart entre la fin du travail d'Alain et la fin du travail de Bernard devrait trouver la solution à la question 1 (ils ont rangé 75 caisses), puis en déduire la réponse à la question 2 (si Alain a mis 1 h 30 et qu'il a fini à 11 h 30, c'est qu'il a débuté son travail à 10 h).
- Ce tableau est donc une réelle aide car il ne donne pas à l'élève la solution (l'élève est toujours face à une recherche), mais il lui propose une piste à explorer (des essais à imaginer).

Question 3c
Hypothèse sur la nature de l'erreur

On trouve dans le tableau les "coïncidences" (i.e. un même nombre de caisses rangées par Alain et par Bernard) pour 75 caisses et 150 caisses, mais si on le poursuivait, on pourrait trouver des coïncidences pour tous les multiples de 75. Cela correspond certainement au raisonnement de cet élève qui trouve donc qu'il y a plusieurs réponses possibles.
Cependant,
- quand Alain et Bernard ont rangé 75 caisses, l'écart de temps est de 15 min ;

- quand Alain et Bernard ont rangé 150 caisses, l'écart de temps est de 30 min ;
- quand Alain et Bernard ont rangé 225 caisses, l'écart de temps est de 45 min ;
- quand Alain et Bernard ont rangé 300 caisses, l'écart de temps est de 1h.

Une seule réponse convient car de l'énoncé, on déduit que les deux travailleurs ont terminé avec 15 minutes d'écart.

Hypothèse sur l'erreur :
L'élève n'a pris en charge que la contrainte du même nombre de caisses ; il n'a pas pris en compte la contrainte horaire énoncée dans le problème.

Question 4 (concernant l'aide 2)

	Vrai	***Faux***	***Je ne sais pas répondre***
Au bout de 2 h, Alain aura rangé 100 caisses.	**X**		
Au bout de 3 h, Alain aura rangé le nombre de caisses qu'il range en 1 h multiplié par 3.	**X**		
On ne sait pas exactement combien Alain aura rangé de caisses au bout de 15 min.	**X**	**X**	**X**
Au bout de 45 minutes, Alain aura rangé 37 caisses.	**X**	**X**	**X**
Au bout de 2 h, Bernard aura rangé 120 caisses (60×2).	**X**		
Au bout de 15 min, Bernard aura rangé 10 caisses.		**X**	
Au bout de 1 h 45 min, Bernard aura rangé le nombre de caisses qu'il range en 1 h auquel on ajoute le nombre de caisses qu'il range en 45 min.	**X**		
Au bout de 1 h 45 min, Bernard aura rangé 100 caisses.		**X**	

Remarques :
Pour l'affirmation : « On ne sait pas exactement combien Alain aura rangé de caisses au bout de 15 min. », les trois réponses sont acceptables selon la compréhension des élèves et la confrontation avec la "réalité" (problème de l'existence de la demi caisse).
Le problème est du même ordre pour l'affirmation : « Au bout de 45 minutes, Alain aura rangé 37 caisses. » ; un élève peut répondre "vrai" en considérant qu'à ce moment seules 37 caisses sont effectivement rangées ; un élève peut répondre "faux" en tenant compte de la demi-caisse (même si elle n'a pas de réalité dans cette situation), et bien sûr un élève peut hésiter et ne pas se prononcer.

Question 5 (concernant l'aide 3)

Cette aide 3 est un nouveau texte de problème dont la particularité est de donner l'heure de début du travail (10 h) de Bernard et Alain.
La représentation du problème suit l'écoulement habituel du temps, contrairement au texte du problème 2 donné initialement.
On peut faire le rapprochement avec "état initial ; transformation ; état final" des problèmes additifs : le problème 2 donne l'état final et la transformation, l'aide 3 donne l'état initial et la transformation.

La tâche de l'élève dans le problème 2 est de calculer l'état initial.
La tâche de l'élève dans cette aide 3 est, dans la première question, de calculer le résultat de la transformation (le nombre de caisses rangées) connaissant aussi l'état final et, dans la deuxième question, de faire un calcul de proportionnalité (ici la connaissance des état initial et final n'intervient pas).
De plus l'élève a peu de liberté de recherche, il est contraint par ce texte à une tâche de reconnaissance du modèle à appliquer, et non à une recherche personnelle par des essais raisonnés.

Question 6 (concernant les trois aides)

L'objectif du maître est de travailler la résolution de problèmes relevant de la proportionnalité.
L'aide 3 demande à l'élève d'utiliser implicitement (ou explicitement pour certains élèves) des propriétés relevant de la proportionnalité pour répondre aux deux questions posées (nombre de caisses en 30 min, puis nombre de caisses en 1 h 15 min amenant à la décomposition 1 h + 15 min).
L'aide 2 fait apparaître explicitement les deux propriétés de linéarité, par exemple « *Au bout de 3 h, Alain aura rangé le nombre de caisses qu'il range en 1 h multiplié par 3.* » pour la propriété de linéarité multiplicative et « *Au bout de 1 h 45 min, Bernard aura rangé le nombre de caisses qu'il range en 1 h auquel on ajoute le nombre de caisses qu'il range en 45 min. »* pour la propriété de linéarité additive, ce qui, après exploitation lors d'une mise en commun, pourra faciliter beaucoup leur institutionnalisation.
Cependant c'est l'aide 1 qui nous semble la plus pertinente ; elle met en jeu de nombreux calculs de proportionnalité avec une variété de procédures (cf. par exemple question 3 a), ce qui permettra au maître à la fois de consolider la variété des calculs possibles, à la fois de souligner la simplicité de ces problèmes de proportionnalité, et à la fois d'institutionnaliser l'utilisation des deux propriétés de linéarité s'il le souhaite.

Question 7 (sur une mise en œuvre)

Le maître distribue à chaque élève une photocopie sur laquelle est écrit l'énoncé du problème. Celui-ci est aussi écrit au tableau.
Le fait que l'énoncé figure au tableau est utile pour les phases collectives, mais quand les élèves travaillent individuellement ou en groupes de 2 ou 3, ils ont besoin d'avoir chacun un énoncé.

Une première phase est celle d'appropriation du texte du problème 2 (10 minutes) :
- lecture silencieuse et compréhension individuelle.
- reprise collective qui permet au maître de s'assurer d'une bonne compréhension de l'énoncé, il questionne les élèves pour savoir s'ils ont compris, il explique éventuellement ce que signifie « 50 caisses à l'heure ».

Cette phase doit permettre à chaque élève de se faire, préalablement, une opinion sur le problème, de noter peut-être, selon les habitudes de la classe, ses premières idées et ainsi de ne pas suivre aveuglément un éventuel leader.

La reprise collective permet de démarrer le problème avec un langage commun dépourvu d'ambiguïtés.

Le maître met en place des ateliers différenciés de résolution du problème. Il prévoit des groupes selon les compétences de ses élèves. Aux élèves plus « forts », il fournira **éventuellement** l'aide 1, et seulement dans le cas où il perçoit après un minimum de 5 minutes de recherches un réel blocage. Aux élèves plus faibles, il fournira d'abord l'aide 1, puis l'aide 2 pour ceux qui ne remplissent pas correctement le tableau de l'aide 1 ou qui semblent n'avoir pas perçu la proportionnalité entre durée et nombre de caisses. De plus la colonne “Je ne sais pas répondre” de cette aide 2 va permettre au maître de repérer les élèves qui n'ont pas bien compris la situation, il peut alors tenter de les faire travailler en leur proposant avec l'aide 3 une tâche différente, mais qui permettra aux élèves de comprendre la situation.

Une deuxième phase est une phase de recherche (20 min) qu'il semble préférable de mener par groupes de trois élèves. Les élèves doivent produire une affiche qui explique leur démarche de résolution (écrit de communication). Les aides sont fournies par le maître lors de cette phase lorsque le besoin s'en ressent.

Une troisième phase de mise en commun consisterait en l'exposition des affiches en sollicitant les commentaires des élèves qui ont tous travaillé sur le même problème.

- une première validation des résultats proposés peut être menée collectivement.
- une nouvelle phase de recherche individuelle pourrait être proposée afin que chaque élève rédige sa solution finale.

Une synthèse du problème global est menée par le maître qui peut, en s'appuyant sur les affiches, faire émerger les procédures qui permettent de résoudre un problème de proportionnalité.

Question 8 (sur une procédure d'élève)

La réponse 10 h “précise” risque effectivement d'être trouvée rapidement si des élèves pensent à utiliser une procédure par essais et ajustements, en testant seulement des heures entières. Cela signifie qu'ils ont parfaitement compris le problème et qu'ils n'ont pas besoin de l'aide 3, ni des deux autres d'ailleurs.
Mais ce problème complexe a perdu son potentiel de nombreux calculs et le maître peut en être déçu, comme il peut être déçu d'une moins grande mise en valeur des procédures relatives à la proportionnalité par rapport à ses souhaits lors de la préparation de la séance et des aides.
Pour rendre moins efficace cette procédure, il faut modifier les données de la situation en faisant en sorte que l'heure de début du travail ne corresponde pas à un nombre entier d'heures (par exemple en choisissant 10 h 15 min, ce qui implique de donner comme horaires de fin du travail ceux du problème augmentées de 15 minutes soit 11 h 45 et 11 h 30). Dans ce cadre, le problème posé devrait résister plus longtemps à de tels essais, et même les décourager.
Cette résolution doit être cependant considérée par le maître comme correcte et de plus ce type de procédure est à encourager en général : c'est même la procédure mathématique la plus efficace à l'école.

EXERCICE 10

Question 1

Voici les 8 carrés magiques 3 x 3 qui existent.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

1

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2

2	7	6
9	5	1
4	3	8

3

4	3	8
9	5	1
2	7	6

4

2	9	4
7	5	3
6	1	8

5

4	9	2
3	5	7
8	1	6

6

6	7	2
1	5	9
8	3	4

7

8	3	4
1	5	9
6	7	2

8

Donc votre carré magique doit être un de ceux-ci.

Question 2
Justification de la valeur 15 pour la somme des nombres de chaque ligne et de chaque colonne

Les seuls nombres qui composent ce carré sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,et 9. Sachant qu'ils ne sont écrits qu'une seule fois, si on fait la somme des nombres des trois lignes ou des trois colonnes, on doit retrouver la somme de ces neuf nombres.
Or : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$.
On en déduit que la somme des nombres de chaque ligne ou de chaque colonne est de 15 (45 : 3), puisque cette somme est la même pour chaque ligne et chaque colonne.

Question 3
Valeur de la case centrale

La somme S que l'énoncé propose de calculer est :

$$\underbrace{(d + e + f)}_{\text{ligne centrale}} + \underbrace{(b + e + h)}_{\text{colonne centrale}} + \underbrace{(a + e + i) + (g + e + c)}_{\text{diagonales}}$$

$S = 4 \times 15$
puisque la somme de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale vaut 15.
D'autre part, en réorganisant les termes de la somme S, on a :

$S = 3e + (a + b + c + d + e + f + g + h + i)$

Or $a + b + c + d + e + f + g + h + i = 45$ d'où $S = 45 + 3^e$

On peut donc écrire : $S = 4 \times 15 = 45 + 3e$

soit $3e = 15$ donc $\boldsymbol{e = 5}$.

Question 4

En prenant les nombres d'une diagonale, on peut donc écrire :

$a + e + i = 5 + a + i = 15$

On en déduit : $a + i = 10$.

De même on trouve : $c + g = 10$; $b + h = 10$; $d + f = 10$.

Question 5

Vos réponses doivent faire partie des huit carrés magiques trouvés à la question 1.

Question 6

Si le carré 1 est le carré initial on obtient :

- le carré 2 par une symétrie axiale d'axe la colonne centrale ;
- le carré 3 par une symétrie axiale d'axe une des diagonales ;
- le carré 4 par une rotation de centre la case centrale et de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre ;
- le carré 5 par une rotation de centre la case centrale et d'angle 180° ;
- le carré 6 par une symétrie axiale d'axe la ligne centrale ;
- le carré 7 par une rotation de centre la case centrale et de 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre,
- le carré 8 par une symétrie axiale d'axe l'autre des diagonales.

QUESTIONS COMPLÉMENTAIRES

Question 7
Pertinence de l'utilisation de la calculatrice selon l'objectif prioritaire de l'enseignant

L'utilisation ou non de la calculatrice est à envisager en fonction des objectifs prioritaires de l'enseignant ; elle dépend également des compétences individuelles des élèves.

<u>Sur un plan collectif :</u>

- Si l'objectif prioritaire de l'enseignant est de proposer à ses élèves un problème de recherche, il est pertinent de mettre la calculatrice à disposition des élèves afin d'éviter les obstacles liés au calcul et de focaliser le travail des élèves sur la recherche.
- Si l'objectif principal de l'enseignant est de renforcer chez ses élèves différentes significations en lien avec la soustraction, la calculatrice (avec la touche -) peut

être un outil judicieux pour travailler l'équivalence entre le calcul d'une différence et la recherche d'un complément.
- Enfin, si l'objectif prioritaire de cette séquence est, pour le maître qui la conduit, un entraînement au calcul l'utilisation de la calculatrice n'est pas pertinente.

Sur le plan individuel :
- Un élève qui a une mauvaise connaissance du répertoire usuel additif ne peut réellement s'engager dans cette recherche puisqu'il n'est pas en mesure de distinguer un carré magique d'un banal tableau de nombres. L'utilisation d'une calculatrice dans cette séquence permettrait à cet élève de s'engager dans la recherche.
- Un élève qui a des difficultés dans les calculs additifs et soustractifs (par exemple parce qu'il n'a pas l'habitude du calcul réfléchi et parce qu'il pose systématiquement toutes les opérations ou qu'il a une mauvaise connaissance du répertoire soustractif et/ou du répertoire des compléments) sera très lent dans la construction de chaque tableau et dans les vérifications.
  L'utilisation d'une calculatrice dans cette séquence permettrait à cet élève de se concentrer sur les contraintes du problème et d'engager des recherches efficaces sans être handicapé par ses difficultés en calcul. La résolution du problème reste à la charge de l'élève, l'outil calculatrice ne prenant en charge que l'exécution des calculs et non leur organisation.
- Dans cette optique, on pourrait penser que tous les élèves peuvent tirer bénéfice de l'utilisation d'un calculatrice... il n'en est rien : pour celui qui calcule mentalement avec aisance, la calculatrice ralentit, elle peut être source d'erreurs (liées à la saisie) et peut faire perdre le fil de la démarche engagée par la rupture visuelle nécessaire.

Question 8a
Intérêt de la phase collective de la recherche A

Le maître veut faire en sorte que tous les élèves disposent de deux solutions, afin de relancer l'activité et d'orienter celle-ci vers une recherche exhaustive de toutes les solutions.
Pour les élèves qui n'avaient pas su résoudre le problème, la phase collective apporte des exemples de bonnes réponses et des explications à leur sujet (la place du nombre cinq dans les tableaux et l'utilisation des décompositions additives de dix).
Pour les élèves qui ont su résoudre le problème, la phase collective permet, par la juxtaposition des deux carrés magiques, de prendre conscience de la pluralité des solutions.

Question 8b
Nouvelle modalité pour la phase collective de la recherche A

On peut s'interroger sur le choix de ne proposer dans cette phase que des « bonnes solutions ». Il peut être opportun à ce moment du travail, de présenter aux élèves des carrés magiques et d'autres non magiques, pour les faire étudier et valider par la classe : il s'agit alors de faire formuler oralement aux élèves les raisons pour

lesquelles on les accepte ou on les écarte. Ce travail peut stimuler l'activité de recherche des élèves.
La phase collective décrite dans la fiche de préparation peut engager certains élèves, lors de la phase individuelle qui suit, dans une stratégie de recherche s'appuyant alors uniquement sur les relations spatiales entre les nombres (chercher, par exemple, à obtenir une nouvelle solution par permutation circulaire opérant sur une des solutions données par le maître). Dans ce cas, le problème reste consistant mais ne porte plus sur l'addition.

Question 9
Pour faciliter la tâche des élèves dans cette recherche C

La première étape de la résolution de la recherche C est nécessairement la détermination du nombre 34 qui est la somme des termes de chaque ligne, colonne et diagonale du carré magique.
Ce calcul, du fait qu'aucune rangée n'est complète, ne peut être exécuté directement et nécessite une véritable recherche comportant plusieurs étapes. De plus, les élèves peuvent ne pas avoir conscience du caractère déterminant de ce calcul.
La situation va probablement inciter les élèves à essayer des nombres dans les cases, puis à ajuster pour tenter de rendre égales les sommes. Etant donné le nombre de termes inconnus, cette stratégie a peu de chance d'aboutir.
Une fois le nombre 34 connu, la recherche peut rester très lourde du fait de la taille des nombres et de la quantité d'opérations à effectuer.

Des aides peuvent être données à plusieurs niveaux :
- Préciser qu'il faut d'abord chercher la valeur de la somme des termes de chaque rangée.
- Faciliter le calcul de cette somme en donnant une rangée complète dans le carré.
- Dire que la somme de chaque rangée vaut 34.
- Autoriser l'usage de la calculatrice pour contourner les difficultés inhérentes au calcul.